



Governo do Estado de São Paulo  
Secretaria de Estado da Educação



Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

**PROJETO**

**TEIA DO SABER - MATEMÁTICA**

Diretoria de Ensino - Região de Andradina

# Resolução de Problemas

Sínteses dos autores:

- **George Polya**
- **Luiz Roberto Dante**

# Um pouco sobre George Polya...

## Pai da Resolução de Problemas...

- ✓ Nascido em 1887, Budapest-Hungria. Faleceu em 1985.
- ✓ Doutorado (Ph.D.) na Universidade de Budapest em 1912, entre outros títulos.
- ✓ Em 1963 recebeu da "Mathematical Association of América" um prêmio pelos destacados serviços prestados à Matemática.
  - ✓ Autor de vários livros
- ✓ Publicou centenas de artigos em revistas científicas e dedicou grande parte de sua vida à "arte de resolver problemas".
- ✓ Suas pesquisas foram realizadas nas áreas de Probabilidade, Variáveis Complexas, física Matemática, Teoria dos números, e foi o pioneiro no tratamento moderno da **Heurística**.

# Heurística...

é o estudo dos caminhos e meios da descoberta e invenção; estuda, especialmente na resolução de problemas, essas etapas que se apresentam naturalmente, com frequência e que têm alguma probabilidade de nos conduzir à solução. As idéias mais simples da Heurística são as mais importantes para o professor, que poderia, aliás, extraí-las de sua própria experiência, pois que elas decorrem do simples bom senso. (Mas bom senso é tão pouco comum, como observou Descartes.)

# O ensino por meio de problemas

*George Polya*

(Tópicos do artigo da Revista do Professor de  
Matemática nº 7 da Sociedade Brasileira de  
Matemática)

# O ensino por meio de problemas

- ✓ Ensinar é uma ação complexa que depende em grande parte das personalidades envolvidas e das condições locais.
  - ✓ Não existe, hoje, uma ciência do ensino propriamente dita e não haverá nenhuma em um futuro previsível.

# O ensino por meio de problemas

- ✓ Em particular, não existe método de ensino que seja indiscutivelmente o melhor, como não existe a melhor interpretação de uma sonata de Beethoven.
- ✓ Há tantos bons ensinamentos quanto bons professores: o ensino é mais uma arte do que uma ciência.

# ... Sobre os objetivos do ensino

- ✓ Minha convicção pessoal é que a principal tarefa do ensino da Matemática, em nível secundário, é a de ensinar os jovens a **PENSAR**.

## ... A aprendizagem ativa

- ✓ Para aprender eficazmente, o aluno deve descobrir por si só, uma parte tão grande da matéria ensinada quanto possível, dadas as circunstâncias.
- ✓ A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa...

## ... A aprendizagem ativa

✓ Já que o aluno deve aprender não receptivamente mas por seu próprio esforço, comecemos no lugar onde o esforço é menor e o resultado mais compreensível do ponto de vista do aluno: ele deve se familiarizar inicialmente com o concreto, posteriormente com o abstrato. Inicialmente com a variedade de experiência e posteriormente com a unificação dos conceitos, etc.

## ... A aprendizagem ativa

- ✓ Isto conduz à resolução de problemas matemáticos, que é, na minha opinião, a atividade matemática mais próxima do centro do pensamento do dia a dia.

## ... A aprendizagem ativa

✓ A resolução de problemas tem sido a espinha dorsal do ensino de Matemática desde a época do papyrus Rhind. A obra de Euclides pode ser considerada como uma proeza pedagógica: dissecar o grande tema da Geometria em problemas manejáveis.

## ... A aprendizagem ativa

- ✓ A resolução de problemas ainda é a espinha dorsal do ensino a nível secundário e me constrange que algo tão evidente precise ser ressaltado.

# Resolução de Problemas

- **JOGOS E RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS**
  - *BORIN, Julia*
- **A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA MATEMÁTICA ESCOLAR**
  - *KRULIK, Stephen e Reys, Robert E.*
    - *São Paulo: Atual, 2003*

# Resolução de Problemas

- **Motivações:**

- Resolver problemas é a realização específica da inteligência e a inteligência é o dom específico do homem. Resolver problemas, então, é da própria natureza humana.
- A matemática é o único assunto na escola secundária em que o professor pode propor e os estudantes podem resolver problemas em um nível científico.

- **Interpretações:**

- As três interpretações mais comuns de resolução de problemas são:
  - *Como uma meta*: independe de problemas específicos, de procedimentos ou de métodos e do conteúdo matemático;
  - *Como um processo*: são importantes os métodos, os procedimentos, as estratégias e as heurísticas que os alunos usam;
  - *Como uma habilidade básica*: para fins de avaliação e identificação das habilidades que um indivíduo precisa para atuar em nossa sociedade.

- **Escolha:**

- A escolha, por parte do professor, de cada problema a ser proposto aos seus alunos deve obedecer a uma precisão quase cirúrgica dentro de um planejamento muito bem feito, todavia flexível o suficiente para possíveis mudanças de direção.
  - Os alunos entram em classes de matemática com diferentes níveis de proficiência em resolução de problemas. Estes níveis são esboçados a seguir:

- *Primeiro nível* : os alunos têm pouca ou nenhuma compreensão do que é resolver um problema, isto é os alunos não sabem por onde começar;
- *Segundo nível* : sabem o que significa resolver mas ainda se sentem inseguros. São dependentes;
- *Terceiro nível* : passam a se sentir à vontade na resolução dos problemas, entendendo-os e até apreciando-os;
- *Quarto nível* : têm interesse em apresentar soluções elegantes e eficientes, bem como apresentam também soluções alternativas.

- **Categorias:**

- *Exercícios de reconhecimento*: pedem que se reconheça um fato específico, uma definição ou o enunciado de um teorema;
  - *Exercícios algorítmicos*: podem ser resolvidos com um procedimento passo a passo;
  - *Problemas de aplicação*: exigem a formulação simbólica do problema e depois a manipulação dos símbolos, mediante algoritmos diversos;

- *Problemas de pesquisa aberta*: o enunciado não sugere uma estratégia. Normalmente tais problemas expressam-se por: *Prove que...*, *Encontre todos...*, ou *Para quais...é....*  
Um desastre para certos métodos de ensino é não dar aos alunos a oportunidade de resolver problemas de pesquisa aberta que dependam de conceitos mais elementares.
- *Situações-problema*: neste subconjunto estão incluídas situações nas quais uma das etapas decisivas é identificar o problema inerente à situação.

- **Princípios:**

- Princípios para um ensino eficaz de matemática, tais como uma interação de alto nível entre professor e aluno, clareza de explicações, muito tempo para exercícios e revisões feitas com regularidade são importantes em qualquer sala de aula e não serão discutidos aqui. Os princípios aqui elencados se baseiam num projeto da Universidade de Iowa voltado para o ensino de álgebra, todavia, pela sua generalidade podem ser adotados para outros conteúdos:

- Basear a aprendizagem de coisas novas no conhecimento e na compreensão que os alunos já têm;
- Levar gradualmente da verbalização para o simbolismo algébrico;
- Ensinar os tópicos a partir da perspectiva de como eles podem ser aplicados;
- Ensinar e modelar processos heurísticos específicos como auxiliares para a compreensão e resolução de problemas;
- Comprometer os alunos com a resolução de problemas.

- **Algumas heurísticas importantes na resolução de problemas:**

### Analizando e entendendo um problema:

- Desenhe um diagrama;
- Examine casos particulares;
- Tente simplificar

### Delineando e planejando uma solução:

- Planeje as soluções hierarquicamente;
- Explique o que está fazendo e o que fará com o resultado;

## Explorando soluções para problemas difíceis:

- Considere uma variedade de problemas equivalentes;
- Considere ligeiras modificações no problema original;
- Considere modificações amplas no problema original.

## Verificando uma solução:

- Use estes testes específicos: A solução usa todos os dados? A solução é adequada a estimativas razoáveis? Resiste a testes de simetria , análise de dimensões, escala?
- Use estes testes gerais: Pode ser obtida de forma diferente? Pode se comprovada em casos particulares? Reduzida a resultados conhecidos? Pode gerar alguma coisa que você conhece?

Há tantas estratégias que podem ser usadas num problema que, sem um meio razoável de selecionar uma abordagem apropriada a um problema, o tempo ou a paciência a dos alunos pode se esgotar antes deles selecionarem uma boa estratégia. Por isso o professor deve estar sempre atento para apontar *pistas* durante o processo.

## Resolução de problemas com o uso da calculadora:

- A calculadora enfatiza mais *o que fazer* do que *como fazer* fornecendo aos alunos uma nova maneira de justificar um método de solução. O interesse dos alunos pela resolução de problemas cresce consideravelmente quando se usam dados personalizados. Quanto mais os alunos sentem que tem um papel ativo em criar situações-problema mais se empenham em resolver os problemas.

## **Resolvendo problemas com o uso da matemática recreativa:**

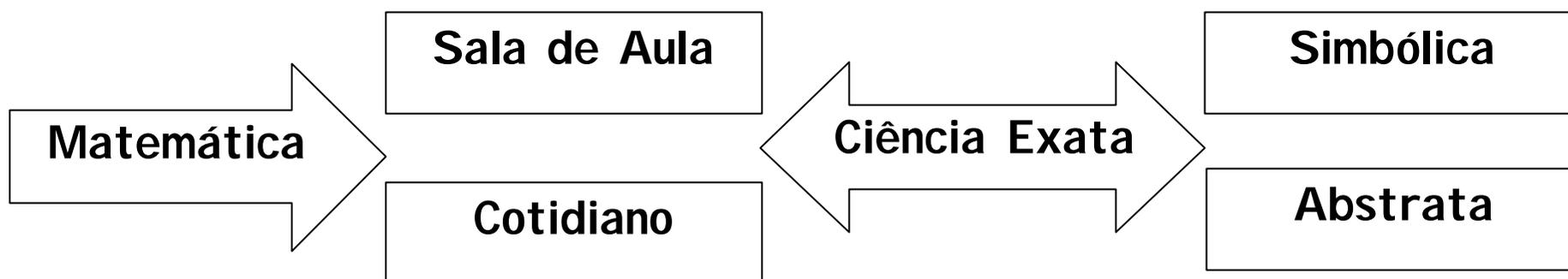
- Vários campos da matemática, hoje altamente desenvolvidos, começaram como atividades puramente recreativas: combinatória, teoria dos jogos, teoria dos números e topologia. Na verdade, praticamente todo campo da matemática tem aspectos recreativos. Todavia o que é recreação para um indivíduo é trabalho para outro. A resolução de problemas é o único tema comum à maioria dos tópicos de matemática recreativa.

# Resolução de Problemas

## A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O USO DO COMPUTADOR NO ENSINO DE MATEMÁTICA

- *Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Norma Suelly Gomes Allevato*  
*UNESP - Rio Claro*
- *Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lourdes de La Rosa Onuchic*  
*USP - São Carlos*
- *Revista de Educação Matemática - N<sup>o</sup> 8 - 2003*

# A resolução de problemas em diferentes contextos



**“Uma ciência para poucos, os gênios com rigor de raciocínio e precisão nos cálculos”.**

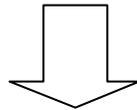
**OLHAR HISTÓRICO**



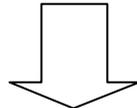
**'Muitas vezes o conhecimento matemático é construído motivado pela curiosidade, pela dúvida, pela persistência e criatividade das pessoas na busca da solução de um problema específico ".**

**(Ex: "Último Teorema de Fermat" - 350 anos para ser demonstrado)**

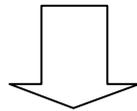
**HISTÓRIA MATEMÁTICA**



**BONS PROBLEMAS**



**FORÇA MOTIVADORA**



**NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO**

“A matemática não é infalível ou inquestionável, não está pronta e totalmente estruturada.

Ela se desenvolve pela prática da **crítica** e da **dúvida** e move-se a partir de conhecimentos anteriores em busca de novos conhecimentos necessários à solução de novos, de antigos, e não resolvidos problemas”.

Existem várias pesquisas em Educação Matemática sobre resolução de problemas e diferente compreensão do tema:

Mendonça (1999) identifica três modos:

1º) **OBJETIVO**: em que se ensina matemática para resolver problemas;

2º) **PROCESSO**: em que a ênfase está no desempenho, criatividade e nas estratégias utilizadas pelos alunos.

3º) **PONTO DE PARTIDA**: que o problema é o elemento desencadeia um processo de construção de conhecimento (origem do conhecimento).

Onuchic (1999)

Considera que o Ensino de Matemática deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas.

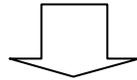
Alunos devem ser:

- a) desafiados a resolver um problema;
- b) conduzidos a utilizar seus conhecimentos;
- c) exigidos na busca de novas alternativas, novos recursos, novos conhecimentos.

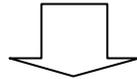
O conteúdo para o aluno fica:

- a) com significado;
- b) prazer em aprendê-lo.

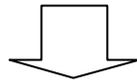
**ENSINO DE MATEMÁTICA**



**ATRAVÉS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**



**METODOLOGIA DE ENSINO**



**RECOMENDADO MUNDIALMENTE EM ORIENTAÇÕES CURRICULARES**

- E.U.A.: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) - 2000 - Explicita que um dos objetivos do ensino da Matemática é "construir novo matemático através de resoluções de problemas".
- BRASIL: PCN's (1998) - ressaltam que a resolução é um caminho importante para o ensino da matemática.

**A proposta dos PCN's é fundamentada nos princípios:**

- 1º) Resolução de Problemas: ponto de partida:  
(deixa de ser a definição);
- 2º) Os problemas deixam de ser uma aplicação mecânica de uma fórmula no processo operatório;
- 3º) Construção de conceitos que adquirem sentidos nos problemas;
- 4º) A resolução de problemas deixa de ser uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação de aprendizagem.

# **A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E OS COMPUTADORES**

**Com as grandes quantidades de novos produtos (softwares, jogos, etc.) para computadores, está ampliando as possibilidades de usá-lo no Ensino de Matemática.**

**As potencialidades educativas dos computadores:**

- a) facilitam e aumentam a capacidade de cálculos numéricos;**
- b) geração rápida e precisa de imagens, gráficos e tabelas;**
- c) produção de dados, de modulação e de tabulação;**
- d) o fato das aulas ficarem mais interessantes e atrativas.**

# Explorando a Resolução de Problemas

O Homem que Calculava  
Malba Tahan

1º. PROBLEMA DAS MAÇÃS

Vivia outrora, em Damasco, um bom e esforçado camponês que tinha três filhas. Um dia, conversando com o cádi, declarou o camponês que suas filhas eram dotadas de alta inteligência e de raro poder imaginativo.

O cádi, invejoso e implicante, irritou-se ao ouvir o rústico elogiar o talento das jovens e declarou:

- Já é a quinta vez que ouço de tua boca elogios exagerados que exaltam a sabedoria de tuas filhas.

Vou apurar se elas são, como afirmas, dotadas de engenho e perspicácia de espírito.

Mandou o cádi chamar as três raparigas e disse-lhes:

- Aqui estão 90 maçãs que vocês deverão vender no mercado. Fátima, que é a mais velha, levará 50. Cunda levará 30 e Siha, a caçula, será encarregada de vender as 10 restantes.

Se Fátima vender as maçãs a 7 por um dinar, as outras deverão vender, também, pelo mesmo preço, isto é, a 7 por um dinar; se Fátima fizer a venda das maçãs a três dinares cada uma, será esse preço pelo qual Cunda e Siha deverão vender as que levam. O negócio deve fazer-se de sorte que as três apurem, com a venda das respectivas maçãs, a mesma quantia.

- E não posso desfazer-me de nenhuma maçã que levo?  
- perguntou Fátima.

- De modo algum – obstou, de pronto, o impertinente cádi. – A condição, repito, é essa: Fátima deve vender 50. Cunda venderá 30 e Siha só poderá vender as 10 que lhe tocaram. E pelo preço que Fátima as vender, pelo mesmo preço deverão as outras negociar as frutas. Façam a venda de modo que apurem, ao final do dia, quantias iguais.

Aquele problema, assim posto, afigurava-se absurdo e disparatado. Como resolvê-lo?

E, como as moças não atinassem com a forma de resolver o caso, foram consultar, sobre o complicado problema, um imã (Homem religioso encarregado de ler o Alcorão mesquita) que morava nas vizinhanças.

O imã, depois de encher várias folhas de números, fórmulas e equações, concluiu:

- Meninas! Esse problema é de uma simplicidade cristalina. Vendam as noventa maçãs, conforme o cádi ordenou, e chegarão, sem erro, ao resultado que ele mesmo determinou.

A indicação dada pelo imã em nada esclareceu o intrincado enigma das 90 maçãs proposto pelo cádi. As jovens foram ao mercado e venderam todas as maçãs, isto é, Fátima vendeu 50, Cunda vendeu 30 e Siha encontrou logo comprador para as dez que levara. O preço foi sempre o mesmo para as três moças e, por fim, cada uma delas apurou a mesma quantia.

# Resolução do Problema

FÁTIMA: 49 por 7 dinares  
          1 por 3 dinares  
Total     por 10 dinares

CUNDA: 28 por 4 dinares  
          2 por 6 dinares  
Total     por 10 dinares

SIHA: 7 por 1 dinares  
          3 por 9 dinares  
Total     por 10 dinares

# **Explorando a Resolução de Problemas**

**PROJETO: ENSINAR E APRENDER**

**2º. PROBLEMA**

Paula gosta de usar números grandes. Quando perguntaram sua idade, ela respondeu que já viveu 7.358.400 minutos. Quantos anos Paula já viveu? (Considere um ano com 365 dias)

# Resolução do Problema

$$365 \text{ dias} \times 24 = 8.760 \text{ horas}$$

$$8.760 \text{ horas} \times 60 = 525.600 \text{ minutos}$$

$$7.358.400 \text{ min} : 525.600 \text{ min} = \mathbf{14 \text{ anos}}$$

Outro modo de se resolver

$$7.358.400 \text{ min} : 60 \text{ min} = 122.640 \text{ horas}$$

$$122.640 \text{ h} : 24 \text{ h} = 5.110 \text{ dias}$$

$$5.110 \text{ dias} : 365 \text{ dias} = \mathbf{14 \text{ anos}}$$

# **Explorando a Resolução de Problemas**

**PROJETO: ENSINAR E APRENDER**

**3º. PROBLEMA**

Ana, Pedro, Carlos e Diná gostam de gêneros literários diferentes: humor, mistério, esportes e aventura. Um dos colegas de grupo de Ana gosta mais de livros de mistério, enquanto Carlos e Diná não gostam de aventura. O gênero favorito de Pedro é esportes. Diná gostava de livros de humor, mas acabou mudando de gosto. Qual é o gênero de livro que Diná prefere?

# Resolução do Problema

	<b>Humor</b>	<b>Mistério</b>	<b>Esporte</b>	<b>Aventura</b>
<b>Ana</b>	N	N	N	S
<b>Pedro</b>	N	N	S	N
<b>Carlos</b>	S	N	N	N
<b>Dina</b>	N	S	N	N

# Fases da Resolução de Problemas

## 1ª. COMPREENSÃO:

- Ler com atenção
- Interpretar
- Verificar os dados
- Identificar bem as perguntas

## **2ª. ELABORAÇÃO DE PLANOS:**

Dependendo do problema podemos resolver por: desenhos, tentativas e erros, lista organizada, usar as operações, usar álgebra, estatística (gráficos e tabelas), etc.

## **3ª. EXECUÇÃO DO PLANO**

## **4ª. VERIFICAÇÃO OU RETROSPECTIVA**

**5ª. RESPOSTA** – devemos fazê-la completa, pois nos ajuda na revisão.

“Não existe certeza absoluta, só a  
de (re)começar sempre,  
buscando na realidade as pistas  
sobre o melhor jeito de caminhar”

*Autor Desconhecido*