

Hidráulica Experimental

Notas de Aula - Versão 1.7 - 2016/s1

Prof. Milton Dall'Aglio Sobrinho

1	QUANTIFICAÇÃO DOS ESCOAMENTOS	01
1.1	Vazão e Fluxos	01
1.2	Relação Básica ente Velocidade e Vazão	02
1.3	Fluxo de Grandezas Extensivas Transportadas	04
1.4	Vazão em Seções com Velocidade Variável	07
1.5	Exemplos Numéricos	11
1.6	Exercícios Sugeridos	13
1.7	Relação Geral Entre Velocidade e Fluxos	16
1.8	Exercícios Sugeridos	22
2	DESCRIÇÃO DOS ESCOAMENTOS	24
2.1	Trajetória de uma Partícula Fluida	24
2.2	Velocidade e Aceleração de uma Partícula Fluida	25
2.3	Linha de Corrente - Um Novo Ponto De Vista	29
2.4	Velocidade e Aceleração em um Ponto (Análise Euleriana).....	31
2.5	Linha de Emissão e Linha de Tempo	39
2.6	Perfis de Velocidade	42
2.7	Classificação dos escoamentos	43
3	CONSERVAÇÃO DE GRANDEZAS (Equação da Continuidade)	47
3.1	Conservação da Massa	47
3.2	Misturas Homogêneas - Balanço de Grandeza Extensiva N	58
3.3	Equação Integral do Balanço de Massa	58
3.4	Discussão Sobre a Taxa de Variação da Grandeza no V.C.	63
3.5	Exercícios	67
4	TRANSFORMAÇÕES DE ENERGIA NOS ESCOAMENTOS	69
4.1.	Equação de Bernoulli	69
4.2.	Conservação da Energia nos escoamentos	71
4.3.	Energias e Cargas na Equação de Bernoulli	75
4.4.	Aplicação a Medições de Vazão e Velocidade	76
4.4.1.	Medidor Venturi	77
4.4.2.	Tubo de Pitot	77
4.4.3.	Orifícios de pequenas dimensões	78
4.4.4.	Bocais em condutos forçados	80
4.5.	Exercícios	81
5	TRANSFORMAÇÃO DE REYNOLDS (Relação Sistema x Volume de Controle) ...	85
5.1	Introdução	85
5.2	Do Sistema ao Volume de Controle	85
5.3	Balanço Global de Grandezas Extensivas	88

6	BALANÇO GLOBAL DE ENERGIA	89
6.1	Aplicação a um V.C. em Regime Permanente	92
6.2	Problemas isotérmicos: bombas, turbinas hidráulicas e tubulações ...	93
6.3	Exemplos Ilustrativos	95
6.4	Efeito do Atrito nos Escoamentos	99
6.4.1.	Perdas de Carga em Escoamento em Tubos	101
6.4.2.	Sobre o Fator de Atrito	105
6.5	Efeitos das Bombas e Turbinas sobre as Cargas	111
6.6	Resumo das Transformações de Energia	113
6.7	Exercícios Propostos	118
7	BALANÇO GLOBAL DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO	120
7.1	Aplicações Elementares: Pás Defletoras	121
7.2	Aplicações Elementares: Curvas em Tubulações	123
7.3	Aplicações Elementares: Perdas em Expansão Brusca	126
7.4	Aplicações Elementares: Estruturas em Canais Abertos	127
7.5	Exercícios Propostos	130
A N E X O : RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS		134

Diferenças em relação à versão 1.6 (de 2015-s2)

- Texto sobre comportamento dinâmico de escoamentos no cap 2
- Exemplo numérico no item 3.2; Exercício proposto no item 3.5

Diferenças em relação à versão 1.5 (de 2015-s1)

- . – Pequenas correções na numeração de figuras e equações.
- Acréscimo de texto sobre hidrometria no cap 1
- . – Acrescentados texto e exemplos numéricos no cap. 2.

Diferenças em relação à versão 1.4 (de 2014-s2)

- . – Acrescentados os itens 6.4.1 e 6.4.2 num total de 9 páginas.
- Acrescentado o Anexo com as respostas no corpo do texto, 5 páginas.

CAPÍTULO 1: QUANTIFICAÇÃO DOS ESCOAMENTOS

1.1 Vazão ou Fluxo de Volume

É muito importante conhecer o volume de fluido que um escoamento transporta. Como os escoamentos são contínuos é conveniente expressar o volume transportado por unidade de tempo, ou seja, pelo **Fluxo de Volume**, F_{Vol} , também conhecido como **Vazão**:

$$F_{Vol} = \text{VAZÃO} = \frac{\text{Volume Transportado}}{\text{Tempo decorrido}} \quad (m^3 / s) \quad 1.1$$

A vazão de água transportada por um rio é fundamental em muitos problemas práticos. Por exemplo, para sabermos se é possível utilizar a água para abastecimento de uma cidade, ou se o rio comporta o lançamento de esgotos com um determinado nível de tratamento.

Para medir uma vazão podemos imaginar o experimento representado pela Figura 1.1, conhecido como “*método volumétrico direto*”. Conhecemos o volume inicial de água no reservatório e, no instante $t = 0$, colocamos o recipiente sob o jato de água, parando o cronômetro ao final de um tempo Δt qualquer, quando lemos o volume final. A diferença de volumes fornece o volume escoado durante o intervalo de tempo considerado.

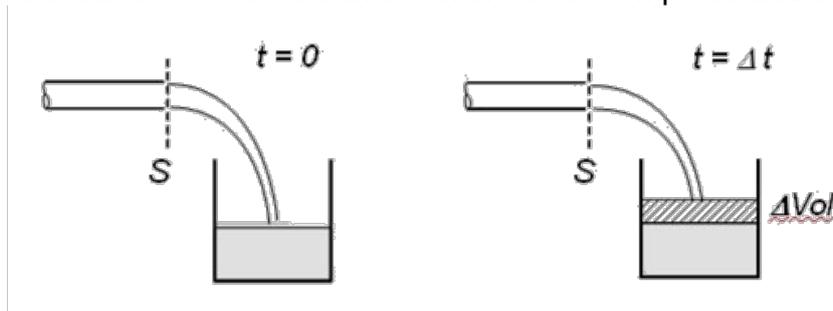


Figura 1.1: Medição de volume transportado pelo escoamento num intervalo de tempo.

Aplicando a definição da equação 1.1 com o volume ΔVol e com o intervalo de tempo decorrido Δt , obtemos o valor da vazão média no período de tempo da medição:

$$Q = \frac{\Delta Vol}{\Delta t} \quad (\text{Valor Médio no intervalo } \Delta t) \quad 1.2$$

Para que a definição seja válida no caso de escoamento variável no tempo, interessa o valor instantâneo.

$$Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Vol}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad Q = \frac{dVol}{dt} \quad (\text{Valor Instantâneo}) \quad 1.3$$

A dimensão do fluxo de volume é $[M^3 / T]$, e as unidades mais comuns são m^3/s , m^3/h , l/h , m^3/dia .

Uma vazão só tem sentido quando associada a uma determinada seção. No caso da

Figura 1.1, trata-se da seção de saída do tubo, com área S . Um sinônimo de fluxo é **Taxa de Passagem**. Então podemos dizer também que a vazão é a taxa de passagem de volume através de uma dada superfície

*Vazão é um **Fluxo de Volume**, ou seja, a quantidade de volume por unidade de tempo que atravessa uma determinada área.*

Fluxo de Massa

Em muitas ocasiões é importante conhecer a taxa de transferência de massa através de uma seção de escoamento. Isso é particularmente verdadeiro no caso de escoamentos compressíveis.

Dada uma seção qualquer de um escoamento, a quantidade de massa que atravessa a seção por unidade de tempo é o *Fluxo de Massa*.

$$F_M = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta Vol}{\Delta t} \rightarrow F_M = \rho Q \quad 1.4$$

A dimensão do Fluxo de Massa é [M / T], e as unidades são: (Kg/h), (ton/h), (Kg/s), (utm/s) etc.

1.2 Relação Básica entre Velocidade e Vazão

Nossa experiência cotidiana, por exemplo, com torneiras e mangueiras de jardim, indica que a vazão é função da velocidade do escoamento. A velocidade do fluido é um dos fatores principais para definir a capacidade de transporte de grandezas dos escoamentos. A outra é a área da seção transversal, conforme veremos neste item.

Imagine o escoamento num duto retangular de seção transversal A , transportando água, com velocidade V uniforme e constante no tempo, conforme esquema da Figura 1.2.

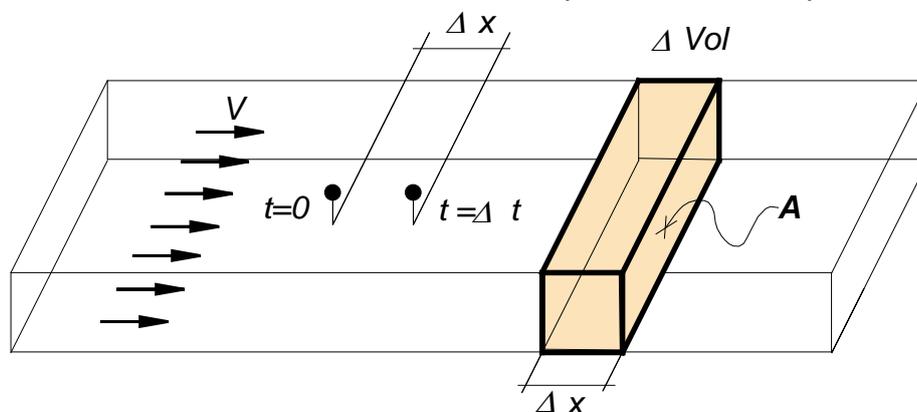


Figura 1.2: Escoamento uniforme num duto retangular – volume que atravessa a seção.

O perfil uniforme significa que qualquer partícula tem a mesma velocidade. Além disso, o movimento é unidirecional, ou seja, ocorre apenas na direção x . Podemos marcar uma partícula qualquer com corante, e determinar sua velocidade por meio do deslocamento registrado num intervalo de tempo Δt dado:

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t}; \text{ valor médio da velocidade no intervalo } \Delta t. \quad 1.5$$

Com a velocidade conhecida, é fácil determinar quais partículas serão capazes de atravessar a seção “A” num intervalo Δt . Basta ver que o deslocamento possível nesse tempo é $\Delta x = V \Delta t$. Concluímos que um volume igual ao hachurado irá atravessar a seção de área A no intervalo Δt . Então:

$$Q = \frac{\Delta Vol}{\Delta t} = \frac{A \Delta x}{\Delta t} \rightarrow Q = V A \quad 1.6$$

A equação 1.6, embora simplificada, é importantíssima. É empregada na grande maioria dos cálculos de tubulação, com V igual à velocidade média no tubo. As simplificações adotadas foram:

- o módulo da velocidade é o mesmo em toda a seção A,
- a direção da velocidade é a mesma em toda a seção A,
- a direção da velocidade é perpendicular à seção A.

A primeira hipótese é equivalente a afirmar que V é a velocidade média na seção. Já a segunda hipótese é praticamente impossível de ser satisfeita num escoamento real devido a presença dos contornos sólidos, como as paredes do tubo ou o fundo dos canais. Posteriormente adaptaremos a equação 1.5 para uso num caso geral.

Exemplo 1.1 : Uma tubulação com 50mm de diâmetro interno abastece um caminhão tanque de 15.000 l de capacidade com gasolina ($\rho = 860 \text{ kg/m}^3$). Sabendo que a velocidade média no tubo é de 2,0 m/s, pede-se: a) Qual a massa de gasolina transportada; b) Vazão que sai do tubo; c) Fluxo de massa que entra no tanque; d) Qual o tempo de enchimento completo do tanque?

SOLUÇÃO:

a) Pode-se usar o valor médio porque a massa é uniformemente distribuída. A partir da definição de massa específica e sabendo que 1m^3 equivale a 1000 litros, obtemos:

$$m = \rho Vol = 860 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \times 15000 \text{ (l)} \cdot \left(\frac{1\text{m}^3}{1000\text{l}} \right) = 12900 \text{ kg}$$

b) Sabendo que a vazão é a velocidade multiplicada pela área do escoamento, temos:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 0,050^2}{4} = 0,00196 \text{ m}^2$$

$$Q = VA = 2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \times 0,00196 \text{ m}^2 = 0,00393 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cong 4 \text{ litros / s}$$

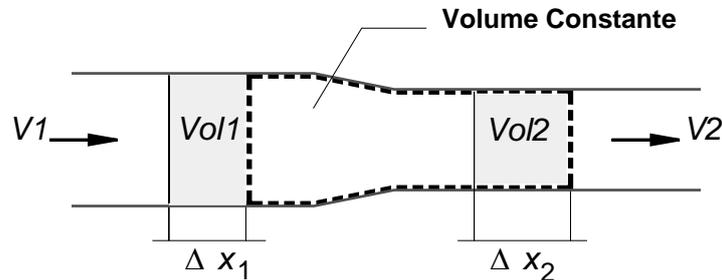
c) Aplicando a definição do fluxo de massa,

$$F_M = \rho Q = 869 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \times 0,00393 \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) = 3,377 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

d) O tempo de enchimento vem da aplicação da definição de vazão:

$$Q = \frac{\Delta Vol}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta Vol}{Q} = \frac{15m^3}{0,00393m^3/s} \therefore \Delta t = 3.820s$$

Exemplo 1.2 : Um fluido com massa específica constante escoa pela redução de diâmetro de 100mm para 75mm representada na figura. Sabendo que a velocidade no tubo maior é 1m/s, calcule a velocidade no tubo de menor diâmetro.



SOLUÇÃO :

Como o volume de fluido no interior da redução (tracejado na figura) é constante, deduzimos que o volume trazido pelo tubo de 100mm em cada intervalo de tempo deve ser igual ao volume que sai pelo tubo menor no mesmo intervalo ($Vol_1 = Vol_2$). Mas, pela definição de vazão é possível calcular os volumes, já que o intervalo de tempo considerado é o mesmo:

$$Q = \frac{Vol_1}{\Delta t} = \frac{Vol_2}{\Delta t}; \text{ mas } Vol_1 = \Delta x_1 A_1 \text{ e } Vol_2 = \Delta x_2 A_2$$

$$\frac{\Delta x_1 A_1}{\Delta t} = \frac{\Delta x_2 A_2}{\Delta t} \rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$$

substituindo as áreas,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi d_1^2 / 4}{\pi d_2^2 / 4} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{0,1^2}{0,075^2} = 1,78 \Rightarrow V_2 = 1,78 \frac{m}{s}$$

1.3 Fluxo de Grandezas Extensivas Transportadas

Ao considerarmos um fluido escoando através de uma seção qualquer, podemos quantificar não só os fluxos de volume e massa do fluido, mas também a quantidade das **grandezas extensivas** que o fluido carrega em seu meio.

Definições:

Grandeza : *é qualquer coisa que pode ser medida fisicamente.
Por exemplo, temperatura, velocidade, massa, energia.*

Grandeza Intensiva: *o valor da medida não depende da
quantidade de massa considerada
Exemplos: temperatura, velocidade, massa específica.*

Grandeza Extensiva: *o valor medido depende da quantidade
de massa considerada.
Exemplos: quantidade de calor, energia cinética, volume,
massa.*

O Fluxo de uma grandeza extensiva N qualquer pode ser dado em relação à concentração da grandeza, ou em relação à quantidade específica.

Fluxo de N em função da sua concentração C_N :

$$F_N = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta Vol} \frac{\Delta Vol}{\Delta t} = C_N Q \Rightarrow F_N = C_N VA \quad 1.7$$

Fluxo em função da quantidade específica η :

$$F_N = \frac{\Delta N}{\Delta m} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \eta F_M \Rightarrow F_N = \eta \rho VA \quad 1.8$$

Ilustração: Uma dedução alternativa das equações do fluxo ocorre ao considerar a analogia entre o escoamento e um trem em movimento, conforme a Figura 1.3. Os vagões equivalem ao fluido em escoamento e os passageiros nos vagões são análogos às grandezas extensivas conduzidas pelo escoamento.

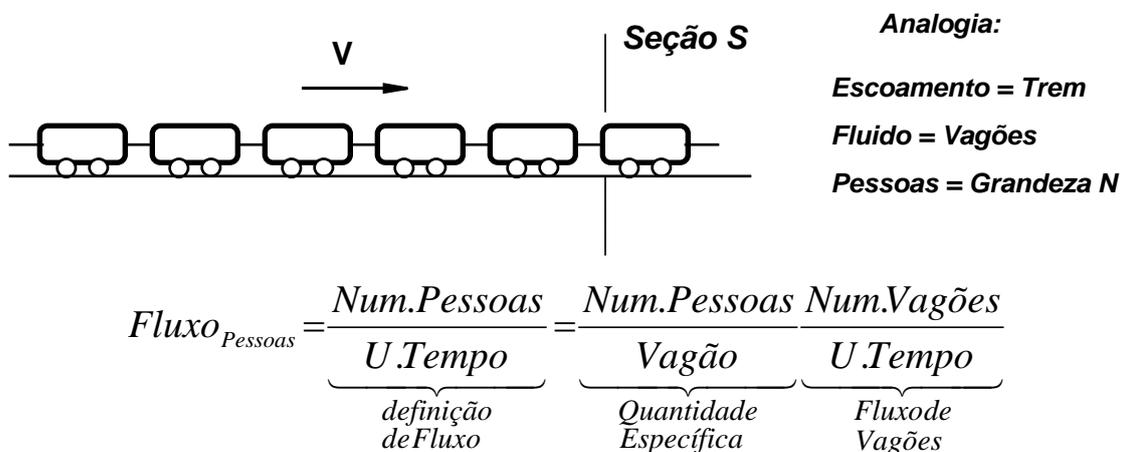


Figura 1.3: Analogia com trem em movimento para definição do fluxo de grandezas extensivas.

Pensando num vagão como 1 m^3 (unidade de volume), ou como 1 kg (un. de massa) de fluido, obtemos as equações genéricas dos fluxos pela extensão do raciocínio utilizado para calcular o fluxo de pessoas:

$$F_N = \frac{Quant. da Grandeza}{Quant. de Massa} \times \frac{Quant. de Massa}{Un. de Tempo}$$

η F_M

$$F_N = \frac{Quant. da Grandeza}{Quant. de Vol.} \times \frac{Quant. de Vol.}{Un. de Tempo}$$

C Q

Exemplos de Fluxos de Grandezas Extensivas

Aprendemos nesse item que o fluxo de qualquer grandeza cuja quantidade total no fluido depende da massa de fluido considerada pode ser descrito em função do fluxo de massa. Por exemplo, para algumas grandezas extensivas consideradas:

$$F_{CALOR} = c \Delta T (\rho V A) \quad F_{Q.MOV} = \vec{V} (\rho V A)$$

$$F_{E.CINÉTICA} = \frac{V^2}{2} (\rho V A) \quad F_{ENERGIA} = e (\rho V A)$$

Em todos os exemplos vimos que sempre a quantidade específica da grandeza é multiplicada por uma parte comum que é o Fluxo de Massa. Esse termo representa, como já vimos, a quantidade da grandeza transportada (por Advecção) por unidade de massa do fluido transportador.

Exemplo 1.3 : Um rio possui vazão de $10\text{m}^3/\text{s}$ de água com concentração de sólidos totais de $250\text{mg}/\text{L}$. Calcular: a) o fluxo de massa de sólidos totais e b) a massa de sólidos transportada pelo rio em um dia.

Solução:

a) uma vez conhecida a concentração da grandeza extensiva (sólidos totais), o fluxo é dado pela equação 1.7.

$$F_{ST} = \left(250 \frac{\text{mg}}{\text{L}} \times 0,001 \frac{\text{g}}{\text{mg}} \times 1000 \frac{\text{L}}{\text{m}^3}\right) \times 10 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 250 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} \times 10 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 2.500 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

b) a massa transportada num dia vem da definição do fluxo médio (eq. 1.7):

$$\Delta m_{ST} = F_{ST} \Delta t = 2,5 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \times 86.400 \frac{\text{s}}{\text{dia}} = 216.000 \text{kg} / \text{dia}$$

1.4 Vazão em Seções com Velocidade Variável

A hipótese de perfil uniforme utilizada na relação básica praticamente nunca ocorre na prática, devido à influência da viscosidade dos fluidos e ao fenômeno da adesão do fluido aos contornos sólidos do escoamento. Nos fluidos reais sempre vai existir uma região próxima aos contornos sólidos com variação pronunciada da velocidade, chamada de **camada limite**.

Imagine um trecho de rio retilíneo esquematizada na Figura 1.4, com a seção transversal com diferentes profundidades. A utilização de traçadores permite concluir que existe um perfil variável de velocidades, que pode ser aproximado por 3 velocidades diferentes.

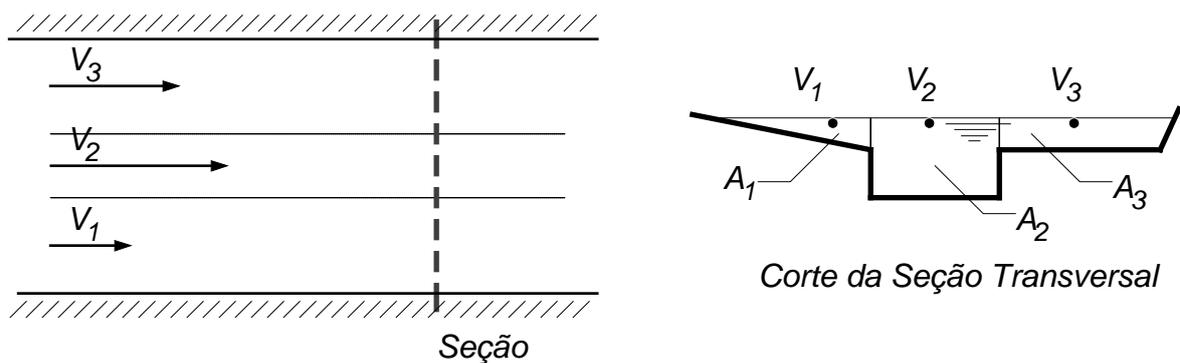


Figura 1.4: Escoamento com velocidade variável

A vazão pode ser considerada como a soma da contribuição de 3 seções distintas e independentes, com velocidades e áreas diferentes.

$$Q \approx \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = V_1 A_1 + V_2 A_2 + V_3 A_3$$

generalizando para um número qualquer de áreas, temos:

$$Q \approx \sum_{i=1}^n V_i A_i \quad 1.9$$

Discussão sobre Modelo de Medição

O sinal de aproximadamente igual na equação 1.9 surge ao fazermos apenas 3 medições de velocidade para aproximar um perfil real de velocidades que varia continuamente, conforme ilustrado na Figura 1.5.

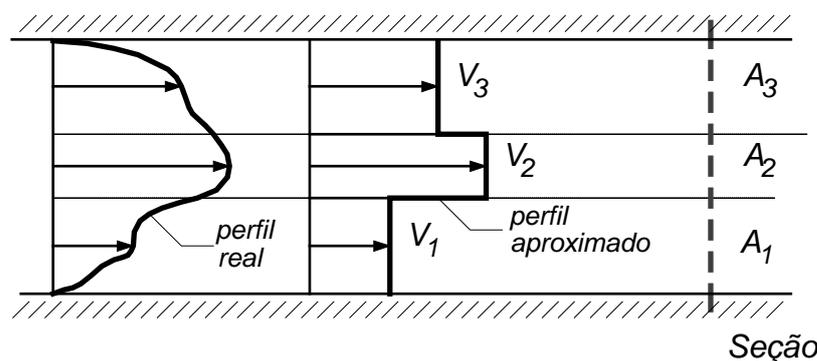


Figura 1.5: Modelo de Escoamento Real e de Medição, com Velocidades Constantes

É claro que o perfil aproximado não representa com perfeição o perfil real de velocidades, que varia continuamente. Entretanto, ao adotar um perfil composto de apenas 3 velocidades constantes, estamos adotando um **modelo de medição** que pode ser suficientemente exato para nossos propósitos.

Sabemos que o perfil real de velocidades não é como descrito pelo modelo simplificado de medição. Podemos reduzir o erro de modelo fazendo mais medições de velocidade ao longo da seção transversal, mas o custo das medições adicionais necessárias pode não ser viável.

O erro de modelo numa medição pode ser aceitável ou não, dependendo de nosso objetivo. No caso de uma medição de vazão em rios utilizando flutuadores, pode ser aceitável um modelo bem simplificado, se nosso objetivo for uma estimativa para fins de anteprojeto.

Pode-se perceber a partir da Figura 1.6, que a divisão da seção em áreas menores e um maior número de medições de velocidade diminui o erro de modelo.

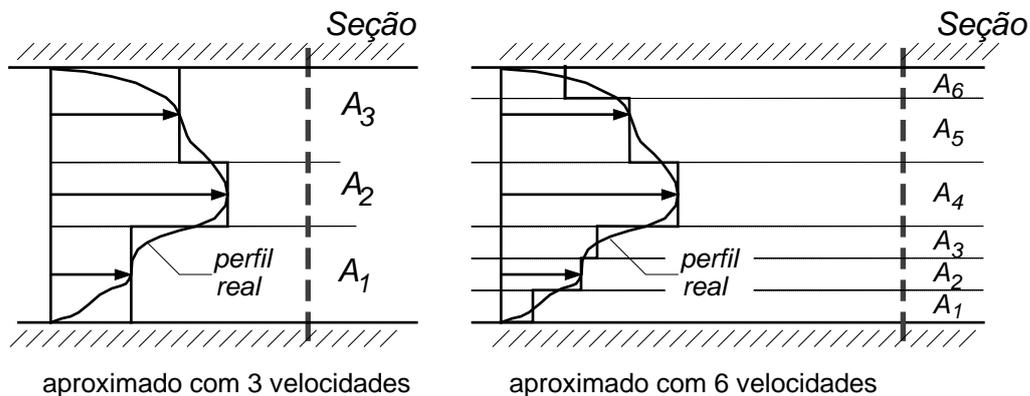


Figura 1.6: Aumento do número de medições de velocidade diminui o erro de modelo.

O efeito do aumento do número de n de subáreas consideradas na equação 1.7 pode ser visualizado num gráfico como o da Figura 1.7.

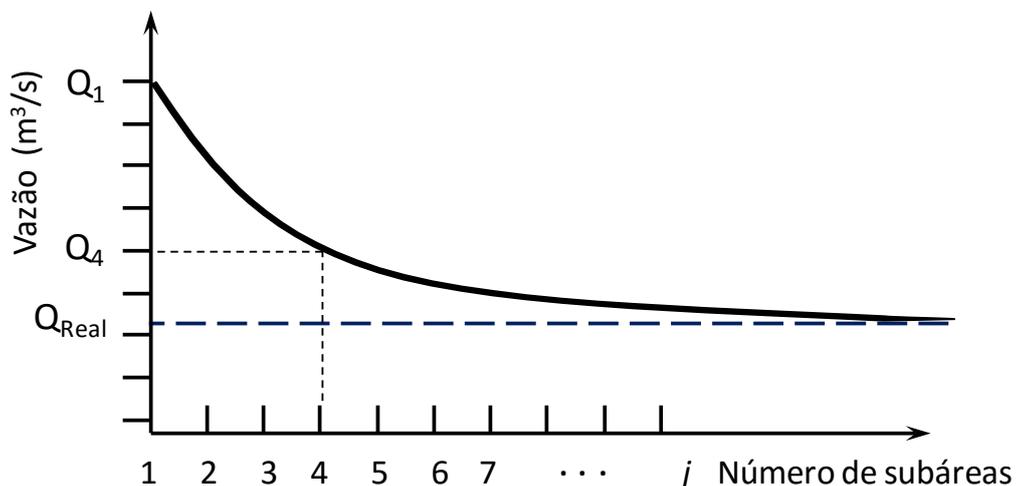


Figura 1.7: Aumento do número de medições de velocidade diminui o erro de modelo.

A conclusão que se impõe é que o valor correto surge no limite de uma série de medições com um número crescente de subdivisões de áreas.

$$Q_{Real} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i A_i \quad 1.10$$

O sinal de igualdade na equação 1.10 indica que no limite, para número muito grande de áreas, deixa de existir o erro de modelo. Matematicamente essa operação é denotada pelo sinal da integral:

$$Q = \int_A V dA \quad 1.11$$

Pontos Importantes na equação 1.11

1. Velocidade na direção perpendicular a Área
2. “dA” é o elemento diferencial de área: é a maior área em que V pode ser considerado constante (não é a derivada da função área)
3. O limite da integração A não é operacional, apenas indica que os limites reais devem cobrir toda a área desejada.
4. Na vazão calculada resta apenas o erro de medição.

_____ Hidrometria – Medição de Vazão em Rios

A determinação de vazões em rios é uma aplicação prática importante das equações 1.9 e 1.11. Uma diferença importante, entre os esquemas apresentados e a utilização na prática, é a consideração da variação de velocidades com a profundidade, e não só com a distância da margem do rio.

Um dos métodos de divisão da seção para a medição de vazão de rios é o chamado método dos dois pontos, em que as velocidades são medidas a 20% e a 80% da profundidade da subárea considerada. Um exemplo de divisão segundo a técnica de dois pontos é mostrado na Figura 1.8.

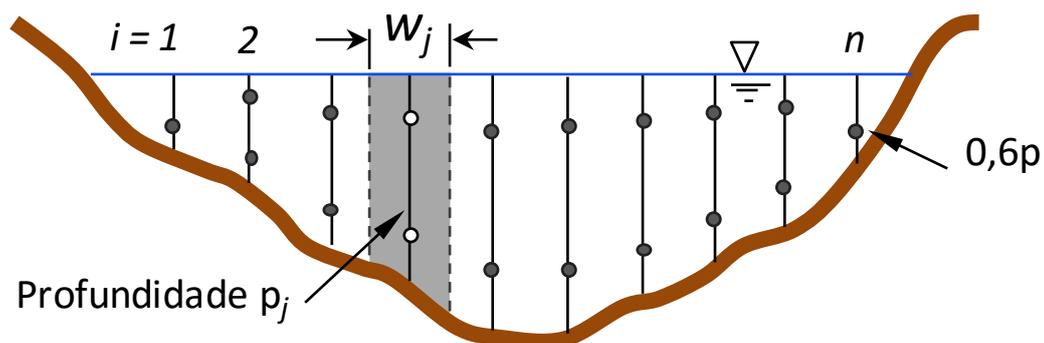


Figura 1.8: Divisão da seção segundo a técnica dos dois pontos em cada vertical.

Observa-se na Figura 1.8 que nas seções mais rasas a velocidade foi medida em apenas um ponto, correspondendo a 60% da profundidade. Adota-se este critério quando a

profundidade for entre 0,15 e 0,60m.

A ANA (Agência Nacional de Águas) considera justificável o método dos dois pontos quando o fator tempo é importante na medição, por exemplo, em cheias e medições com grande variação de nível da água.

A ANA considera preferível o método detalhado que, como indica o nome, adota uma subdivisão mais fina em cada vertical. A Tabela 1.1 indica as recomendações da ANA para adoção do método detalhado, com o número de medições em cada vertical definido em função da profundidade.

Tabela 1.1: Tabela de pontos de medição de velocidade no método detalhado. Fonte: ANA

Nº de pontos	Posição na vertical (em relação a p)	Velocidade média na vertical (v_M)	Profundidade (m)
1	0,6	$V_{0,6}$	0,15 – 0,6
2	0,2 e 0,8p	$(V_{0,2}+V_{0,8})/2$	0,6 – 1,2
3	0,2; 0,6 e 0,8	$(V_{0,2}+ 2V_{0,6}+V_{0,8})/4$	1,2 – 2,0
4	0,2; 0,4; 0,6 e 0,8	$(V_{0,2}+2V_{0,4}+2V_{0,6}+V_{0,8})/6$	2,0 – 4,0
6	S^* ; 0,2; 0,4; 0,6 e F^*	$[V_S+2(V_{0,2}+V_{0,4}+V_{0,6}+V_{0,8})+V_F]/10$	> 4,0

$V_S = v$ na superfície; $V_F = v$ no fundo; $S = 0,10m$; $F =$ fundo, determinado pelo lastro.

Quanto ao número de seções a ANA recomenda 0,05% a 0,025% da largura como distância entre duas verticais de medição (20 a 40 divisões), e indica 0,30m como a mínima distância entre seções.

Os medidores tipo ADCP (*Acoustic Doppler Current Profiler*), ou perfiladores acústicos de velocidade são cada vez mais utilizados na prática. Conforme seu nome indica, os ADCPs determinam a velocidade por efeito “Doppler” em feixes de ultrassom, em um grande número de células em cada vertical. Ao ser conduzido através de uma seção transversal o equipamento mede o deslocamento e calcula a velocidade média em cada célula. Com as velocidades da água e o deslocamento do barco o software integra as contribuições de cada célula para indicar diretamente o valor da vazão ao final da travessia de uma margem a outra do rio.

A Figura 1.9 apresenta um esquema da divisão da seção utilizada pelos medidores tipo ADCP, que avaliam a integral da equação 1.11 de forma automática.

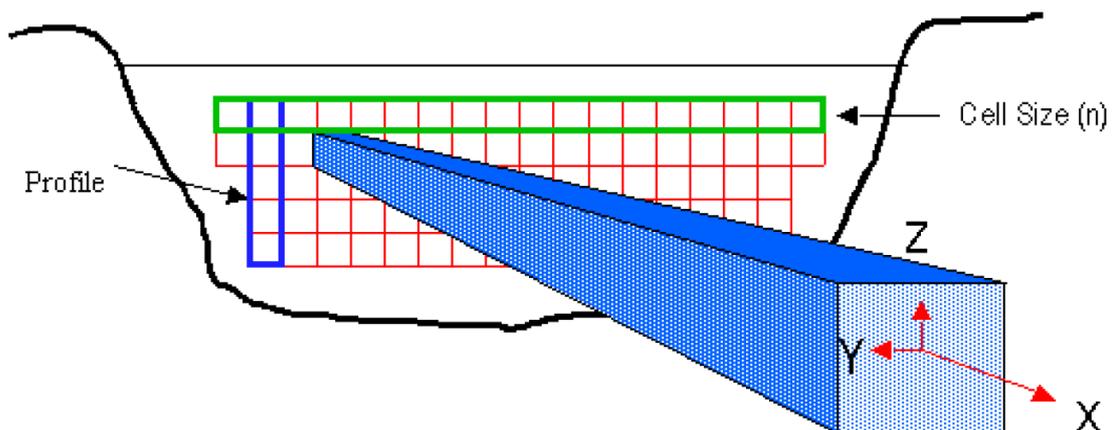


Figura 1.9: Divisão da seção em células para integração da vazão pelos medidores tipo ADCPI. Fonte: ANA (2012), disponível em <http://arquivos.ana.gov.br/inf hidrologicas>

1.5. Exemplos Numéricos

Exemplo 1.4: Deseja-se saber a vazão de um córrego com a seção transversal dada na Figura 1.10. Tendo em vista os objetivos da medição, julgou-se suficiente a divisão da seção em duas subáreas, nas quais foram medidas as velocidades seguintes: $V_1 = 0,3\text{m/s}$ e $V_2 = 0,7\text{m/s}$. Determinar a vazão.

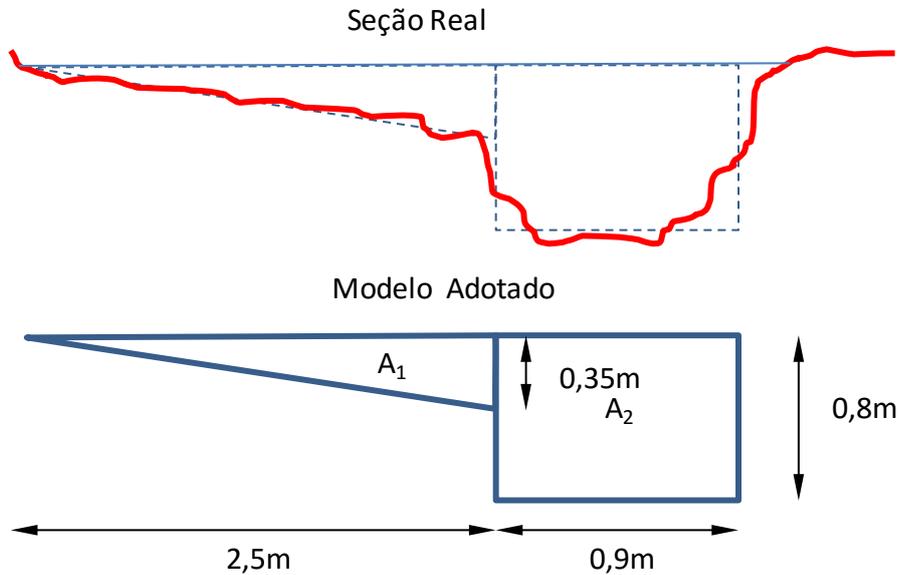


Figura 1.10: Seção transversal real e modelo adotado para a medição de velocidade.

Adotando-se o modelo de medição exposto na figura, tem-se:

$$Q \cong Q_1 + Q_2 = V_1 A_1 + V_2 A_2$$

$$Q \cong 0,3 (2,5 \times 0,35/2) + 0,7 (0,9 \times 0,8) = 0,13125 + 0,504 = 0,63525$$

Resposta: a vazão do rio é aproximadamente $0,6\text{m}^3/\text{s}$, ou 600L/s .

Exemplo 1.5: Um rio com seção retangular de 10m de largura com $1,5\text{m}$ de profundidade possui um perfil de velocidades dado na Figura 1.11. Determinar a vazão.

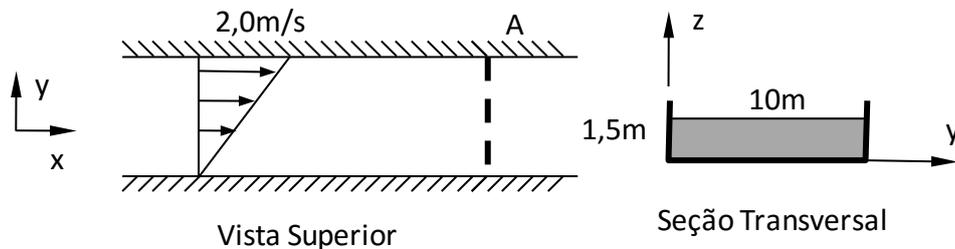


Figura 1.11: Seção transversal e perfil de velocidades.

Solução:

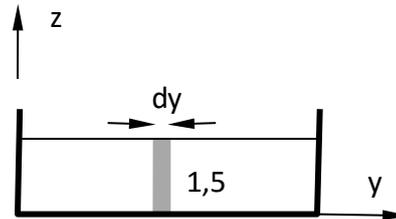
1. Função da velocidade:

Observa-se que a velocidade varia linearmente com y . Ajustando-se uma reta aos pontos dados ($y = 0, V = 0$ e $y = 10, V = 2$) obtém-se:

$$V = 0,2y$$

2. Determinação do elemento diferencial de área:

Analisando a função velocidade percebe-se que V não depende de z . Por isso podemos adotar o elemento diferencial de área dado no esquema:



$$dA = z \, dy$$

Elemento diferencial de área adotado:

3. Solução, usando a equação 1.11

$$Q = \int_A V dA = \int_{y=0}^{y=10} 0,2y \cdot 1,5 \, dy = 0,3 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{10} = 15$$

4. Resposta: A vazão do rio é de 15m³/s.

Exemplo 1.6: Um rio possui seção transversal que pode ser considerada triangular de acordo com a Figura 1.12. O perfil de velocidades, dado na figura, é o mesmo do exemplo 1.5. Pede-se calcular a vazão.

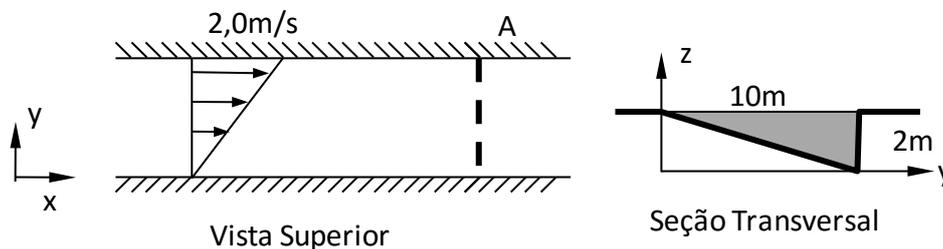


Figura 1.12: Seção transversal e perfil de velocidades.

Solução:

1. Função da velocidade:

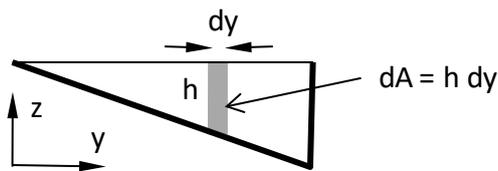
A velocidade varia linearmente com y como no exemplo anterior:

$$V = 0,2y$$

2. Determinação do elemento diferencial de área:

Analisando a função velocidade percebe-se que V não depende de z . Por isso podemos

adotar o elemento diferencial de área dado no esquema, com dimensão finita na vertical:



O elemento de área adotado pode ser escrito apenas em função de y, pois $h = 0,2y$:

$$dA = 0,2ydy.$$

3. Solução, usando a equação 1.11

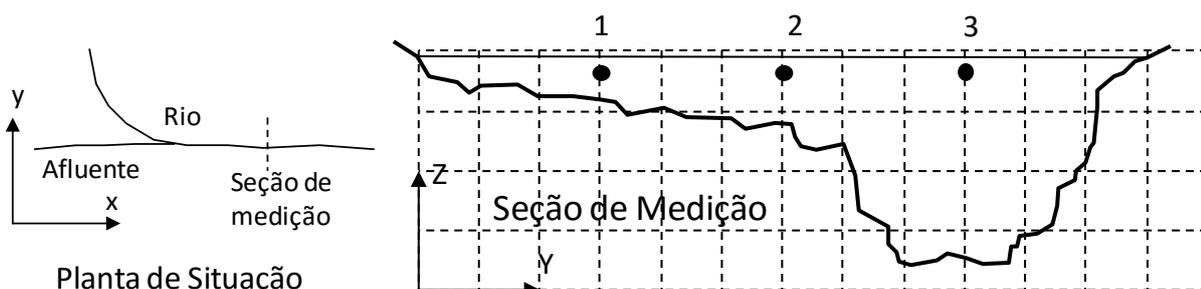
$$Q = \int_A V dA = \int_{y=0}^{y=10} 0,2y \cdot 0,2y dy = 0,04 \frac{y^3}{3} \Big|_0^{10} = 13,33$$

4. Resposta: A vazão do rio é de 13,3m³/s.

1.6. Exercícios Sugeridos

1.6.1. Um escoamento de água quente a 45°C ($\rho = 995\text{kg/m}^3$) ocorre com velocidade de 2m/s num tubo com área 0,01m². A água possui uma concentração de 200mg/L de sólidos totais. Pede-se: a) calcule a vazão de água; b) calcule o fluxo de massa de água; c) calcule o fluxo de sólidos totais transportados pela água; d) calcule o fluxo de energia térmica (quantidade de calor) em relação à temperatura de referência de 0°C transportado pelo escoamento. Dado: calor específico da água $c = 4180\text{J/kg}^\circ\text{C}$.

1.6.2. Um rio recebe a água de um afluente pouco antes de um trecho retilíneo, com a seção dada na figura. No trecho indicado foram lançados flutuadores e medidas as concentrações de matéria orgânica em 3 pontos de amostragem ao longo da seção transversal, conforme a figura com a seção de medição. A escala da seção é dada pelo quadriculado com 0,5m de lado. Os valores medidos foram: $V_1 = 0,7\text{m/s}$, $V_2 = 1,5\text{m/s}$, $V_3 = 2,0\text{m/s}$; $C_1 = 200\text{mg/L}$, $C_2 = 195\text{mg/L}$ e $C_3 = 25\text{mg/L}$.



Pede-se:

- Adote e justifique um modelo de medição para a seção e para os perfis de velocidade e de concentração;
- com o modelo adotado em (a) calcule a vazão de água no canal;

- c) com os modelos adotados em (a) calcule o fluxo de massa de matéria orgânica transportado pelo canal.

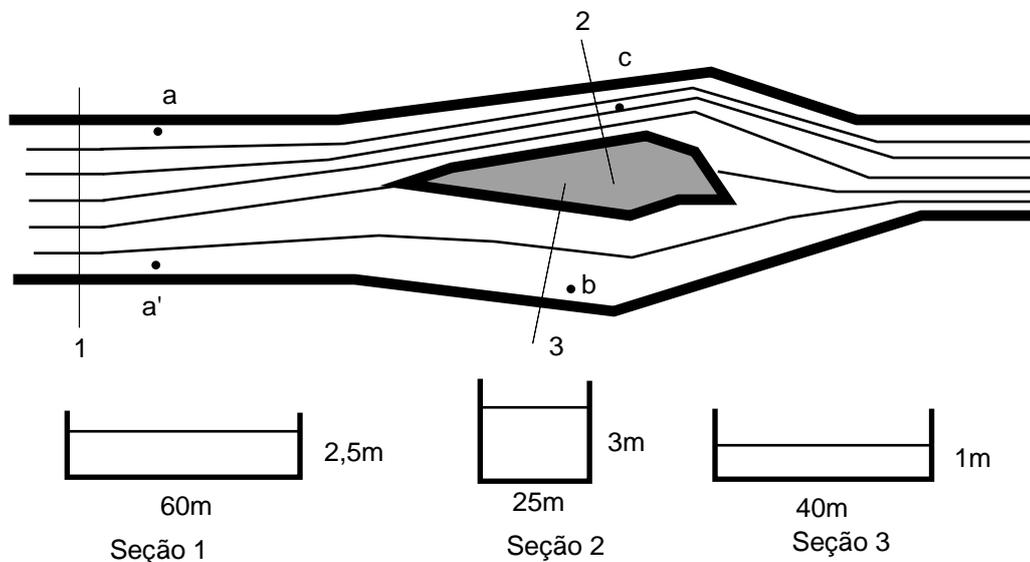
1.6.3. O reservatório de acumulação de uma pequena hidrelétrica recebe contribuição de 3 rios, com as vazões e conteúdo de sólidos suspensos médios dados na tabela.

	Rio 1	Rio 2	Rio 3	Saída
Vazão (m^3/s)	10	20	40	Q_{SAI}
C_{SS} (mg/L)	100	2000	1000	100

- Qual a vazão média de saída?
- Qual a taxa média de acúmulo de massa de Sólidos Suspensos no reservatório?
- Sabendo que a massa específica do material sólido depositado no reservatório é de 1600 kg/m^3 , calcular a perda anual de volume útil do reservatório devido ao acúmulo de sólidos.

1.6.4. Um meio para determinar a vazão de rios consiste na injeção de substâncias traçadoras, como sais ou corantes. Numa determinação de vazão em um córrego foram lançados 2l/s de água com uma concentração de corante fluorescente igual a 5g/l. Numa seção a jusante, após a completa mistura do traçador, retirou-se uma amostra da água, obtendo-se uma concentração de corante de 0,2g/l. Qual a vazão do córrego?

1.6.5. A sua equipe executou medidas de velocidade e determinou trajetórias de partículas num trecho de rio onde se pretende lançar um efluente industrial, obtendo as trajetórias apresentadas. Observou ainda que as trajetórias de partículas ao longo do tempo praticamente não variam, podendo-se considerar o escoamento permanente. A velocidade na seção 1 é praticamente uniforme em toda a seção e igual a 0,4m/s. Com base nessas informações, responda as seguintes questões:

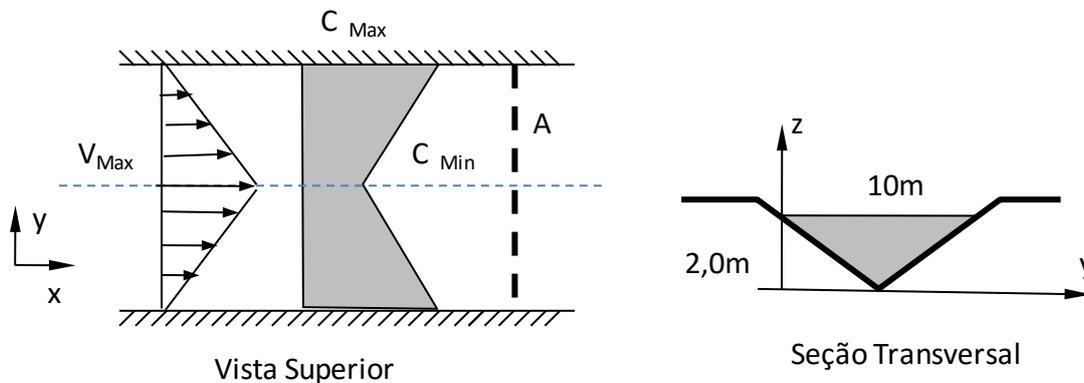


- Qual a vazão do rio e as velocidades nas seções 2 e 3 ?
- Se no ponto "a" forem lançados 150l/s de efluente com uma concentração volumétrica de 500mg/l de uma substância poluente inexistente no trecho a montante do rio, qual será a concentração resultante nos pontos "b", e "c"?

c) Existe a alternativa de lançamento do outro lado do rio, no ponto “a”. Do ponto de vista dos habitantes da ilha, qual dos pontos é preferível? Justifique sua resposta.

Dica: considere a divisão do escoamento pelas linhas de corrente e mistura completa em cada seção a jusante.

1.6.6. Dados os perfis de velocidade e de concentração de Cloretos na água do rio da figura, com seção aproximadamente triangular, pede-se calcular: a) o fluxo de volume em m^3/s ; b) o fluxo de massa de cloretos, em gramas por segundo. Dados $V_{Max} = 2,0m/s$, $C_{Max} = 200mg/L$ e $C_{Min} = 200mg/L$.



1.6.7. Um canal retangular de 1 m de profundidade e 3 m de largura, transporta água salgada ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) com concentração igual a 100 mg/kg, com um perfil de velocidade dado pela equação abaixo, com V em (m/s) e a cota y em metros, com origem no fundo do canal:

$$V = 1,5[1 - (y - 1)^2]$$

Pede-se calcular: a) velocidade média; b) fluxo de volume (vazão); c) fluxo de massa de água no canal; d) fluxo de sal conduzido pelo canal.

1.6.8. Para obter permissão legal para operar, uma indústria comprometeu-se a lançar no máximo 3 litros por segundo de efluentes com uma concentração máxima de cianetos igual a 3 miligramas por litro. Uma associação de defesa ambiental desconfia do cumprimento da lei pela indústria, mas uma comissão de vistoria formada para investigar o problema não foi bem recebida pela empresa. Em consequência, você foi consultado para reunir dados para amparar uma ação legal contra a indústria. Sua equipe fez medições da seção e velocidade do rio a montante da indústria suspeita, e das concentrações de cianeto acima e a jusante do ponto de lançamento, obtendo os seguintes dados:

MONTANTE: $V = 0,6m/s$, $A = 6,3m^2$, $CCN = 0,0000mg/l$

JUSANTE : $CCN = 0,0081mg/l$

Determinar se há base legal para processar a indústria.

1.7. Relação Geral Entre Velocidade e Fluxos

No item 1.4 deduzimos o caso de perfil de velocidades variável, perpendicular à seção considerada. No caso mais geral a seção pode ter forma e inclinação qualquer. Este caso será trabalhado, em primeiro lugar, transformando a superfície curva em uma superfície aproximada por várias superfícies planas. Assim, o problema geral de superfície curva se reduz a uma sucessão de problemas de superfícies planas com inclinação qualquer.

A seguir mostraremos como calcular o fluxo através de uma superfície plana de inclinação qualquer.

Passo inicial - Definição Vetorial da Área

Uma superfície de inclinação qualquer no espaço pode ser definida pelo seu vetor área, conforme mostra a Figura 1.9. Um elemento de área dA é definido por um vetor com módulo dA e direção do versor \vec{n} , normal à superfície considerada. O sentido do vetor área é positivo quando se dirige para fora em relação a uma superfície fechada. Se não existir uma superfície fechada para referência o vetor só possui direção definida.

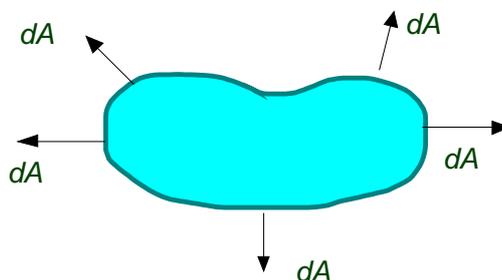


Figura 1.9: Definição vetorial da área.

$$d\vec{A} = dA \cdot \vec{n} \quad \text{sendo } \vec{n} \text{ o versor normal} \quad 1.12$$

Segundo passo – identificar o volume que atravessa a seção

Para isso iniciaremos com uma situação mais simples dada por velocidade constante na seção, (perfil uniforme) e área com inclinação constante. Imaginemos então um escoamento com perfil uniforme de velocidades, representado pelas linhas de corrente da Figura 1.10. A dimensão na direção z é dz .

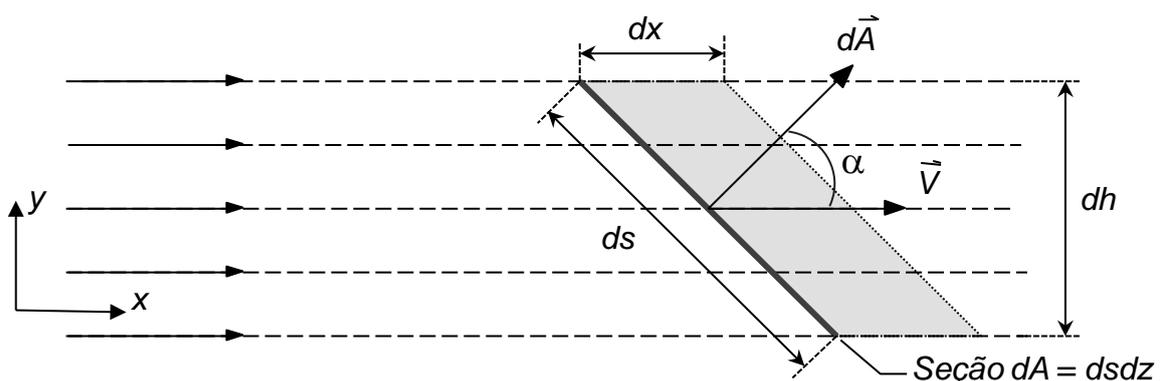


Figura 1.10: Fluxo de volume através de uma seção inclinada em relação à velocidade.

O módulo do vetor área na Figura 1.10 é dado por:

$$dA = ds dz$$

O volume é dado pela porção hachurada, que corresponde ao volume de um prisma cuja seção é um losango de base dx e altura dh .

$$dVol = dx dh dz$$

Temos, pela geometria da seção, que

$$dh = ds \cos \alpha$$

$$dVol = dx ds dz \cos \alpha \rightarrow dVol = dx dA \cos \alpha$$

Lembrando a definição de fluxo e que $dx = V dt$, vem:

$$dQ = \frac{dVol}{dt} = \frac{dx}{dt} dA \cos \alpha = V dA \cos \alpha \tag{1.13}$$

A equação 1.13 indica um produto escalar entre os vetores da velocidade e da área, de modo que:

$$dQ = \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{1.14}$$

Terceiro passo – identificar a Integral de Área

Já vimos no item 1.4 que um perfil qualquer de velocidades pode ser aproximado por segmentos elementares nos quais a velocidade é constante. A mesma idéia é válida para dividirmos também uma seção de forma qualquer em vários planos retilíneos.

Assim, qualquer área e qualquer perfil podem ser aproximados, no limite, por uma sucessão de áreas planas e perfis constantes, sendo que cada uma contribui com uma vazão elementar, conforme a equação 1.14. Veja a Figura 1.11.

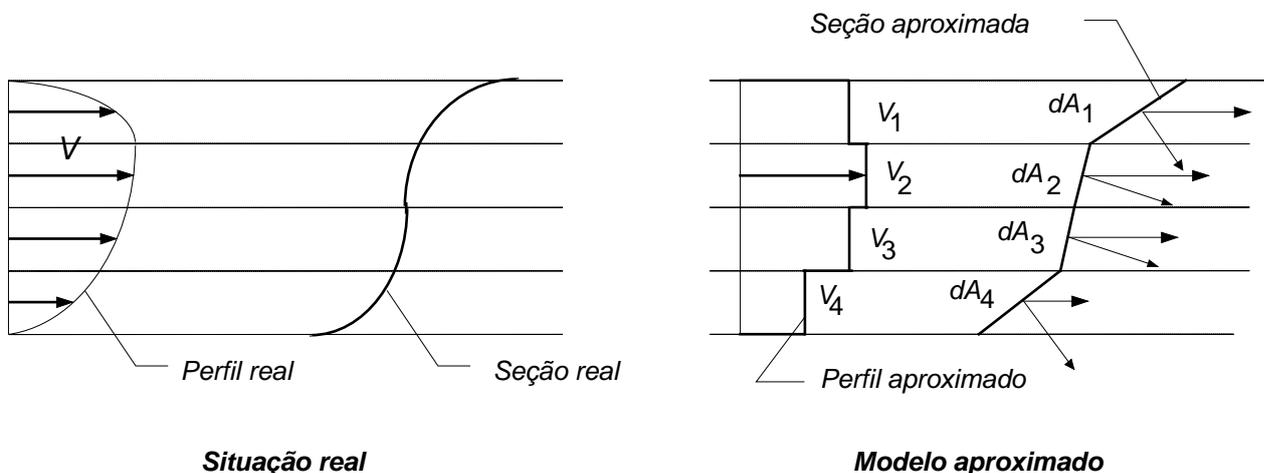


Figura 1.11: Fluxo de volume através de uma seção qualquer.

Podemos repetir o raciocínio utilizado no item 1.4. A vazão total é aproximada por

uma soma que engloba as contribuições de toda a área:

$$Q \approx dQ_1 + dQ_2 + dQ_3 + dQ_4$$

A aproximação é exata no limite, quando o número de áreas $dA \rightarrow \infty$

$$Q \cong \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \cdot d\vec{A}_i$$

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \cdot d\vec{A}_i \quad \rightarrow \quad Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad 1.15$$

O símbolo "A" na integral significa que o somatório das contribuições deve envolver toda a área A, e não que ela seja a variável de integração. Dependendo da forma da equação para expressar o elemento diferencial de área dA , que depende da função da velocidade, poderemos ter que efetuar uma integração simples ou dupla.

Uma vez que estabelecemos o fluxo de volume, fica fácil escrever diretamente a massa desse volume para encontrarmos a equação do fluxo de massa:

$$F_{MASSA} = \int_A \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad 1.16$$

E, para uma grandeza extensiva N qualquer, vale a expressão geral:

$$F_N = \int_A \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad 1.17$$

A equação 1.16 é a forma mais geral para o fluxo de volume, e a 1.17 sua equivalente para fluxo de grandeza extensiva qualquer transportada pelo fluido.

_____ Sobre o significado do sinal na equação vetorial

Nas equações 1.16, 1.17 e 1.18, válidas em 2 e 3 dimensões, o sinal indica diretamente se o fluxo é de entrada ou de saída. Devemos lembrar que o sentido do vetor área é de dentro para fora, quando são definidas superfícies fechadas. Veja os esquemas a seguir com a superfície fechada de um Volume de Controle.

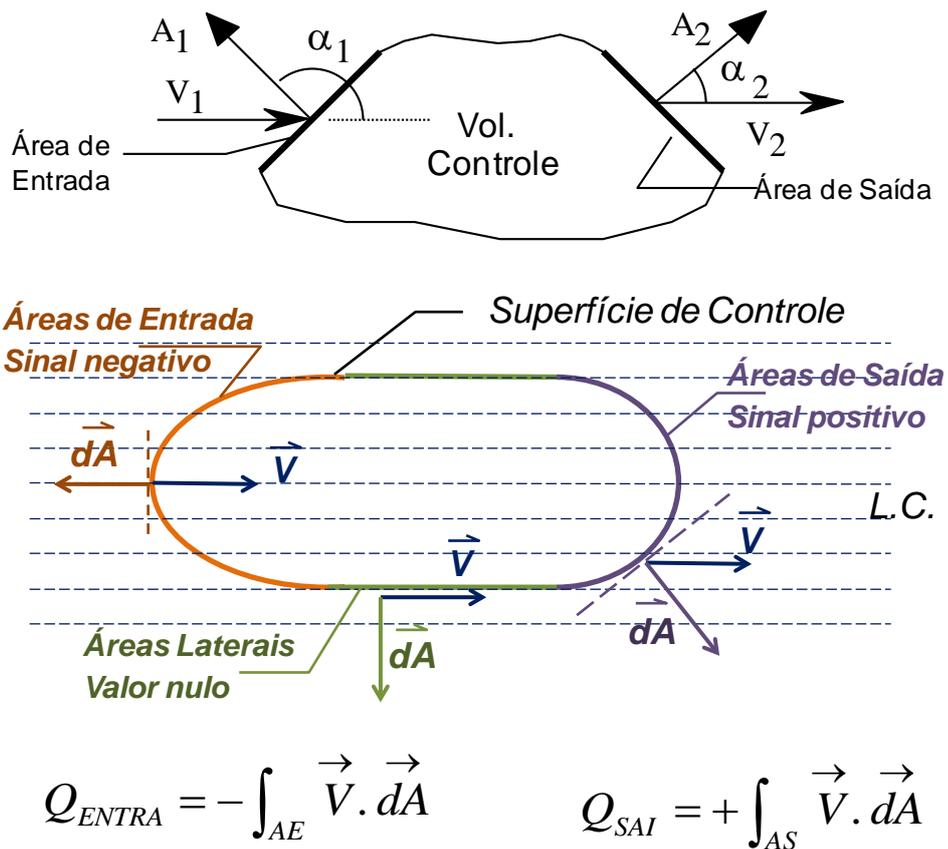


Figura 1.12: definição de áreas de entrada e saída por meio do ângulo entre os vetores.

Toda vez que o ângulo entre os dois vetores for $\alpha > 90^\circ$ o produto escalar será negativo. Isso só ocorre nos fluxos de entrada.

Por outro lado, um ângulo $\alpha < 90^\circ$ indica uma situação entre os vetores que só ocorre em áreas de saída.

Exemplo 1.7:

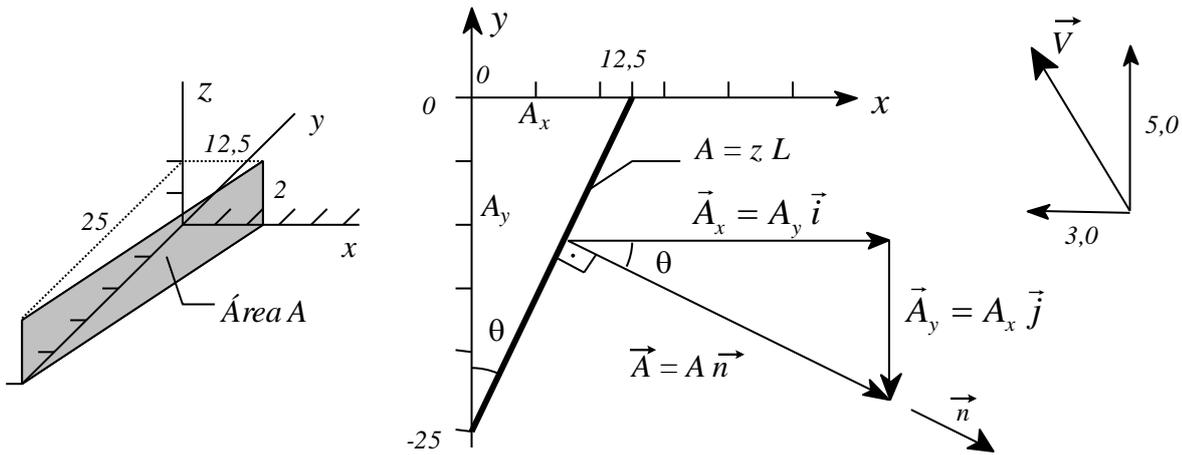
Uma trincheira de drenagem intercepta um aquífero numa seção retangular com 2m de altura, dada em m^2 por $\mathbf{A} = 50 \mathbf{i} - 25 \mathbf{j}$. A velocidade de percolação da água na seção considerada é dada em m/dia por $\mathbf{V} = -3,0 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}$. Calcule o fluxo de volume (vazão) de água a ser retirada da trincheira, para que a água não se acumule.

Análise:

Trata-se de um caso de velocidade constante ao longo da área, pois a velocidade não é função de x ou de y. Assim, a equação 1.14 pode ser aplicada diretamente a toda a área:

$$dQ = \vec{V} \cdot d\vec{A} \rightarrow Q = \vec{V} \cdot \vec{A}$$

O esquema a seguir permite visualizar a geometria do problema:



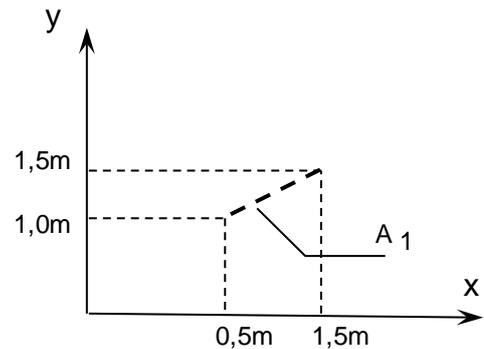
Solução:

$$Q = \vec{V} \cdot \vec{A} = (-3\vec{i} + 5,0\vec{j}) \cdot (50\vec{i} - 25\vec{j}) = -150 - 125 = -275 \text{ m}^3 / d$$

Comentários: A solução é teórica porque, na prática, a abertura da vala e o bombeamento irão alterar as condições de contorno, mudando as cargas e a direção da velocidade nas proximidades da abertura. Entretanto, o procedimento serve para ilustrar o cálculo, assim como permite introduzir a discussão sobre o valor negativo do fluxo. Afinal, o que significa este sinal?

Exemplo 1.8:

A figura mostra o traço de uma seção plana com 1m de espessura na direção z, perpendicular ao papel, submetido a um campo bidimensional de velocidades dado por $\vec{V} = 200x\vec{i} + 50y\vec{j}$ (m/s). Determinar o fluxo de volume que atravessa a seção A_1 indicada na figura.



Solução:

Inicialmente é necessário definir a área A_1 em termos vetoriais. Observe o esquema:

Temos:

$$d\vec{A} = z ds \vec{n}$$

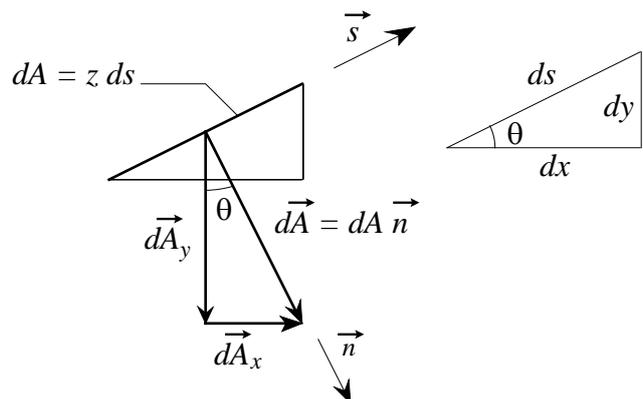
e também $d\vec{A} = dA_y \vec{i} - dA_x \vec{j}$,

$$dA_y = z ds \sin \theta = z dy$$

$$dA_x = z ds \cos \theta = z dx$$

Portanto,

$$d\vec{A} = z dy \vec{i} - z dx \vec{j}$$



A contribuição da densidade de fluxo na área dA é dada por:

$$dQ = \vec{V} \cdot d\vec{A} = (200x\vec{i} + 50y\vec{j}) \cdot (z\,dy\vec{i} - z\,dx\vec{j})$$

Efetuando o produto escalar e lembrando que $z = 1$

$$dQ = 200x\,dy - 50y\,dx$$

O fluxo total é a somatória de todas as contribuições ao longo da área A, dada pela integral de dQ :

$$Q = \int_A dQ = \int_{x=0,5}^{x=1,5} \int_{y=1,0}^{y=1,5} (200x\,dy - 50y\,dx)$$

A integral dupla não pode ser avaliada porque os limites não estão separados. Mas, ao longo do limite de integração temos que $dy = dx/2$. Isto transforma a integral dupla em simples:

$$Q = \int_{x=0,5}^{x=1,5} (100x - 50y) \, dx$$

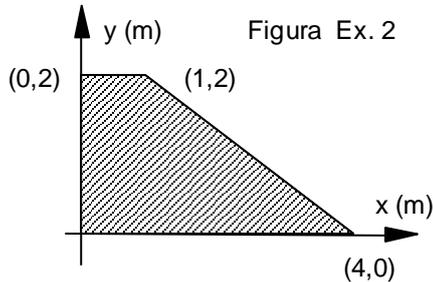
Ainda não pode ser avaliada porque sobre a área y é função de x . Para resolver, temos que notar que: $y = 0,75 + 0,5x$. Assim, o fluxo fica:

$$Q = \int_{0,5}^{1,5} (100x - 37,5 - 25x) \, dx = 75 \frac{x^2}{2} - 37,5x \Big|_{0,5}^{1,5} = 37,5$$

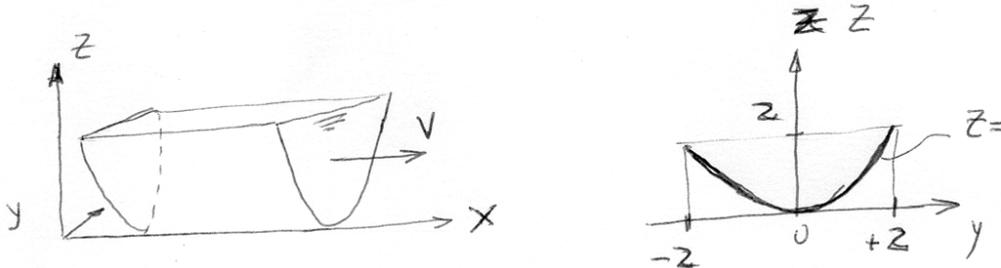
Resposta: A vazão que atravessa a seção A_1 é de **$Q = 37,5 \text{ m}^3/\text{s}$** .

1.8. Exercícios Sugeridos

1.8.1. Na seção definida pela figura foram observados os valores de velocidade dados por: $\mathbf{V} = (1 + 0,5xy) \mathbf{i} + 0,2xy \mathbf{j} + 0,2y \mathbf{k}$, sendo $V(\text{m/s})$ e x e y em metros. Calcular a vazão através da seção considerada.



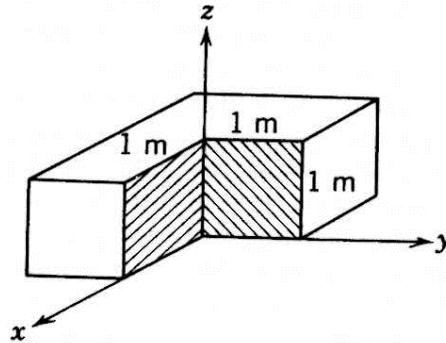
1.8.2. A Figura mostra um trecho de um canal regular com seção parabólica. Sabendo que a velocidade é dada por $\mathbf{V} = 0,5 z^2 \mathbf{i}$, e que a cota do fundo é dada por $Z = 0,5y^2$, calcular a vazão transportada.



1.8.3. Considere uma seção de escoamento paralela ao plano XZ, com 2 lados horizontais e 2 verticais. A seção é quadrada com 2m de lado. Um dos lados horizontais está situado em $z = 0\text{m}$ e $y = 5\text{m}$, entre $x = 0\text{m}$ e $x = 2\text{m}$. Outro lado horizontal está situado em $z = 2\text{m}$ ($y=5\text{m}$). Esta seção está num escoamento dado por $\vec{V} = 0,2yz \vec{i} + 0,2z^2 \vec{j} + 0,1x \vec{k}$, sendo V em (m/s) e ordenadas x , y e z em metros. Calcule a vazão através da superfície.

1.8.4. Um fluido escoar através das seções hachuradas do V.C. mostrado na figura. Pede-se:

- Sendo a velocidade em m/s dada por $\vec{V} = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} + 5 \vec{k}$, calcule a vazão total que entra ou sai do V.C.
- Com as velocidades do item anterior e sendo a concentração de uma substância dissolvida na água dada por $C \text{ (mg/L)} = 20 \text{ mg/L}$ calcule o fluxo de massa total da substância que entra ou sai do V.C.
- Com as velocidades do item anterior e sendo a concentração de uma substância dissolvida na água dada por $C \text{ (mg/L)} = 20x + 20y$, calcule o fluxo de massa total da substância que entra ou sai do V.C.
- Sendo a velocidade dada por $\vec{V} = 2y \vec{i} + 3z \vec{j} + 5x \vec{k}$. Calcule a vazão total que entra ou sai do V.C..



1.8.5. Um fluido escoa através da seção hachurada do V.C. mostrado na figura. Pede-se:

- Sendo a velocidade em m/s dada por $\vec{V} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, calcule a vazão que entra ou sai do V.C.
- Com as velocidades do item anterior e sendo a concentração de uma substância dissolvida na água dada por C (mg/L) = 20 mg/L calcule o fluxo de massa da substância que entra ou sai do V.C.
- Com as velocidades do item anterior e sendo a concentração de uma substância dissolvida na água dada por C (mg/L) = $20x + 20z$, calcule o fluxo de massa da substância que entra ou sai do V.C.
- Sendo a velocidade dada por $\vec{V} = 2y\vec{i} + 3z\vec{j} + 5x\vec{k}$, calcule a vazão que entra ou sai do V.C. pela superfície hachurada.

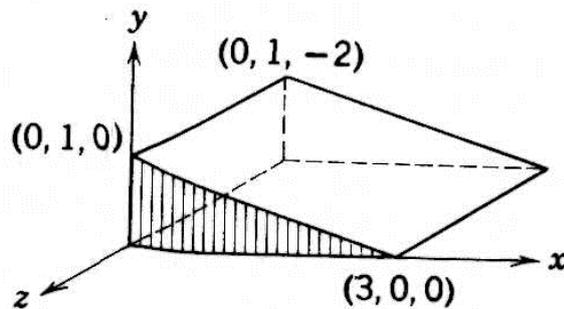


Figura 1

CAPÍTULO 2

DESCRIÇÃO ELEMENTAR DOS ESCOAMENTOS

A geometria de um escoamento qualquer fica completamente descrita pelo seu campo de velocidades pontuais. Algumas vezes é mais vantajoso descrever um escoamento por meio de outras características cinemáticas, que serão definidas neste capítulo.

Será demonstrado que existem dois métodos fundamentais para descrever um escoamento: o método Lagrangeano e o Euleriano. Entender as diferenças entre as duas formas de abordagem e as descrições e características cinemáticas derivadas de cada método é um dos objetivos deste capítulo.

O capítulo também pretende que o leitor se familiarize com as técnicas analíticas e experimentais existentes para descrição dos escoamentos.

2.1 Trajetória De Uma Partícula Fluida

O conceito de trajetória é bastante intuitivo. Imagine que você pode marcar uma determinada partícula do escoamento, e anotar sua posição ao longo do tempo. O resultado é uma linha definida como trajetória, ou seja, o lugar geométrico ocupado por uma partícula ao longo do tempo, mostrada na Figura 2.1.

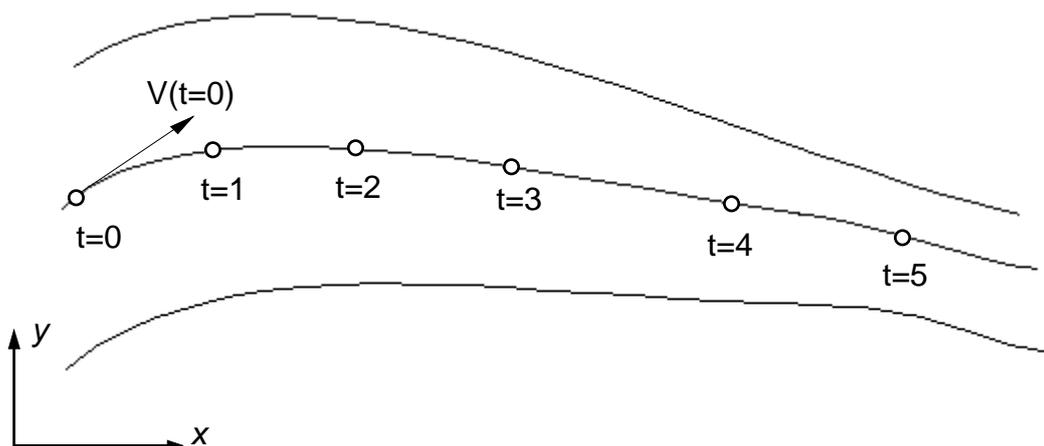


Figura 2.1: Trajetória de uma partícula

As trajetórias podem ser obtidas na prática por método fotográfico, lançando algumas partículas no escoamento e fazendo exposições sucessivas do mesmo negativo. As partículas sólidas lançadas no escoamento assumem a função de um **traçador**, ou seja, de uma substância que se move com a mesma velocidade do fluido em seu entorno.

A trajetória pertence a uma partícula, que é acompanhada no decorrer do tempo ao se deslocar pelo escoamento. Por isso se diz que a trajetória é um conceito Lagrangeano de descrição do escoamento.

2.2 Velocidade e Aceleração de uma Partícula Fluida

Velocidade de uma Partícula (Lagrange)

O movimento de uma partícula de fluido em um escoamento, pela abordagem Lagrangeana, é analisado de forma idêntica a um ponto material com uma trajetória curvilínea. Imagine um ponto movendo-se entre P_1 e P_2 num plano $x - y$ (Figura 2.2).

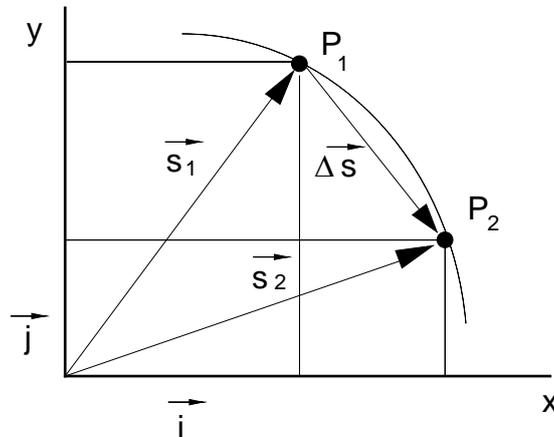


Figura 2.2: Vetor posição e vetor deslocamento entre dois pontos

O vetor posição é \vec{s} em relação à origem. Em P_1 :

$$\vec{s}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} \tag{2.1}$$

No ponto P_2 o vetor posição após o deslocamento pode ser escrito como $\vec{s} + \Delta\vec{s}$, onde $\Delta\vec{s}$ é o vetor deslocamento. Se o deslocamento $\Delta\vec{s}$ ocorrer num intervalo de tempo Δt , a velocidade média durante o deslocamento é $\vec{V}_{média} = \Delta\vec{s} / \Delta t$. Sua direção é a mesma do deslocamento $\Delta\vec{s}$ sobre a corda P_1P_2 .

A velocidade instantânea é calculada tomando-se intervalos de tempo cada vez mais curtos. Com isso, o comprimento da corda tende a zero, e a direção tende para a tangente à curva da trajetória em P_1 .

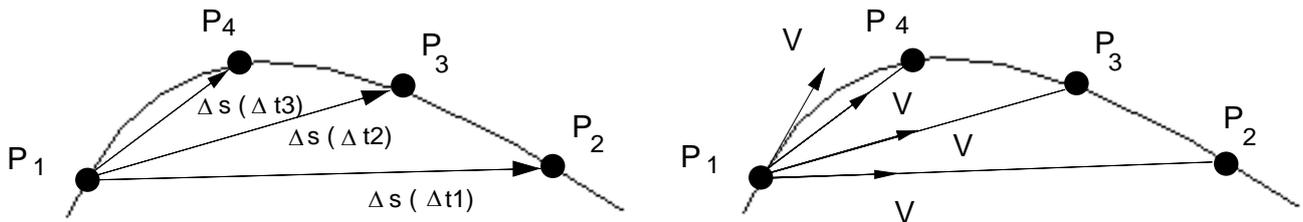


Figura 2.3: Velocidade instantânea como limite das velocidades médias

Na Figura 3.3 observamos que, a velocidade instantânea é sempre tangente à trajetória, e é dada pelo limite:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_s \tag{2.2}$$

O módulo do vetor é a velocidade escalar da partícula, ds/dt , e a direção é dada pelo versor tangente à trajetória.

A velocidade pode também ser calculada em coordenadas cartesianas, a partir das projeções sobre os eixos x e y . Enquanto o deslocamento se dá entre P_1 e P_2 as componentes do deslocamento $\Delta\vec{s}$ movem-se entre x_1 e x_2 e entre y_1 e y_2 .

$$\left. \begin{aligned} V_{x\text{ médio}} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow V_x = \frac{dx}{dt} \\ V_{y\text{ médio}} &= \frac{\Delta y}{\Delta t} \rightarrow V_y = \frac{dy}{dt} \end{aligned} \right\} \vec{V} = \frac{d\vec{s}}{dt} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} \quad 2.3$$

A velocidade ao longo da trajetória é a soma vetorial das componentes em x e y , e é sempre tangente à trajetória.

O método Lagrangeano é a base empregada nas técnicas de medição de campos de escoamento por imagem de partículas marcadas por traçadores, chamadas de **PIV** (*Particle Image Velocimetry*). Na medição com PIV, técnicas de computação gráfica são usadas para superpor duas imagens separadas por um intervalo de tempo Δt . Na imagem superposta, técnicas de correlação estatística são empregadas para identificar cada partícula na posição original com sua imagem deslocada, o que permite determinar os deslocamentos Δx e Δy e, portanto, a velocidade da partícula, com as equações 2.3. Com o crescimento da capacidade dos computadores, a PIV tem sido muito utilizada atualmente.

Também se usa a notação $u = V_x$; $v = V_y$ e $w = V_z$ para os componentes do vetor velocidade. Com esta notação a velocidade num escoamento tridimensional seria expressa por:

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

Em termos físicos, a descrição Lagrangeana da velocidade de uma dada partícula precisa acompanhar a partícula. Assim, na função $\vec{V}(x, y, z, t)$ que descreve a velocidade de cada partícula, as ordenadas x , y e z não são fixas. Por exemplo, a velocidade de uma partícula fluida, originalmente na posição x_0, y_0, z_0 no instante t_0 , é expressa pelas funções abaixo:

$$\begin{aligned} u &= V_x = f[x(t), y(t), z(t), t], \\ v &= V_y = g[x(t), y(t), z(t), t], \\ w &= V_z = h[x(t), y(t), z(t), t] \end{aligned}$$

_____ Aceleração de uma Partícula (Lagrange)

A abordagem Lagrangeana permite calcular facilmente a aceleração de uma partícula de fluido em um determinado ponto de sua trajetória ao longo do escoamento.

Quando o vetor velocidade tem sua direção constantemente mudada ao longo de uma trajetória curva, existe uma aceleração mesmo que o módulo da velocidade seja constante. Pensando no movimento das componentes x e y, vemos que são movimentos retilíneos acelerados, cuja soma vetorial compõe o movimento ao longo da curva. Deste modo a aceleração pode ser calculada a partir das componentes em x e y.

$$a_x = \frac{d}{dt}V_x; \quad a_y = \frac{d}{dt}V_y \quad 2.4$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = \frac{d}{dt}V_x\vec{i} + \frac{d}{dt}V_y\vec{j} \quad 2.5$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}[V_x\vec{i} + V_y\vec{j}] \quad 2.6$$

_____ Coordenadas Intrínsecas

Usando o sistema de coordenadas intrínsecas a aceleração da partícula terá as componentes tangencial e normal à trajetória, mostradas na Figura 2.4:

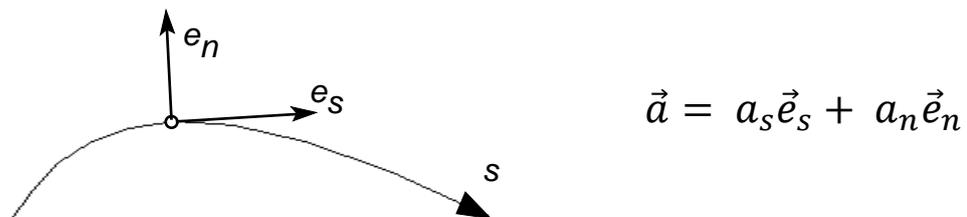


Figura 2.4: Sistema de coordenadas intrínsecas

_____ Aceleração Tangencial

$$a_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_s}{\Delta t} \quad \Delta V_s = \frac{\partial V}{\partial s} \Delta s$$

$$a_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = V \frac{\partial V}{\partial s} \quad \therefore \boxed{a_s = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial s^2}} \quad 2.7$$

_____ Aceleração Normal

A Figura 2.5 mostra o deslocamento de uma partícula entre P e P', com velocidade constante em módulo, numa trajetória curva com raio r:

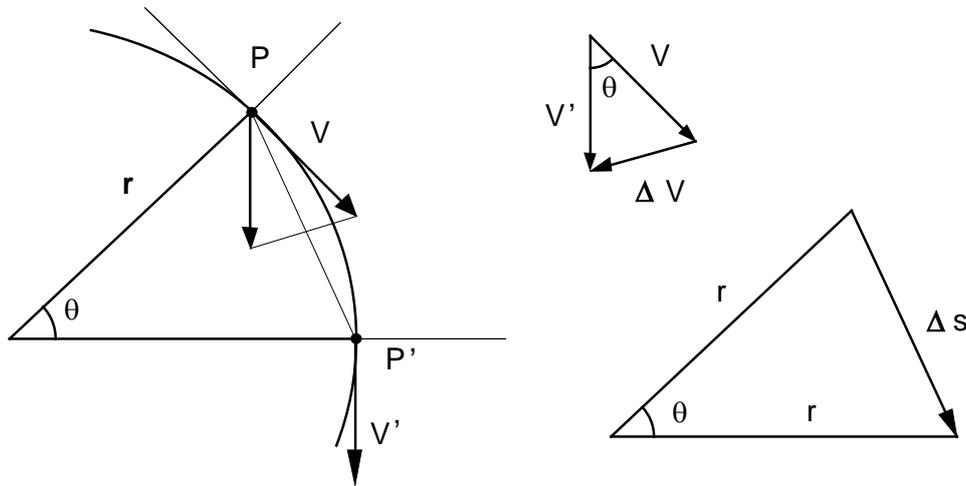


Figura 2.5: Aceleração normal numa trajetória circular

A variação de velocidade entre P e P' é dada por $\Delta \vec{V} = \vec{V} - \vec{V}'$. Por semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta s}{r}$$

Δs é o comprimento da corda PP', que é aproximadamente igual ao arco de circunferência entre P e P'. Este comprimento é percorrido pelo ponto em um intervalo Δt , ou seja, $\overline{PP'} = V \Delta t$:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{V \Delta t}{r} \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V^2}{r}$$

A relação torna-se exata no limite, quando $\Delta t \rightarrow 0$ e $\theta \rightarrow 0$. Nessas condições temos a aceleração normal instantânea.

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V^2}{r}$$

A direção e o sentido são os mesmos de ΔV , ou seja, segundo o raio da curva, no sentido da circunferência para o centro:

$$\vec{a}_n = - \frac{V^2}{r} \vec{e}_n \quad 2.8$$

O versor normal aponta sempre para fora da curva, o que explica o sinal negativo. A aceleração é sempre dirigida em direção ao centro, portanto em sentido contrário ao versor.

2.3 ***Linha de Corrente - Um Novo Ponto De Vista***

Até aqui consideramos uma partícula de fluido, acompanhando seu deslocamento ao longo do tempo. Entretanto, em muitas análises de escoamentos interessa descrever o movimento a partir da **observação de um ponto fixo no espaço**, em uma seção de interesse.

*A análise do escoamento a partir de um ponto fixo no espaço é denominada **Análise Euleriana**, ou método de Euler (1707-1783).*

Em oposição ao método de Euler, no item 2.1 consideramos uma partícula fluida, acompanhando-a no espaço, em seu movimento ao longo do tempo, definindo o conceito de trajetória.

*O ponto de vista que considera uma partícula é chamado de **Análise Lagrangeana**, ou método de Lagrange (1736-1813).*

Se considerarmos um ponto do escoamento e tentarmos descrever as velocidades de todas as partículas do escoamento que passam pelo ponto especificado (abordagem Euleriana), teremos uma descrição diferente das velocidades. Não podemos nos valer da trajetória, pois não estamos mais acompanhando as partículas e cada partícula que sucessivamente passa pelo ponto de interesse pode ter uma trajetória diferente. Para desenvolver o equacionamento Euleriano, portanto, é necessário usar o conceito de Linhas de Corrente

Linhas de Corrente

Uma representação dos escoamentos pode ser obtida quando se traçam linhas contínuas que são, em cada ponto, tangentes ao vetor velocidade. Essas linhas são chamadas de *Linhas de Corrente*. Podem ser obtidas por meio de uma fotografia do escoamento, onde se lançou um grande número de partículas visíveis. Com um tempo de exposição apropriado, cada partícula deixará no negativo um segmento correspondente ao caminho percorrido durante o tempo de exposição, conforme demonstra o esquema da Figura 2.6.

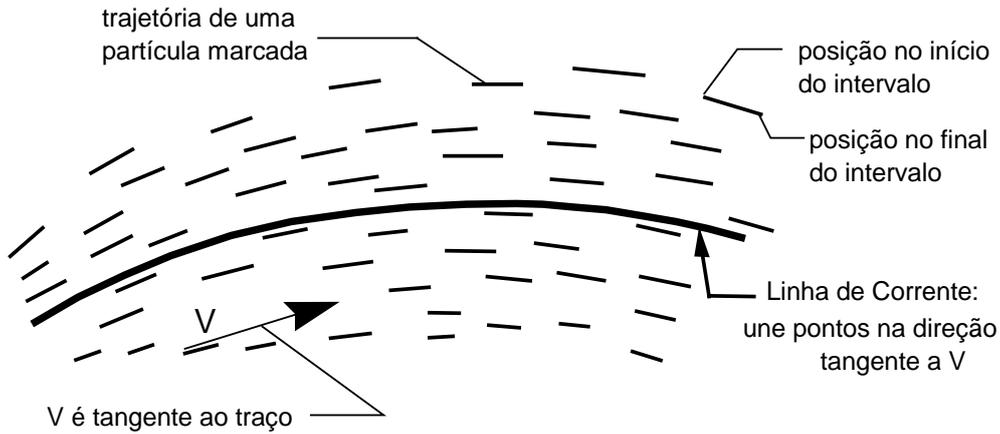


Figura 2.6: Esquema mostrando a técnica de traçado de linhas de corrente

É importante observar que as linhas de corrente descrevem simultaneamente a direção instantânea de muitas partículas. A Linha de Corrente pertence ao escoamento, ou seja, descreve as direções do campo de velocidades num dado instante, ao passo que as trajetórias pertencem a uma determinada partícula ao longo do tempo.

Para não esquecer

Linhas de corrente (Euler): exposição única da foto, muitas partículas

Trajetoira (Lagrange): uma partícula, múltiplas exposições do mesmo negativo

A Figura 2.7 mostra um exemplo real de visualização num escoamento bidimensional ao redor de um perfil de asa. Nesse caso a água foi marcada com partículas de pó de alumínio, deixando os traços brancos que se pode ver na fotografia. Com esse apoio pode-se traçar facilmente as linhas de corrente do escoamento. Mais exemplos dessa técnica podem ser vistos no Rui Vieira, cap. 1 vol.2, Cinemática.

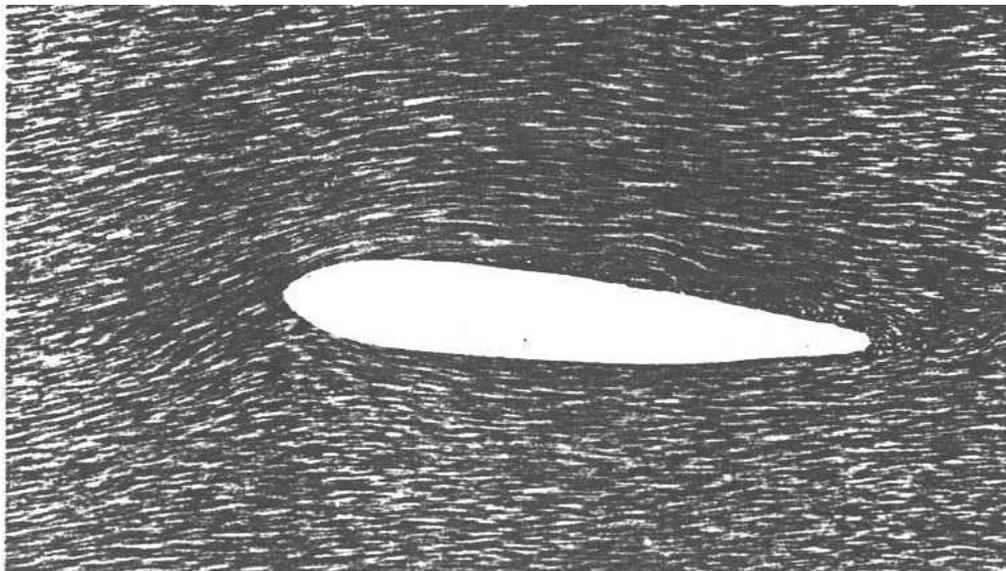


Figura 2.7: Exemplo de visualização de escoamento para traçar linhas de corrente. Fonte Rui Vieira.

Como a Linha de Corrente é tangente aos vetores de velocidade de todas as partículas que definem seu traçado, não há escoamento de fluido através de uma Linha de Corrente. Uma partícula que se move ao longo de uma Linha de Corrente, em qualquer tempo, tem um deslocamento Δs com componentes Δx , Δy e Δz , cuja direção é a mesma do vetor velocidade \mathbf{V} . Assim, temos:

$$\Delta x = V_x \Delta t ; \Delta y = V_y \Delta t ; \Delta z = V_z \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{V_x} = \frac{\Delta y}{V_y} = \frac{\Delta z}{V_z}$$

No limite para $dt \rightarrow 0$, obtém-se a equação da Linha de Corrente:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad 2.9$$

2.4 Velocidade e Aceleração em um Ponto (Análise Euleriana)

Vamos considerar uma Linha de Corrente e as partículas que passam por um ponto P de um escoamento com velocidade variável no tempo e no espaço. Imagine, por exemplo as linhas de corrente no interior de um tubo curvo que drena um reservatório de água. Com a diminuição do nível na caixa, a velocidade diminui em cada ponto, e, ao passar pela curva, cada partícula sofre uma aceleração que muda a direção de sua velocidade. Essa situação é esquematizada na Figura 2.8.

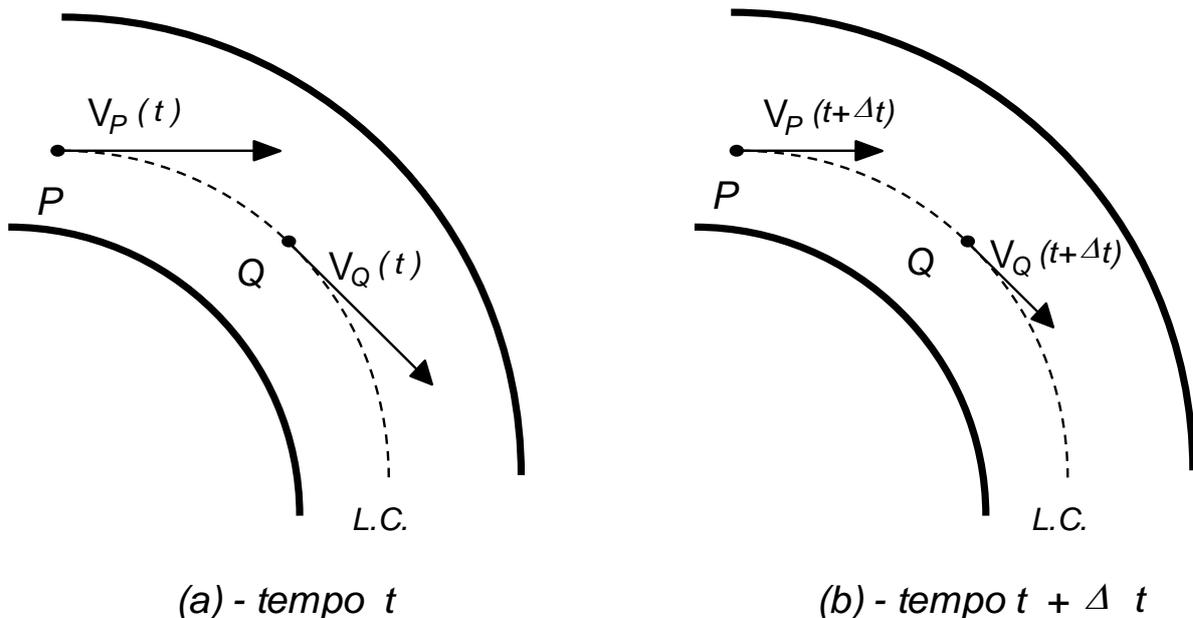


Figura 2.8: Variações da velocidade num escoamento não permanente numa curva de tubulação.

_____ Aceleração Local:

Ao medirmos a velocidade V_P num ponto P em dois intervalos de tempo, podemos verificar uma variação, conforme o esquema vetorial da Figura 2.9.

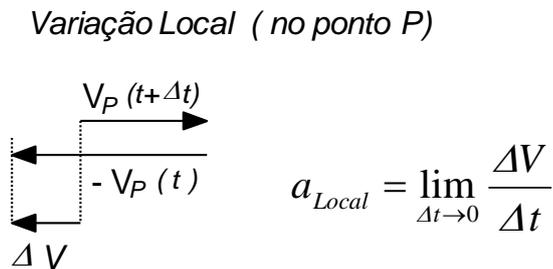


Figura 2.9: Variação local da velocidade: mesmo ponto, dois instantes de tempo.

A taxa de variação da velocidade com o tempo em um dado ponto do escoamento é chamada de **Aceleração Local**. Corresponde a uma aceleração, das partículas que passam pelo ponto P, que ocorre no decorrer do tempo.

Portanto, a aceleração local é dada por

$$a_{Local} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_P(t+\Delta t) - V_P(t)}{\Delta t} = \frac{\partial V}{\partial t} \quad 2.10$$

sendo $V(P, t)$ e $V(P, t + \Delta t)$ a velocidade de duas partículas que passam pelo ponto P nos dois instantes de tempo considerados. O limite corresponde à derivada da velocidade em relação ao tempo. Foi usado o símbolo de derivada parcial em 2.10 porque a velocidade depende também da localização no espaço.

_____ Aceleração Convectiva:

Podemos também observar dois pontos diferentes no mesmo instante de tempo, como os pontos P e Q da Figura 2.8 e verificarmos que suas velocidades V_P e V_Q são diferentes, seja em módulo ou direção ou em ambos, conforme o esquema vetorial da Figura 2.10.

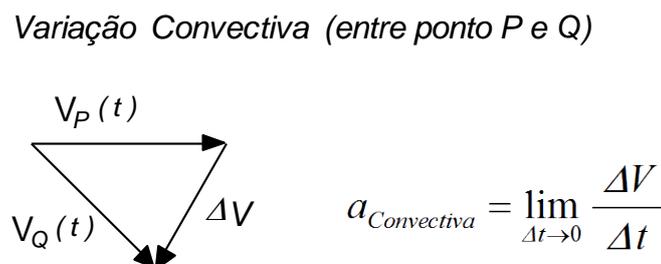


Figura 2.10: Variação convectiva da velocidade: dois pontos no mesmo instante de tempo.

O esquema vetorial mostra que as partículas do escoamento estão sofrendo uma variação se deslocarem Δs no espaço entre os pontos P e Q. A taxa de variação no tempo sentida pela partícula ao se deslocar no espaço é chamada de **Aceleração Convectiva**.

A variação da velocidade no espaço é dada por:

$$\Delta V_{\text{Convectiva}} = V_Q(t) - V_P(t)$$

A partícula sofre esta variação de velocidade no tempo que levou para percorrer a distância Δs entre os pontos P e Q com velocidade V, ou seja, $\Delta t = \Delta s/V$:

Portanto, a aceleração convectiva é dada por

$$a_{\text{Convectiva}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_Q(t) - V_P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_Q(t) - V_P(t)}{\Delta s/V} \quad 2.11$$

No limite quando Δt tende a zero o deslocamento também fica infinitesimal, ou seja, $\Delta s \rightarrow 0$, e a equação 2.11 fica:

$$a_{\text{Convectiva}} = V \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{V_Q(t) - V_P(t)}{\Delta s} \right) = V \frac{\partial V}{\partial s} \quad 2.12$$

Em que dispensamos a identificação do ponto porque os pontos P e Q coincidem no limite.

É interessante observar que a velocidade com que a partícula se desloca entre os dois pontos influencia na aceleração que a partícula sofre. Mesmo que exista uma grande diferença de velocidade entre os dois pontos, se a partícula demorar muito tempo no deslocamento a aceleração convectiva será pequena.

_____ **Aceleração Total: Derivada Substantiva**

Uma partícula de fluido no escoamento sente simultaneamente as duas acelerações. Assim, a aceleração da partícula, medida com variáveis com variáveis Eulerianas, é dada por:

$$a = a_{\text{Local}} + a_{\text{Convectiva}}$$

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \quad 2.13$$

Para tornar clara a distinção entre o uso de variáveis Lagrangeanas e Eulerianas, usa-se definir a aceleração com o operador que chamamos de derivada substantiva, definido a seguir:

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \quad 2.14$$

Em que a notação DV/Dt indica que a derivada é uma operação a ser efetuada com as velocidades de uma determinada partícula da substância em escoamento, ou seja, variáveis Lagrangeanas. O segundo membro da equação 2.14 é, conforme deduzimos, a mesma quantidade (aceleração sentida pela partícula) definida com as variáveis Eulerianas (velocidades medidas em pontos definidos do espaço).

Aceleração de uma partícula

$$\begin{array}{c}
 \text{Euler} \\
 \text{-----} \\
 a = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \\
 \begin{array}{ccc}
 \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \text{Lagrange} & \text{Local} & \text{Convectiva}
 \end{array}
 \end{array}$$

O resultado da equação 2.15 pode ser deduzido também a partir das regras do cálculo de funções de várias variáveis, pois $V = f(s, t)$, sendo s a coordenada intrínseca que define a trajetória.

Assim, segundo o cálculo:

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial s} \Delta s \quad \text{no limite,} \quad dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial s} ds \quad 2.15$$

A aceleração fica então:

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \quad 2.16$$

Uma apresentação alternativa de 2.13 ou 2.16 é a seguinte:

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} \right) \quad 2.17$$

_____ Aceleração de uma Partícula em Coordenadas Cartesianas

A extensão da equação 2.16 para o caso da velocidade descrita pelas ordenadas do sistema cartesiano é direta. Uma partícula de fluido num escoamento tridimensional tem sua velocidade descrita em termos das componentes cartesianas conforme segue:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad 2.18$$

Sendo a velocidade uma função de x, y, z e do tempo, a derivada total é dada por:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad 2.19$$

Sendo $dx/dt = u$, $dy/dt = v$ e $dz/dt = w$, as componentes da velocidade da partícula.

Com isso a eq. 2.19 fica:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \quad 2.20$$

A equação 2.20 corresponde no sistema cartesiano à equação 2.16 no sistema intrínseco de coordenadas, para o caso de escoamento tridimensional. A aceleração pode ser descrita de forma mais compacta, usando a notação do operador gradiente para descrever as derivadas espaciais,

$$\vec{\nabla} \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \vec{k}$$

Vemos que o termo convectivo pode ser escrito como

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \vec{i} + (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \vec{j} + (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \vec{k}$$

Os versores perpendiculares se anulam no produto escalar, restando:

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

Assim, em notação vetorial a equação 2.20 fica:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} \quad 2.21$$

As três equações escalares correspondentes à equação 2.20, ou à sua forma compacta, equação 2.21, são dadas por:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

2.22

EXEMPLO 2.1:

O escoamento permanente de água através de um bocal convergente, conforme mostrado na Figura 2.11, pode ser descrito pela abordagem unidimensional com uma velocidade média que varia em função de x , $u(x)$.

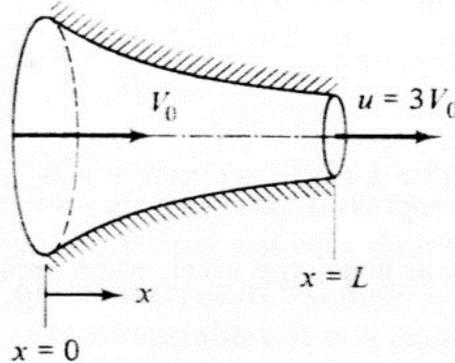


Figura 2.11: Bocal convergente com variação linear da velocidade.

Supondo que a velocidade varie linearmente entre V_0 e $3V_0$ ao longo do bocal com comprimento L , pede-se: a) calcule a aceleração como função de x ; b) sendo $V_0 = 3 \text{ m/s}$ e $L = 1\text{m}$, calcule a aceleração na entrada e na saída do bocal.

Solução:

O problema é unidimensional na direção x : $\vec{V} = V_x \vec{i} = u \vec{i}$

Com as condições de contorno do problema, a velocidade é dada por:

$$u(x) = V_0 \left(1 + \frac{2x}{L}\right)$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2V_0}{L}$$

Item a) Usando a equação 2.18:

$$a = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2V_0^2}{L} \left(1 + \frac{2x}{L}\right)$$

Item b) Substituindo os valores numéricos:

Na entrada, $x = 0$,

$$a = \frac{2 \times 3^2}{1} \left(1 + \frac{2 \times 0}{1}\right) = 18 \text{ m/s}^2$$

Na saída, $x = 1\text{m}$,

$$a = \frac{2 \times 9^2}{1} \left(1 + \frac{2 \times 1}{1}\right) = 486 \text{ m/s}^2$$

A aceleração equivale a $1,8g$ na entrada do bocal, atingindo cerca de 50 vezes a aceleração da gravidade na saída do bocal. Este exemplo mostra que esforços dinâmicos elevados podem se desenvolver no interior dos escoamentos, mesmo em regime permanente.

EXEMPLO 2.2:

Encontre a aceleração de uma partícula no campo Euleriano de velocidade dado por:

$$\vec{V}(x, y, z, t) = 3t\vec{i} + xz\vec{j} + ty^2\vec{k}$$

Solução: Será aplicada a equação 2.22.

Inicialmente, identificamos os componentes: $u = 3t$; $v = xz$ e $w = ty^2$.

Calculamos agora as derivadas parciais necessárias

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 3\vec{i} + y^2\vec{k} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = z\vec{j} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = 2ty\vec{k} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = x\vec{j}$$

Aplicando as derivadas conforme a equação 2.22:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + y^2\vec{k} + (3t)z\vec{j} + (xz)2ty\vec{k} + (ty^2)x\vec{j}$$

Colocando os termos juntos:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + (3tz + ty^2x)\vec{j} + (y^2 + 2xzyt)\vec{k}$$

EXEMPLO 2.3:

Um escoamento permanente bidimensional ocorre no plano xz, sendo $x > 0$, $z > 0$ e A uma constante, com a velocidade dada por:

$$\vec{V}(x, z) = -Ax\vec{i} + Az\vec{k}$$

Determine a equação das Linhas de Corrente e a aceleração das partículas.

Solução: Será aplicada a equação 2.9.

Sendo dz e dx o espaçamento entre dois pontos da L.C, temos:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{w}{u} = \frac{Az}{-Ax} = -\frac{z}{x}$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(z) = -\ln(x) + C'$$

Fazendo a substituição: $\ln C = C'$:

$$\ln(z) = \ln(C/x) \quad \rightarrow \quad zx = C$$

Observa-se que as L.C. formam uma família de hipérbolas, cujo aspecto é mostrado na figura a seguir:

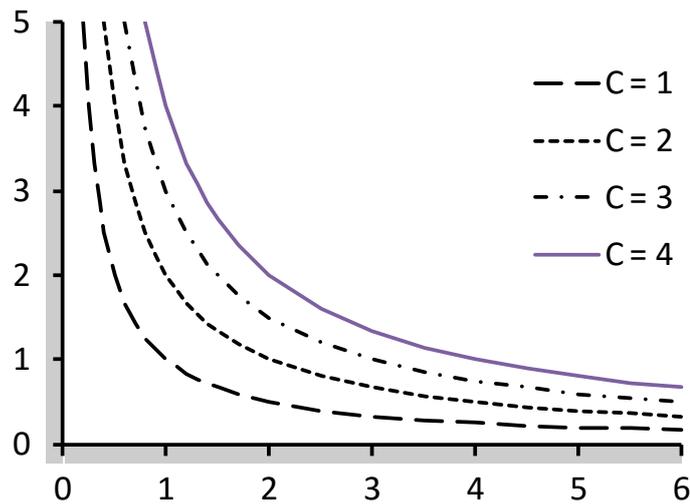


Figura 2.12: Linhas de Corrente de escoamento nas proximidades de um canto.

Fica para o leitor demonstrar as acelerações: $a_x = A^2 x$; $a_z = A^2 z$.

Taxa de variação de outras grandezas

O conceito de variação local e convectiva surge sempre que precisarmos avaliar taxas de variação no tempo de uma grandeza qualquer usando informações Eulerianas.

A Figura 2.13 ilustra o caso com a temperatura sentida pelos ocupantes de um carro durante uma viagem de Ilha Solteira para São Carlos. A informação Euleriana disponível é a variação local das temperaturas medidas nas duas cidades. Qual é a taxa de variação média no tempo, sentida pelos ocupantes do carro, que viaja com janelas abertas?

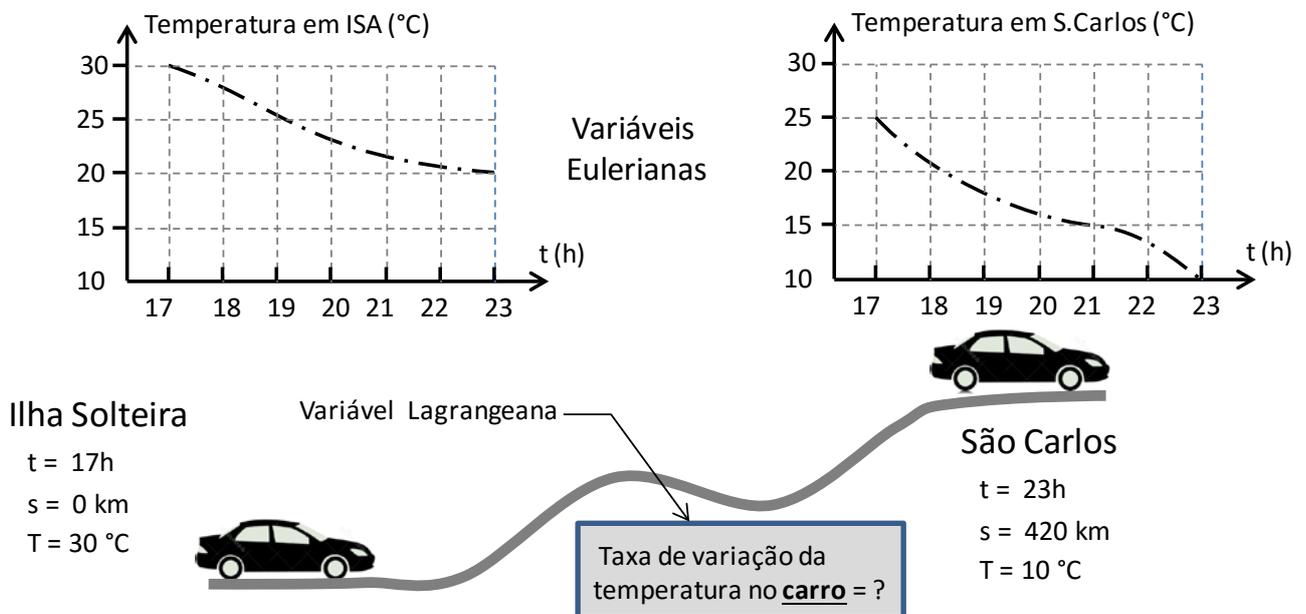


Figura 2.13: Ilustração de cálculo de taxa de variação Lagrangeana com variáveis Eulerianas.

A taxa de variação média (Lagrangeana) é dada por:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{10 - 30}{23 - 17} = \frac{-20^{\circ}\text{C}}{6\text{ h}} = -3,33^{\circ}\text{C/h}$$

A taxa de variação local em ISA é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{20 - 30}{23 - 17} = \frac{-10^{\circ}\text{C}}{6\text{ h}}$$

A velocidade média do carro é

$$V = \frac{420}{6} = 72\text{km/h}$$

A taxa de variação convectiva da temperatura é dada por:

$$V \frac{\partial T}{\partial s} = 72 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right) \frac{25 - 30}{420} \left(\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{km}} \right) = \frac{-10^{\circ}\text{C}}{6\text{ h}}$$

Portanto, também no campo de temperaturas do exemplo, a

Variação Lagrangeana $(-20^{\circ}\text{C}/6\text{h}) = \text{Local } (-10^{\circ}\text{C}/6\text{h}) \text{ mais a Convectiva } (-10^{\circ}\text{C}/6\text{h})$.

2.5 Linha de Emissão e Linha de Tempo

____ Linha de Emissão

Se injetarmos continuamente um corante num determinado ponto do escoamento, obteremos ao fim de algum tempo uma figura chamada de **Linha de Emissão**.

A Figura 2.14 apresenta duas fotografias obtidas no túnel hidrodinâmico do DEM-FEIS/UNESP, contendo vórtices que se formam a jusante de obstáculos nos escoamentos. A seta mostra o sentido do escoamento.

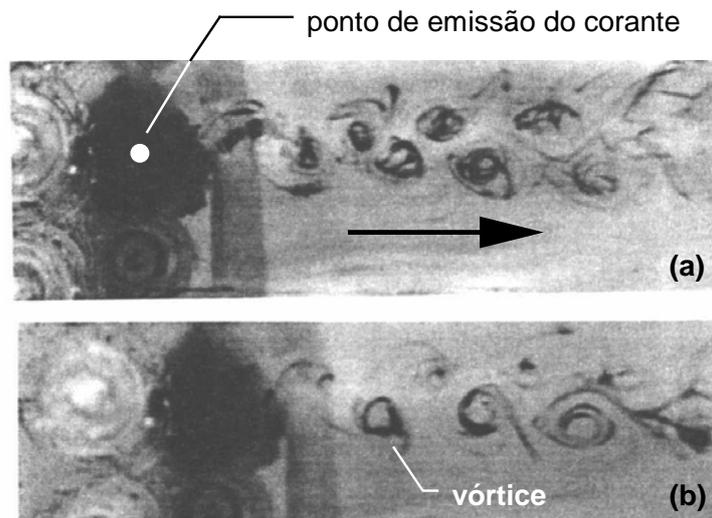


Figura 2.14: Linhas de emissão de ponto a jusante de cilindro. Fotos: cortesia do Prof. Edson Del Rio.

Todas as partículas marcadas com o corante passaram em instantes anteriores pelo ponto de injeção do corante. Portanto, o conjunto de vórtices constitui a linha de emissão do ponto de injeção do corante, identificado na foto (a) pelo ponto branco.

Uma linha de emissão é o lugar geométrico ocupado pelas partículas que passaram por um dado ponto do escoamento em instantes anteriores. Cada ponto do escoamento

pode ter uma linha de emissão diferente, e como a linha de emissão é uma representação instantânea, pode variar ao longo do tempo. A forma mais comum de linhas de emissão que observamos no dia a dia é proporcionada pelas chaminés de fábricas. Os diferentes padrões de escoamento identificados pelos vórtices das fotos (a) e (b) ocorrem devido à variação da velocidade do fluido.

O mesmo tipo de estrutura (vórtices a jusante de um cilindro) pode ser visualizado por meio das linhas de corrente, conforme o exemplo da Figura 2.15. No caso da figura foi utilizada a técnica do pó de alumínio, obtendo-se a foto com tempo de exposição suficientemente longo para que as trajetórias apareçam como traços brancos.

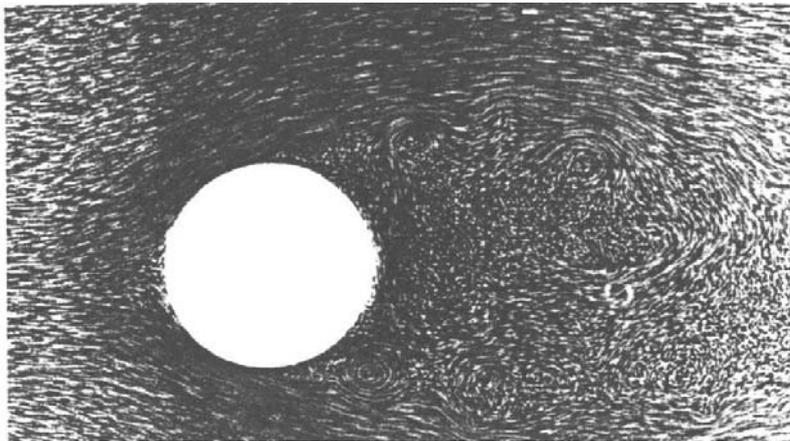


Figura 2.15: Vórtices observados pelas linhas de corrente. Obtida de VIEIRA, R.C.C.S.

Você pode observar também com facilidade as linhas de emissão de um bocal de mangueira de jardim. Movimente a mão de forma ritmada em um percurso fixo, e divirta-se com os desenhos que o jato forma no ar. Esses desenhos nada mais são que as linhas de emissão do bocal da mangueira em movimento. Observe como a trajetória de cada gota de água em particular é completamente diferente da linha de emissão. A Figura 2.16 mostra um esquema das linhas de emissão que podem ser obtidas com esse simples experimento.

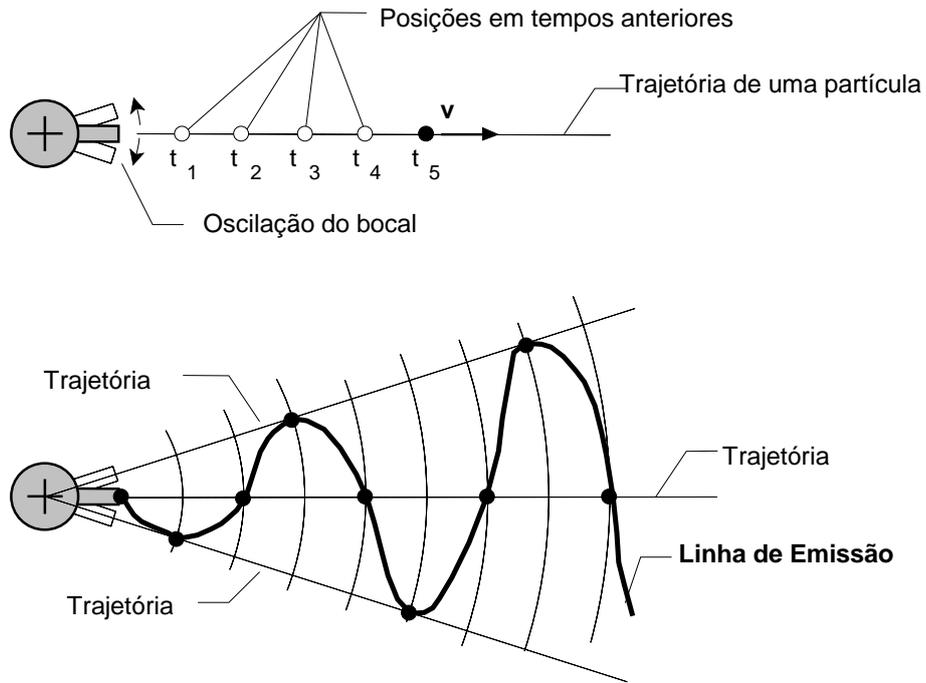


Figura 2.16: Exemplo esquemático de Linha de Emissão de um bocal oscilante.

A linha de emissão foi desenhada na Figura 2.16 unindo a posição de diferentes partículas num mesmo instante. As trajetórias extremas e a central são apresentadas em tracejado e em pontilhado os espaços percorridos pelas partículas a cada $\frac{1}{4}$ de ciclo do bocal. Se a frequência do movimento de oscilação variar as linhas de emissão resultantes descreverão curvas mais abruptas (para aumento da frequência) ou mais suaves (para diminuição da frequência de oscilação).

_____ Linha de Tempo

A Linha de Tempo é individualizada marcando-se num determinado instante as partículas alinhadas segundo algum critério de interesse. Diversas linhas de tempo podem ser obtidas fotografando-se o escoamento ao longo do tempo. A Figura 2.17 mostra exemplos de duas linhas de tempo, marcadas com (b) e (c), obtidas com injeção de bolhas de hidrogênio na linha (a).

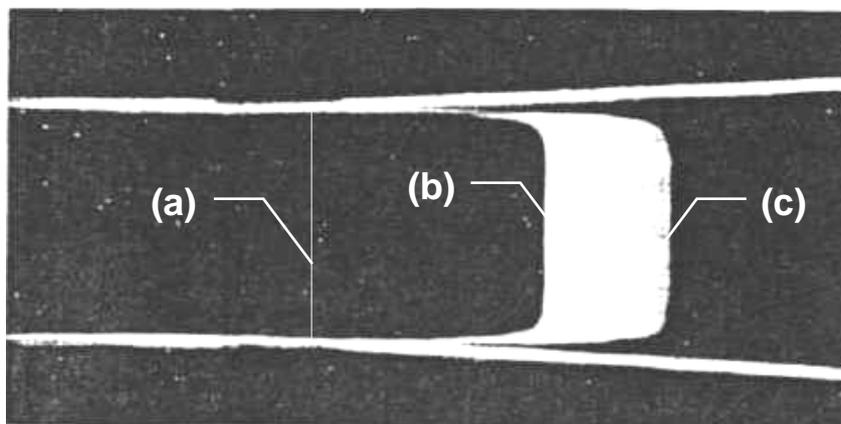


Figura 2.17: Exemplo de linhas de tempo construídas com injeção de bolhas de hidrogênio

A Figura 2.17 mostra como linhas de tempo marcadas pelo método de bolhas de hidrogênio podem ser usadas para determinar a diferença de velocidades num escoamento. As bolhas são geradas por eletrólise da água que ocorre no contato com um fio submetido a uma corrente polarizada. As bolhas de hidrogênio são carreadas pelo escoamento, servindo como traçador. Observa-se na linha (a) o lugar onde inicialmente as partículas foram marcadas. A corrente elétrica foi fornecida durante um intervalo de tempo conhecido, gerando muitas linhas de tempo que foram carreadas pelo escoamento. A foto só permite visualizar com clareza a primeira linha de tempo (c), marcada no início do pulso de corrente, e a última (b), que recebeu as bolhas em (a) no final do pulso de corrente.

2.6 Perfis de Velocidade

A representação gráfica em escala das velocidades ao longo de uma linha perpendicular à direção da velocidade dá origem a um perfil. Um perfil pode ser obtido experimentalmente, ou calculado por meio de equações do escoamento.

A técnica utilizada para determinar experimentalmente um perfil depende da escala e do tipo de escoamento. Uma experiência simples consiste em medir o perfil de velocidades do ar próximo à superfície da terra. Nesse caso as velocidades podem ser medidas com anemômetros de conchas. Um resultado possível desse experimento é representado na Figura 2.18 (a).

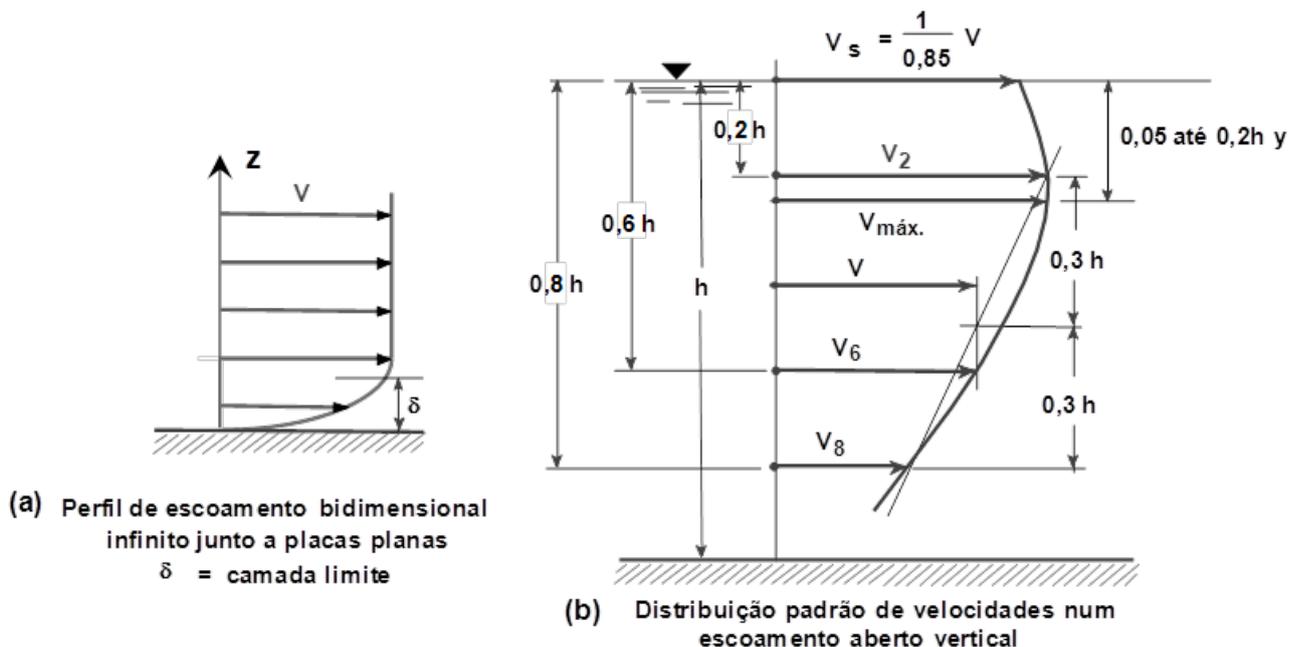


Figura 2.18: Exemplos de perfis verticais de velocidade.

Existem escoamentos em que a velocidade varia segundo duas direções, como por exemplo em um rio. As velocidades são menores perto das margens, aumentando em direção ao centro do rio. Além disso, considerando um determinado ponto do rio, a velocidade varia na direção vertical, conforme a Figura 2.18 (b). É menor junto ao fundo, atinge um máximo em algum ponto intermediário e depois decresce ligeiramente até a

superfície (veja figura). As velocidades em rios e canais são medidas com um equipamento semelhante ao anemômetro de conchas, chamado molinete fluviométrico.

Escoamentos em escala menor são medidos com outras técnicas. Como exemplo, podemos medir as velocidades do ar no interior de dutos utilizando a anemometria de fio quente.

2.7 Classificação dos Escoamentos

_____ Escoamentos Unidimensionais, Bidimensionais e Tridimensionais.

Em algumas situações, como no caso de tubos com escoamento em altas velocidades, o perfil de velocidades é praticamente constante, podendo ser desprezadas as variações na seção para fins práticos. Nessas condições o escoamento é determinado apenas pela velocidade média na seção do escoamento, originando os chamados escoamentos unidimensionais, ou 1-D. Num escoamento 1-D basta saber a ordenada da seção para determinarmos a velocidade no ponto desejado.

Observando os diversos exemplos de escoamento que nos rodeiam, podemos verificar que em alguns deles, devido a condições de simetria, basta apenas um perfil de velocidades para descrever o escoamento. Esse é o caso do escoamento a baixas velocidades em dutos circulares, e do escoamento do ar sobre a superfície plana da Terra. Não importa ao longo de qual linha foram obtidas as velocidades, os perfis resultantes serão idênticos. Esses escoamentos são chamados bidimensionais ou 2-D. Para determinar a velocidade num escoamento 2-D precisamos conhecer duas coordenadas do ponto desejado.

No caso de um rio o escoamento não fica totalmente determinado apenas com um perfil vertical, pois os perfis variam conforme a distância da margem. Esses casos definem os escoamentos tridimensionais, ou 3-D. Para determinar a velocidade num escoamento 3-D é necessário saber as coordenadas x , y e z do ponto desejado.

_____ Outras Classificações dos Escoamentos

Aprendemos que quando o critério de análise dos escoamentos é o número de variáveis necessárias à descrição do campo de velocidades obtemos sua classificação em uni, bi e tridimensionais. Outros critérios podem ser utilizados.

Massa específica

Utilizando a massa específica, podemos dividir os escoamentos em **compressíveis**, quando a massa específica varia de uma seção para outra ou **incompressíveis**, quando permanece constante. Observe que a classificação pertence ao escoamento, e não ao fluido: um mesmo fluido pode participar de escoamentos compressíveis e incompressíveis, dependendo dos gradientes de pressão observados.

Quando a massa específica varia em uma mesma seção do escoamento temos os chamados escoamentos estratificados, em oposição aos não estratificados, em que a massa específica é constante na seção.

Tempo

Quando o critério de classificação é o tempo, devemos escolher uma dada seção do escoamento e observar o que ocorre. Se as grandezas não variarem temos um escoamento **permanente**, em oposição aos **não-permanentes**, também chamados de transientes.

Comparação entre seções

Num dado instante de tempo podemos considerar o comportamento de uma grandeza em duas seções. O mais comum é utilizarmos a velocidade para esta análise, dando origem a duas situações: **escoamento uniforme**, quando não há variação de módulo, direção e sentido da velocidade, e **não uniforme** ou **variado** quando ocorre o oposto.

Comportamento dinâmico

Divide os escoamentos entre Laminares e Turbulentos. Pela sua importância na análise dos escoamentos a divisão entre laminares e turbulentos é abordada com mais detalhe a seguir.

Escoamentos Laminares e Turbulentos

O comportamento dinâmico dos escoamentos é caracterizado pelas perturbações introduzidas pelas forças de inércia e pelas forças viscosas que se opõem às perturbações.

Os escoamentos **laminares** ocorrem nas situações em que as forças viscosas são maiores que qualquer força de inércia que aparece tentando tirar as partículas do alinhamento. Nesses escoamentos os fluidos escoam em camadas perfeitamente definidas, como lâminas superpostas, e com velocidades também perfeitamente definidas.

A Figura 2.19 mostra um esquema de duas linhas de emissão em escoamento laminar. As linhas nunca se cruzam, pois o fluido escoam como se fossem lâminas deslizando umas sobre as outras. Devido a essa característica ordenada, no escoamento laminar só há difusão de quantidade de movimento a nível molecular entre as camadas adjacentes de fluido.

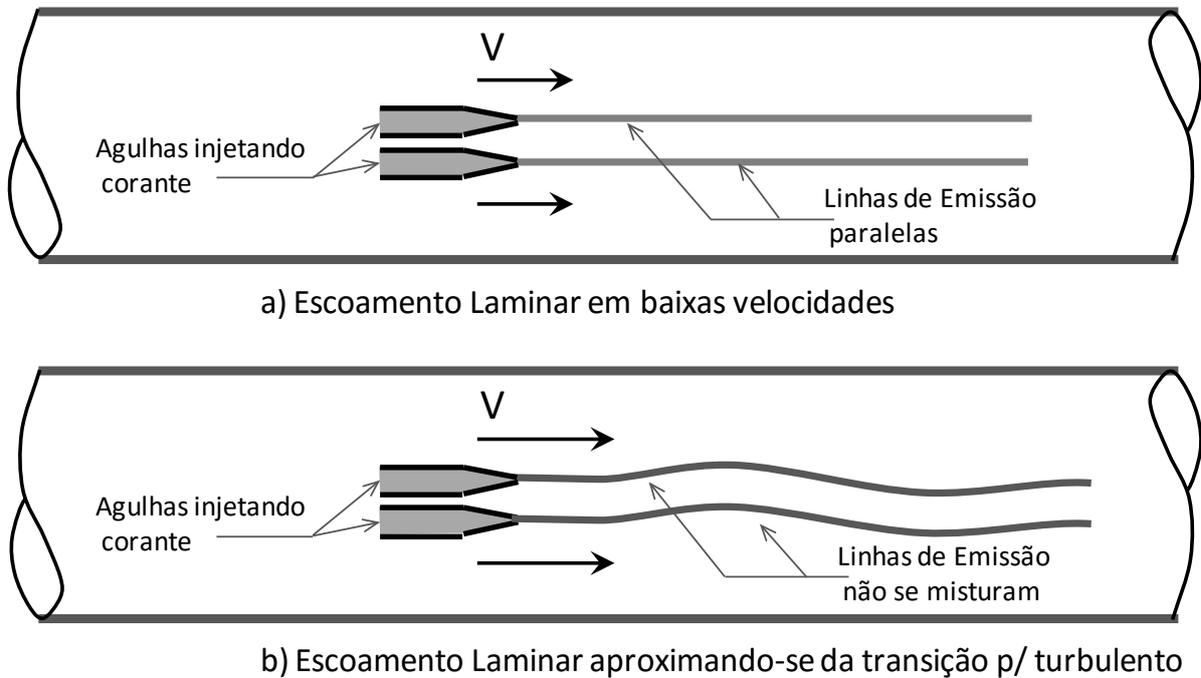


Figura 2.19: Esquema de linhas de emissão em escoamento laminar.

Quando aumenta a velocidade as forças de inércia começam a aumentar em relação às forças de viscosidade, e o escoamento passa por uma fase de transição, começando a ficar cada vez mais desordenado, até chegar ao escoamento turbulento. A fase de transição é ilustrada pelas linhas de emissão da Figura 2.19-b.

Quando as forças de inércia são grandes em relação às forças provocadas pela viscosidade os escoamentos apresentam um comportamento desordenado, com mistura de quantidades macroscópicas de fluido na direção transversal à velocidade média. Nesses escoamentos a velocidade instantânea apresenta flutuações aleatórias em torno de um valor médio, e são chamados de escoamentos **turbulentos**.

A estrutura dos vórtices em um escoamento turbulento pode ser visualizada pela linha de emissão da Figura 2.20. Foi injetado traçador líquido num escoamento turbulento em um canaleta de laboratório, por meio de uma agulha, observando-se a mistura na direção transversal ao escoamento provocada pela turbulência.



Figura 2.20: Detalhe de uma linha de emissão em escoamento turbulento de água em canal.

A principal característica dos escoamentos turbulentos é a maior capacidade de misturar as grandezas, devido ao movimento macroscópico provocado pelos vórtices. A movimentação dos vórtices é equacionada como uma flutuação de velocidade aleatória, e de média nula, que se superpõe à velocidade média.

$$V = \bar{V} + v'$$

_____ **Outras Grandezas que descrevem os escoamentos**

Outras grandezas são necessárias para caracterizar completamente um escoamento, e sua enumeração depende do tipo de problema.

Considerando o escoamento de um fluido sem misturas e isotérmico, as outras grandezas necessárias são a pressão, a massa específica e a cota geométrica, que definem, conjuntamente com a velocidade, a energia mecânica total.

No caso de um escoamento destinado a resfriar uma determinada peça ou equipamento, a temperatura passa a ser importante também.

Em escoamentos que envolvem misturas de substâncias, é necessário acrescentar a concentração para descrever completamente o problema.

CAPÍTULO 3: CONSERVAÇÃO DE GRANDEZAS

Equação da Continuidade

Aplicaremos aqui o conceito familiar de conservação de massa, discutindo como sua aplicação em fenômenos de transporte é possível na análise Euleriana, ou seja, usando volumes de controle e não um sistema.

Um caso prático interessante é a operação de reservatórios de geração de energia. É necessário manter um contínuo controle do volume represado, para enfrentar as épocas sem chuvas, controlar as cheias e obter um rendimento ótimo de turbinas.

3.1 Conservação da Massa

A região escolhida para a análise é chamada de **Volume de Controle**. Um Volume de Controle é uma porção definida do espaço onde se dá o escoamento, com quantidade de massa que pode variar, conforme a Figura 3.1:

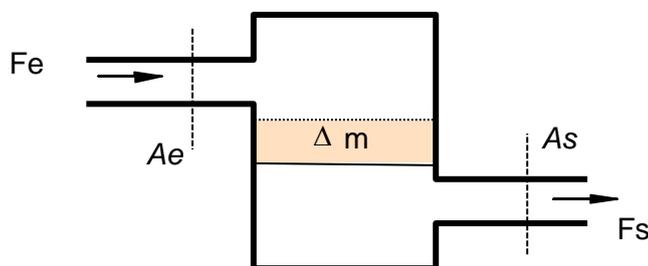


Figura 3.1: Fluxos de massa num volume de controle.

Podemos dizer, para um determinado intervalo de tempo Δt :

$$m_{\text{INICIAL}} + m_{\text{ENTRA}} - m_{\text{SAI}} = m_{\text{FINAL}}$$

$$m_{\text{FINAL}} - m_{\text{INICIAL}} = \Delta m = m_{\text{ENTRA}} - m_{\text{SAI}} \quad 3.1$$

A equação 1.1 está ligada a um intervalo de tempo Δt . Como os escoamentos são contínuos, é mais conveniente escrever as taxas médias no intervalo de tempo, dividindo a equação 3.1 por Δt :

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m_E}{\Delta t} - \frac{m_S}{\Delta t} \quad \text{Os termos do segundo membro são Fluxos de Massa médios no intervalo } \Delta t.$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = F_{Me} - F_{Ms} = \rho Q_e - \rho Q_s \quad 3.2$$

A equação 3.2 é exata quando as vazões não variam no tempo Δt ou quando são usados os valores médios no intervalo de tempo. No caso de fluxos variáveis, é necessário usar um valor instantâneo, obtido pelo limite da variação da massa quando Δt tende a zero.

$$\frac{dm}{dt} = F_{Me} - F_{Ms} \quad 3.3$$

A equação 3.3 diz que *“A taxa instantânea de variação da massa é igual ao saldo dos fluxos de entrada e saída”*

_____ **balanço de volumes**

No exemplo da usina hidrelétrica e em muitos casos da prática a massa específica não varia. Esse é o caso dos chamados escoamentos incompressíveis. Para ρ constante, o balanço de massas fica equivalente a um balanço de volumes:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta Vol}{\Delta t} = \rho Q_e - \rho Q_s \quad 3.4$$

$$\frac{\Delta Vol}{\Delta t} = Q_e - Q_s \quad 3.5$$

A equação 3.5 diz que *“A taxa média de variação do volume é igual à diferença de vazões de entrada e saída”*

_____ **fluxos variáveis no tempo**

Quando a vazão varia no tempo, pode-se usar o mesmo raciocínio, mas escrevendo a fórmula com valores instantâneos.

$$\frac{dVol}{dt} = Q_e - Q_s \quad 3.6$$

Nesse caso, cada pequeno intervalo diferencial de tempo dt traz uma variação diferencial no volume $dVol$.

A variação total num dado tempo finito é o somatório das variações diferenciais ao longo do intervalo de tempo considerado. Analiticamente, isto se consegue pela integração da equação diferencial da equação 3.6:

$$dVol = (Q_e - Q_s)dt$$

$$\Delta Vol_{TOTAL} = \int_{t_0}^t dVol = \int_{t_0}^t (Q_e - Q_s) dt \quad 3.7$$

_____ **aproximação numérica**

A integral da equação 3.7 muitas vezes não tem solução analítica. Para casos em que a solução analítica não existe ou é inconveniente, pode-se chegar ao resultado por aproximação numérica. Para isso divide-se o tempo total numa sucessão de intervalos de tempo finitos Δt , no qual as vazões são consideradas constantes. Obtemos então:

$$\Delta Vol_{TOTAL} = \Delta Vol \Big|_{t_0}^{t_0+n\Delta t} \approx \sum_{i=1}^n \Delta Vol_i = \sum_{i=1}^n (Q_E - Q_S) \Delta t \quad 3.8$$

É claro que a equação 3.8 possui um erro, pois as vazões variam continuamente. A aproximação torna-se mais fina à medida que decresce o intervalo de tempo considerado, ou seja, aumenta o limite n do somatório de parcelas finitas. A equação só é totalmente exata no limite para $\Delta t \rightarrow 0$. O limite da série infinita de somas é, como sabemos, equivalente à integral:

$$\Delta Vol_{TOTAL} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta Vol_i \right] = \int_{t_0}^t dVol \quad 3.9$$

Assim, como em vários casos da prática, a quantidade n de somas a ser efetivamente realizada depende dos objetivos do cálculo. Usualmente, quanto mais rápida a variação dos fluxos no tempo, menor deve ser o intervalo de tempo Δt adotado.

_____ balanço de massas

Se for conveniente lidar com a massa, a equação 3.7 fica:

$$\Delta m_{TOTAL} = \int_{t_0}^t \rho_e Q_e dt - \int_{t_0}^t \rho_s Q_s dt \quad 3.10$$

O segundo membro foi dividido em duas parcelas porque num caso geral a massa específica pode variar. Já o caso da variação de volume só tem sentido em escoamento incompressível, e dividir ou não os termos de entrada e saída dos fluxos é apenas uma questão de conveniência e/ou clareza.

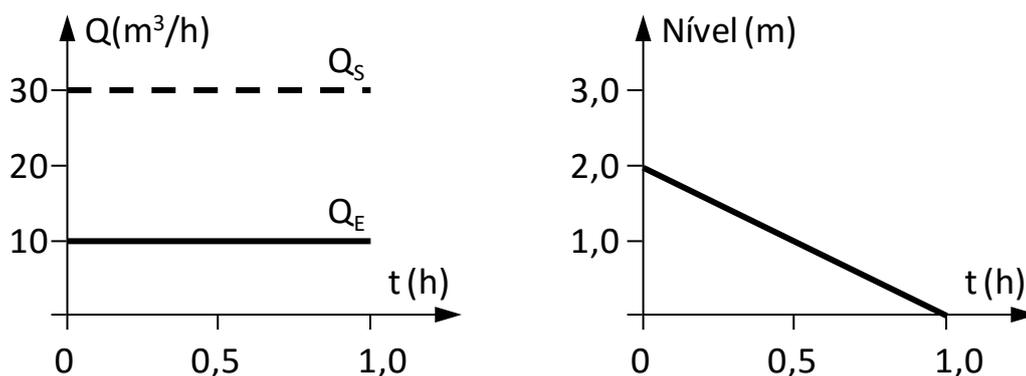
EXEMPLO 3.1:

Um reservatório prismático com área da base $A_b = 10\text{m}^2$ possui um volume inicial de 20m^3 e recebe, durante 1 hora, uma vazão média de $10\text{m}^3/\text{h}$, fornecendo uma vazão média de $30\text{m}^3/\text{h}$. Com esses valores médios o reservatório fica completamente vazio após 1 hora. Determine a dinâmica da variação de nível no reservatório por meio de um gráfico do nível em função do tempo, para os casos seguintes.

___ Caso 1: vazões constantes

Temos apenas um intervalo de tempo para aplicar a equação 3.5:

$\Delta Vol = (10 - 30) \Delta t = -20 \Delta t$, e a variação do nível é linear, conforme os gráficos.



___ Caso 2: vazão constante de entrada e saída de $60 \text{ m}^3/\text{h}$ durante a última meia hora:

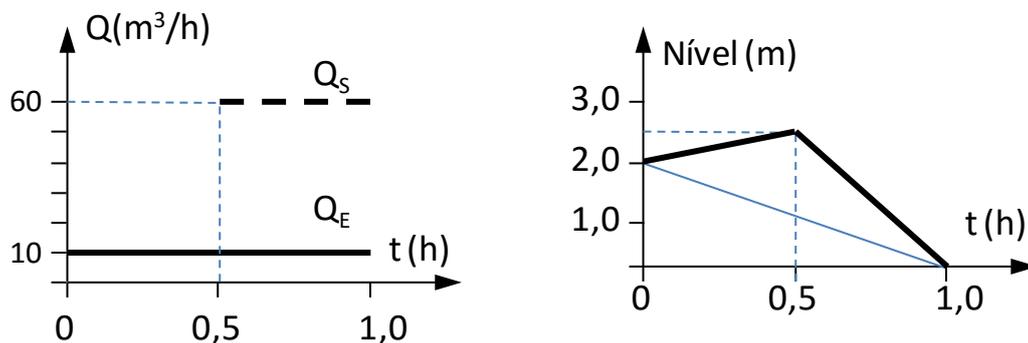
Neste caso temos dois intervalos de $0,5\text{h}$, em que as vazões são constantes, nos quais podemos usar a equação 3.5:

$$\Delta\text{Vol}_1 = (10 - 0) \Delta t = 10(\text{m}^3/\text{h}) \times 0,5 \text{ h} = + 5 \text{ m}^3 \rightarrow \text{Vol}_1 = \text{Vol}_0 + \Delta\text{Vol}_1 = 25\text{m}^3$$

$$\Delta\text{Vol}_2 = (10 - 60) \Delta t = -50(\text{m}^3/\text{h}) \times 0,5 \text{ h} = - 25 \text{ m}^3 \rightarrow \text{Vol}_2 = \text{Vol}_1 + \Delta\text{Vol}_2 = 0\text{m}^3$$

Usando a equação 3.5 em 2 intervalos de tempo consecutivos chegamos ao mesmo resultado final do caso 1 (reservatório vazio). Isto é lógico, uma vez que as vazões médias não variaram.

Observamos que neste caso o nível aumentou durante o primeiro intervalo, como demonstra o gráfico a seguir.



A equação 3.7 fornece a variação total nos dois intervalos de tempo, levando ao mesmo resultado final:

$$\Delta\text{Vol}_{\text{TOTAL}} = \Delta\text{Vol}_1 + \Delta\text{Vol}_2 = + 5 - 25 = - 20 \text{ m}^3$$

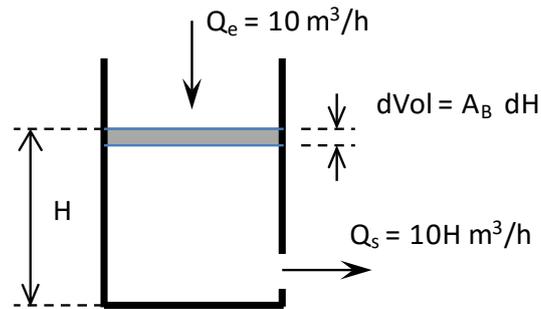
$$\text{Vol}_{\text{FINAL}} = \text{Vol}_{\text{INICIAL}} + \Delta\text{Vol}_{\text{TOTAL}} = 20 - 20 = 0\text{m}^3$$

Comentário: Os casos 1 e 2 ilustram que podemos chegar ao mesmo resultado final, mas com dinâmicas diferentes. Somente com a divisão em dois intervalos de tempo foi possível captar a variação real de nível no caso 2.

Assim, para conhecer em detalhe a evolução dos níveis de água no reservatório, com vazões que variam continuamente, é necessário utilizar intervalos de tempo cada vez menores. No limite, chega-se à equação 3.9. O exemplo 3.2 mostra um caso prático da situação de vazões variáveis.

EXEMPLO 3.2:

Um reservatório prismático com área da base $A_b = 10\text{m}^2$ recebe uma vazão constante de $10\text{m}^3/\text{h}$. A vazão de saída em m^3/h é dada por $Q_s = 10H$, sendo H a cota do nível da água em metros. Considerando que inicialmente a água está na cota $H_i = 5,0\text{m}$, Calcular o nível após decorrido 1 hora.



Análise: como neste problema a vazão de saída varia continuamente, a solução exata precisa partir do balanço instantâneo. A variação total de volume será encontrada pela integração do balanço instantâneo.

Solução:

$$\frac{dVol}{dt} = Q_e - Q_s \rightarrow \frac{dVol}{dt} = 10 - 10H$$

A equação diferencial resultante não pode ser integrada porque há 3 variáveis (Vol, H e t).

Usando a relação entre volume e altura do nível d'água podemos reduzir a 2 variáveis:

$$dVol = A_B dH$$

$$A_B \frac{dH}{dt} = 10 - 10H \rightarrow \frac{10 dH}{10 - 10H} = dt$$

Com as variáveis separadas podemos integrar

$$\int_5^H \frac{10 dH}{10 - 10H} = \int_0^1 dt$$

Fazendo a mudança de variáveis: $u = 10 - 10H \rightarrow du = -10 dH$

$$-\int_{-40}^u \frac{du}{u} = \int_0^1 dt \quad -\ln u \Big|_{-40}^u = t \Big|_0^1 \rightarrow \ln \frac{u}{-40} = -1$$

$$\frac{u}{-40} = e^{-1} \rightarrow u = -14,715$$

$$10 - 10H = -14,715 \rightarrow \boxed{H = 2,471\text{m}}$$

Resposta: ao final de 1 hora o nível será de 2,471m e o volume será $24,71\text{m}^3$.

EXEMPLO 3.3:

Resolva o problema 3.2 utilizando método numérico aproximado (eq. 3.7) utilizando Δt de 6 minutos (0,1h).

Análise: o método numérico considera que os fluxos se mantêm constantes durante o intervalo. Evidentemente esta hipótese contém um erro, já que o fluxo de saída varia continuamente. Esta é a razão pela qual a solução numérica contém erros, sendo apenas uma aproximação da solução.

Para o primeiro intervalo de tempo ($i = 1$):

$$Q_{s,1} = 10 \times 5 = 50 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\Delta Vol_1 = (10 - 50) 0,1 = -4 \text{ m}^3 \rightarrow Vol_1 = 46 \text{ m}^3 \rightarrow H_1 = 4,6 \text{ m}$$

Segundo intervalo de tempo ($i = 2$)

$$Q_{s,2} = 10 \times 4,6 = 46 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\Delta Vol_2 = (10 - 46) 0,1 = -3,6 \text{ m}^3 \rightarrow Vol_2 = 42,4 \text{ m}^3 \rightarrow H_2 = 4,24 \text{ m}$$

Resumindo para os demais intervalos:

$$Q_{s,3} = 10 \times 4,24 = 42,4 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\Delta Vol_3 = (10 - 42,4) 0,1 = -3,24 \text{ m}^3 \rightarrow Vol_3 = 39,16 \text{ m}^3 \rightarrow H_3 = 3,916 \text{ m}$$

$$\Delta Vol_4 = (10 - 39,16) 0,1 = -2,916 \text{ m}^3 \rightarrow Vol_4 = 36,244 \text{ m}^3 \rightarrow H_4 = 3,6244 \text{ m}$$

$$\Delta Vol_5 = (10 - 36,244) 0,1 = -2,6244 \text{ m}^3 \rightarrow Vol_5 = 33,6196 \text{ m}^3 \rightarrow H_5 = 3,36196 \text{ m}$$

$$\Delta Vol_6 = (10 - 33,6196) 0,1 = -2,36196 \text{ m}^3 \rightarrow Vol_6 = 31,25764 \text{ m}^3 \rightarrow H_6 = 3,125764 \text{ m}$$

$$\Delta Vol_7 = (10 - 31,25764) 0,1 = -2,125764 \text{ m}^3 \rightarrow Vol_7 = 29,13188 \text{ m}^3 \rightarrow H_7 = 2,913188 \text{ m}$$

$$\Delta Vol_8 = (10 - 29,13188) 0,1 = -1,913188 \text{ m}^3 \rightarrow Vol_8 = 27,218692 \text{ m}^3 \rightarrow H_8 = 2,7218692 \text{ m}$$

$$\Delta Vol_9 = (10 - 27,218692) 0,1 = -1,7218692 \text{ m}^3 \rightarrow Vol_9 = 25,496823 \text{ m}^3 \rightarrow H_9 = 2,5496823 \text{ m}$$

$$\Delta Vol_{10} = (10 - 25,496823) 0,1 = -1,5496823 \text{ m}^3 \rightarrow Vol_{10} = 23,947141 \text{ m}^3 \rightarrow H_{10} = 2,3947141 \text{ m}$$

Resposta: a solução numérica iterativa com intervalos de tempo de 0,1h indica um nível d'água no reservatório de 2,392m ao fim de 1 minuto.

Obs: A solução numérica apresentou erro de -3,2%, que tende a diminuir com intervalos de tempo menores.

3.2 Misturas Homogêneas - Balanço de Grandeza Extensiva N

Normalmente a água em escoamento não é pura, mas misturada com várias substâncias sobre as quais é possível ter informação por meio do balanço de massas. Vimos no item anterior que a taxa de variação da massa é igual à diferença entre os fluxos de entrada e saída. Esse raciocínio é válido não só para a massa do fluido em escoamento, mas também para as outras massas e grandezas dependentes da massa que o fluido transporta em seu meio.

$$\Delta N = N_e - N_s$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = F_{N,e} - F_{N,s} \quad 3.11$$

Mas os Fluxos responsáveis pelas quantidades N_e e N_s da grandeza extensiva dependem do fluxo de massa e das concentrações, pois:

$$F_N = \eta F_M \rightarrow F_N = \eta \rho Q$$

Então, para valores médios no intervalo de tempo,

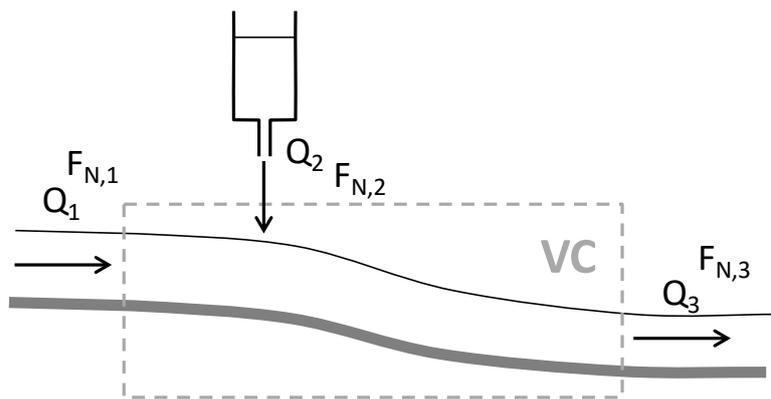
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \eta_e \rho_e Q_e - \eta_s \rho_s Q_s \quad 3.12$$

Lembrando que quando os fluxos variam no tempo, o balanço deve ser escrito para um instante de tempo:

$$\frac{dN}{dt} = \eta_e \rho_e Q_e - \eta_s \rho_s Q_s \quad 3.13$$

EXEMPLO 3.4:

Um meio para determinar a vazão de rios consiste na injeção de substâncias traçadoras, como sais ou corantes. Numa determinação de vazão em um córrego foram lançados 2L/s de água com uma concentração de corante fluorescente igual a 5mg/L. Numa seção a jusante, após a completa mistura do traçador, retirou-se uma amostra da água, obtendo-se uma concentração de corante de 0,2mg/L. Qual a vazão do córrego?



Análise: trata-se de um exemplo de balanços em regime permanente em que ocorre a conservação da massa (volume) da água do rio e também da massa do traçador no VC dado pelo trecho de rio. Será usada a eq. 3.13 para $N = \text{Volume}$, e também para $N = \text{massa do traçador}$.

Solução:

$$\frac{dN}{dt} = F_{N,e} - F_{N,s}$$

Regime Permanente: $\frac{dN}{dt} = 0 = F_{N,e} - F_{N,s}$

- Grandeza $N = \text{Volume}$

$$0 = Q_e - Q_s \rightarrow Q_1 + Q_2 = Q_3$$

- Grandeza $N = \text{massa do traçador}$:

$$0 = F_{N,e} - F_{N,s} \rightarrow C_1 Q_1 + C_2 Q_2 = C_3 Q_3$$

O traçador não é encontrado naturalmente no rio: $C_1 = 0$. Com os valores numéricos dados os fluxos de massa do traçador ficam:

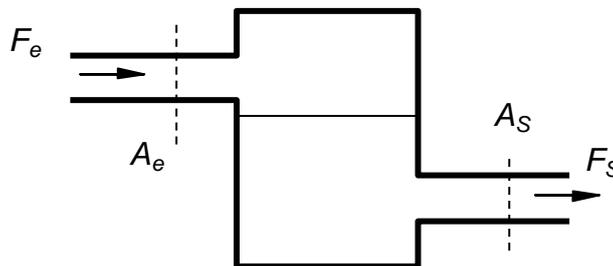
$$0 Q_1 + 5 \frac{mg}{L} 2 \frac{L}{s} = 0,2 \frac{mg}{L} (Q_1 + 2) \frac{L}{s}$$

Que resolvida fornece $Q_2 = 48 \text{ L/s}$.

Resposta: a vazão do córrego é de 48 litros por segundo ($0,048\text{m}^3/\text{s}$), equivalente a $162\text{m}^3/\text{h}$.

EXEMPLO 3.5:

Considere um recipiente com 100 litros de água à temperatura de 20°C , recebendo 1 L/s de água a 80°C e com uma vazão de saída de 1L/s . Durante os instantes iniciais a água sai com temperatura de 20°C , mas depois disso a água sai com a temperatura média do reservatório. Isto quer dizer que a água no reservatório é bem misturada. Analise o transiente da temperatura da água no reservatório, supondo que a variação da massa específica da água com a temperatura é desprezível. Calcule a variação da quantidade de calor armazenada em 10 segundos e a temperatura média da água na caixa ao final deste período. Adote $\rho = 995 \text{ kg/m}^3$ e calor específico $c = 4,18\text{kJ/kg}^\circ\text{C}$.



Solução:

Parte a) _____ Análise do transiente

A grandeza extensiva considerada é a quantidade de calor:

$$N = mc(T - T_0) \rightarrow \eta = \frac{dN}{dm} = c(T - T_0)$$

Como a temperatura da água varia continuamente, o fluxo de calor que deixa o reservatório também varia, de forma que o balanço de energia só é válido instantaneamente, e deve ser expresso na forma diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = F_e - F_s \rightarrow \frac{d(mcT)}{dt} = \rho c Q_e T_e - \rho c Q_s T_s$$

em que a temperatura de referência adotada foi $T_0 = 0$.

O balanço de massa da água no reservatório mostra que $Q_e = Q_s$, pois o regime é permanente (não há variação da massa no reservatório) e com massa específica constante (não há variação do volume no reservatório).

Assim, o balanço de energia fica:

$$mc \frac{dT}{dt} = \rho c Q (T_e - T)$$

Fazendo $\theta = (T_e - T)$ a equação do balanço pode ser escrita como:

$$-\frac{d\theta}{dt} = \frac{Q}{vol} \theta \rightarrow \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{1}{\tau} dt$$

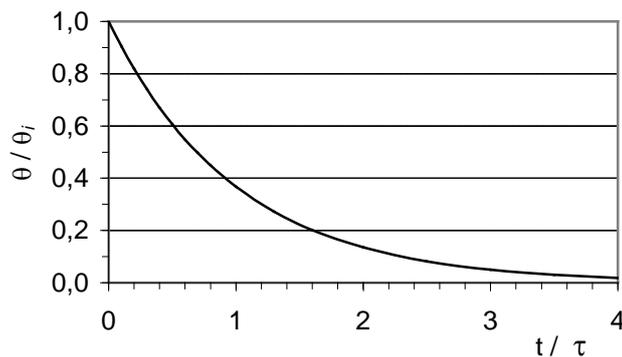
Lembrando que o tempo de detenção hidráulico, definido como $\tau = \frac{Vol}{Q}$, é o tempo médio de permanência de cada partícula no reservatório.

A equação acima pode ser integrada facilmente, entre um instante de tempo inicial t_i em que a temperatura do reservatório é T_i e um tempo t qualquer, obtendo-se:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T_e - T}{T_e - T_i} = e^{-\frac{t-t_i}{\tau}}$$

Que é a solução para o transiente de temperatura no reservatório. Quando o tempo tende ao instante inicial, T tende a T_i e $\theta \rightarrow 1$; por outro lado, quando o tempo é muito grande, $\theta \rightarrow 0$ e $T \rightarrow T_e$.

Observe que a solução não depende da massa específica nem do calor específico do fluido no reservatório, apenas depende da relação entre o volume do reservatório e a vazão de alimentação, dado pelo tempo de detenção hidráulico. Desta forma a solução vale para qualquer problema semelhante, podendo ser expressa pelo gráfico adimensionalizado da figura seguinte.



Resposta adimensional da temperatura no reservatório

Parte b) ____ cálculo da temperatura após 10 segundos

Basta substituir os valores numéricos na equação do transiente

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T_e - T}{T_e - T_i} = e^{-\frac{t-t_i}{\tau}}$$

sendo o tempo de detenção dado por: $\tau = \frac{Q}{Vol} = \frac{100 L}{1L/s} = 100s$. Assim,

$$80 - T(10s) = (80 - 20)e^{-10/100}$$

$$T(10s) = 80 - 60 \times 0,904 = 25,7^\circ C$$

Resposta: a temperatura da água no reservatório após 10 segundos será de 25,7°C.

EXEMPLO 3.6:

Calcule numericamente um valor aproximado para a temperatura da água do reservatório do exemplo anterior ao final de 10 segundos.

Solução:

Para utilizar uma aproximação numérica da equação diferencial do balanço de energia, vamos considerar que os fluxos permanecem constantes ao longo do intervalo de tempo finito adotado.

Em função dos fluxos de massa e volume, a variação da quantidade de calor armazenada é calculada por:

$$F_e = \rho c Q T_e ; F_s = \rho c Q T_s \rightarrow \Delta N = \rho c Q (T_e - T_s) \Delta t$$

$$\Delta N = 995 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \text{ } ^\circ\text{C}} 0,001 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} (80 - 20)^\circ\text{C} \times 10\text{s} = 2495,5 \text{ kJ}$$

Essa quantidade de calor, acrescentada à massa da caixa, permite calcular o acréscimo de temperatura:

$$\Delta T = \frac{2495,5 \text{ kJ}}{0,1\text{m}^3 995 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \text{ } ^\circ\text{C}}} = 6,0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Resposta: A temperatura da caixa ao final do intervalo de 10 segundos será de 26,0°C, aproximadamente.

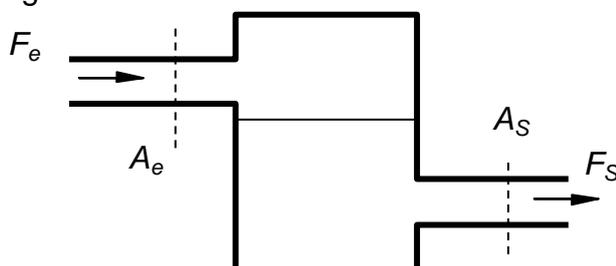
Comentários: Note que o erro da solução numérica aproximada foi de 0,3°C em relação à solução analítica. Este erro tende a diminuir com a adoção de menores intervalos de tempo.

Se o cálculo for repetido para mais um intervalo de 10 segundos o acréscimo de temperatura será menor, porque maior quantidade de energia deixa o reservatório, visto que a água sairá mais quente.

A solução numérica partiu da premissa que a água no reservatório permanece a 20°C durante todo o intervalo de tempo considerado. Evidentemente, esta simplificação implica em que a resposta possui certo erro. Entretanto, o erro tende a diminuir com o intervalo de tempo considerado no cálculo.

EXEMPLO 3.7:

Considere novamente o reservatório do exemplo 3.5, levando em conta a variação da massa específica com a temperatura. Calcule numericamente a temperatura da água ao final de 10 segundos.



Dados:

$$\rho (80^\circ\text{C}) = 971,8\text{kg/m}^3$$

$$\rho (20^\circ\text{C}) = 998,2\text{kg/m}^3$$

$$c = 4,18 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$$

Análise: este problema envolve o balanço transiente de massa da água, visto que, com o aumento da temperatura causado pela entrada de água quente, o reservatório de volume constante irá conter cada vez menos massa; além disso, a outra grandeza envolvida é a energia, também com balanço transiente, visto que a saída de água cada vez mais quente conduzirá cada vez mais energia para fora da caixa e o fluxo de entrada de energia térmica é constante.

Em vista dessas dificuldades, torna-se mais simples resolver o problema por aproximação numérica.

Solução:

A grandeza extensiva considerada é a quantidade de calor: $N = mc(T - T_0)$. A variação da quantidade de calor no período é dada por:

$$\Delta N = N_{Final} - N_{Inicial} = N(t + \Delta t) - N(t)$$

mas também podemos expressar a variação por meio dos Fluxos:

$$\Delta N = N_{Entrou} - N_{Saiu} = F_e \Delta t - F_s \Delta t$$

Expressando agora os fluxos de energia em função dos fluxos de massa e volume,

$$F_N = \eta \rho VA ; \eta = c(T - T_0) \Rightarrow F_N = \rho c(T - T_0)VA$$

Considerando a temperatura de referência T_0 como nula e substituindo os valores numéricos, temos as quantidades de energia que entraram e saíram:

$$N_e = 971,8 \left(\frac{kg}{m^3} \right) 4,18 \left(\frac{kJ}{kg^\circ C} \right) 80 (^\circ C) 1 \left(\frac{L}{s} \right) 0,001 \left(\frac{m^3}{L} \right) 10 (s) = 3249,7 kJ$$

$$N_s = 998,2 \left(\frac{kg}{m^3} \right) 4,18 \left(\frac{kJ}{kg^\circ C} \right) 20 (^\circ C) 1 \left(\frac{L}{s} \right) 0,001 \left(\frac{m^3}{L} \right) 10 (s) = 834,5 kJ$$

$$\Delta N = 2415,2 kJ$$

Conhecendo a quantidade de calor aduzida, o cálculo da variação da temperatura depende da quantidade de massa no reservatório. A massa final é obtida pelo balanço de massas:

$$\Delta m = m_e - m_s \Rightarrow \Delta m = (F_e - F_s) \Delta t$$

$$\Delta m = (971,8 \times 0,001 - 998,2 \times 0,001) 60 = -1,584 kg$$

$$m_f = m_i + \Delta m = 98,416 kg$$

$$\Delta N = mc\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{2415,2 kJ}{98,416 kg \times 4,18 \frac{kJ}{kg^\circ C}} = 5,87^\circ C$$

Resposta: Portanto, a temperatura ao final de 10 segundos será 25,9 °C.

Para continuar o cálculo da aproximação numérica ao longo do próximo intervalo de tempo precisamos da massa específica da água à temperatura de 25,9°C.

Continuam valendo as observações dos exemplos anteriores. Ao assumir que as temperaturas permanecem constantes ao longo de todo intervalo de tempo a solução

numérica carrega um erro de aproximação. Como antes, este erro tende a diminuir com o intervalo de tempo considerado.

3.3. Equação Integral do Balanço de Massa

Nosso próximo desafio será descrever matematicamente o balanço, de forma que seja válida para uma situação geral, admitindo-se velocidades variáveis e com inclinação qualquer em relação às seções de entrada e saída da região de interesse, que é chamada de Volume de Controle.

_____ Volume de Controle

O Volume de Controle (VC) é uma **região definida do espaço**. A massa é livre para entrar e sair do VC, que então pode possuir massa variável com o tempo. As grandezas num VC são usualmente mais fáceis de quantificar com variáveis Eulerianas. A Figura 3.2 traz de forma esquemática um escoamento qualquer representado por suas linhas de corrente, e um volume de controle.

O Volume de Controle é conceitualmente diferente do sistema. Um *Sistema* é uma quantidade definida de massa. Por isso é normalmente mais fácil quantificar as grandezas de um sistema usando variáveis Lagrangeanas. Num escoamento, um sistema pode mudar de forma, acompanhando o escoamento, mas sempre contém a mesma massa.

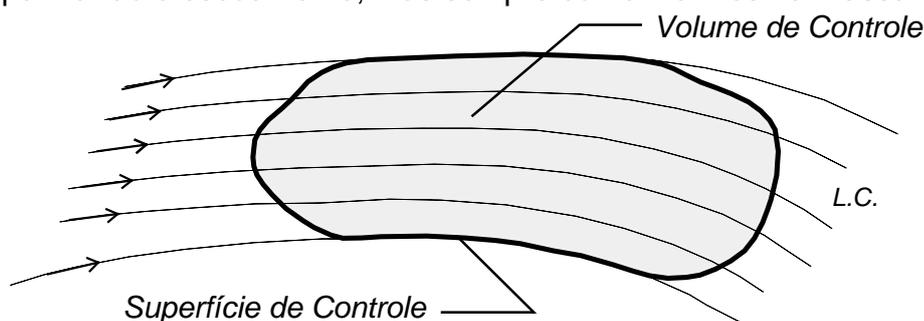


Figura 3.2: Representação esquemática de volume de controle num escoamento.

Um sistema não é muito útil para efetuar balanços de massa em escoamentos. Todas as equações de balanços usam como base um volume de controle. Isso ocorre porque não há interesse, por exemplo, em saber “qual água” se encontra num reservatório, e sim “quanta água?” é a pergunta importante. Salvo raras exceções, toda água é igual do ponto de vista da solução de problemas práticos. Por exemplo, no caso de hidrelétricas, é necessário operar o reservatório com segurança e produção ótima de energia elétrica. Portanto interessa equacionar o problema a partir do reservatório, uma região fixa do espaço (VC), e não a partir de cada massa de água que escoo no rio (Sistema).

Outra razão, talvez menos óbvia, é que as variáveis que utilizamos para descrever os escoamentos são Eulerianas. Isso significa que foram medidas em pontos definidos do espaço, e não em partículas definidas de matéria.

Balço

Para o balanço geral de massa vamos imaginar um VC com fluxos que entram e saem por várias seções de entrada e saída. Inicialmente vamos simplificar o efeito de todas as entradas em uma só e de todas as saídas também em uma só.

Vamos pensar agora no efeito dos fluxos de entrada e saída do nosso VC. Se isso parece difícil com um VC abstrato, podemos pensar no conhecido problema do reservatório, conforme a Figura 3.3, com o mesmo resultado:

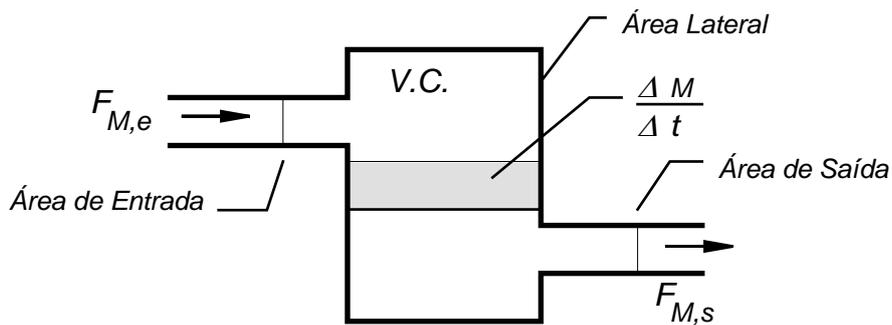


Figura 3.3: Reservatório atuando como volume de controle num escoamento.

Sabemos que o balanço de massa pode ser expresso por:

$$F_{M,E} - F_{M,S} = \frac{\Delta M}{\Delta t} \tag{3.14}$$

Sabemos também que os fluxos podem ser expressos pela integral vista no item 3.1. Mas, para substituímos sem erro na equação do balanço, é necessário lembrar do sinal algébrico incluído na integral. O sinal é consequência do produto escalar da velocidade e área, devido à convenção de sentido para o vetor normal. Veja o esquema da Figura 3.4:

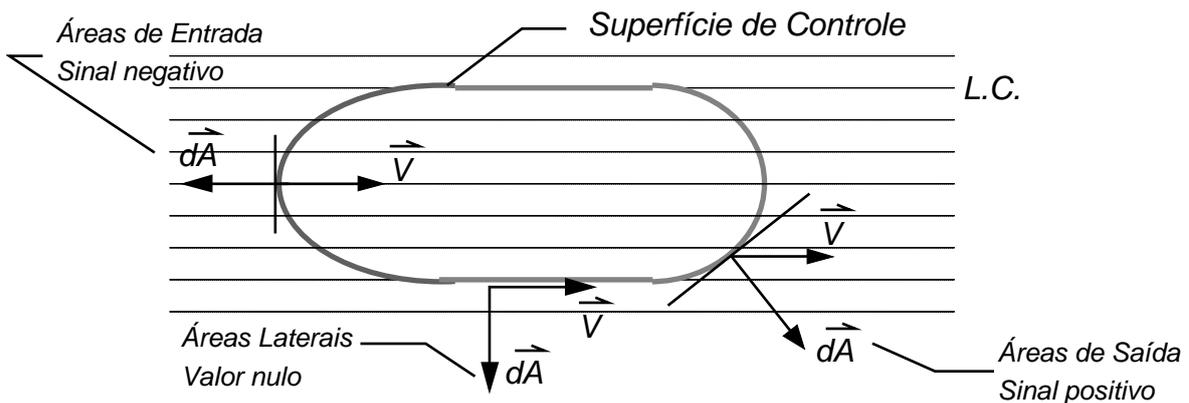


Figura 3.4: Sentido do vetor área em relação a densidades de fluxo de entrada e saída.

Outro resultado interessante da integral é que ao longo da superfície de controle existem apenas áreas de entrada, de saída ou áreas laterais. Uma área lateral é aquela onde não há fluxo de entrada ou saída, como se a superfície fosse impermeável. Nas áreas laterais o vetor velocidade sempre fica perpendicular ao vetor área, fazendo com que o produto escalar seja nulo.

Com as propriedades da integral em mente, podemos escrever então que:

$$F_{M,E} = -\int_{AE} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} \quad 3.15-a$$

$$F_{M,S} = \int_{AS} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} \quad 3.15-b$$

onde os limites AE e AS nas integrais referem-se às áreas de entrada e saída, respectivamente.

Utilizando então a notação geral de fluxos de entrada e saída das equações 3.15 na expressão do balanço, temos:

$$-\underbrace{\int_{AE} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}}_{F_{M,E}} - \underbrace{\int_{AS} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}}_{F_{M,S}} = \frac{\Delta M}{\Delta t} \quad 3.16$$

Podemos agora levar as integrais para o segundo membro, e também acrescentar um termo nulo, sem alterar o balanço:

$$\frac{\Delta M}{\Delta T} + \underbrace{\int_{AE} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}}_{-F_{M,E}} + \underbrace{\int_{AS} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}}_{F_{M,S}} + \underbrace{\int_{AL} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}}_{NULO} = 0 \quad 3.17$$

Uma propriedade interessante da integração nos permite somar todos os limites de integração numa mesma integral, de forma que podemos escrever:

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} + \underbrace{\int_{AE+AS+AL} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}}_{SC} = 0 \quad 3.18$$

A equação 3.18 é válida apenas se os Fluxos permanecerem constantes durante o intervalo de tempo Δt considerado. Se a velocidade variar alteram-se os fluxos e o balanço que escrevemos deixa de ser válido. Para que a ideia fique exata é preciso pensar na variação de massa que ocorre em um tempo Δt muito pequeno. Somente nesse caso o fluxo instantâneo é igual ao médio, mesmo nos regimes transientes.

Escrevendo então o balanço para o caso do limite de $\Delta t \rightarrow 0$ temos:

$$\frac{dM}{dt} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} = 0 \quad 3.19$$

A equação 3.19 utiliza valores instantâneos das velocidades e da taxa de variação da massa. Portanto, continua válida mesmo durante os transientes.

Equacionando a taxa de variação da massa no VC (= termo dM/dt)

Para encerrar o balanço integral de massa num V.C. falta explicitar como, de uma forma geral, é calculada a massa contida no VC.

Se imaginarmos uma massa específica uniforme ao longo de todo o volume, fica muito fácil:

$$M = \rho \text{Vol} \quad \text{onde } \text{Vol} \text{ é o volume total.}$$

Desta forma a taxa fica:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \text{Vol}) \quad 3.20$$

A equação 3.20 descreve a variação de massa dos chamados “**modelos concentrados**”, em que apenas um valor de qualquer das grandezas consideradas descreve toda a massa considerada. O equacionamento concentrado de uma dada grandeza pode ser adotado para um Volume de Controle ou para um Sistema.

Num caso geral a massa específica pode variar ao longo do volume de controle. Basta, por exemplo, que varie a temperatura ou a salinidade do fluido para que cada ponto do fluido tenha um ρ diferente. Como avaliar a massa total? Nesses casos é necessário usar os “**modelos distribuídos**”. O modelo distribuído pode ser necessário para descrever tanto um V.C. como um Sistema.

Como exemplo, a Figura 3.5 mostra o esquema de um estuário, região onde os rios deságuam no mar. Estuários são estudados em hidráulica ambiental, pela sua importância como áreas de reprodução de muitas espécies.

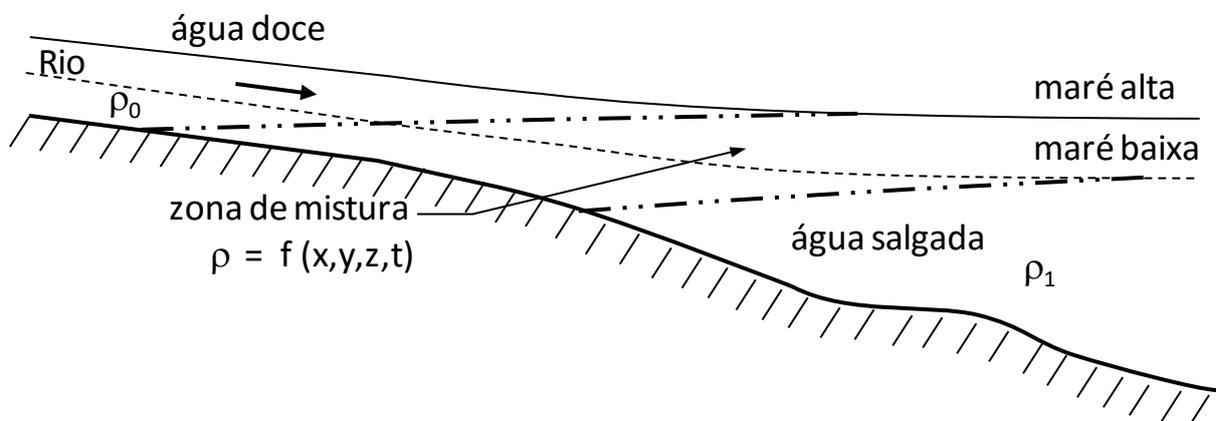


Figura 3.5: Corte esquemático de estuário, com variação da massa específica da água.

Os estuários são regiões em que a salinidade da água depende da proporção da mistura entre as águas do mar e do rio. A mistura é influenciada pela vazão do rio, pela topografia, pelos ventos e principalmente pelas marés. A massa específica da água varia no espaço e no tempo, tornando necessário o uso de “**modelos distribuídos**”.

Uma aproximação razoável para a massa M nos modelos distribuídos pode ser obtida se dividirmos o volume total em vários pequenos volumes ΔVol . Esses volumes são tão

pequenos que podemos considerar a massa específica constante em seu interior. A massa M fica então:

$$M \approx \sum_{i=1}^n \rho \Delta Vol \quad (\text{Quanto menor o } \Delta Vol, \text{ melhor a aproximação}) \quad 3.21$$

A medida que aumenta o limite n do somatório, diminui o tamanho dos volumes ΔVol . Quanto menor o volume, mais preciso fica o cálculo da massa, já que consideramos ρ constante em cada volume e ele pode variar continuamente. Esse processo, no limite, leva-nos à massa como resultado de uma integração. A integral corresponde ao somatório das massa de infinitos volumes diferenciais $dVol$:

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta Vol_i \right) = \int_{VC} \rho dVol \quad 3.22$$

O limite de integração denotado genericamente como “VC” indica que o somatório deve incluir todo o volume de controle. A especificação dos limites dependerá, em cada caso, do elemento diferencial de integração “ $dVol$ ” adotado.

_____ A Equação Final

Colocando todas as nossas considerações em conjunto, chega-se à equação geral do balanço de massa, em sua forma integral.

BALANÇO GLOBAL DE MASSA

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dVol + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} = 0 \quad 3.23$$

Surpreendente e Elegante!

_____ Equação da Continuidade

Muitos problemas importantes ocorrem em condições de escoamento incompressível. Nesse caso a massa específica pode sair da integral. O balanço de massa assume a forma de balanço de volumes, conforme a equação 3.24.

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} dVol + \rho \int_{SC} \vec{V} \cdot \vec{dA} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} dVol + \int_{SC} \vec{V} \cdot \vec{dA} = 0 \quad 3.24$$

O balanço integral de volumes da equação 3.24 é conhecido como “**Equação da Continuidade**”. Quando a continuidade é aplicável, ou seja, escoamento com massa específica constante, tanto o balanço de massa como o de volumes dão o mesmo resultado.

_____ **Balanço de Substâncias Transportadas**

A massa das substâncias transportadas pelo fluido em escoamento pode ser expressa na forma de balanço integral para um V.C. com o mesmo desenvolvimento usado para deduzir a equação 3.23. O balanço integral é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dVol + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} = 0 \quad 3.25$$

Em que temos: $N = m_A$, a massa da substância A dissolvida na água;
 $\eta = dm_A / dm$, a concentração em massa, kg de A por kg de fluido;
 $C_A = \eta \rho$, a concentração de A em kg por m³ de fluido.

Observe que a equação 3.23 está contida na equação 3.25, para o caso em que a grandeza é a massa do próprio fluido em escoamento. Tem-se neste caso $N = m$ e $\eta = 1$.

3.4 Discussão Sobre a Taxa de Variação da Grandeza no V.C.

Existe a possibilidade de expressar o balanço de massas das equações 3.23 ou 3.25 de outra forma, sem mudar o significado físico, conforme apresentado na equação 3.26. A diferença reside no termo que contém a derivada no tempo.

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_S = \int_{VC} \frac{\partial \eta \rho}{\partial t} dVol + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} \quad 3.26$$

A equação 3.25 aponta para inicialmente calcular a quantidade da grandeza N no V.C. e depois calcular sua taxa de variação no tempo pela derivada.

Já a equação 3.26 indica que primeiro deve-se calcular a taxa de variação local da grandeza N em cada elemento diferencial de volume, para depois integrar (somar) as contribuições de todo o V.C.

Fisicamente a ordem de cálculo diferente das duas equações não tem impacto no resultado final. O exemplo ilustrativo a seguir demonstra essa conclusão.

_____ **Exemplo Ilustrativo: caixa de areia**

Considere uma caixa de areia, conforme esquema da Figura 3.6. As caixas de areia são utilizadas na entrada das estações de tratamento de esgoto para remover os sólidos sedimentáveis, que podem prejudicar as etapas posteriores do tratamento.

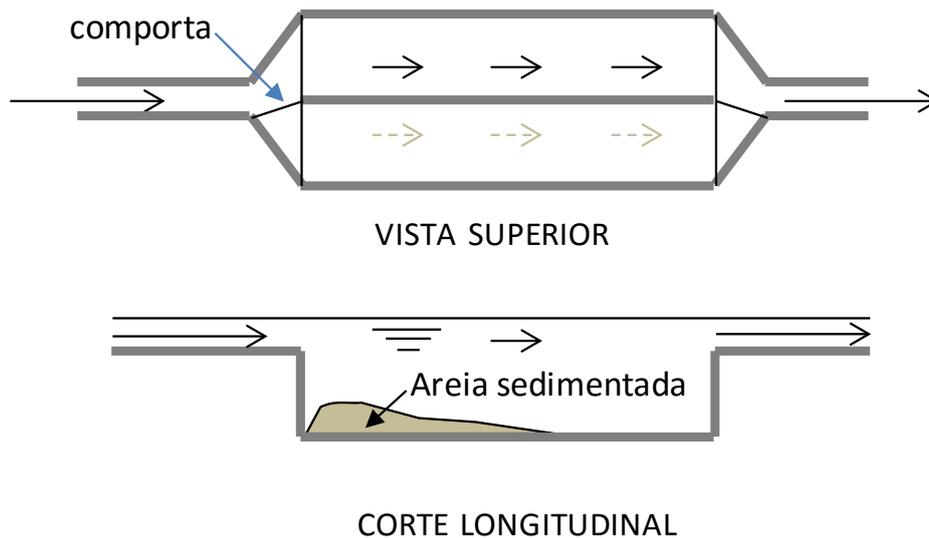


Figura 3.6: Esquema de uma caixa de areia com duas câmaras de sedimentação.

A caixa de areia tem duas câmaras que funcionam de forma alternada. Enquanto uma câmara é usada, a outra deve ser limpa. O problema em questão é determinar o tempo médio de utilização de cada câmara. Para isso é necessário saber a taxa de acúmulo de areia na câmara de sedimentação.

O problema pode ser analisado com o balanço da grandeza extensiva N dada pela massa de sólidos (areia) no esgoto. São definidos:

$N = m_s$, a massa de sólidos sedimentáveis na água;

$\eta = dm_s / dm$, a concentração de sólidos em kg por kg de fluido;

$C_s = \eta \rho$, a concentração de sólidos em kg por m^3 de fluido.

Com a notação acima definida o balanço de sólidos na caixa de areia é dado pela equação geral 3.26 da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} C_s dVol + \int_{SC} C_s \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

A resposta pode ser obtida experimentalmente pela avaliação do saldo de fluxos de massa de sólidos, dado pela integral de superfície (segundo termo do segundo membro), ou pela avaliação direta da taxa de acúmulo, dada pelo primeiro termo do segundo membro.

Solução pelo saldo de fluxos de entrada e saída

Para o volume de controle da Figura 3.6, adotando-se o modelo concentrado para os fluxos, pode-se escrever:

$$\frac{dm_s}{dt} - \eta_e \rho_e Q_e + \eta_s \rho_s Q_s = 0$$

$$\frac{dm_s}{dt} - C_e Q_e + C_s Q_s = 0$$

Sendo o regime permanente, a vazão que entra é igual à que sai.

$$\frac{dm_s}{dt} = (C_s - C_e)Q$$

Portanto, é possível conhecer a taxa de variação da massa de areia medindo-se as concentrações de areia na entrada e saída e a vazão. A medição deve ser mantida por um período de tempo significativo, em intervalos suficientemente pequenos. No caso em questão, deve ser previsto uma campanha de medição de 24h, no mínimo, com amostras obtidas a cada hora, durante um dia típico. Com os dados experimentais tem-se a variação diária:

$$\Delta m_s = \int dm_s = \int_0^t (C_s - C_e)Q dt$$

Aproximando numericamente a integral por meio de um somatório:

$$\Delta m_s \cong \sum_{i=1}^{24} (C_{s,i} - C_{e,i}) Q_i \Delta t$$

Com esse procedimento calculamos a variação diária de massa e, conhecendo a quantidade máxima de areia, o período de tempo máximo para encher a caixa de areia.

Essa abordagem fornece a resposta com rapidez, mas necessita de um levantamento experimental de dados custoso.

_____ Solução pela determinação direta do volume de areia acumulado

Para aplicar a técnica de medição direta devem ser realizados dois levantamentos batimétricos, separados por um período de tempo significativo, que pode ser de dois a três dias no caso em questão.

O levantamento pode adotar, por exemplo, a técnica de medição de profundidades em pontos organizados numa malha, conforme o esquema da Figura 3.7.

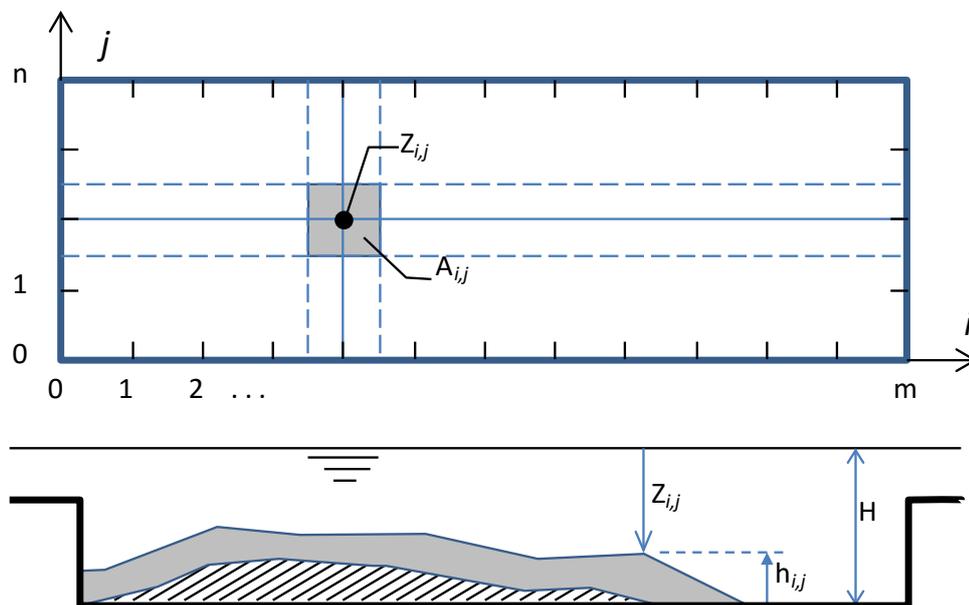


Figura 3.7: Esquema do levantamento batimétrico numa malha de m x n pontos.

Observa-se na figura que é medida a profundidade $Z_{i,j}$ em cada ponto de uma malha de $m \times n$ pontos. A cada profundidade medida corresponde uma altura de areia depositada $h_{i,j}$, que pode ser calculada conhecendo-se a profundidade total da caixa H , sendo que $h_{i,j} = H - Z_{i,j}$.

Cada ponto representa uma área $A_{i,j}$ delimitada pela linha de fronteira traçada na metade da distância até cada um dos pontos vizinhos. Na malha retangular as áreas de influência de todos os pontos internos são iguais. Nos pontos do contorno sólido a área é metade e nos cantos, um quarto das áreas interiores.

Método 1: Levantar os volumes sedimentados totais no início e final

Com o levantamento batimétrico é possível aproximar o volume da areia no início e no final de um período de tempo representativo da seguinte forma:

$$m_S^k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho \Delta Vol_{i,j}^k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho h_{i,j}^k A_{i,j}$$

Em que o índice k representa o tempo em que foi realizado o levantamento e ρ a massa específica da areia sedimentada.

Com as massas de areia no início (índice k) e final do intervalo de tempo (índice $k+1$), podemos calcular a taxa de variação da massa acumulada por:

$$\frac{dm_S}{dt} \cong \frac{\Delta m_S}{\Delta t} = \frac{m_S^{k+1} - m_S^k}{\Delta t}$$

Esta abordagem de cálculo seguiu a sequência estabelecida na equação 3.24: primeiro são calculadas as massas totais pela integração no V.C. e depois é calculada a derivada.

Método 2: Levantar a variação de volume em cada ponto e totalizar

Outra forma de abordar o problema consiste em calcular inicialmente a variação de volume de areia acumulado em cada área $A_{i,j}$ e posteriormente somar a variação em todas as áreas. Esta sequência de cálculo é descrita pela equação a seguir:

$$\Delta m_S = m_S^{k+1} - m_S^k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho \Delta Vol_{i,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho (h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k) A_{i,j}$$

A abordagem do segundo método adota a sequência descrita pela equação 3.25: primeiro é calculada a taxa de variação da grandeza no tempo (derivada), e depois as taxas são somadas em todo o V.C. (integral) para fornecer a taxa de variação total no volume de controle.

3.5 Exercícios

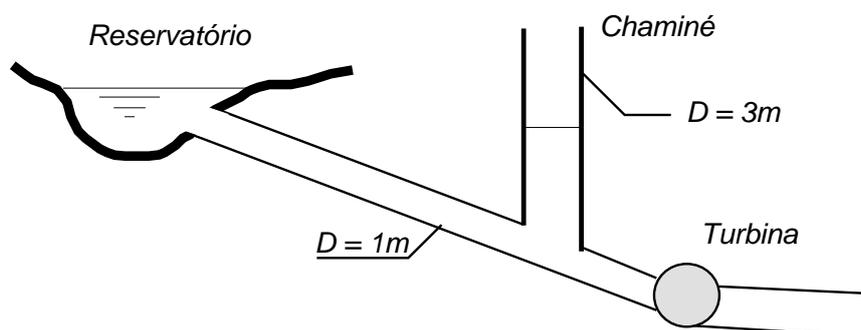
1 - Na operação de uma hidrelétrica ocorreram durante um dia as seguintes vazões médias: $Q_{\text{rio}} = 1.500 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_{\text{turbinas}} = 600 \text{ m}^3/\text{s}$. Qual a variação de volume armazenado no período de 24 horas?

2 - Uma hidrelétrica tem um lago alimentado por dois afluentes, e 6 turbinas. As vazões afluentes observadas no dia foram de $Q_1 = 600 \text{ m}^3/\text{s}$ e $Q_2 = 120 \text{ m}^3/\text{s}$. Cada turbina operou com vazão de $100 \text{ m}^3/\text{s}$, mas 2 turbinas ficaram ligadas apenas 6 horas. Qual a variação do volume do lago?

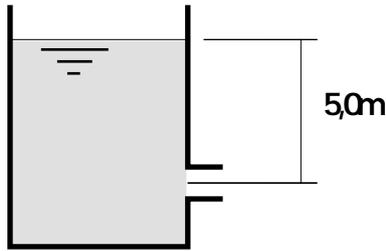
3 - Um meio para determinar a vazão de rios consiste na injeção de substâncias traçadoras, como sais ou corantes. Numa determinação de vazão em um córrego foram lançados 1 L/s de água com uma concentração de sal igual a 25 mg/L . Numa seção a jusante, após a completa mistura do traçador, retirou-se uma amostra da água, obtendo-se uma concentração de $0,013 \text{ mg/L}$. Qual a vazão do córrego, sabendo que numa seção a montante do ponto de injeção foi medida uma concentração de $0,003 \text{ mg/L}$?

4 - Em um período de cheias uma hidrelétrica operou com as seguintes vazões afluentes: Rio A: $Q_1 = 1.300 \text{ m}^3/\text{s}$; Rio B: $Q_2 = 700 \text{ m}^3/\text{s}$. As vazões efluentes são fluxos turbinados para produção de energia e fluxos vertidos, que escoam pelos vertedores. A usina possui 8 máquinas e 6 vertedores de superfície. A configuração de operação foi a seguinte: Vazão turbinada - 4 máquinas com $100 \text{ m}^3/\text{s}$ durante 24 horas ; 2 máquinas com $180 \text{ m}^3/\text{s}$ durante 2 horas; Vazão vertida - 6 vertedores operando continuamente com $200 \text{ m}^3/\text{s}$ cada um. Calcule a variação do volume armazenado em 24 horas.

5 - A figura mostra um esquema de chaminé de equilíbrio. As chaminés de equilíbrio são utilizadas na prática para atenuar as variações de pressão que podem ocorrer durante transientes em tubulações de alimentação de bombas e turbinas. No instante considerado, a velocidade no tubo de alimentação da turbina é $0,5 \text{ m/s}$ a montante da chaminé e de $2,5 \text{ m/s}$ a jusante da mesma. Calcule a vazão fornecida e a velocidade instantânea de abaixamento do nível d'água na chaminé.



6 - Um tanque cilíndrico possui uma área de base igual a 1m^2 . A água escoar por um orifício de 50mm de diâmetro, segundo a figura. A vazão que escoar em m^3/s é dada por $Q = 2,7Ah$



- Calcular o nível da água após 1 minuto
- Quanto tempo leva para escoar 2m^3 do tanque?
- Repetir o item (a) usando integração numérica, com $\Delta t = 20\text{s}$.
- Repetir o item (a) usando solução numérica, com $\Delta t = 5\text{s}$.
- Quanto tempo leva para escoar 1m^3 do tanque?

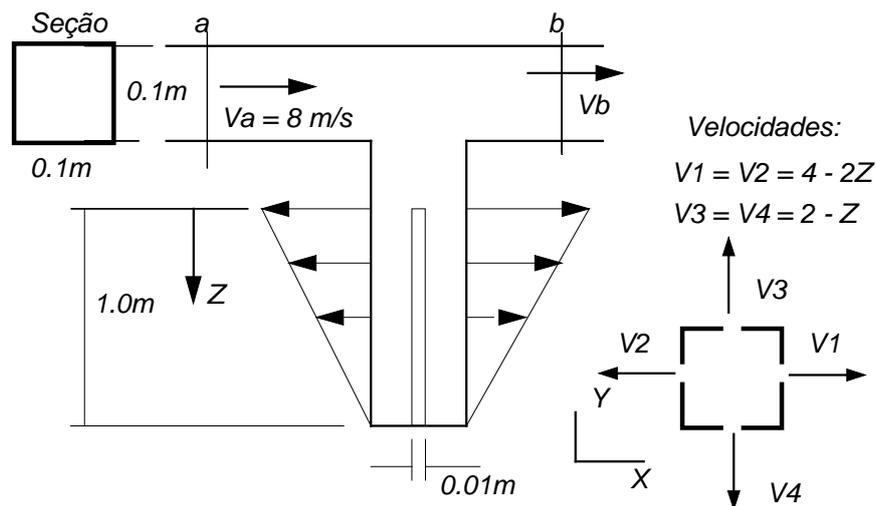
7 - Uma represa forma um reservatório de $5 \times 10^7\text{m}^3$ de capacidade. O lago recebe a contribuição de dois rios, com as seguintes vazões e concentrações médias de sedimentos:

- Rio A: $Q = 12\text{m}^3/\text{s}$; $C_{\text{sedimentos}} = 10\text{g/L}$
 Rio B: $Q = 3\text{m}^3/\text{s}$; $C_{\text{sedimentos}} = 18\text{g/L}$

Sabendo que na saída a concentração de sedimentos é 2g/l , e que a massa específica dos sedimentos é $\rho_{\text{sed}} = 2,65\text{g/cm}^3$, determinar qual o tempo de vida estimado para o reservatório.

8 - O duto da figura tem seção transversal quadrada com $0,1\text{m}$ de lado e descarrega água por quatro fendas de $0,01\text{m}$ por 1m localizadas em nas faces laterais de uma derivação. Sabendo que o regime é permanente, que o duto da derivação é fechado em sua extremidade inferior e com base nas velocidades nas faces dadas na figura, pede-se:

- vazões nas faces 1 e 3;
- módulo e sentido da velocidade média na seção b.



CAPÍTULO 4 TRANSFORMAÇÕES DE ENERGIA NOS ESCOAMENTOS

4.1. Equação de Bernoulli

Uma das equações mais importantes da hidrodinâmica é a equação de Bernoulli, que explica como variam a pressão e os termos de energia potencial e cinética de um fluido em escoamento. A equação de Bernoulli é deduzida com aplicação do teorema que relaciona a variação da energia mecânica ao trabalho realizado sobre um sistema.

Imagine um fluido ideal incompressível escoando em regime permanente entre as seções 1 e 2 de um tubo de corrente, conforme a Figura 4.1. Vamos considerar o Volume de Controle como o tubo de corrente entre as duas seções, e o Sistema como sendo a massa de fluido que no instante inicial da análise encontra-se dentro do volume de controle, identificado pela região tracejada do VC.

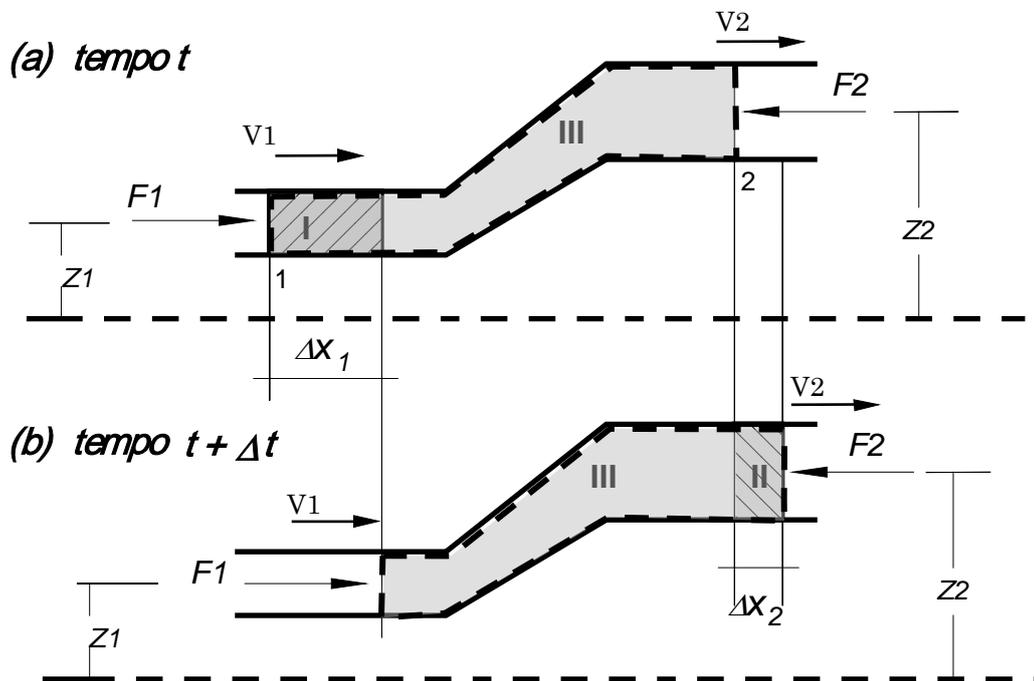


Figura 4.1: Escoamento de um sistema num tubo em dois instantes de tempo

No instante inicial da análise o Sistema coincide com o VC. Com o passar do tempo a água deixa o VC, como é mostrado na Figura 4.1 (b), em que a porção tracejada (Sistema) não mais coincide com o VC.

Aplicaremos o princípio da conservação da energia mecânica ao Sistema:

$$\Delta W = \Delta E_S = E_{t+\Delta t} - E_t \quad 4.1$$

Em que a energia do sistema, em qualquer tempo, é a soma da energia potencial e da cinética.

O sistema é descrito pelas variáveis Eulerianas por meio da região do espaço ocupada em cada instante. Assim, temos:

$$E_S(t) = E_{III}(t) + E_I(t) \quad 4.2$$

$$E_S(t + \Delta t) = E_{III}(t + \Delta t) + E_{II}(t + \Delta t) \quad 4.3$$

O trabalho sobre o sistema é realizado apenas por forças de pressão, porque as forças tangenciais são nulas, devido à hipótese de fluido sem viscosidade (ideal). Além disso, será realizado trabalho apenas nas seções 1 e 2, porque o restante da fronteira do sistema não se move na direção das forças de pressão.

Na seção 1 o resto do fluido (meio) exerce sobre o sistema uma força p_1A_1 . Se o intervalo de tempo considerado for muito pequeno, as pressões podem ser consideradas constantes, assim com as áreas. Portanto, a força é constante e, ao longo do intervalo de tempo considerado, esta força desloca o sistema de Δx_1 . Como consequência, o sistema avança através da seção 2, deslocando-se por uma distância Δx_2 . O restante do fluido opõe-se ao deslocamento do sistema, com a força de pressão p_2A_2 . Da mesma forma pode-se considerar a força constante ao longo do deslocamento.

Das considerações acima, durante o intervalo de tempo considerado, as forças que o meio exerce sobre o sistema realizam um trabalho dado por:

$$\Delta W = p_1A_1\Delta x_1 - p_2A_2\Delta x_2 \quad 4.4$$

Aplicando os resultados 4.2 a 4.4 em 4.1:

$$p_1A_1\Delta x_1 - p_2A_2\Delta x_2 = E_{III}(t + \Delta t) + E_{II}(t + \Delta t) - E_{III}(t) - E_I(t) \quad 4.5$$

Pensando na variação de energia do sistema, vemos que a região III compõe a parte do sistema cuja energia não variou entre t e t+Δt. Toda essa parte contém, em cada ponto, a mesma quantidade de fluido e à mesma velocidade no início e no fim do período. Isto quer dizer que a soma das energias cinética e potencial das unidades de massa dessa região do sistema não varia. Portanto, a variação ocorre porque a parte I do sistema desapareceu, dando origem à parte II.

$$p_1A_1\Delta x_1 - p_2A_2\Delta x_2 = E_{II}(t + \Delta t) - E_I(t) \quad 4.6$$

Se o escoamento é incompressível verificaremos, pelo princípio de conservação das massas, que a massa da parte I é a mesma da parte II.

$$m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Ec_1 = \frac{1}{2}mV_1^2 & Ep_1 = mg z_1 \\ Ec_2 = \frac{1}{2}mV_2^2 & Ep_2 = mg z_2 \end{cases}$$

Reunindo todas as variações na equação 4.6, temos:

$$p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) + mg(z_2 - z_1) \quad 4.7$$

Os termos da equação 4.7 representam energia total. Dividindo a equação pela quantidade de massa envolvida na variação da energia, temos, lembrando que “ $A\Delta x$ ” é o volume de fluido que entrou e saiu do VC:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) \quad 4.8$$

Em que os termos representam energia por unidade de massa (Nm/kg). Rearranjando os termos obtemos a **Equação de Bernoulli**:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 \quad 4.9$$

Daniel Bernoulli (1700-1782)

A equação de Bernoulli representa com pressões e velocidade em seções definidas do espaço, portanto variáveis **Eulerianas**, a variação da energia de um Sistema. As limitações da análise incluem um intervalo de tempo tendendo a zero, ou seja, uma condição instantânea. Mas, como o escoamento é em Regime Permanente, a relação fica válida para qualquer tempo.

Como as seções 1 e 2 podem ser quaisquer, é usual também expressar a equação de Bernoulli na forma:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g z = Cte$$

Equação de Bernoulli (1738)

Hipóteses Utilizadas

Escoamento Incompressível

Regime Permanente

Atrito desprezado

Em um tubo de corrente

4.2. Conservação da Energia nos Escoamentos

Para explorar as consequências da equação de Bernoulli é útil analisar o caso dos fluidos em escoamento em relação aos corpos rígidos, tirando partido das semelhanças e discutindo as diferenças entre os dois casos.

A Figura 4.2 mostra o comportamento de uma esfera rolando sem atrito sobre uma superfície ao se deparar com aumento ou diminuição da cota.

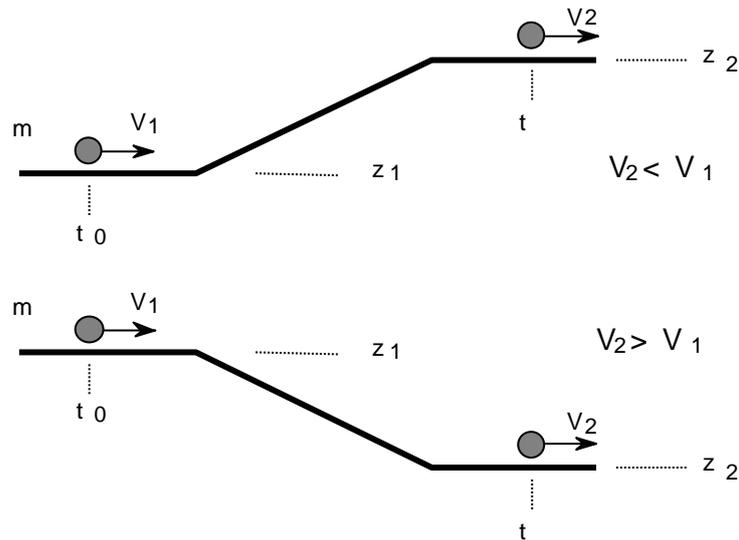


Figura 4.2: comportamento de sistema sólido numa rampa

Esse exemplo é bastante familiar. Já nos acostumamos, da observação cotidiana dos corpos isolados (sistemas), com o fato de que uma rampa transforma energia cinética em potencial. A conservação da energia, na ausência de atrito, permite escrever:

$$m \frac{V_1^2}{2} + m g z_1 = m \frac{V_2^2}{2} + m g z_2 \tag{4.10}$$

_____ Conclusão: *Em um corpo isolado a velocidade é livre para variar.*

A Figura 4.3 mostra três situações possíveis para um escoamento forçado no interior de um tubo. A ilustração fala por si só. Nos escoamentos forçados a energia cinética deixa de ser controlada pela cota, como aconteceria com um corpo isolado.

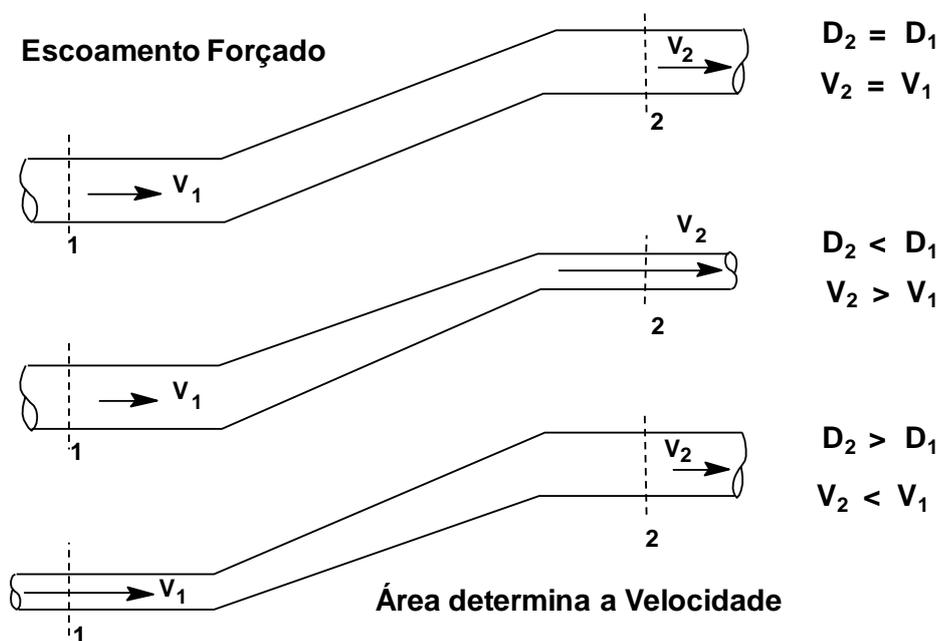


Figura 4.3: Comportamentos possíveis de um escoamento quando aumenta a cota da tubulação.

A Figura 4.3 deixa claro que nos escoamentos forçados não há como compensar a variação da cota com a energia cinética. A velocidade é controlada apenas pelo diâmetro da tubulação.

_____ Conclusão :

Nos escoamentos forçados, a Velocidade não é determinada pelas variações da cota.

_____ Aperfeiçoando a Analogia Trem-Escoamento com Energia Potencial Elástica

Já vimos que não é possível comparar o escoamento com uma massa isolada, sob pena de comprometer o entendimento físico do problema. Entretanto, a nossa analogia do escoamento com um trem, constituído de muitos vagões interligados, é bem mais aproximada da situação que realmente ocorre. Observe a situação da Figura 4.4.

Na Figura 4.4 a velocidade dos vagões não irá variar quando passarem pela elevação, pois a velocidade de cada vagão é a mesma do trem, que é constante. O que ocorre então, se a energia Potencial aumentou e a Cinética não pode diminuir para compensar?

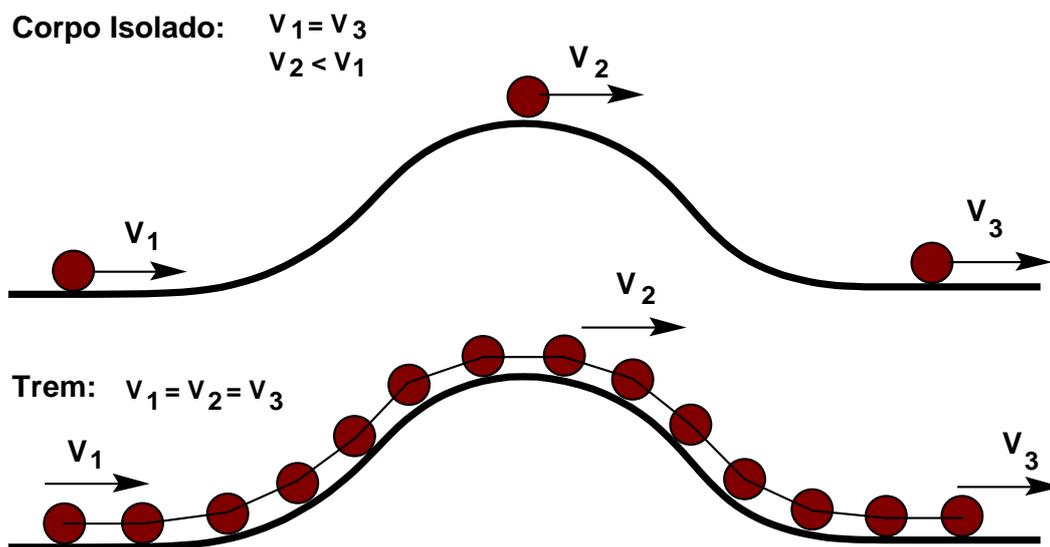


Figura 4.4: Comportamento de corpo isolado e de um trem frente a uma elevação de cota.

A resposta a essa pergunta pode ser dada quando pensamos nas barras de união entre os vagões, introduzindo mais um componente na analogia, capaz de armazenar energia. Pensando que nos vínculos como molas, eles se tornam capazes de armazenar energia potencial sob a forma de deformação elástica.

O potencial elástico das molas de união é análogo, no caso real, à pressão existente nos escoamentos.

_____ Energia Potencial Elástica

Imagine (Fig. 4.5) uma mola com constante elástica K , sendo comprimida por uma força F . O trabalho realizado pela força ficará armazenado na mola sob forma de energia potencial.

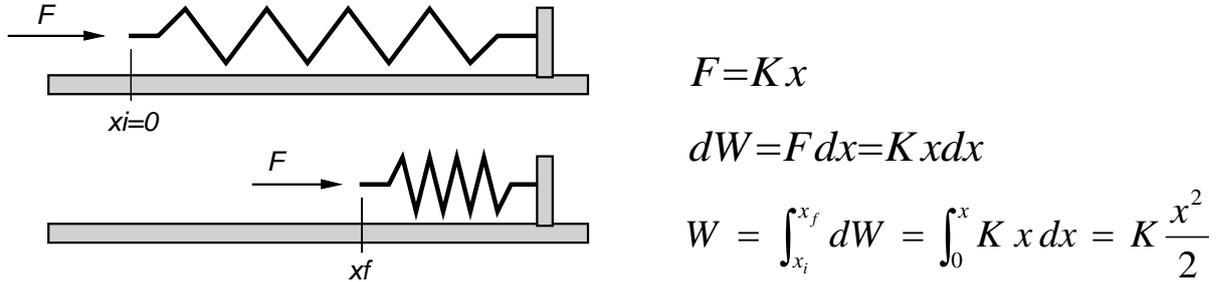


Figura 4.5: mola armazena energia

No caso do trem subindo a colina, a energia cinética permanece constante, mas a força nos vínculos diminui à medida que o vagão sobe a colina.

Quando um sistema massa-mola é desacelerado a força gerada pela variação da energia cinética fica armazenada como energia potencial elástica na mola. Esse efeito é ilustrado pela Figura 4.6.

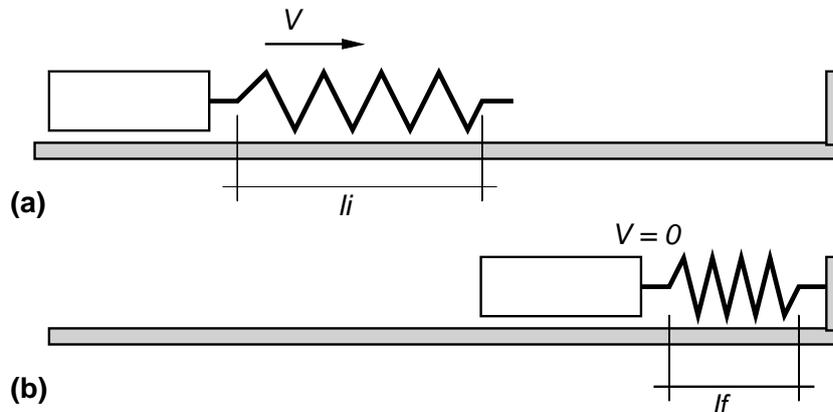


Figura 4.6: Desaceleração de sistema massa-mola comprime a mola.

No caso da Figura 4.6(a), com a massa deslocando-se livremente, a mola está totalmente distendida, e toda a energia está na forma cinética.

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 \qquad E_{pot} = 0 \qquad 4.11$$

Na Figura 4.6(b) a massa foi desacelerada e a velocidade é nula. Supondo atrito nulo, toda a energia cinética disponível foi usada para comprimir a mola:

$$E_c = 0 \qquad E_{pot} = \frac{K (li - lf)^2}{2} = \frac{1}{2} m V^2 \qquad 4.12$$

O caso da Figura 4.6(b) corresponde, na analogia trem-escoamento, ao que ocorre nos **pontos de estagnação**, em que toda a energia cinética da água é convertida em pressão.

Com esses exemplos percebemos que o nosso modelo de analogia entre trem e escoamento precisa incluir a capacidade de armazenar energia sob a forma de deformação elástica. A variável que corresponde à mola é a pressão.

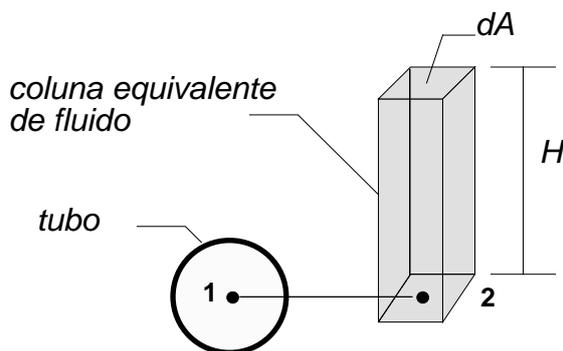
4.3. Energias e Cargas na Equação de Bernoulli

Para obter a equação 4.11 dividimos a energia mecânica expressa na equação 4.10 pela quantidade de massa envolvida ($m = \rho A \Delta x$). Uma forma bastante conveniente da equação surge ao dividirmos a equação 4.10 pelo peso da massa envolvida, ou seja, $W = mg = \rho g A \Delta x$. A equação 4.10 fica:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad 4.13$$

Lembrando que o peso específico $\gamma = \rho g$.

Os termos da equação 4.13 representam energia por unidade de peso do fluido. As unidades no sistema SI são (Nm/N) ou simplesmente (m). Pelas unidades percebe-se que os termos da equação 4.13 são **Cargas**. Esta nomenclatura vale-se da correspondência entre pressões e colunas de fluido que exercem a mesma pressão. O termo carga surgiu para definir a altura da coluna de água, conforme o esquema da Figura 4.7.



Se $p_1 = p_2$, dizemos que H é a altura de coluna equivalente, ou CARGA:

$$p_1 = \rho g H = \gamma H$$

$$H = \frac{p_1}{\gamma}$$

Figura 4.7: Relação entre pressão e altura equivalente de coluna de fluido ou Carga.

Com base nessa analogia, todos os termos de energia por peso da equação foram chamados de cargas. Temos:

$$\text{Carga de Pressão:} \quad H_{pr} = \frac{p}{\gamma}$$

$$\text{Carga Cinética:} \quad H_c = \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{Carga Potencial:} \quad H_g = z$$

Lembrando que as cargas de pressão resultam do trabalho das forças externas sobre o sistema e as demais compõem a energia mecânica do sistema (por unidade de peso).

Com o uso das cargas a equação de Bernoulli pode ser escrita da forma:

$$H_T = \frac{p}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g} \quad (\text{m}) \quad 4.14$$

Os dois primeiros termos compõem a Carga Piezométrica, porque correspondem à cota do nível que a água atinge num piezômetro instalado na seção considerada. Veja o esquema da Figura 4.8.

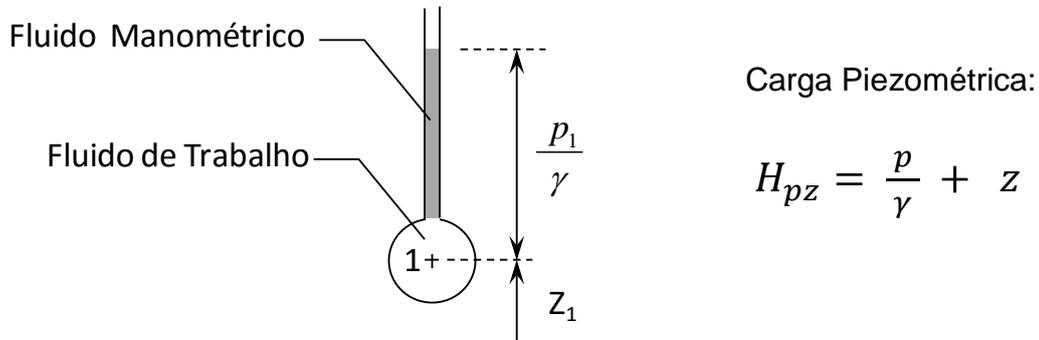


Figura 4.8: Piezômetro – cota do nível do fluido coincide com a carga piezométrica.

4.4. Aplicação a Medições de Vazão e Velocidade

4.4.1. Medidor Venturi

Os medidores tipo Venturi utilizam um estreitamento da seção para provocar aumento da carga cinética. Manômetros medem a diferença na carga de pressão. Um esquema de medidor de vazão tipo Venturi é apresentado na Figura 4.9.

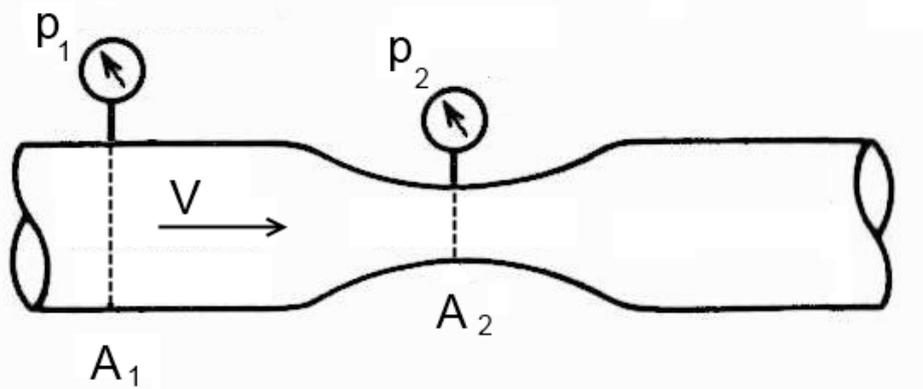


Figura 4.9: Medidor tipo Venturi.

Tomando um tubo de corrente entre as seções 1 e 2 e aplicando Bernoulli, temos:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

Pela continuidade, temos $V_1 A_1 = V_2 A_2 \rightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_1^2}{2g} \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

Resolvendo em função de V_1 temos:

$$V_1 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}}$$

Com a velocidade média pode-se calcular a vazão:

$$Q = V_1 A_1$$

4.4.2. Tubo de Pitot

O medidor tipo Pitot é formado por um tubo com abertura perpendicular às linhas de corrente, conforme visto na seção 2 do esquema da Figura 4.10. O fluido é desacelerado no trajeto entre 1 e 2. No ponto 2, sobre a linha de corrente central do escoamento, a velocidade é nula, pois o líquido está estático no interior do tubo. O ponto 2 é chamado de Ponto de Estagnação.

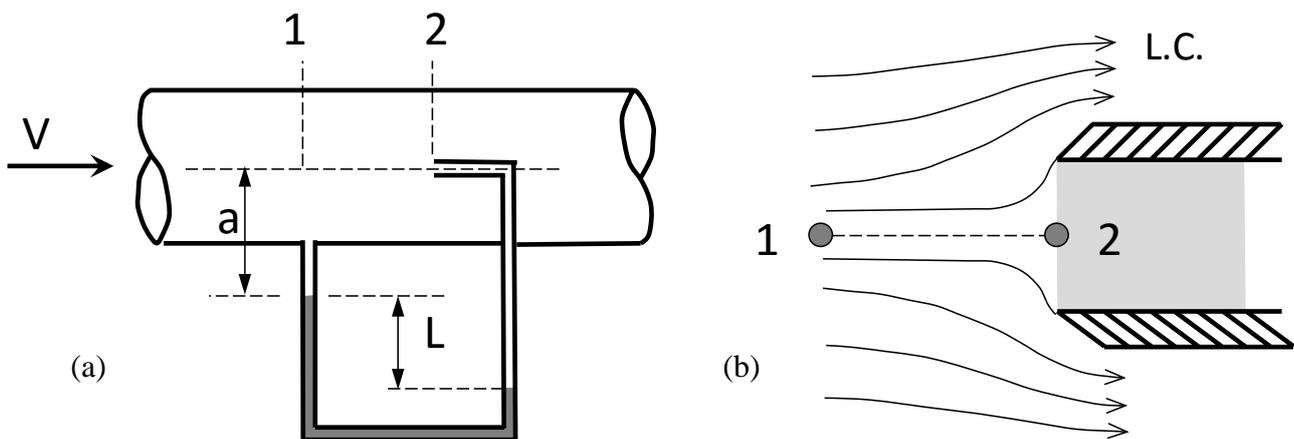


Figura 4.10: Medidor tipo Pitot (a) e detalhe do ponto de estagnação (b).

As tomadas de pressão perpendiculares às linhas de fluxo, como a do ponto 2, são chamadas na prática de “**tomadas dinâmicas**” de pressão, porque são afetadas pela velocidade do escoamento. Em contraposição, tomadas de pressão paralelas às linhas de fluxo, como as do ponto 1, são chamadas de “**tomadas estáticas**” de pressão, porque a leitura indicada não é afetada pela velocidade do fluido.

Entre os pontos 1 e 2, ao longo da linha de corrente central, pode ser aplicada a equação de Bernoulli, supondo que a desaceleração da água ocorre sem perda apreciável de energia.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

Temos $z_1 = z_2$ e $V_2 = 0$, pois o ponto 2 é ponto de estagnação.

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma}$$

$$V_1 = \sqrt{2 \frac{p_2 - p_1}{\rho}}$$

O manômetro diferencial de tubo em U permite calcular a diferença de pressões.

$$p_1 + \gamma a + \gamma_M L - \gamma L - \gamma a = p_2$$

$$p_2 - p_1 = (\gamma_M - \gamma) L$$

sendo “ γ_M ” o peso específico do fluido manométrico e “ γ ” o peso específico do fluido de trabalho.

4.4.3. Orifícios de pequenas dimensões

Quando a carga sobre o orifício é grande em relação a seu diâmetro, a velocidade de saída do fluido é aproximadamente constante e o orifício é chamado de pequenas dimensões. A Figura 4.11 mostra o esquema de um grande reservatório descarregando água por um orifício, formando um jato livre. Em um grande reservatório o nível da água varia muito lentamente.

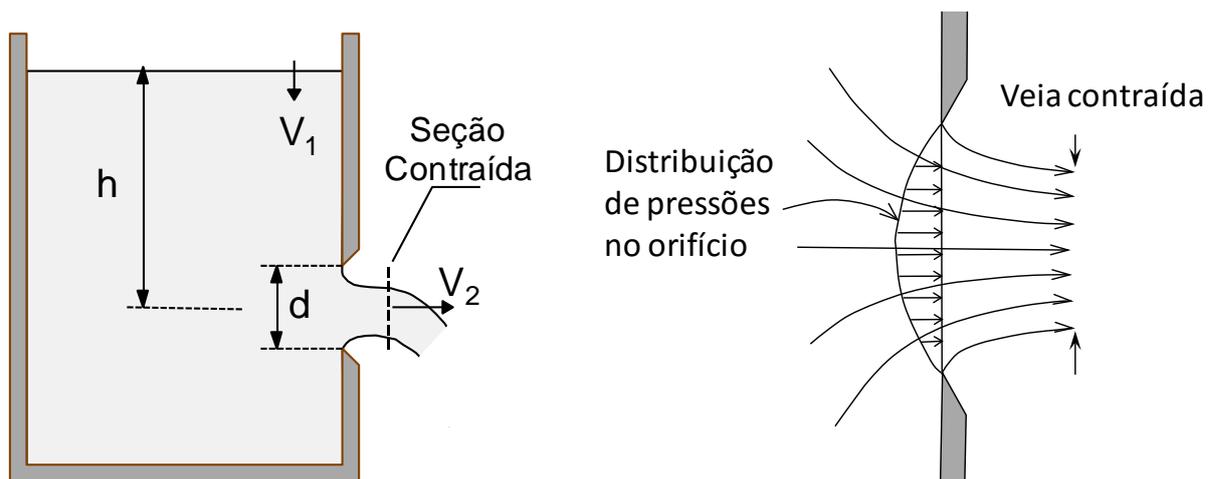


Figura 4.11: Orifício de parede delgada em reservatório de grandes dimensões e detalhe da veia contraída.

A seção contraída é a primeira seção a partir do orifício em que a pressão do jato é conhecida. Após a seção contraída o jato é livre ($p = p_{atm}$) e antes dela a pressão segue uma distribuição desconhecida, conforme indica o detalhe da Figura 4.11.

Aplicamos a equação de Bernoulli entre um ponto qualquer do reservatório e a seção contraída, com o referencial de cota no eixo do orifício.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

Qualquer que seja a posição do ponto 1 no reservatório, desde que suficientemente afastado do orifício, temos:

$$\frac{V_1^2}{2g} \cong 0 : \text{a carga cinética é desprezível;}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = h : \text{carga média sobre o orifício (não depende da posição do ponto 1).}$$

Como na seção 2 o jato é livre, temos :

$$h = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g} \rightarrow V_2 = \sqrt{2 g h}$$

Entretanto, a velocidade real é menor que a calculada, devido às perdas no processo de aceleração. Essas perdas são levadas em conta por um fator de correção experimental da velocidade, chamado de **Coefficiente de Velocidade** (C_V).

$$C_V = \frac{V_{2,Real}}{V_{2,Teórica}}$$

A área do jato também é menor, devido à curvatura das linhas de corrente ao passar pelo orifício. O fenômeno da contração do jato é levado em conta por outro coeficiente experimental, chamado de **Coefficiente de Contração** (C_C).

$$C_C = \frac{A_{Seção Contraída}}{A_{Orifício}}$$

Para orifícios circulares de parede delgada C_V varia entre 0,95 e 0,99 e o $C_C = 0,62$.

A vazão através do orifício com área A_0 fica então:

$$Q = V_{Real} A_{Jato} = C_V \sqrt{2 g h} \times C_C A_0$$

É usual combinar os dois coeficientes experimentais num único coeficiente, chamado de **Coefficiente de Descarga** (C_D).

$$C_D = C_C C_V$$

E a vazão fica:

$$Q = C_D \sqrt{2 g h} A_0$$

O coeficiente de descarga típico de orifícios circulares de parede delgada é 0,61.

4.4.4. Bocais em condutos forçados

Quando um tubo descarrega por meio de um bocal que causa estreitamento da seção e aumento da velocidade, a vazão descarregada pelo tubo pode ser facilmente determinada com auxílio de um manômetro. Esta aplicação é ilustrada pela Figura 4.12 que mostra um bocal na extremidade de um tubo dotado de um piezômetro.

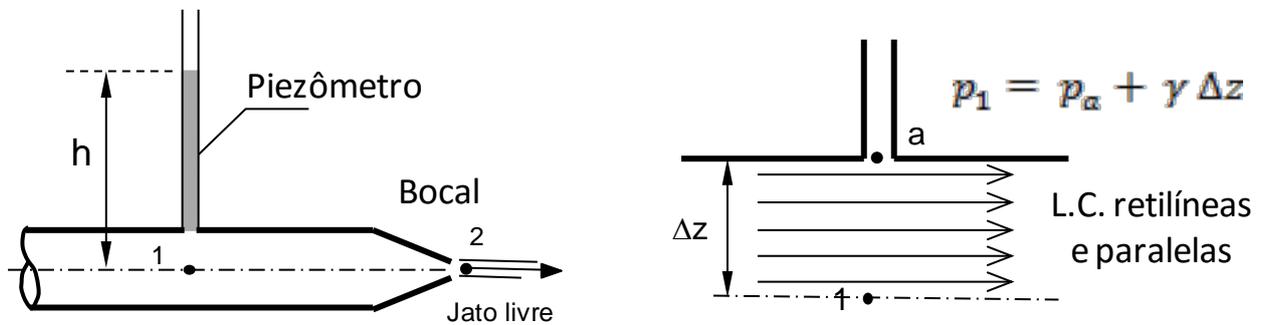


Figura 4.12: Bocal descarregando em jato livre e detalhe da variação de pressão no interior do tubo.

A vazão é determinada aplicando-se a equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 2 situados ao longo da linha de corrente que passa pelo eixo do tubo.

A carga de pressão no ponto 1, situado na linha média do tubo pode ser calculada diretamente com a leitura no piezômetro, tendo em vista que no interior do tubo as linhas de corrente são retilíneas e paralelas:

$$p_1 = p_{atm} + \gamma h \rightarrow \frac{p_1}{\gamma} = h$$

A equação de Bernoulli fica:

$$h + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \rightarrow \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = h$$

A equação da continuidade fornece a relação entre as velocidades necessária para resolver o problema. Pela continuidade, temos:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \rightarrow V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2}$$

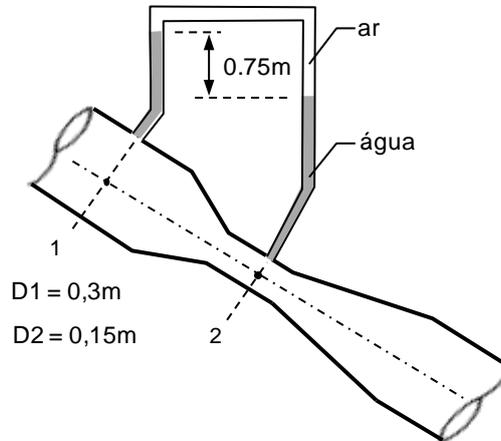
Resolvendo para V_1 , a velocidade no tubo:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}}$$

4.5. Exercícios

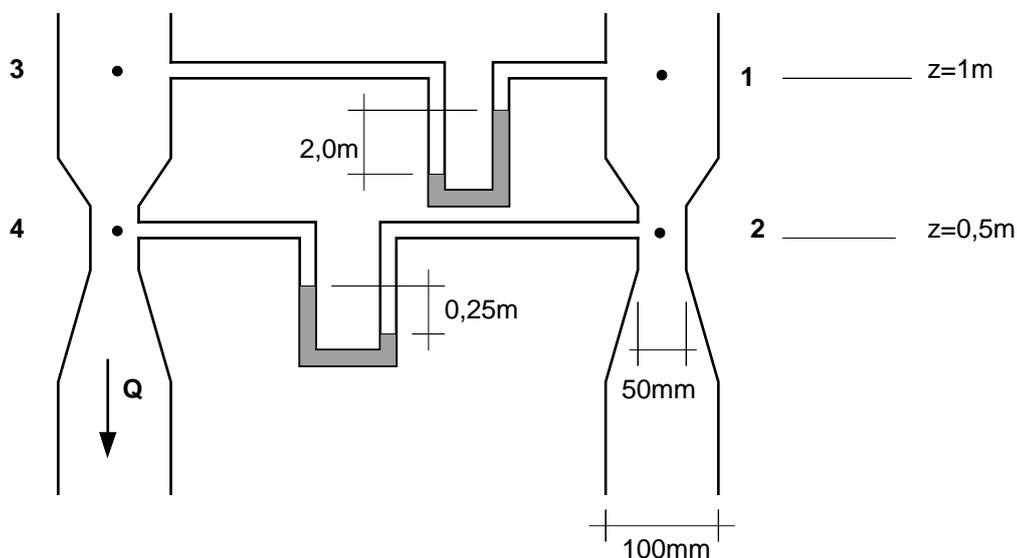
4.5.1) Um fluido de $\gamma = 10.000 \text{ N/m}^3$ escoar por um tubo horizontal, com uma redução de diâmetro de 150mm para 50mm. Sabendo que a pressão na seção 1, antes da redução, é de 500.000 N/m^2 , e a velocidade é 2m/s , calcular a pressão na seção 2, após a redução.

4.5.2) Desprezando as perdas no Venturi da figura, calcule a vazão de água transportada.



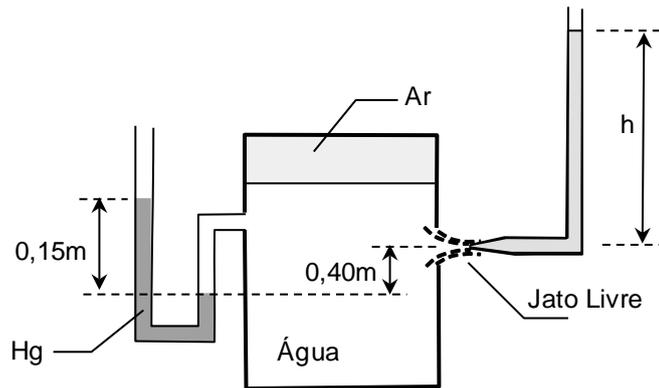
4.5.3) A figura mostra dois Tubos Venturi verticais, transportando água ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$), instalados lado a lado e interligados por dois circuitos manométricos, com fluido manométrico de $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$. Sabendo que no ponto 1 a velocidade é 1m/s e a pressão é 10.000 Pa , pede-se:

- Calcular a pressão no ponto 2
- Calcular a pressão no ponto 3
- Calcular a pressão no ponto 4
- Calcular a vazão no venturi da esquerda.

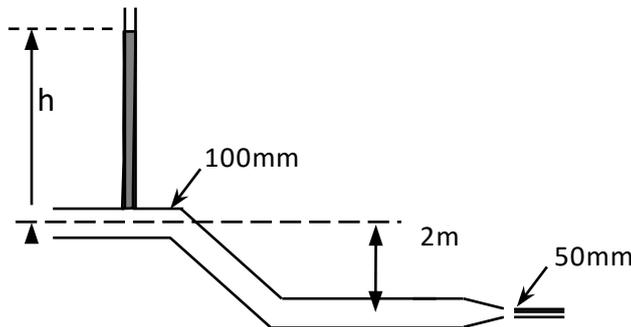


4.5.4) A figura mostra um reservatório de grandes dimensões, com ar pressurizado na parte superior, conforme demonstrado pelo manômetro. O reservatório possui um orifício de $0,01\text{m}$ de diâmetro em sua parede lateral, descarregando um jato livre na atmosfera, no qual foi posicionado um tubo de Pitot, em posição que não obstrui o jato.

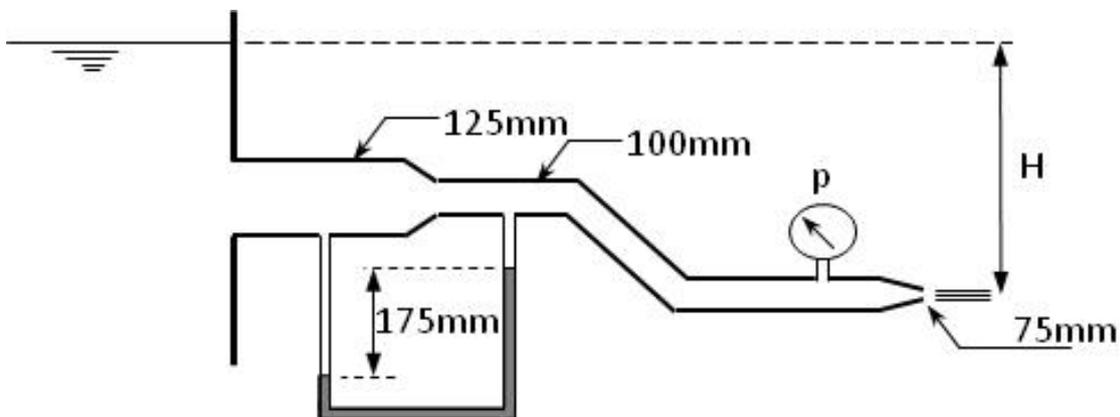
Pede-se determinar a vazão que sai pelo orifício e a leitura h , sabendo que o coeficiente de contração do orifício é 0,66.



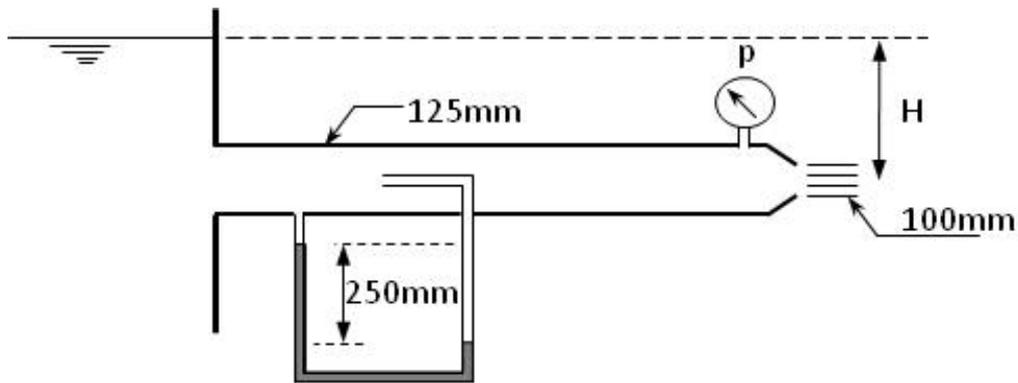
4.5.5) O tubo de 100mm de diâmetro descarrega água em jato livre através do bocal de 50mm. As perdas de carga entre a saída e o piezômetro são $\Delta h = 10V^2/2g$ sendo V a velocidade no tubo. A leitura do piezômetro é $h = 2,5m$. Calcular a vazão.



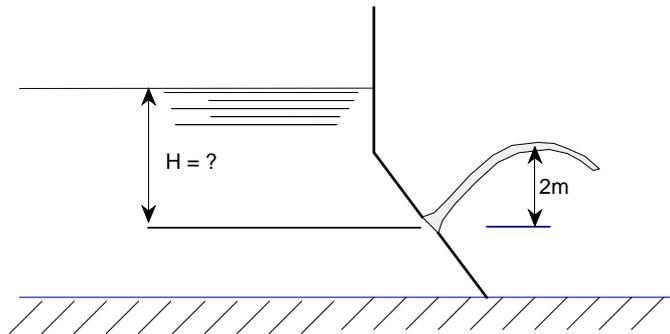
4.5.6) Água de um reservatório de grandes dimensões escoa em regime permanente na tubulação da figura, que termina num bocal de 75mm descarregando em jato livre. O fluido no manômetro é mercúrio ($d=13,6$). Pede-se determinar, desprezando as perdas: a) a vazão; b) a pressão p indicada pelo manômetro no tubo de 100mm, e c) a carga H .



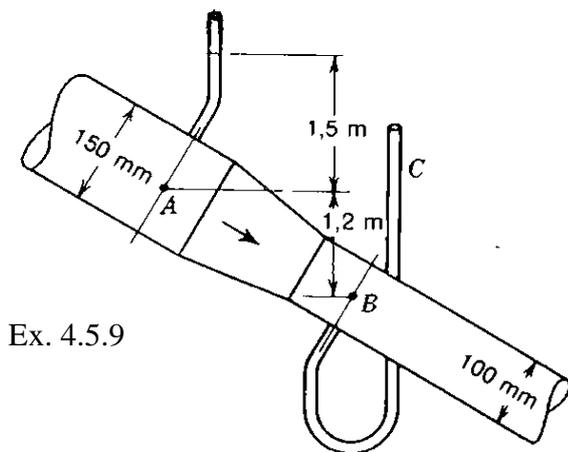
4.5.7) Água de um reservatório de grandes dimensões escoa em regime permanente na tubulação da figura, que termina num bocal de 100mm descarregando em jato livre. O fluido no manômetro é mercúrio ($d=13,6$). Pede-se determinar, desprezando as perdas: a) a vazão; b) a pressão p indicada pelo manômetro no tubo de 100mm, e c) a carga H .



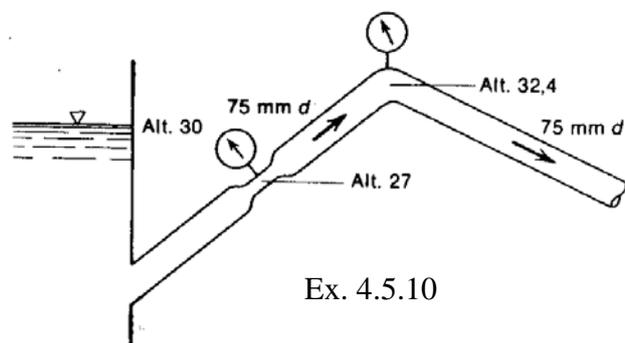
4.5.8) Um reservatório de grandes dimensões contém água ($\gamma = 9.800 \text{ N/m}^3$) escoando por um orifício circular de parede delgada na parede inclinada a 60° , sendo que o jato sobe até um nível 2,0 m acima do orifício. Sabe-se que a área do orifício é 5 cm^2 , e que seus coeficientes são $C_C = 0,60$ e $C_V = 0,9$. Calcule a) a carga H no orifício b) a vazão escoada.



4.5.9) Na tubulação da figura a água escoa com velocidade de $2,4 \text{ m/s}$ no ponto A. Aonde o nível da água chegará no piezômetro C?



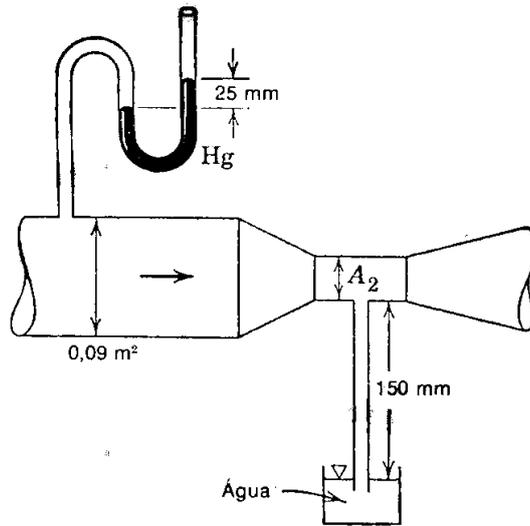
Ex. 4.5.9



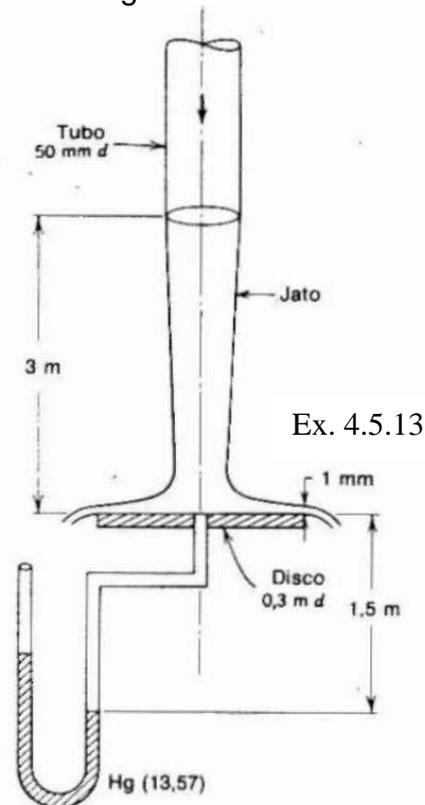
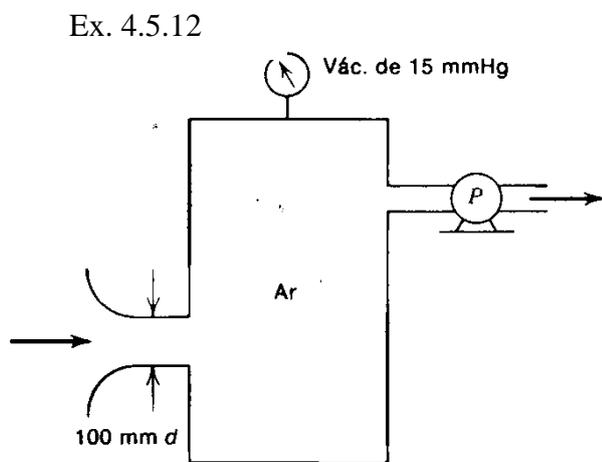
Ex. 4.5.10

4.5.10) Se cada manômetro indicar a mesma leitura para uma vazão de 28 l/s , qual deverá ser o diâmetro da constrição na figura deste problema?

4.5.11) Para uma vazão de ar de $2 \text{ m}^3/\text{s}$ ($\gamma = 12,0 \text{ N/m}^3$) qual deverá ser a maior seção A_2 necessária para que a água se eleve até a abertura do piezômetro? Despreze efeitos de compressibilidade.



4.5.12) Bombeia-se ar através de um tanque conforme indicado na figura. Desprezando efeitos de compressibilidade, calcule a velocidade do ar no tubo de 100 mm. A pressão atmosférica é de 91 kN/m^2 e o peso específico do ar é igual a 11 N/m^3 .



4.5.13) A água escoar num tubo vertical de 50mm conforme a figura, caindo em jato livre sobre um disco com 0,30m de diâmetro. No centro do disco está um manômetro diferencial. O escoamento é axissimétrico, com a água deixando o disco horizontalmente, num jato com 1mm de altura. Calcule a vazão e a deflexão no manômetro.

CAPÍTULO 5: TRANSFORMAÇÃO DE REYNOLDS

Relação Sistema x Volume de Controle

5.1 Introdução

Vamos iniciar com o balanço global de massa (equação 3.22), deduzido no item 3.3.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dVol + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} = 0 \quad (\text{eq. 3.22})$$

Alguém com talento para generalizações pode perceber, ao considerar a equação 5.22, que o segundo membro representa uma declaração válida para qualquer Sistema, em relação à massa, da seguinte forma:

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{SISTEMA} = 0 \quad 5.1$$

O primeiro membro surgiu ao aplicar o conceito de conservação de massa a um VC, ou seja, representa a taxa de variação da massa do V.C. ao longo do tempo. Mas, o que é a taxa de variação no tempo da massa de um V.C.? Aplicando diretamente a definição do cálculo obtemos equação 5.2.

$$\left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_{VC} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_{VC}(t+\Delta t) - M_{VC}(t)}{\Delta t} \quad 5.2$$

Onde M indica a massa do Volume de Controle e os índices indicam o tempo em que ela é avaliada.

Pergunta : Podemos *demonstrar que a derivada da equação 5.2 é equivalente às duas integrais do balanço global da equação 3.23?*

Se provarmos que a derivada da equação 5.2 é igual às integrais do balanço da equação 3.22, mostraremos que, na verdade, a equação do balanço relaciona uma propriedade da massa válida em um **sistema** à descrição dessa mesma propriedade com variáveis medidas de forma Euleriana, ou seja, em pontos definidos do espaço. Tentaremos deixar claro este ponto no próximo item.

5.2 Do Sistema ao Volume de Controle

A relação entre Sistema e Volume de Controle para uma dada lei física é chamada também de Transformação de Reynolds. É uma ferramenta muito útil, porque todas as leis da física clássica se aplicam a quantidades de massa definidas. Na Mecânica dos Fluidos, como já pudemos perceber, é importante que tenhamos leis válidas para uma região definida do espaço, o Volume de Controle. Logicamente, tudo que for válido para a Massa,

também será válido para qualquer outra grandeza extensiva N . Nessa generalização para outras grandezas extensivas nosso esforço será amplamente recompensado.

Imagine um escoamento, visualizado esquematicamente na Figura 5.1 por meio de suas linhas de corrente. Existe um Volume de Controle qualquer, que contém inicialmente em seu interior uma massa que constitui o Sistema sob análise (Fig. 5.1(a)). Podemos pensar que o volume foi demarcado por uma linha de tempo, acompanhando a forma do sistema no instante inicial.

Decorrido um intervalo de tempo Δt , o Sistema, carregando consigo sua massa e suas grandezas extensivas N , terá se deslocado devido ao escoamento, enquanto que o V.C. permanece fixo no espaço, conforme ilustrado na Figura 5.1(b). Lembre-se que a Linha de Tempo pode deformar-se ao acompanhar o escoamento, mas sempre demarcará a mesma quantidade de fluido inicial (com a mesma massa e mesmas quantidades das grandezas extensivas N - ver propriedades da linha de tempo).

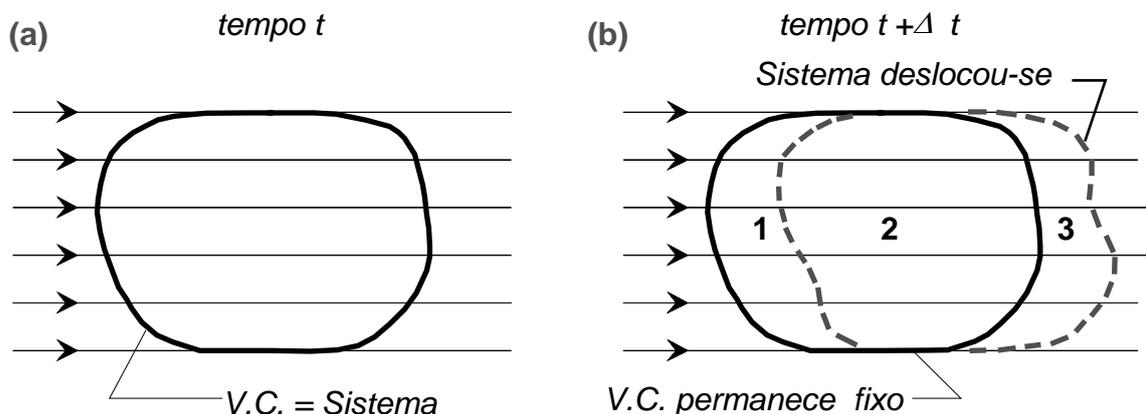


Figura 5.1: Volume de Controle e Sistema em dois instantes consecutivos num escoamento.

A situação do sistema em relação ao VC permite definir 3 regiões do espaço, conforme assinalado na Figura 5.1(b). A massa do sistema no instante t corresponde à massa contida nas regiões 1 e 2. No instante seguinte a massa do sistema ocupa as regiões 2 e 3. A mesma consideração vale para as quantidades de grandeza N que a massa possui:

$$[M_S]_t = (M_1 + M_2)_t \quad 5.3$$

$$[N_S]_t = (N_1 + N_2)_t \quad 5.3-a$$

$$[M_S]_{t+\Delta t} = (M_2 + M_3)_{t+\Delta t} \quad 5.4$$

$$[N_S]_{t+\Delta t} = (N_2 + N_3)_{t+\Delta t} \quad 5.4-a$$

Com esse expediente, as equações 5.3 e 5.4 relacionam a massa do sistema por meio de medições nas regiões do espaço correspondentes, indicadas pelos índices 1, 2 e 3. Observe que as quantidades de massa e da grandeza N devem ser descritas por variáveis Eulerianas, embora a quantidade total das grandezas seja de um sistema.

A taxa de variação no tempo da grandeza N (ou da massa M) do sistema fica então:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[N_S]_{t+\Delta t} - [N_S]_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(N_2 + N_3)_{t+\Delta t} - (N_1 + N_2)_t}{\Delta t} \quad 5.5$$

Lembrando que N é substituído por M no caso do balanço de massa.

Observe que parte da massa do sistema que antes estava no V.C. foi afastada pelo fluxo que entra no V.C., levando consigo suas grandezas extensivas. Assim, podemos associar a grandeza N (ou a massa) da região 1 da Figura 5.1 ao fluxo de entrada da grandeza N (ou da massa):

$$N_1 = F_{N,E} \Delta t \quad 5.6$$

Da mesma forma, ao acompanhar o escoamento, o sistema teve parte de sua massa atravessando a área de saída, identificada pelo volume 3 da Figura 5.1. Portanto, o fluxo de saída da grandeza N pode ser usado para calcular a quantidade N_3 .

$$N_3 = F_{N,S} \Delta t \quad 5.7$$

Esses resultados serão usados para simplificar a equação 5.5:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(N_2)_{t+\Delta t} - (N_2)_t + N_3 - N_1}{\Delta t} \quad 5.8$$

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(N_2)_{t+\Delta t} - (N_2)_t + (F_{N,S} - F_{N,E})\Delta t}{\Delta t} \quad 5.9$$

É fácil perceber que os fluxos da equação 5.9 não dependem do limite considerado, porque são fluxos médios no intervalo de tempo. Assim, a derivada da massa no sistema fica com dois termos, mas apenas um varia no limite para $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(N_2)_{t+\Delta t} - (N_2)_t}{\Delta t} + F_{N,S} - F_{N,E} \quad 5.10$$

O próximo passo é verificar que quanto menor o tempo Δt , menor é o volume que vai entrar e sair do V.C. devido ao escoamento. Isto implica que no limite o volume 2 tende para o próprio Volume de Controle, de forma que podemos escrever a Lei Física da Conservação da Massa da seguinte forma:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_S = \left. \frac{\partial N}{\partial t} \right|_{VC} + F_{N,S} - F_{N,E} \quad 5.11$$

Usando as variáveis de interesse nos termos do segundo membro da equação 5.11 obtém-se, para o caso da Massa:

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_S = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \, dVol + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} \quad 5.12$$

O esquema da Figura 5.2 realça os aspectos interessantes da equação 5.12

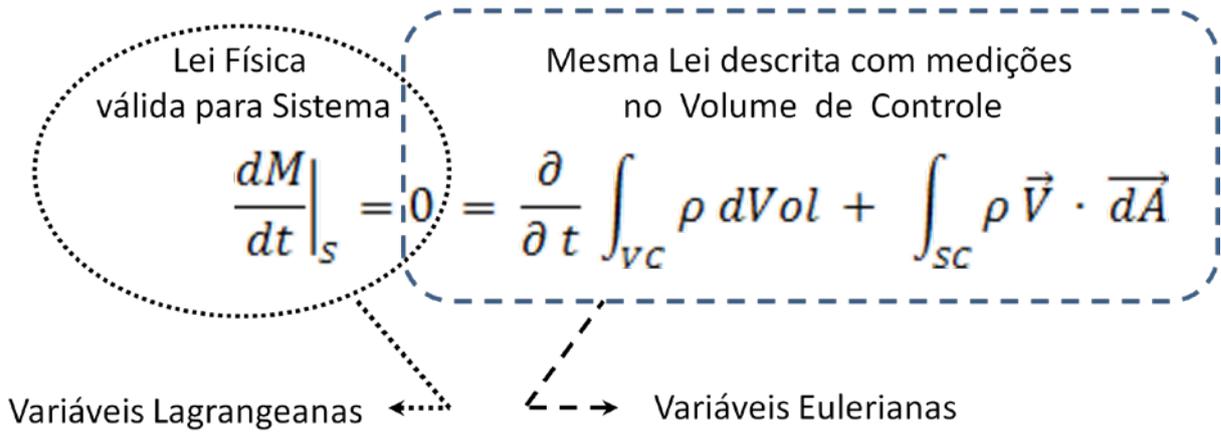


Figura 5.2: Transformação de Reynolds relaciona grandezas Lagrangeanas a grandezas Eulerianas

5.3 Balanço Global de Grandezas Extensivas

Vimos que tudo que é válido para a massa, também é válido para as grandezas extensivas que a massa transporta. Assim, a relação sistema - volume de controle para uma grandeza extensiva N qualquer pode ser escrita diretamente, a partir das equações 5.11 e 5.12 como:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dVol + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} \tag{5.13}$$

Lembrando que a quantidade específica η da grandeza N é dada por: $dN = \eta dm$.

A equação 5.13 é chamada também de “balanço global de grandezas extensivas”. Observe que não podemos considerar nula a taxa de variação da grandeza no sistema (lado esquerdo - Lagrange), pois isso é válido somente para a massa, e não para grandezas extensivas em geral. Isso será visto com detalhe nos itens seguintes. A Figura 5.3 realça os aspectos de mudança de pontos de vista envolvidos na Transformação de Reynolds.

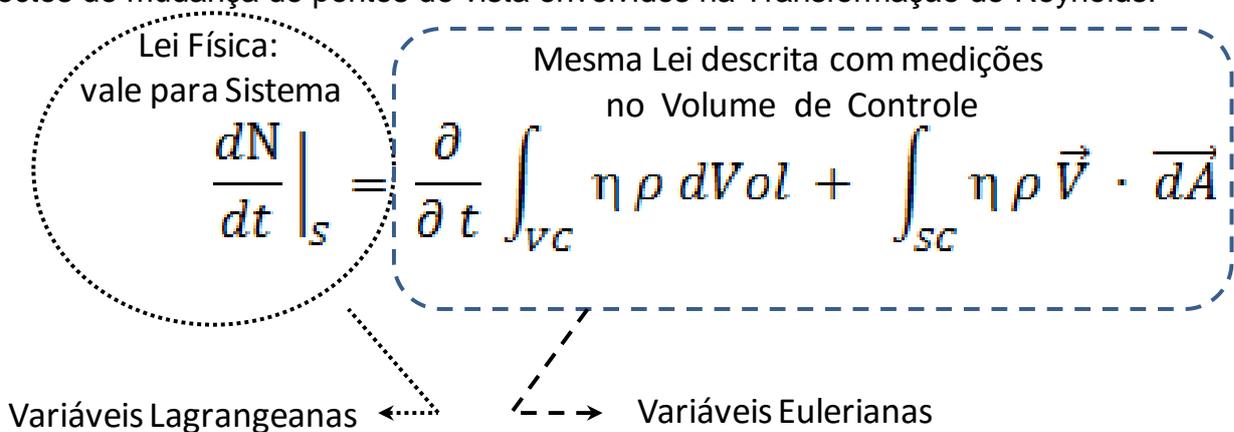


Figura 5.3: Transformação de Reynolds para uma grandeza extensiva N qualquer.

Nesse caso são as forças de contato ao longo da sua superfície as responsáveis pelo trabalho. Forças de contato originam-se das pressões e das tensões de cisalhamento ao longo da superfície do sistema.

Além disso, trabalho pode ser extraído ou retirado de um sistema fluido sem que suas fronteiras se movam, por meio do torque existente em um eixo com pás. É o caso das bombas e turbinas.

$$W = W_p + W_t + W_e$$

trabalho de eixo (bomba ou turbina)
 trabalho de forças tangenciais (cisalhamento)
 trabalho de forças normais (pressão)

6.3

trabalho das forças de pressão

Imagine um sistema que está se expandindo. Por exemplo, os gases no interior de um cilindro de motor empurrando o pistão, como na Figura 6.1:

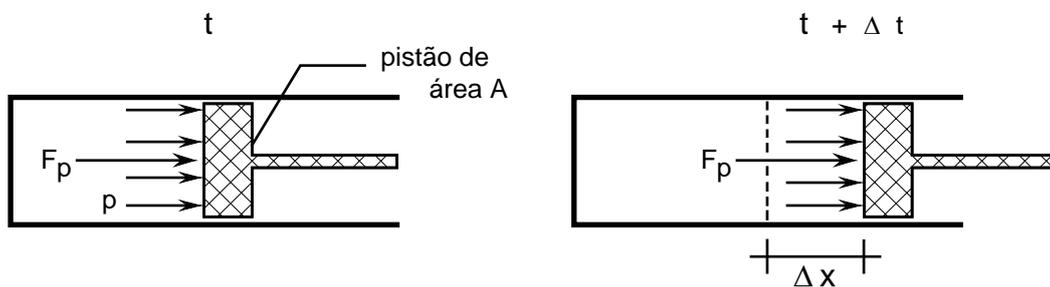


Figura 6.1: Trabalho realizado pelas forças de pressão

O trabalho realizado pelas forças de pressão na fronteira do sistema durante a expansão é dado por

$$\Delta W_p = F \cdot \Delta x \quad \rightarrow \quad \Delta W_p = p \vec{A} \cdot \Delta \vec{x} \quad 6.4$$

A taxa de realização de trabalho é dada por $\Delta W_p / \Delta t$:

$$\frac{\Delta W_p}{\Delta t} = p \vec{A} \cdot \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = p \vec{V} \cdot \vec{A} \quad 6.5$$

O resultado da eq. 6.5 é válido quando a pressão e a velocidade são constantes ao longo da área e durante o intervalo Δt .

No caso geral devemos usar valores instantâneos da velocidade, e forças atuando em uma área elementar $d\vec{A}$. Essas forças são dadas por $d\vec{f} = p d\vec{A}$. Assim o trabalho das forças ao longo de toda a área móvel é:

$$\frac{\delta W_p}{\delta t} = \int_A p d\vec{A} \cdot \vec{V} \quad (\text{trabalho das forças de pressão}) \quad 6.6$$

trabalho das forças tangenciais

Podem existir também tensões de cisalhamento atuando na superfície do sistema. Mas o trabalho das forças tangenciais será anulado sempre que as áreas forem perpendiculares ao vetor velocidade. Devemos nos lembrar disso quando escolhermos o V.C. dos problemas, para facilitar a solução. Veja a Figura 6.2:

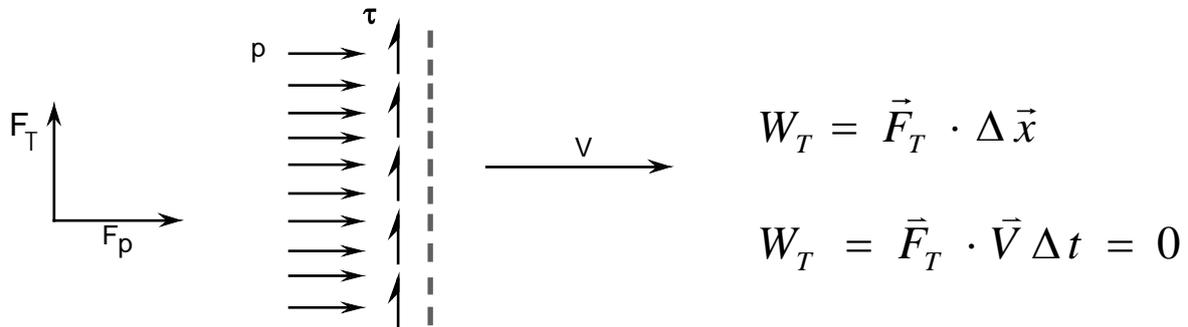


Figura 6.2: Fronteira móvel em que o trabalho das forças tangenciais é nulo

Portanto, o trabalho das forças de contato fica reduzido apenas ao trabalho das forças de pressão nas entradas e saídas do V.C., desde que as áreas de entrada e saída sejam perpendiculares às velocidades. Assim, temos que:

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{\delta W_p}{\delta t} + \frac{\delta W_e}{\delta t} = \int_{AE+AS} p d\vec{A} \cdot \vec{V} + \frac{\delta W_e}{\delta t} \tag{6.7}$$

As áreas de entrada e saída podem ser substituídas por toda a superfície do V.C., pois ao longo das áreas laterais a velocidade é, por definição, perpendicular à área e o produto escalar $\vec{dA} \cdot \vec{V}$ é nulo.

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \int_{SC} p d\vec{A} \cdot \vec{V} + \frac{\delta W_e}{\delta t} \tag{6.8}$$

Usando o resultado da equação 6.8 para substituir o termo do trabalho na equação 6.2 vemos que:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W_p}{\delta t} - \frac{\delta W_e}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dVol + \int_{SC} e \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \tag{6.9}$$

$\frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W_e}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dVol + \int_{SC} \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$	6.10
---	------

Balanco Integral da energia

Os termos da equação do balanço integral da energia, eq. 6.10, representam trabalho por unidade de tempo. Assim, todos os termos equivalem a taxas de variação da energia no tempo. No caso do segundo termo do segundo membro essa variação da energia no tempo

decorre da diferença de fluxos de entrada e saída de trabalho das forças de pressão (p/ρ) e energia interna (e) nas fronteiras do sistema. Suas dimensões são dadas por:

$$\left[\frac{\delta W}{\delta t} \right] = \frac{F L}{T} = \frac{\frac{ML}{T^2} L}{T} = \frac{ML^2}{T^3} \quad 6.11$$

As unidades no SI na equação 6.10 são de joules por segundo, ou Watt.

6.1 Aplicação a um V.C. em Regime Permanente

As situações mais comuns na vida prática são as que envolvem um VC com apenas uma entrada e uma saída, operando em regime permanente, conforme a Figura 6.3. Vamos considerar também um trabalho de eixo, já que é muito comum a presença de bombas ou turbinas nas aplicações hidráulicas.

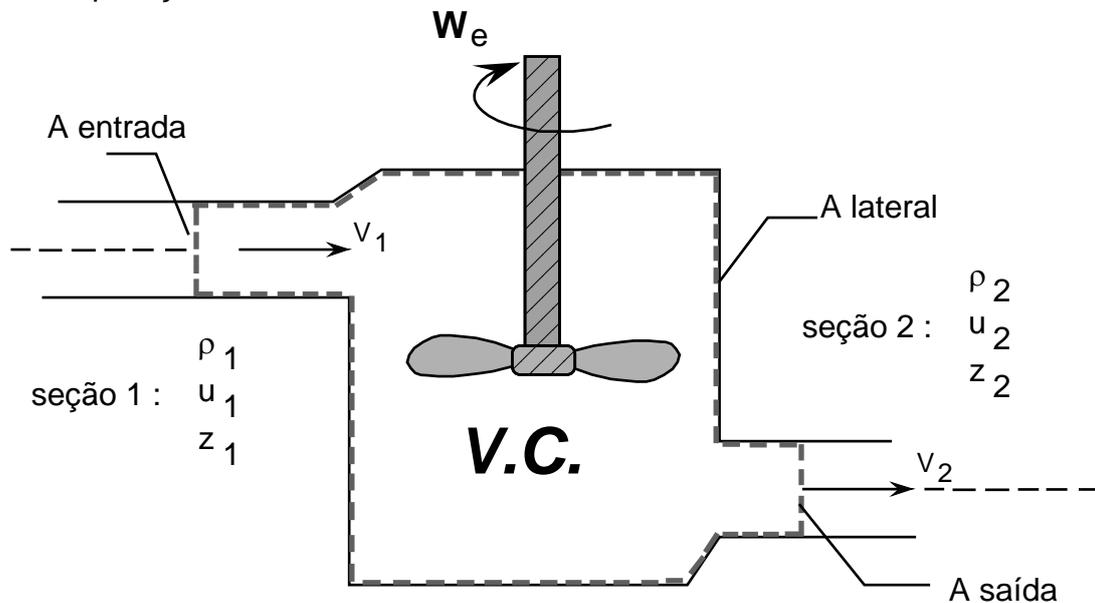


Figura 6.3: VC para aplicação do balanço integral da energia

Como o regime é permanente, a integral de volume da equação 6.10 desaparece. Usando os valores médios das grandezas do escoamento nas áreas 1 e 2, de entrada e saída, podemos efetuar a integral de superfície. Com esses passos a equação da energia fica:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W_e}{\delta t} = \left(\frac{p_2}{\rho_2} + e_2 \right) \rho_2 V_2 A_2 - \left(\frac{p_1}{\rho_1} + e_1 \right) \rho_1 V_1 A_1 \quad 6.12$$

Podemos rearranjar os termos da equação 6.12 e escrever a energia específica “e” em termos de suas componentes cinética, potencial e interna:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} + \left(\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + u_1 \right) \rho_1 V_1 A_1 = \frac{\delta W_e}{\delta t} + \left(\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + u_2 \right) \rho_2 V_2 A_2 \quad 6.13$$

Se aplicarmos agora o princípio da conservação da massa para escoamentos permanentes, veremos que $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = F_M$. Podemos dividir então os dois membros da equação 6.13 pelo fluxo de massa.

$$\frac{\delta Q}{\delta t \rho VA} + \left(\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + u_1 \right) = \frac{\delta W_e}{\delta t \rho VA} + \left(\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + u_2 \right) \quad 6.14$$

O fluxo de massa multiplicado por um intervalo de tempo δt fornece a massa escoada durante o tempo:

$$\delta t \rho VA = \delta t \frac{\delta m}{\delta t} = \delta m \quad 6.15$$

Com 6.15 em 6.14 vemos que os termos iniciais dos dois membros da equação 6.14 representam, respectivamente, quantidade de calor e trabalho por unidade de massa acrescentados ou retirados do V.C.

$$\frac{\delta Q}{\delta m} + \left(\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + u_1 \right) = \frac{\delta W_e}{\delta m} + \left(\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + u_2 \right) \quad 6.16$$

Todos os termos da equação do balanço global da energia representam trabalho, ou energia, por unidade de massa do escoamento. Suas dimensões são $[L^2 T^{-2}]$ e as unidades no sistema SI são m^2/s^2 .

Partindo da forma básica surgem simplificações para as aplicações mais comuns na prática, visto que nem todos os termos têm importância igual em todos os problemas.

6.2 Problemas isotérmicos: bombas, turbinas hidráulicas e tubulações

O escoamento dos fluidos reais sempre leva a gradientes de velocidade e ao aparecimento de tensões de cisalhamento. Sempre existe a geração de calor pelo trabalho das forças viscosas dissipativas, mesmo que não existam fontes de calor no volume de controle. Nessas aplicações hidráulicas é conveniente agrupar o termo do calor aos da energia interna e o balanço de energia, a partir da equação 6.16, fica:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\delta W_e}{\delta m} = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + (u_2 - u_1 - \frac{\delta Q}{\delta m}) \quad 6.17$$

A ação das forças de atrito viscoso numa partícula que escoar entre as seções 1 e 2 provoca seu aquecimento. Portanto $u_2 - u_1 > 0$. Entretanto, parte desse calor gerado é

perdido para o ambiente, o que torna o termo do calor ($\delta Q/\delta m$) negativo pela nossa convenção. Assim, verifica-se que o último termo da equação 6.17 é sempre positivo.

Uma vez que a transformação de trabalho em calor é um processo irreversível, a quantidade de energia representada pelo último termo não pode mais ser recuperada para trabalho útil. Dizemos então que o termo final da equação representa uma perda de energia do sistema. Trata-se, em outras palavras, da irreversibilidade do processo, ou seja, a diferença entre o trabalho realizado ao longo de um caminho reversível e o real.

Usando a notação de perdas para o termo das irreversibilidades do escoamento, a equação da energia fica:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{V_1^2}{2} - \frac{\delta W_e}{\delta m} = \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{V_2^2}{2} + \text{Perdas}_{1-2} \quad 6.18$$

Os termos da equação 6.18 representam energia por unidade de massa, ou joules por quilograma no SI.

Dividindo-se a equação 6.18 pela aceleração da gravidade o resultado não se altera e a equação fica expressa em termos chamados de **Carga**, muito utilizados na prática quando se trata de escoamentos incompressíveis. Em termos de carga, o balanço de energia fica:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - H_M = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{1-2} \quad 6.19$$

A carga representa energia por unidade de peso do fluido em escoamento, e é expressa em metros no sistema SI, dimensões [L]. A carga de eixo (H_e) é chamada também de altura manométrica da bomba ou turbina. Lembre que a altura manométrica de uma bomba hidráulica é negativa, pois a bomba adiciona energia ao fluido em escoamento. Inversamente, a altura manométrica de uma turbina é positiva. O termo das perdas dissipativas por unidade de peso é chamado de **perda de carga**, e é sempre positivo.

O termo dissipativo (Perdas) não é calculado com a termodinâmica e sim com equações independentes, baseadas na dinâmica dos escoamentos. É necessário conhecer as tensões de cisalhamento no interior do escoamento, o que só é possível em escoamentos laminares. Essas demonstrações são encontradas em textos mais avançados de mecânica dos fluidos. No escoamento turbulento, entretanto, é indispensável usar resultados experimentais para avaliar as perdas por dissipação.

Várias fórmulas empíricas foram ajustadas pelos pesquisadores em hidráulica. O item 6.4 apresenta algumas fórmulas para o cálculo da perda de carga.

6.3 Exemplos Ilustrativos

EXEMPLO 6.3.1: _____ troca de calor em escoamento incompressível

Um aquecedor solar com área exposta ao sol de 4m^2 é utilizado para aquecer água. Em determinado instante a placa capta a radiação solar com densidade de fluxo de $500\text{W}/\text{m}^2$. A água a ser aquecida passa através do aquecedor com velocidade de $0,5\text{m}/\text{s}$ no interior de tubos de 10mm de diâmetro interno. Sabe-se que a água entra no aquecedor com temperatura de 20°C , e que a eficiência do aquecedor é de 45% , porque apenas parte do calor captado é transferido para a água. Supondo que a massa específica da água permaneça constante ($\rho = 1000\text{kg}/\text{m}^3$), pede-se escrever a equação da energia para o problema e calcular a temperatura de saída da água. Dado: $c = 4185\text{J}/(\text{kg}^\circ\text{C})$.

Análise:

O escoamento é considerado incompressível, visto que a diminuição da massa específica com a temperatura é desprezada. O volume de controle a ser usado (conjunto de captador solar e serpentina de tubos que formam o aquecedor) possui apenas uma entrada e uma saída. Não há bombas ou turbinas no interior do V.C. de modo que o trabalho de eixo é nulo. Além disso, o regime de escoamento é permanente. Uma hipótese simplificadora importante.

Solução:

Partindo da equação básica 5.10

$$\frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W_e}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\text{Vol} + \int_{SC} \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Descartando os termos de trabalho de eixo e de variação no tempo

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \int_{SC} \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Considerando que o VC só tem uma entrada (seção 1) e uma saída (seção 2) de água, a integral em SC é dividida

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \int_1 \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA} + \int_2 \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Considerando que as grandezas são igualmente distribuídas pelo interior do tubo nas seções de entrada e saída, os termos da energia específica “e” e do trabalho nas fronteiras (p/ρ) pode sair da integral

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \left(\frac{p_1}{\rho} + e_1 \right) \int_1 \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA} + \left(\frac{p_2}{\rho} + e_2 \right) \int_2 \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Considerando que foi dada a velocidade média nas seções de entrada e saída, avaliamos as integrais:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \left(\frac{p_1}{\rho} + e_1 \right) (-\rho V_1 A_1) + \left(\frac{p_2}{\rho} + e_2 \right) (+\rho V_2 A_2)$$

Sendo o escoamento permanente, $\rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$ e, sendo incompressível, $V_1 A_1 = V_2 A_2$, ou seja, vazão de entrada e saída são iguais. Além disso, como a área do

tubo é constante, a velocidade não se altera. Usando essas informações e desdobrando a energia específica:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \left[\left(\frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{V_2^2}{2} + u_2 \right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{V_1^2}{2} + u_1 \right) \right] \rho V A$$

Podemos desprezar a diferença de pressão, assim como a diferença de cota entre a entrada e saída. Assim, a equação do balanço global de energia, com as simplificações do problema em questão fica:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = (u_2 - u_1) \rho V A = c(T_2 - T_1) \rho V A$$

Os valores numéricos conhecidos são:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = 0,35 \times 500 \frac{W}{m^2} \times 4m^2 = 700 W$$

$$\rho V A = 1000 \frac{kg}{m^3} \times 1,0 \frac{m}{s} \times \frac{\pi \times 0,01^2}{4} m^2 = 0,0785 \frac{kg}{s}$$

Substituindo os valores numéricos na equação do balanço de energia:

$$700 W = 4185 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C} \times 0,0785 \frac{kg}{s} \times (T_2 - 20) ^\circ C$$

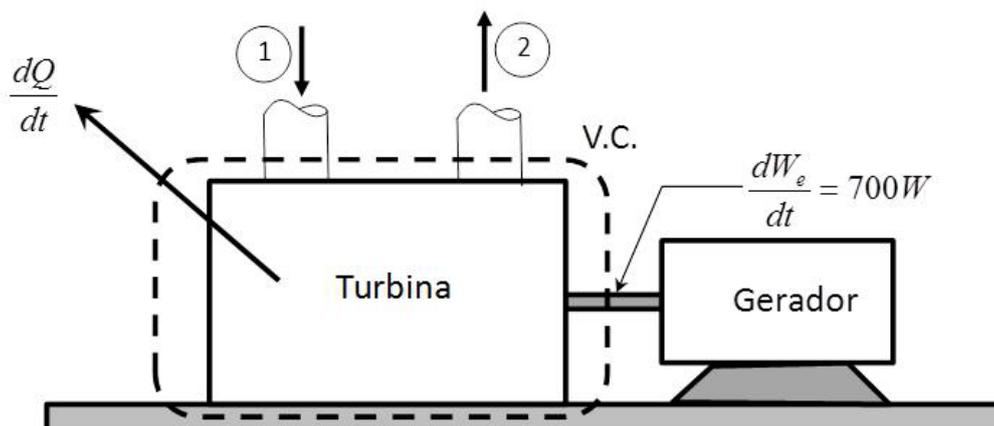
Resolvendo obtém-se: $T_2 = 22,1 ^\circ C$

Resposta: nas condições dadas a água deixará o aquecedor com temperatura de $22,1 ^\circ C$.

Comentário: A temperatura de saída ficou muito baixa. Observando-se a equação deduzida para o problema percebe-se que, para melhorar o resultado, é possível (a) aumentar a área do coletor solar ou (b) diminuir a vazão de água através dos tubos.

EXEMPLO 6.3.2: _____ escoamento compressível com troca de calor

Uma turbina a vapor usa 4.600 kg/h de vapor e entrega 700 kW de potência a um gerador elétrico, conforme a figura. Os dados de entrada e saída do vapor são dados a seguir. Pedese calcular a perda de calor através da carcaça da turbina e nos mancais. Calcular a eficiência da turbina. Entrada: $h_1 = 2790 \text{ kJ/kg}$; $V_1 = 60 \text{ m/s}$. Saída: $h_2 = 2093 \text{ kJ/kg}$; $V_2 = 270 \text{ m/s}$.



Análise: Com o volume de controle desenhado na figura, aplicaremos o balanço de energia em regime permanente.

Nos casos de escoamentos compressíveis com variação de temperatura entre a entrada e saída do VC, é útil escrever a equação explicitando a entalpia h ($h = u + p/\rho$). Nesses casos, após as simplificações para regime permanente em um VC com apenas uma entrada e uma saída, a equação 5.10 é transformada na eq. 5.14 fica:

$$\frac{\delta Q}{\delta t \rho V A} + \left(\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + u_1 \right) = \frac{\delta W_e}{\delta t \rho V A} + \left(\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + u_2 \right)$$

Pelo fato do escoamento ser compressível, os termos p/ρ e u são somados para formar a entalpia do gás, de forma que a equação do balanço fica:

$$\frac{\delta Q}{\delta t \rho V A} + \left(\frac{V_1^2}{2} + gz_1 + h_1 \right) = \frac{\delta W_e}{\delta t \rho V A} + \left(\frac{V_2^2}{2} + gz_2 + h_2 \right)$$

Nas condições do problema a diferença de energia potencial pode ser desprezada. Os demais termos foram fornecidos.

Solução:

a) Perda de calor:

Substituindo os valores numéricos na equação acima, temos:

$$F_m = \rho V A = 4600 \frac{kg}{3600s} = 1,278 \text{ kg/s}$$

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{\delta W_e}{\delta t} + F_m \left[\left(\frac{V_2^2}{2} + h_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2} + h_1 \right) \right]$$

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = 700000 + 1,278 \frac{kg}{s} \left[\left(\frac{270^2}{2} - \frac{60^2}{2} \right) \frac{m^2}{s^2} + (2093 - 2791) \times 1000 \frac{J}{kg} \right]$$

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -147761 \text{ W}$$

O sinal negativo indica que o calor deixa o volume de controle.

b) Eficiência

O cálculo da eficiência usa o fato de que quando há 100% de eficiência a perda de calor é nula. Assim, o trabalho reversível é dado pela energia total retirada do vapor, conforme a equação:

$$- \frac{\delta W_{rev}}{\delta t} = F_m \left[\left(\frac{V_2^2}{2} + h_2 \right) - \left(\frac{V_1^2}{2} + h_1 \right) \right]$$

$$\frac{\delta W_{e,rev}}{\delta t} = 847761 \text{ W}$$

O trabalho reversível pode ser calculado diretamente, somando o trabalho líquido (700kW) às perdas (147kW).

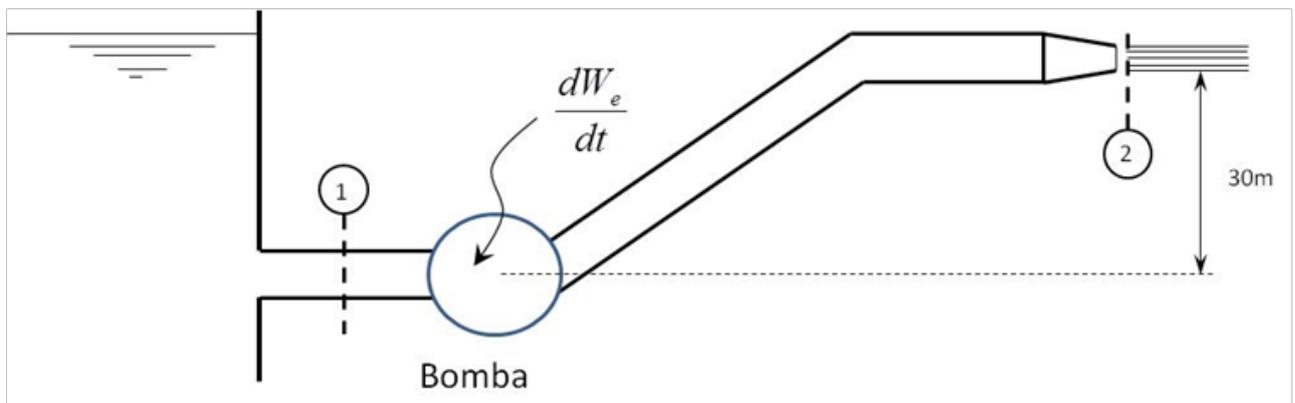
A eficiência é dada pelo trabalho líquido em relação ao trabalho máximo (reversível)

$$\eta = \frac{\delta W_e}{\delta W_{rev}} = \frac{700000}{847761} = 0,826$$

Portanto, 82,6% de eficiência da turbina.

EXEMPLO 6.3.3: escoamento incompressível isotérmico

A figura mostra uma bomba que retira água de um grande reservatório por meio de uma tubulação de 150mm de diâmetro, e descarrega em jato livre num ponto 30m acima do eixo da bomba.



A pressão relativa na seção 1 (sucção da bomba é de 100 kPa) e a velocidade é 6m/s. Sabendo que a velocidade no bocal de saída é 10m/s e que as perdas de carga na tubulação são de 5 m.c.a., calcular a potência fornecida pela bomba. Sabendo que o rendimento da bomba é de 65%, calcular a potência consumida pela bomba.

Análise:

O escoamento é considerado incompressível e permanente. Adotamos como volume de controle a água na tubulação entre as seções 1 e 2. O jato descarrega com pressão atmosférica (jato livre), portanto com pressão relativa nula. O balanço de energia para este caso é dado pela equação 5.19 em termos de trabalho por unidade de massa:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\delta W_e}{\delta m} = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + Perdas_{1-2}$$

Sabendo que $\Delta H = \frac{Perdas}{g}$, temos que $Perdas_{1-2} = \Delta H_{1-2} \times g \left(\frac{m^2}{s^2}\right)$

Solução:

Adotando massa específica da água $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e substituindo valores na equação acima,

$$\frac{100000}{1000} + \frac{6^2}{2} + 0 - \frac{\delta W_e}{\delta m} = 0 + \frac{10^2}{2} + 9,8 \times 30 + 5 \times 9,8$$

$$\frac{\delta W_e}{\delta m} = -275 \left(\frac{J}{kg} \right)$$

O termo é negativo porque se trata de uma bomba que realiza trabalho sobre a água. A potência fornecida pela bomba é calculada multiplicando-se o termo do trabalho de eixo por unidade de massa pelo fluxo de massa do escoamento.

$$Pot = \rho V A \frac{\delta W_e}{\delta m}$$

$$Pot = 1000 \times 10 \times 0,005625 \times 275 = 15470 W$$

$$\text{A potência consumida : } Pot_{Bomba} = \frac{Pot_{Líquida}}{\eta_B} = \frac{15470}{0,65} = 23800 W$$

Obs: a potência consumida pela bomba é maior do que a transferida ao líquido devido principalmente a perdas por atrito nos mancais e por recirculação do líquido no interior da bomba, das zonas de alta para as de baixa pressão.

6.4 Efeito do Atrito nos Escoamentos

Podemos fazer a analogia entre o escoamento no interior de um tubo e um trem sendo empurrado nos trilhos por uma locomotiva, conforme o esquema da Figura 6.4.

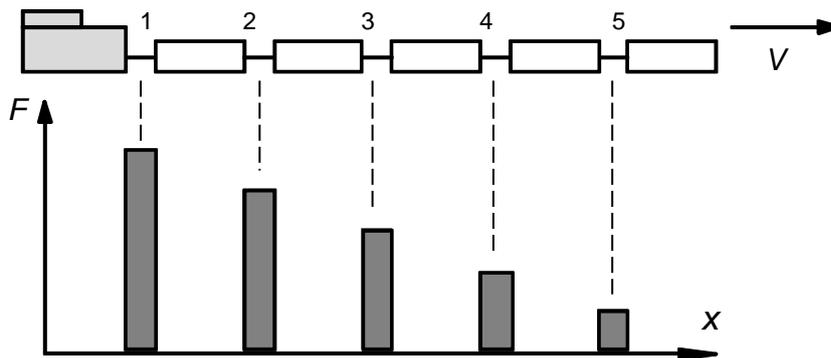


Figura 6.4: Diagrama de forças aplicadas a cada ligação entre vagões empurrados por uma locomotiva.

Na analogia entre trem e escoamento, cada vagão pode ser imaginado como uma certa quantidade de massa do fluido em escoamento. As forças transmitidas para cada vagão pelos vínculos correspondem no escoamento às forças resultantes das pressões que atuam em cada face dos elementos de massa.

Supondo massas e atrito iguais em todos os vagões, podemos calcular as forças nos vínculos entre os vagões, que são as barras 1,2,3,4 e 5 vistas na Fig.6.4. Nada impede que as forças sejam colocadas num gráfico da posição dos vagões.

Na Figura 6.4 a energia para o movimento é fornecida pela locomotiva, e consumida

pelo trabalho dissipativo do atrito ao longo do trem. Com isso as forças nos vínculos entre vagões diminuem.

No caso de fluido escoando num tubo, as forças nos vínculos são substituídas por distribuição de tensões ao longo da área de contato entre os elementos de massa, conforme o esquema da Figura 6.5.

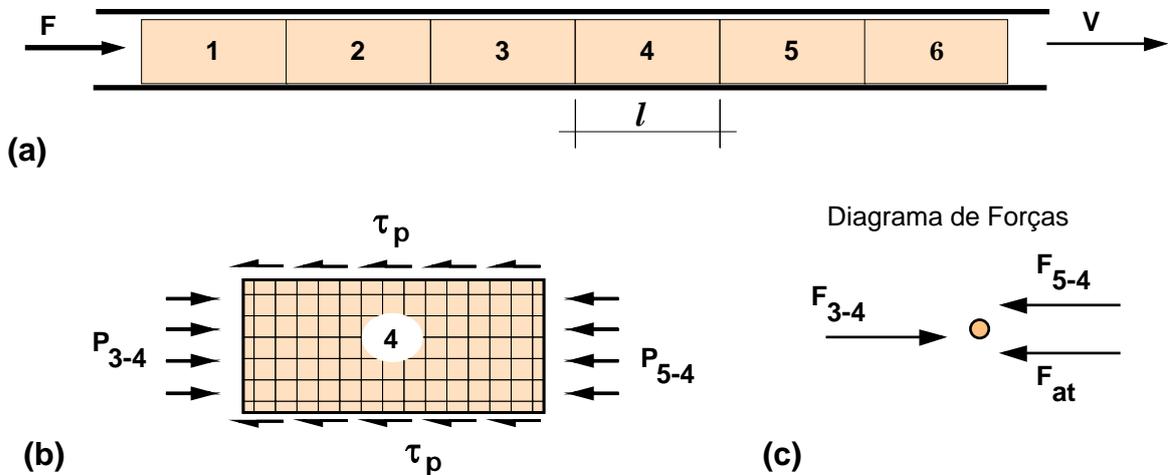


Figura 6.5: Fluido escoando em um tubo - (a) analogia entre as massas de fluido e os vagões do trem; (b) isolando o elemento de fluido; (c) diagrama de forças resultantes no elemento 4.

Pensando em cada uma das porções de massa de fluido, representadas pelos blocos numerados da Figura 6.5, vemos que elas recebem energia para o escoamento (fornecida por uma bomba) e, à medida que passa o tempo, essa energia é dissipada pelo trabalho das forças de atrito, fazendo com que a pressão diminua. Podemos então equacionar as diferenças de forças entre os vínculos em função do atrito:

$$F_{3-4} = F_{5-4} + F_{at}$$

Usando $A_L = \text{Área lateral}$ e $A_T = \text{Área de seção transversal}$ vemos que:

$$\left. \begin{aligned} F_{at} &= \tau_p A_L \\ F_{3-4} &= p_{3-4} A_T \\ F_{5-4} &= p_{5-4} A_T \end{aligned} \right\} \rightarrow p_{5-4} = p_{3-4} - \frac{\tau_p A_L}{A_T}$$

Observe que o bloco 5 de fluido já esteve anteriormente na posição do bloco 1. Com o avanço do tempo ele se desloca e perde pressão. Entretanto, outra massa trazida pelo escoamento ocupa a posição do bloco 1 quando ele se desloca para a posição do bloco 2 e assim sucessivamente.

Assim, embora as unidades de massa (blocos) sejam transportadas no espaço ao longo do tubo, o perfil de pressões visualizado em um determinado trecho do tubo permanece constante no tempo. Este raciocínio leva ao perfil de pressões no tubo conforme a Figura 6.6:

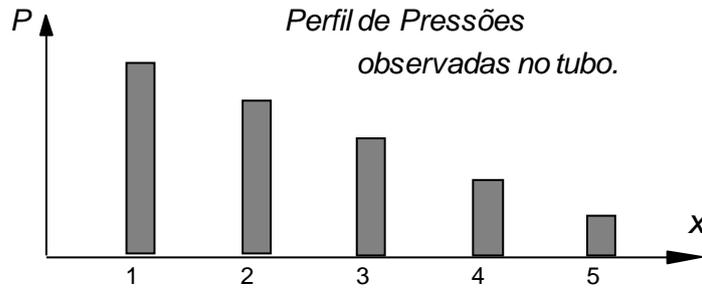


Figura 6.6: Diagrama de pressões resultantes no escoamento de fluido num tubo. devido à viscosidade do fluido (forças de atrito).

Veja que a analogia não é perfeita devido a essa maior liberdade de raciocínio que temos ao analisar os escoamentos, já que uma unidade de massa pode sempre ser substituída por outra, num determinado local de análise, à medida que passa o tempo

No trem, as forças permanecem constantes ao longo do tempo **em cada vagão** (Sistema – Análise Lagrangeana). Com o fluido, as pressões permanecem constantes em uma dada **região do tubo** (Volume de Controle – Análise Euleriana).

6.4.1 Perdas de Carga em Escoamento em Tubos

A energia por unidade de peso do fluido em escoamento, ou carga total, foi definida pela equação 4,14, assim como seus componentes, a carga piezométrica e a carga cinética. Os termos da equação da energia podem ser representados graficamente num escoamento em tubos pelas Linhas de Carga, conforme o esquema da Figura 6.7.

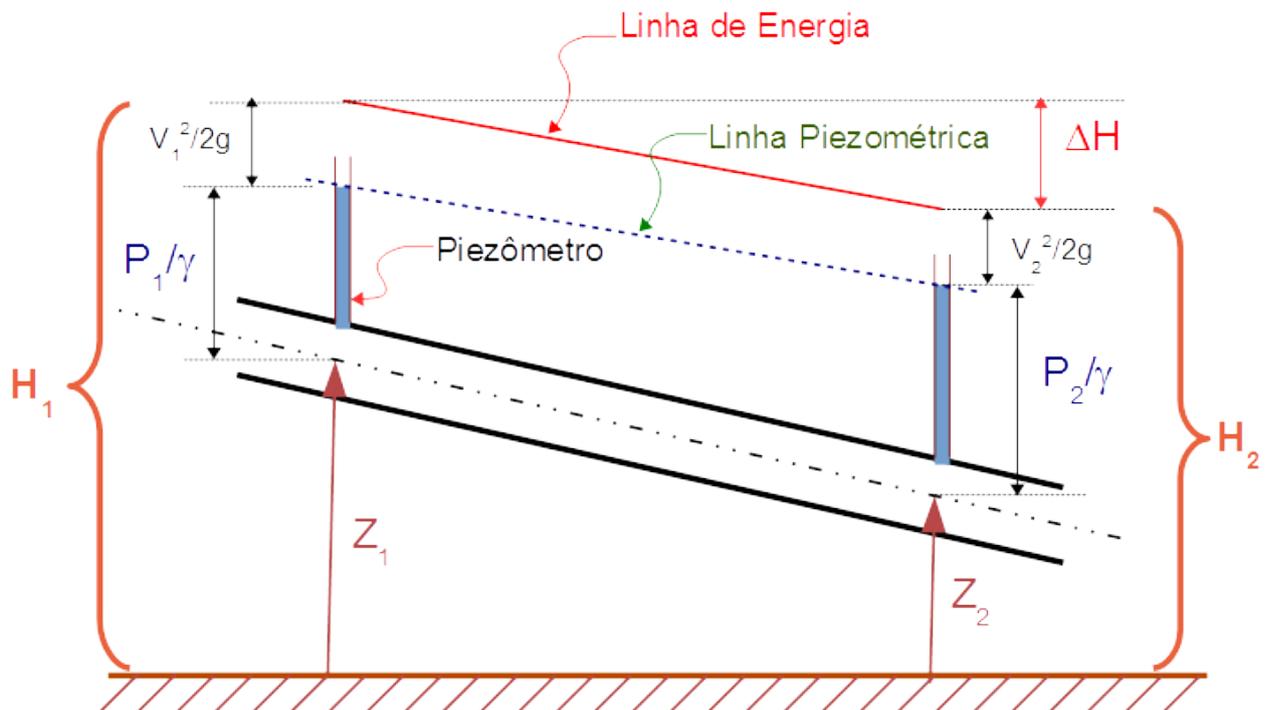


Figura 6.7: Linhas de carga num trecho de tubo: H = carga total, ΔH = perda de carga.

A equação da energia, na forma de cargas da Equação 6.19, pode ser aplicada entre as seções 1 e 2 do escoamento da Figura 6.7.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - H_M = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{1-2}$$

Como não há trabalho de eixo a equação fica:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{1-2}$$

Desta forma, no caso do escoamento em tubo da Figura 6.7, a perda de carga é escrita como:

$$\Delta H_{1-2} = \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} \right) \quad 6.20$$

As perdas de energia por unidade de peso, ou perdas de carga, numa tubulação com escoamento forçado, podem ser expressas pela chamada equação universal:

$$\Delta H_{1-2} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad 6.21$$

em que a perda é dada em metros, f é um adimensional chamado fator de atrito, L é o comprimento em metros entre as seções 1 e 2 e D é o diâmetro da tubulação em metros.

O fator de atrito f é determinado por ajuste de dados experimentais. Sabe-se que f depende do número de Reynolds do escoamento e da rugosidade relativa ε/D . A utilização das fórmulas originais de regressão para o fator de atrito é dificultada porque são equações implícitas, ou seja, com a incógnita nos dois membros.

Várias aproximações explícitas para o fator de atrito f foram propostas ao longo da segunda metade do século 20. Uma aproximação bem simples e com faixa de validade bastante ampla foi apresentada por Swamee e Jain (1976), conforme a equação 6.22.

$$f = \frac{1,325}{\left[\ln \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} \quad 6.22$$

sendo ε a rugosidade absoluta da parede do tubo, D o diâmetro interno do tubo e Re o adimensional número de Reynolds.

O número de Reynolds é dado por:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} \quad 6.23$$

Sendo: ρ (kg/m^3) a massa específica; μ (kg/m.s) a viscosidade e $\nu = \mu/\rho$ (m^2/s) a viscosidade cinemática.

A fórmula de Swamee e Jain possui um erro de no máximo $\pm 1\%$ em relação ao diagrama de Colebrook- Moody. Os limites de utilização são: $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$ e $5000 < Re < 10^8$.

Para escoamentos laminares o fator de atrito é :

$$f = \frac{64}{Re}; \text{ válida para } Re < 2000 \quad 6.24$$

Para facilitar a solução de problemas eventuais que requeiram a determinação do fator de atrito, pode se utilizada uma solução gráfica, com os valores numéricos do fator de atrito fornecidos pelo diagrama de Colebrook – Moody, apresentado na Figura 6.8.

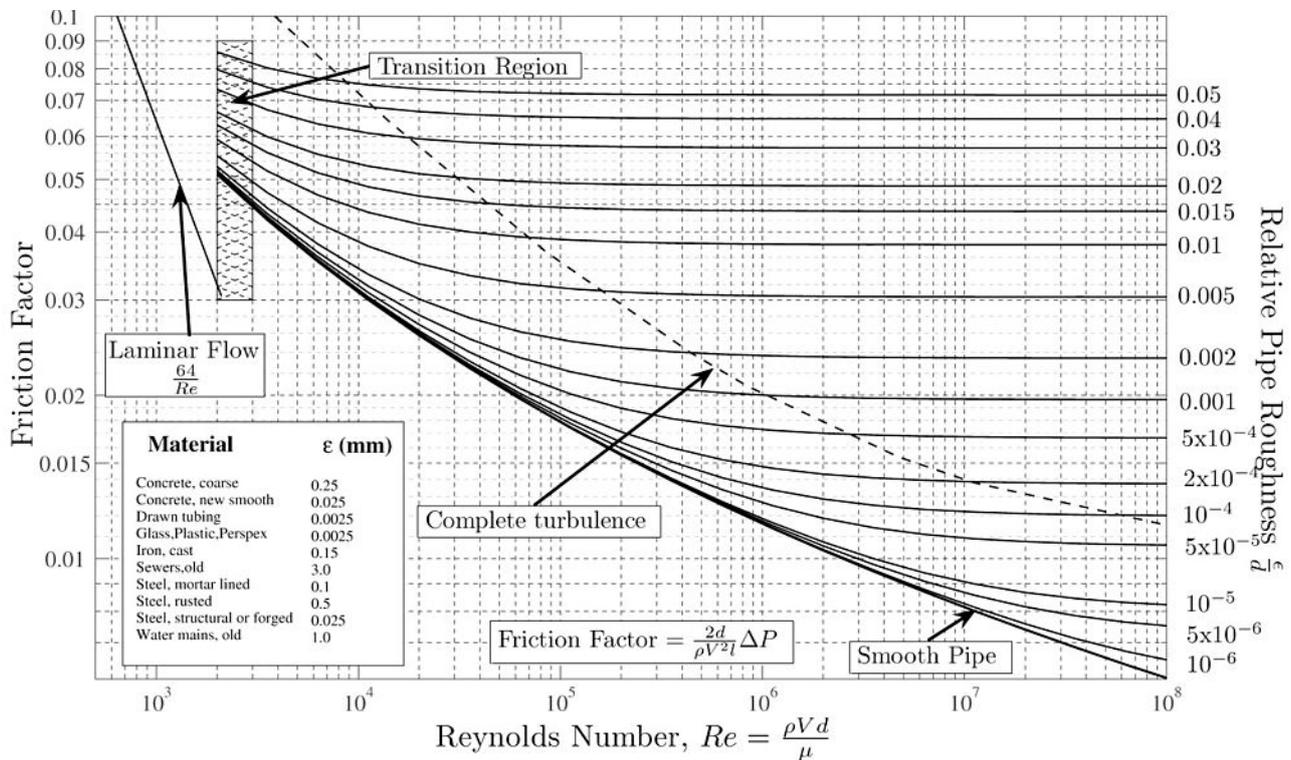


Figura 6.8: Diagrama de Colebrook – Moody, apresentando o comportamento do fator de atrito f .

O diagrama de Moody mostra que o fator adimensional de atrito possui um comportamento relativamente complexo, em função do tipo de escoamento, da rugosidade do tubo e do número de Reynolds. A explicação deste comportamento é apresentada com mais detalhes no item 6.4.2, com auxílio da análise dimensional do problema.

Exemplo 6.4.1: Um reservatório de nível constante alimenta uma tubulação de ferro galvanizado ($e = 0,15\text{mm}$) de 250 mm de diâmetro e 500m de comprimento, que conduz água ($\nu = 1,1 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$) até um reservatório com o nível de água situado 20m abaixo. Uma vazão de $0,15\text{m}^3/\text{s}$ é regulada por um registro no final da tubulação. Pede-se calcular: a) a perda de carga na tubulação; b) a pressão antes do registro de regulagem.

Análise:

Será necessário calcular a perda de carga na tubulação e, para isso, vamos supor escoamento turbulento, aplicando a equação de Swamee e Jain (6.22). A carga antes do registro será calculada pela equação da energia aplicada entre um ponto qualquer da água parada no reservatório e o ponto imediatamente a montante do registro de saída da tubulação.

Inicialmente, calculamos o número de Reynolds do escoamento:

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi vD} = \frac{4 \times 0,15}{\pi \times 1,1 \times 10^{-6} \times 0,25} = 694494$$

Como Re está dentro dos limites de utilização, a eq. 6.22 pode ser usada:

$$f = \frac{1,325}{\left[\ln \left(\frac{0,15}{3,7 * 200} + \frac{5,74}{694494^{0,9}} \right) \right]^2} = 0,0181$$

A perda de carga é dada pela eq. 6.21. Com os valores numéricos temos:

$$\Delta H_{Tubo} = 0,0181 \times \frac{500}{0,25} \times \frac{8 \times 0,15^2}{9,8 \times \pi^2 \times 0,25^5} = 17,28m$$

Resposta item a: Cada Newton de fluido perdeu 17,28 Joules de energia devido ao atrito viscoso, ao percorrer os 500m de tubo. Essa energia foi transformada em calor.

Resta calcular a pressão a montante do registro, aplicando a equação da energia. Chamamos o ponto inicial do reservatório de “1”, tomado, por simplicidade, na superfície do reservatório, e de “2” o ponto imediatamente a montante do registro.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - H_M = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{1-2} \quad (\text{eq. 6.19})$$

Como não há trabalho de eixo a equação fica:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{1-2}$$

Substituindo os valores numéricos, lembrando que $V = \dot{V}/A = 3,06m/s$, vem:

$$0 + 20 + 0 = \frac{p_2}{\gamma} + 0 + \frac{3,06^2}{2 \times 9,8} + 17,28 \Rightarrow \frac{p_2}{\gamma} = 20 - 17,28 - 0,48 = 2,24m$$

Tendo a carga equivalente a 2,24m, o cálculo da pressão é imediato:

$$p_2 = \gamma \times 2,24 = 9.800 \times 2,24 = 21.592 Pa$$

Resposta item b: A pressão imediatamente a montante do registro é 21,5kPa.

Comentários adicionais: A perda de carga no tubo permite calcular a potência total dissipada pelo atrito viscoso ao longo do comprimento do tubo. Como a perda de carga é a energia perdida por cada Newton que escoar, basta multiplicá-la pelo fluxo de água em Newtons por segundo, como segue:

$$Pot_{Dissipada,Tubo} = \gamma Q \Delta H_{1-2} = 9800 \cdot 0,15 \cdot 17,28 = 25.402W$$

Imediatamente após o registro está a saída do tubo com pressão nula, e a carga cinética é a mesma antes e depois do registro, porque o escoamento é permanente. Com isso deduzimos que a perda de carga no registro é igual a 2,24m. Para que a vazão seja regulada o registro dissipa uma potência dada por:

$$Pot_{Dissipada,Registro} = \gamma Q \Delta H_{Registro} = 9800 \cdot 0,15 \cdot 2,24 = 3.293W$$

6.4.2 Sobre o Fator de Atrito

Todas as grandezas da equação 6.21 podem ser medidas experimentalmente, para determinar o coeficiente de atrito, por meio de ensaios de simples execução. Um esquema experimental típico é mostrado na Figura 6.9.

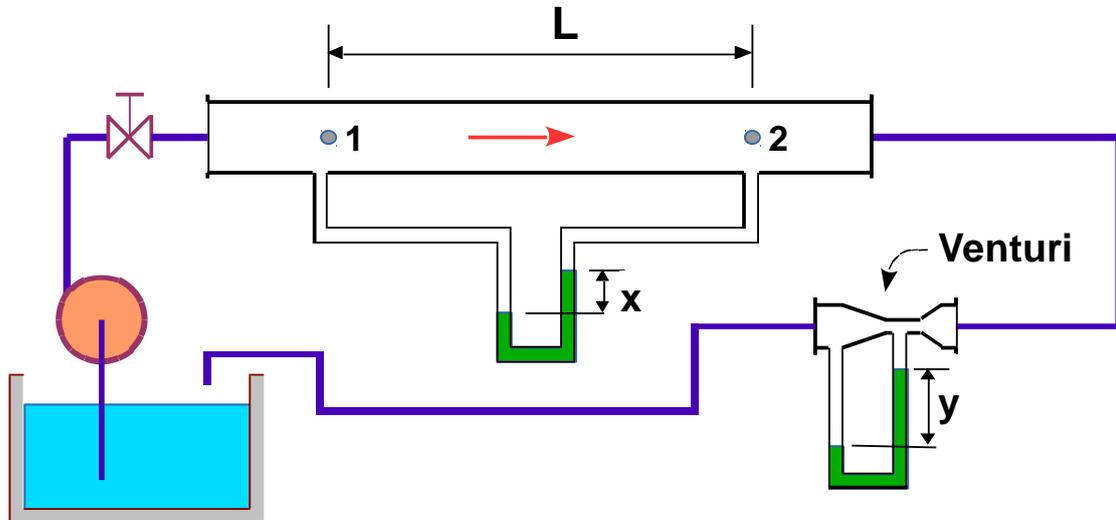


Figura 6.9: Arranjo experimental para determinação de perdas de carga.

A seção experimental situa-se entre os pontos 1 e 2 da Figura 6.9, sendo alimentada por água em circuito fechado por meio da bomba centrífuga. A vazão é regulada pelo registro e medida pelo tubo Venturi. A aplicação da equação da energia entre a seção 1 e 2 é apresentada na equação 6.20.

$$\Delta H_{1-2} = \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} \right)$$

Nas condições do ensaio a carga cinética e a carga potencial se mantêm constantes entre as seções 1 e 2 porque o tubo é horizontal e com diâmetro constante.

Dessa forma, a dissipação de energia é indicada pela diferença de pressão medida pelo manômetro diferencial.

$$\Delta H_{1-2} = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma}$$

Os resultados obtidos nos ensaios mostraram as seguintes características da perda de carga:

1. A perda de carga não depende da pressão do tubo;
2. A perda de carga é diretamente proporcional ao comprimento do tubo;
3. A perda de carga depende da rugosidade do tubo no escoamento turbulento, mas não no escoamento laminar;
4. A perda de carga diminui com o aumento do diâmetro e aumenta com a velocidade do escoamento;
5. A perda de carga depende da viscosidade do fluido.

A partir das informações experimentais e analisando o problema físico podemos afirmar que o fator de atrito irá depender de 7 variáveis dimensionais, ou seja:

$$f = f(V, D, \rho, \mu, \varepsilon, \varepsilon', m) \quad 6.25$$

Na relação 6.25 temos: ε é uma medida do tamanho da rugosidade e tem dimensão L (comprimento), ε' é uma medida do arranjo da rugosidade e também tem dimensão L, m é um fator de forma, que depende do formato das rugosidades e é adimensional. A Figura 6.10 mostra um exemplo de como rugosidades de mesmo tamanho podem ser dispostas em diferentes arranjos e como a forma da rugosidade pode influenciar no escoamento.

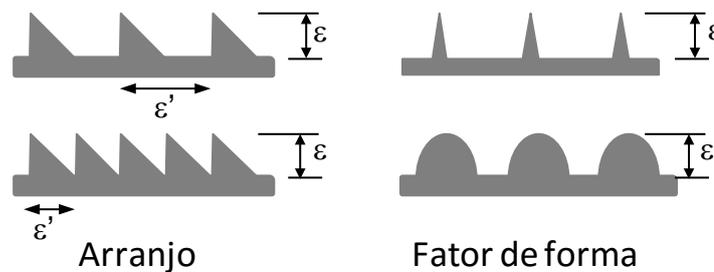


Figura 6.10: Ilustração de diferenças de arranjo e de forma de rugosidades de mesmo tamanho.

Além das 3 variáveis descritoras da rugosidade o fator de atrito depende da velocidade V do escoamento, do diâmetro D do tubo, e do fluido em escoamento, representado pela massa específica ρ e pela viscosidade dinâmica μ . Como f é adimensional, ele deve ser função das 7 variáveis agrupadas de forma adimensional.

Pensando na situação de tubo liso, ε , ε' e m são nulos, de forma que o fator de atrito depende apenas das 4 primeiras grandezas agrupadas num adimensional. Da análise das dimensões das grandezas, ou pela aplicação do Teorema π da análise dimensional, podemos concluir que este adimensional é o número de Reynolds.

Para adimensionalizar os descritores da rugosidade basta dividir pelo diâmetro, ou seja, usar tamanhos relativos. Assim, a descrição do fator de atrito em termos adimensionais deve ser uma função do tipo:

$$f = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{\varepsilon'}{D}, m\right) \quad 6.26$$

Embora a análise dimensional seja útil para definir os parâmetros adimensionais que irão descrever o fenômeno em qualquer escala, ela nada fala sobre a forma da função f , que dever ser determinada experimentalmente.

Blasius, em 1913, foi o primeiro a correlacionar os dados experimentais em escoamento turbulento, mas apenas para tubos lisos. A fórmula empírica de Blasius correlacionou os resultados dos ensaios com uma dispersão de $\pm 5\%$, sendo dada por:

$$f = \frac{0,316}{Re^{1/4}} \quad 6.27$$

O efeito do parâmetro ε/D , chamado de rugosidade relativa, foi esclarecido por

Nikuradse, em 1933. Nikuradse utilizou tubos de vidro revestidos internamente com grãos de areia de tamanho uniforme. Os ensaios de Nikuradse demonstraram que o fator de atrito de tubos rugosos comporta a divisão em 3 regiões, que podem ser observadas na Figura 6.8 e, de forma mais esquemática, na Figura 6.11: na primeira, chamada de escoamento turbulento hidraulicamente liso, o tubo possui o mesmo fator de atrito de um tubo liso; nesta região f não depende da rugosidade relativa do tubo. Com o crescimento do número de Reynolds, o fator de atrito começa a depender tanto do número de Reynolds quanto da rugosidade; esta segunda região é chamada de escoamento turbulento de transição. Na terceira região, chamada de escoamento turbulento hidraulicamente rugoso, o fator de atrito depende apenas da rugosidade relativa.

Com os dados de Nikuradse para tubos lisos e para a região de escoamento hidraulicamente liso dos tubos rugosos, a equação do fator de atrito é dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,86 \ln(\text{Re} \sqrt{f}) - 0,8 \quad 6.28$$

A equação também vale para tubos de pequenas rugosidades relativas, quando o número de Reynolds é baixo. O escoamento na região em que o fator de atrito de um tubo rugoso fica igual ao de um tubo liso, é chamado de **Escoamento Hidraulicamente Liso**.

Para a região de turbulência completa, ou de escoamento hidraulicamente rugoso, a equação de regressão dos dados experimentais é:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 0,86 \ln\left(\frac{\varepsilon}{D}\right) \quad 6.29$$

Observe que na região de turbulência completa, ou de **Escoamento Hidraulicamente Rugoso**, o fator de atrito não depende de Re , e as curvas de regressão ficam horizontais no diagrama de Moody.

Na zona de transição entre os escoamentos hidraulicamente lisos e rugosos, entretanto, os resultados de Nikuradse não são válidos para tubos comerciais, que possuem uma rugosidade composta de diversos tamanhos e formas, dispostos em padrões que dependem da técnica de fabricação do tubo. O comportamento de tubos rugosos comerciais foi estudado por Colebrook que apresentou a equação para a zona de transição entre escoamento hidraulicamente liso e escoamento hidraulicamente rugoso, em 1939.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,86 \ln\left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}}\right) \quad 6.30$$

Finalizando a descrição do comportamento do fator de atrito, para escoamentos laminares, temos uma equação que pode ser deduzida teoricamente, dada por:

$$f = \frac{64}{Re} \quad 6.31$$

A explicação para o comportamento complexo do fator de atrito surge ao observar o tamanho relativo das rugosidades ε em relação à espessura da camada limite δ .

A Figura 6.11 reproduz as características principais do diagrama de Moody, realçando as diversas subdivisões de comportamento do fator de atrito.

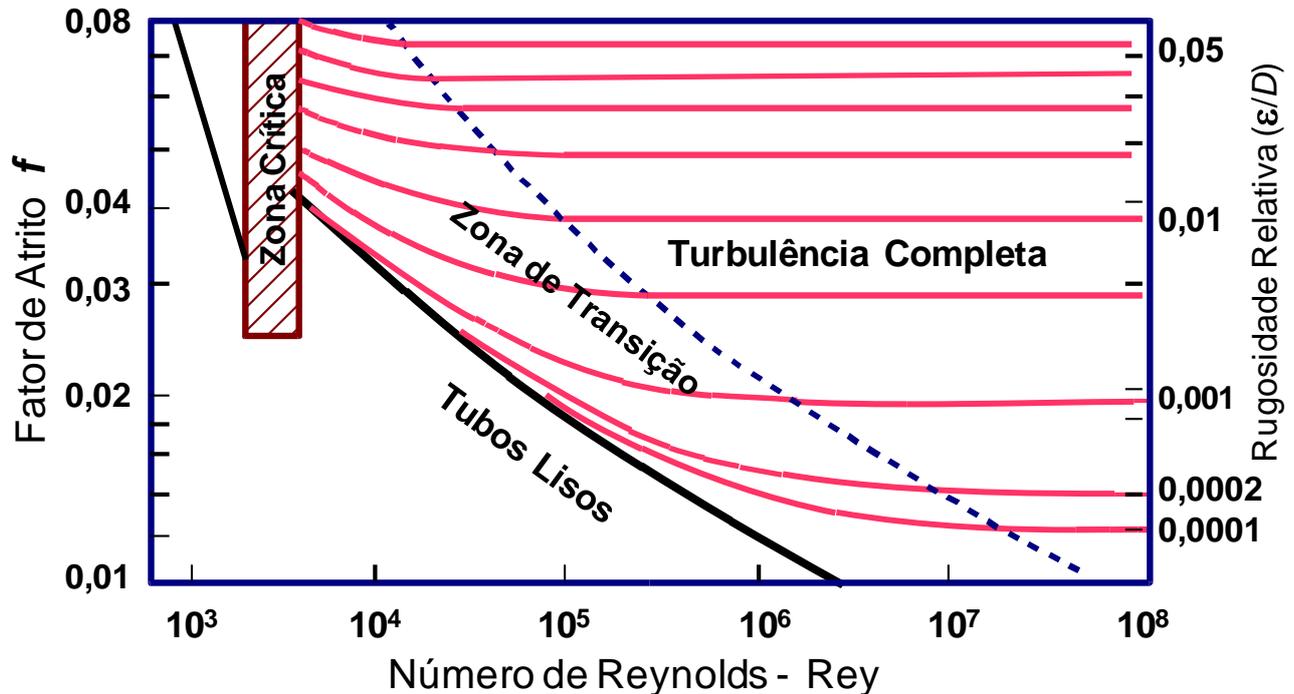


Figura 6.11: Diagrama de Moody realçando as 4 regiões de comportamento diferente do fator de atrito.

A Figura 6.12 ilustra o tamanho das rugosidades em relação ao tamanho da camada limite laminar, ou da subcamada limite laminar, no caso dos escoamentos turbulentos. Com o aumento da velocidade, que reflete no aumento do número de Reynolds, a espessura da camada limite diminui, fazendo com que as rugosidades comecem a interferir no escoamento. Na região de turbulência completa toda a rugosidade fica exposta.

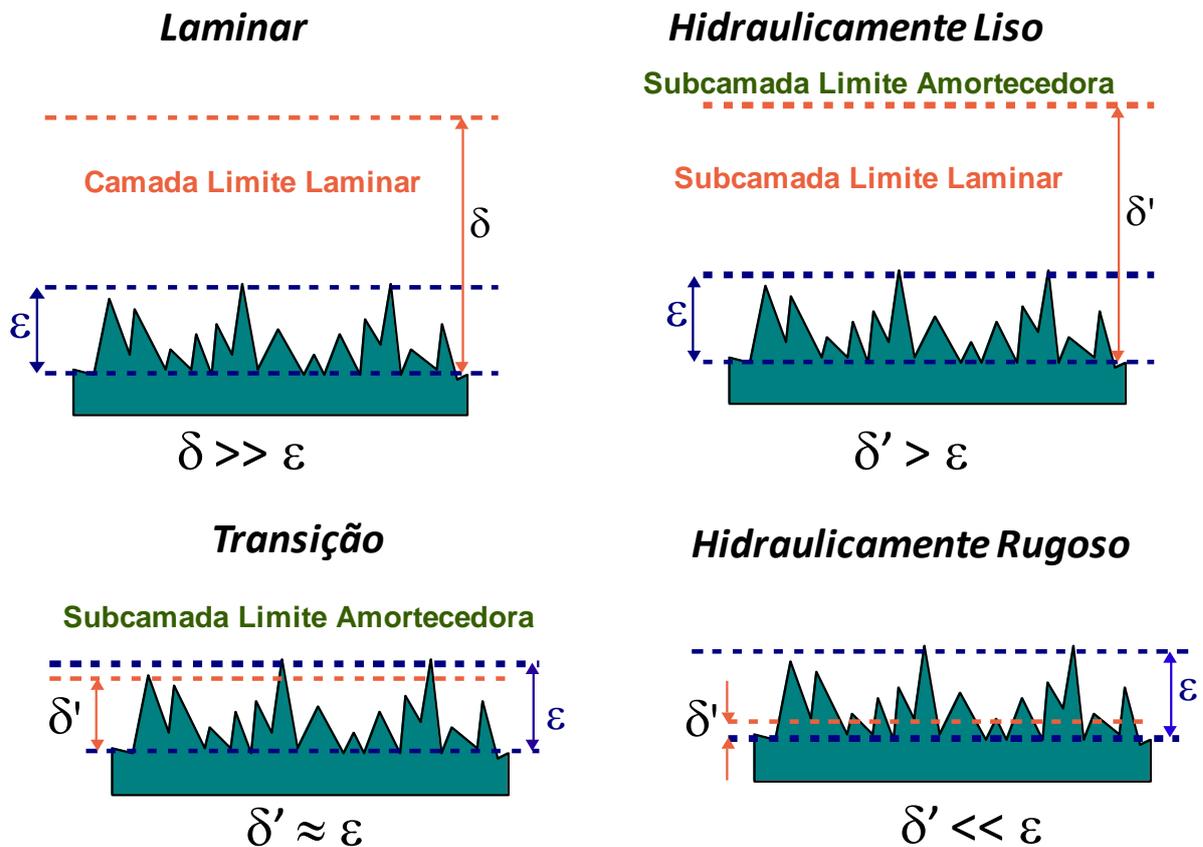


Figura 6.12: Tamanho relativo das rugosidades e camada limite nas diversas regiões do Diagrama de Moody determinam o comportamento do fator de atrito.

A Figura 6.12 permite compreender também porque os tubos comerciais tem comportamento diferente dos tubos de rugosidade uniforme na região de transição. Nos tubos com rugosidade artificial de Nikuradse as asperezas vão emergindo uniformemente da subcamada laminar, ao passo que nos tubos comerciais as asperezas tem tamanhos irregulares. Por esta razão os dados de Nikuradse não podem ser empregados para prever o fator de atrito de tubos comerciais na região de transição. Apenas com os resultados de Colebrook (eq. 6.30) a descrição do fator de atrito ficou completa.

A Figura 6.13 apresenta um resumo das equações utilizadas para descrever os resultados experimentais obtidos nos ensaios de Nikuradse e de Colebrook.

Resumo das Fórmulas do Fator de Atrito f

□ Escoamento Laminar ($Re < 2.300$)

$$f = \frac{64}{Re}$$

□ Escoamento Turbulento ($Re > 4.000$)

□ Tubos Lisos e Hidraulicamente Lisos

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,86 \ln(Re \sqrt{f}) - 0,8 \quad \text{---} \quad \delta' < 1,9 \varepsilon$$

□ Tubos Rugosos

Turbulência Completa (hidraulicamente rugoso)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 0,86 \ln\left(\frac{\varepsilon}{D}\right) \quad \delta' < 0,008 \varepsilon$$

Região de Transição (Colebrook-Moody)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,86 \ln\left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}}\right) \quad 0,008\varepsilon < \delta' < 1,9 \varepsilon$$

Figura 6.13: Resumo das equações do fator de atrito e faixa de validade.

Existe uma razoável dificuldade prática de utilização das diversas equações que descrevem o comportamento do fator de atrito, visto que várias são implícitas, ou seja, com o fator de atrito aparecendo nos dois membros da equação. Devido à dificuldade de utilização, o esforço para desenvolver fórmulas explícitas envolveu diversos pesquisadores.

A fórmula de Samee e Jain apresentada na equação 6.22 é um exemplo desse desenvolvimento. Entretanto, embora seja bem simples e aplicável na maioria das situações práticas, ela apresenta limitações, ou seja, não reproduz o comportamento completo em todas as faixas do número de Reynolds.

Dentre as fórmulas válidas para toda a faixa de número de Reynolds, incluindo o escoamento laminar, podemos citar as de Churchill (1977)¹, Chue (1984)², e a de Pereira e Almeida (1986)³. A fórmula de Pereira e Almeida é apresentada a seguir:

¹ CHURCHILL, S.W, 1977. Friction fator equation spans all fluid regimes. Chem. Engng., 84-7, pp. 91-92.

² CHUE, S.H., 1984. A pipe skin friction Law of universal applicability. Proc. Inst. Civil. Engrs., Part 2, 77 – mar 1977, pp. 43-48.

³ PEREIRA, A.J. e ALMEIDA, A.B., 1986. Formulação explícita e universal da resistência em tubos. XII Congresso Latino-Americano de Hidráulica. São Paulo, S.P.

$$H_T = \frac{P}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g} = H_P + H_C$$

A Figura 6.15 mostra o caso em que a energia introduzida provoca apenas aumento da pressão.

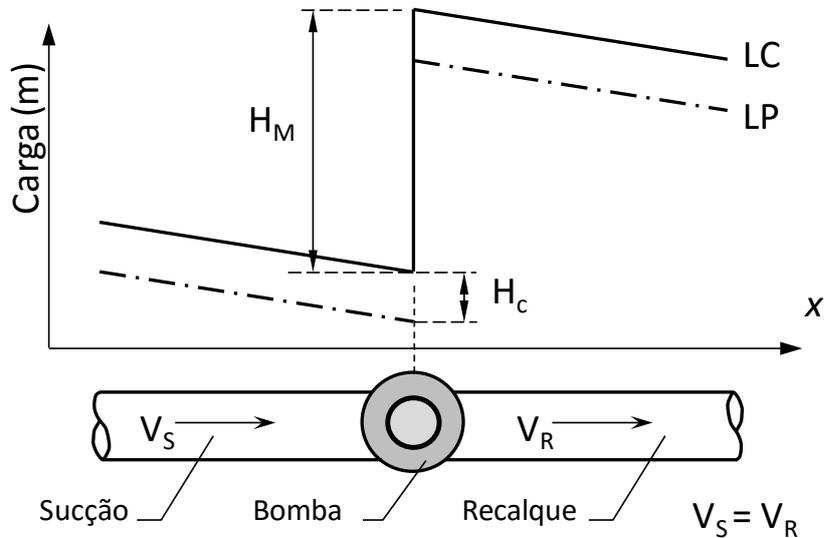


Figura 6.15: Bomba adiciona energia que se manifesta no aumento de pressão, já que a energia cinética permanece constante.

As bombas usadas em tubos para aumento de pressão são chamadas de “Boosters”.

Normalmente as bombas são instaladas na saída de reservatórios e com um diâmetro maior na tubulação de sucção porque a energia disponível na sucção não é grande. Esse caso é ilustrado pela Figura 6.16. Com uma carga cinética menor a pressão pode ser maior, para uma dada energia total. Este efeito é conveniente para evitar a cavitação, um fenômeno que ocorre quando a pressão fica próxima à pressão de vapor.

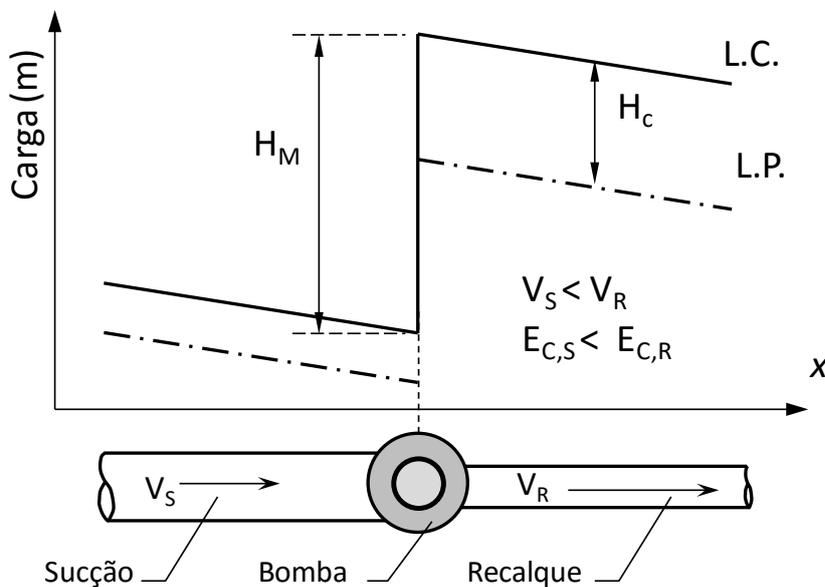


Figura 6.16: Com diâmetros são diferentes, a energia fornecida pela bomba transforma-se em aumento de pressão e de energia cinética.

A bomba da Figura 6.16 mostra um caso mais comum do que o *booster* da Figura 6.15. A energia fornecida pela bomba é dividida entre aumento de carga cinética e aumento de pressão.

O efeito de redistribuição entre formas de energia não depende da bomba existir, acontece também nas tubulações sempre que varia o diâmetro. Veja o esquema da Figura 6.17.

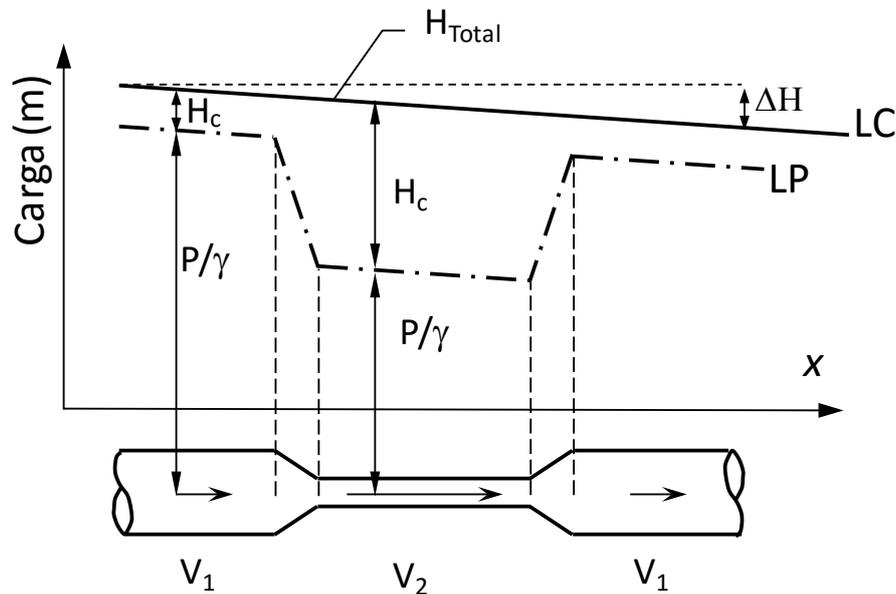


Figura 6.17: Quando a velocidade aumenta, a pressão diminui pois a energia disponível é limitada.

O efeito de diminuição de pressão num escoamento quando aumenta a velocidade é chamado de “efeito Venturi”. A distribuição da energia total disponível no fluido entre as formas de energia cinética e pressão é descrita pela equação de Bernoulli, já deduzida.

6.6 Resumo das Transformações de Energia

Entre duas seções de um escoamento permanente:

$$\frac{E_{Inicial}}{Unidade\ de\ Peso} + \frac{E_{Fornecida}}{Unidade\ de\ Peso} = \frac{E_{Final}}{Unidade\ de\ Peso} + \frac{E_{Perdida}}{Unidade\ de\ Peso}$$

A relação anterior expressa em palavras a conservação de energia. Numericamente os termos de energia por unidade de peso terão a dimensão de espaço [L], com unidades em (m) metros no SI. A energia por unidade de peso é chamada genericamente de **Carga Hidráulica**.

_____ Caso de Bombas

A carga de eixo fornecida é chamada de **Altura Manométrica da Bomba** (H_B). A energia dissipada pelo escoamento entre as duas seções resulta do atrito, e é chamada de

Perda de Carga (ΔH).

Assim, para um trecho de tubulação com início na seção 1 e final na seção 2, e uma bomba em um ponto qualquer entre a seção final e inicial a equação 6.19 fornece:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + H_B = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H$$

$\equiv -H_e = -(-H_B)$

Caso de Turbinas

Turbinas são máquinas hidráulicas que retiram energia do escoamento. A carga de eixo retirada por uma turbina é a energia fornecida pela água por unidade de peso do fluido escoado. Esta carga também é chamada de **Altura Manométrica da Turbina (H_T)**, com a diferença que é um termo negativo no primeiro membro da equação 6.19.

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - H_T = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H$$

$\equiv -H_e = -(+H_T)$

O termo genérico carga de eixo (H_e) ou ainda altura manométrica (H_M) é usado para designar uma máquina hidráulica, que pode ser uma bomba ou turbina.

Assim, a equação da energia, na presença de uma máquina hidráulica, seja ela uma bomba ou uma turbina, fica com os termos cujo significado é realçado a seguir.

$$\underbrace{\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g}}_{\text{Carga Inicial } H_i} - H_M = \underbrace{\frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}}_{\text{Carga Final } H_f} + \Delta H$$

— Carga de Pressão (m)

— Carga Potencial (m)

— Carga Cinética (m)

— Carga Manométrica da Bomba ($-H_B$) ou Turbina ($+H_T$)

— Perda de Carga (m)

____ Relação entre Cargas e Potências

As bombas e turbinas são especificadas pela potência (W) que consomem ou produzem. A potência é um fluxo de trabalho, ou seja, trabalho por unidade de tempo. A carga é trabalho por peso de fluido escoado. Assim temos, pelas dimensões:

$$Potência = \frac{Trabalho}{Tempo} = \frac{Trabalho}{Peso Escoado} \times \frac{Peso Escoado}{Tempo}$$

O peso escoado por unidade de tempo (N/s) é dado pelo peso específico do fluido “ γ ” (N/m³) multiplicado pelo fluxo de volume ou vazão “Q” (m³/s). Assim, da relação entre as dimensões é fácil verificar que:

$$Pot = \gamma Q H_M \quad 6.33$$

Note que a equação 6.33 define a potência retirada do fluido, ou acrescentada ao fluido. Para obtermos as potências da máquina hidráulica é necessário considerar o seu rendimento, conforme detalhado a seguir.

____ Bombas

A potência fornecida ao eixo de uma bomba será maior que a acrescentada ao fluido:

$$Pot_{Eixo,Bomba} = \frac{\gamma Q H_B}{\eta_B}$$

em que η_B é o rendimento da bomba ($0 < \eta_B < 1$).

A potência de eixo da bomba é também chamada de potência bruta da bomba, e corresponde à potência líquida fornecida pelo motor elétrico. A potência consumida pelo motor elétrico que aciona a bomba é maior que a potência fornecida ao eixo da bomba:

$$Pot_{Motor\ Elétrico} = \frac{Pot_{Eixo,Bomba}}{\eta_M} = \frac{\gamma Q H_B}{\eta_B \eta_M}$$

em que η_M é o rendimento do motor elétrico ($0 < \eta_M < 1$)

____ Turbinas

A potência retirada do eixo de uma turbina será menor do que a retirada do fluido.

$$Pot_{Eixo,Turbina} = \eta_T \gamma Q H_T$$

em que η_T é o rendimento da turbina ($0 < \eta_T < 1$). A potência de eixo da turbina é chamada também de potência líquida da turbina.

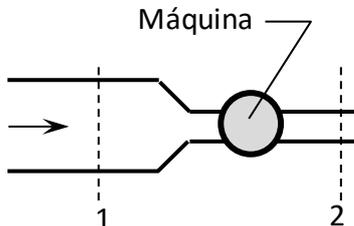
A potência retirada do gerador elétrico acoplado à turbina é menor que a potência fornecida pelo eixo da turbina:

$$Pot_{Gerador\ Elétrico} = \eta_G Pot_{Eixo,Turbina} = \eta_G \eta_T \gamma Q H_T$$

em que η_G é o rendimento do gerador elétrico ($0 < \eta_T < 1$)

Exemplo 6.6.1:

Sabendo que as perdas de carga entre as seções 1 e 2 na tubulação da figura são de 5m e que o diâmetro da tubulação na seção 1 é 1,0m e na seção 2 é 0,50m, pede-se: a) Identifique se a máquina hidráulica é uma bomba ou uma turbina; b) Calcule a potência retirada ou acrescentada ao fluido.



Seção 1: $p = 100\text{kPa}$; $V = 0,5\text{m/s}$; $z = 3\text{m}$

Seção 2: $p = 30\text{kPa}$; $z = 2\text{m}$

$\gamma = 9800\text{ N/m}^3$.

Análise: deve ser aplicado o balanço de energia em forma de cargas, conforme a equação 6.19, para descobrir se a carga da máquina é positiva (bomba) ou negativa (turbina). Antes é necessário calcular a velocidade na seção 2 pela continuidade.

Solução:

Admitindo regime permanente e escoamento incompressível:

$$V_2 = \frac{V_1 A_1}{A_2} = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} \rightarrow V_2 = 2,0\text{m/s}$$

A equação do balanço de energia fica:

$$\frac{100000}{9800} + 3 + \frac{0,5^2}{2 \times 9,8} - H_M = \frac{30000}{9800} + 2 + \frac{2^2}{2 \times 9,8} + 5$$

$$13,313 - H_M = 10,264 \rightarrow H_M = 3,05\text{m} \Rightarrow \text{a máquina é uma Turbina}$$

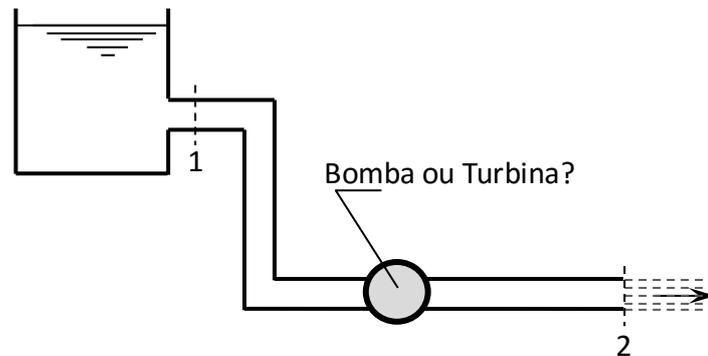
Potência extraída da água (eq. 6.15):

$$Pot = \gamma Q H_M = 9800 \times 0,5 \frac{\pi 1^2}{4} \times 3,05 = 11738\text{ W}$$

Resposta: a máquina é uma Turbina, que retira uma potência de 11,7kW da água.

Exemplo 6.6.2:

A figura mostra uma tubulação alimentada por um reservatório de grandes dimensões, que descarrega num jato livre na cota 200,00m, com velocidade 5m/s. As perdas de carga no percurso total da tubulação são de 25m. A carga total na entrada da tubulação (seção 1) é de 220m. Informe se a máquina hidráulica é uma bomba ou turbina.



Análise: trata-se de um problema semelhante ao anterior, exceto que não são fornecidas as cargas individuais na seção de entrada da tubulação.

Solução:

$$220 - H_M = 0 + 200 + \frac{5^2}{2 \times 9,8} + 25$$

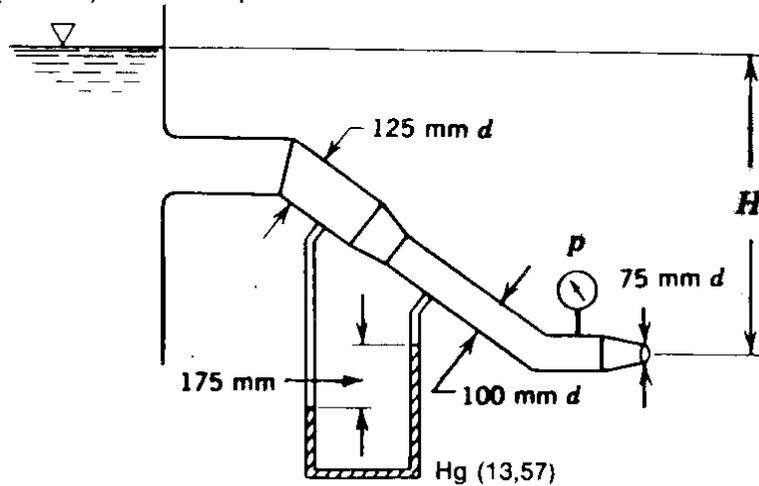
$$H_M = -6,27m$$

Resposta:

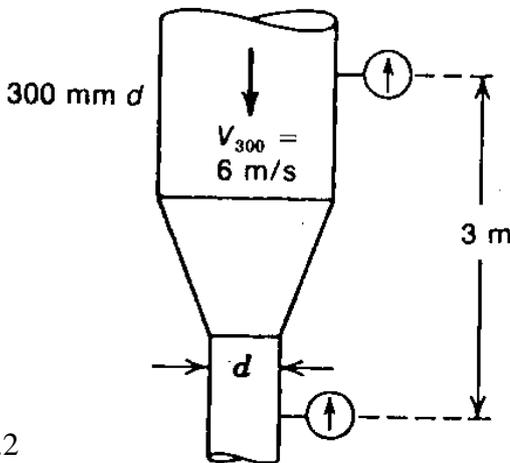
A máquina hidráulica é uma bomba, com altura manométrica de 6,3m.

6.7 Exercícios Propostos

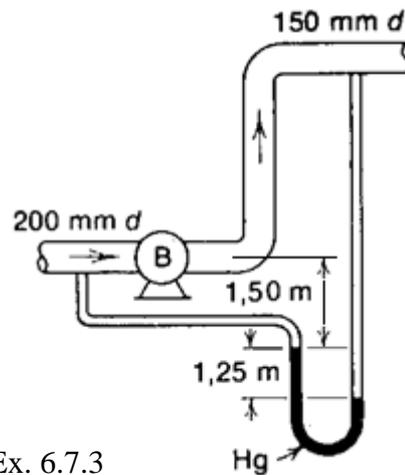
6.7.1. Água escoar de um grande reservatório e descarrega em jato livre. Calcule H (m) e a pressão relativa p (kN/m^2) indicada pelo manômetro antes do bocal. Perdas desprezíveis.



6.7.2. A água se escoar na tubulação da figura. Calcule o diâmetro necessário, d , para que as leituras manométricas sejam as mesmas.



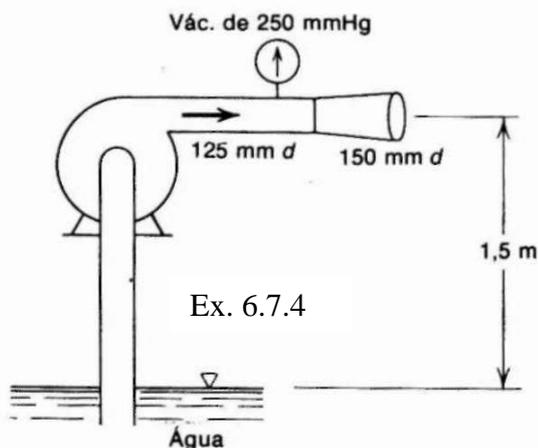
Ex. 6.7.2



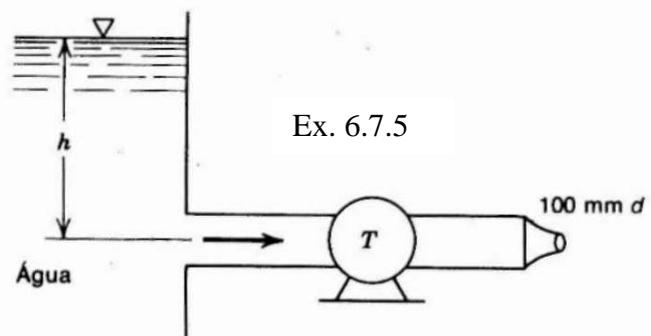
Ex. 6.7.3

6.7.3. Calcule a potência da bomba que recalca 120 l/s de água.

6.7.4. Supondo que o bocal divergente permaneça cheio, calcule a potência da bomba.



Ex. 6.7.4



Ex. 6.7.5

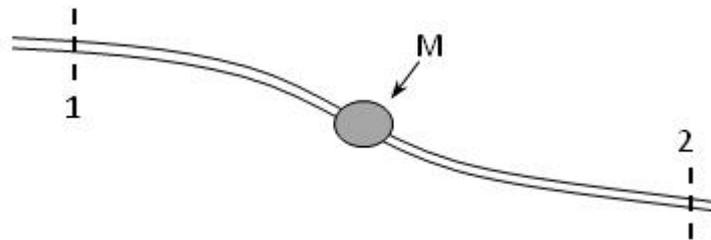
6.7.5. Calcule a altura h necessária para produzir uma vazão de 85 l/s e uma potência de 15 kW na turbina. Despreze as perdas.

6.7.6) Considere um recipiente fechado dotado de um tubo de entrada de água de 10mm de diâmetro e um tubo de saída de 5mm de diâmetro. O recipiente possui um aquecedor que gera 2.000 W de potência em regime permanente. A massa específica da água é igual a 1000 kg/m³ na entrada e saída e o calor específico é igual a 4180 J/kg. Sabendo que a água que entra chega com uma temperatura de 25°C, e o perfil de velocidades é dado por:

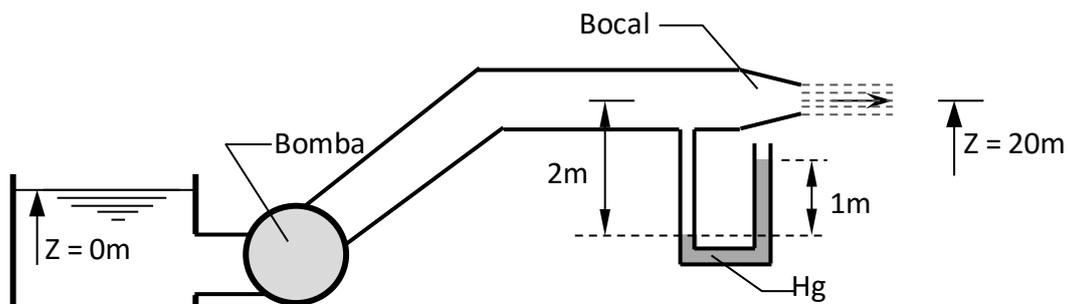
$$V(r) = 1 - \frac{r^2}{2.5 \times 10^{-5}} ; V \text{ em (m/s) e } r \text{ em metros, pede-se:}$$

- V média, Fluxo de Volume e Fluxo de massa que entram no recipiente.
- Fluxo de calor trazido ao recipiente pela água que entra.
- Velocidade média de saída
- Fluxo de calor que a água transporta para fora do recipiente.
- Temperatura da água na saída.

6.7.7) O escoamento da figura ocorre em regime permanente no sentido de 1 para 2. Sabe-se que $A_1 = 1\text{m}^2$; $V_1 = 1\text{m/s}$; $z_1 = 10\text{m}$; $p_1 = 9800\text{ Pa}$; $V_2 = 0,5\text{m/s}$; $z_2 = -10\text{m}$; $p_2 = 450800\text{ Pa}$. As perdas de carga totais entre as seções 1 e 2 são de 5m. Pede-se: a) informar se a máquina hidráulica “M” é uma bomba ou turbina, justificando; b) a altura manométrica da máquina “M”; c) a potência líquida da máquina; d) a energia consumida (ou fornecida) pela máquina, em Joules, durante um período de operação de 8 horas, admitindo um rendimento de 85% na máquina.



6.7.8) Calcular a vazão e a potência fornecida pela bomba. As perdas de carga na tubulação são dadas e a perda no bocal é desprezível. Dados: $A_{\text{TUBO}} = 0,1\text{m}^2$; $A_{\text{BOCAL}} = 0,05\text{m}^2$; Perdas no tubo $\Delta H_{\text{TUBO}} = 5V^2/2g$; densidade do mercúrio $d_{\text{HG}} = 13,6$.



CAPÍTULO 7: BALANÇO GLOBAL DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A quantidade de movimento de um dado volume de fluido é uma grandeza extensiva. Quando um escoamento atravessa um volume de controle, a água carrega consigo quantidades de movimento que entram e saem. O efeito imediato mais importante disso é que aparecem forças exercidas pelo escoamento sobre o volume de controle.

A grandeza extensiva $N = m\vec{v}$ é um vetor. A quantidade específica é $\eta = \vec{v}$.

A lei física que trata da variação da quantidade de movimento num sistema é a segunda lei de Newton.

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_S = m\vec{a} = \Sigma \vec{F}$$

Aplicando-se a relação sistema-volume de controle para a quantidade de movimento tem-se:

$$\Sigma \vec{F}_{S \equiv VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dVol + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA} \quad 7.1$$

O primeiro termo do segundo membro (variáveis Eulerianas) representa a taxa de variação da quantidade de movimento no VC. Pode ocorrer porque as velocidades variam no tempo, no interior do VC, ou porque a quantidade de massa varia no tempo, ou pela combinação de ambos.

O segundo termo representa o saldo de fluxos de quantidade de movimento (fluxo que sai menos fluxo que entra).

A equação é resolvida para cada componente da força. Em problemas bidimensionais, as componentes ficam:

$$\Sigma F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V_x \rho dVol + \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA} \quad 7.2$$

$$\Sigma F_y = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} V_y \rho dVol + \int_{SC} V_y \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA} \quad 7.3$$

Observe nas equações 7.2 e 7.3 que o termo $\vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}$ não é decomposto porque é um escalar.

A avaliação correta do primeiro membro depende, em cada caso, do correto isolamento do volume de controle, e da consideração de todas as forças, tanto de contato como de campo ou de ação à distância (normalmente a força peso).

Nos itens seguintes serão desenvolvidos exemplos de aplicação a casos simples de interesse prático.

7.1 Aplicações Elementares: Pás Defletoras

No cálculo de pás defletoras admite-se a hipótese simplificadora básica de que a pá não muda a velocidade do jato. Isto implica em ignorar as forças tangenciais devido à viscosidade no contato entre o fluido e a pá defletora.

A Figura 7.1 mostra um jato livre ($p = p_{atm}$) de água defletido no plano vertical pela pá fixa, presa por um suporte (não representado na figura). Analise o problema para determinar as componentes da força transferida pelo jato à pá.

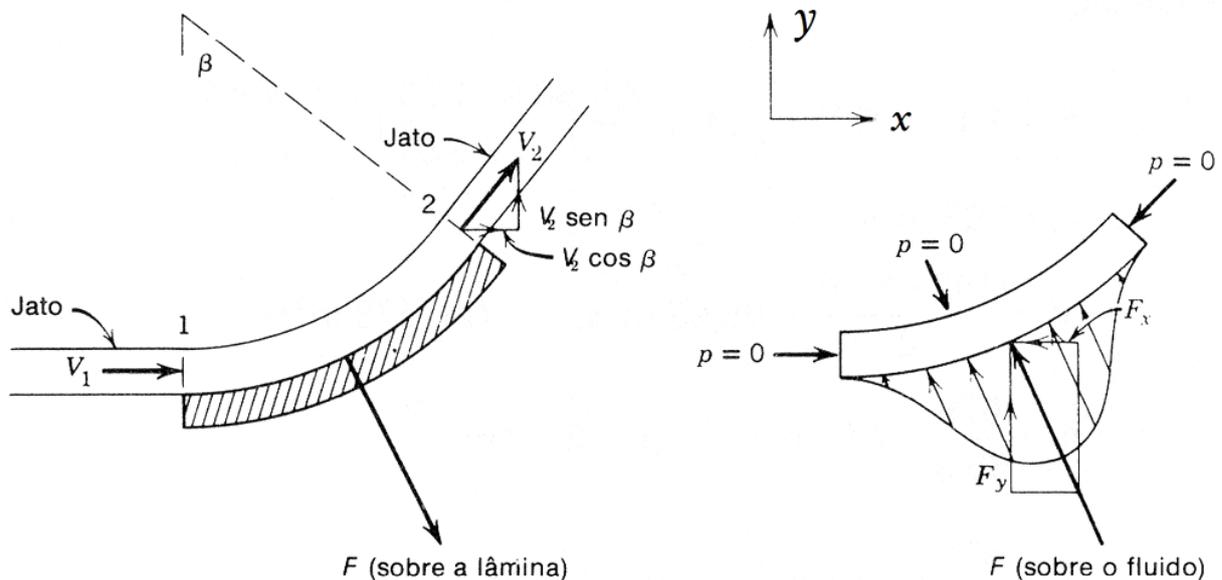


Figura 7.1: Pá defletora fixa.

Inicialmente é necessário definir com clareza o volume de controle adotado, para não cometer erros no isolamento. Foi escolhido para este problema um V.C. que inclui apenas o jato de água. Seu isolamento aparece no lado direito da figura.

A pressão atmosférica não atua no contato jato-pá. Mas a área de ação da pressão atmosférica sobre a superfície superior do jato tem a mesma projeção que a superfície inferior da pá, de forma que as forças devido à pressão atmosférica vão se anular. Por isso é mais conveniente usar pressões efetivas. Com isso, todas as forças de pressão se anulam, com exceção da força F exercida pela pá sobre o jato de fluido.

A força F é resultado da integração de um diagrama de pressões efetivas que se desenvolve ao longo da pá, como ilustrado na Figura 7.1. Esta distribuição de pressões é desconhecida, mas o balanço integral não depende desta informação para calcular a força resultante F . Esta é uma grande vantagem da técnica de balanços globais. Aplicando o balanço, para regime permanente, temos:

Direção x :

$$\Sigma F_x = - F_x = \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Direção y :

$$\Sigma F_y = F_y - W = \int_{SC} V_y \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Em que W representa o peso da água sobre a pá.

Desenvolvendo a componente x:

$$-F_x = \int_1 V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} + \int_2 V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}$$

Como as seções 1 e 2 possuem velocidades constantes, as componentes podem ser retiradas da integral, assim como a massa específica.

$$-F_x = (+V_1) \rho \int_1 \vec{V} \cdot \vec{dA} + (+V_2 \cos \beta) \rho \int_2 \vec{V} \cdot \vec{dA}$$

$$-F_x = (+V_1) \rho (-V_1 A_1) + (+V_2 \cos \beta) \rho (+V_2 A_2)$$

Observe que há duas considerações de sinal a fazer em cada termo. A primeira referente ao sentido da componente de velocidade, e a segunda referente à integral em área de entrada (negativa) ou de saída (positiva).

Pela equação da continuidade, $V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q$.

Pela hipótese básica de desprezar a ação do cisalhamento na pá, $V_1 = V_2$.

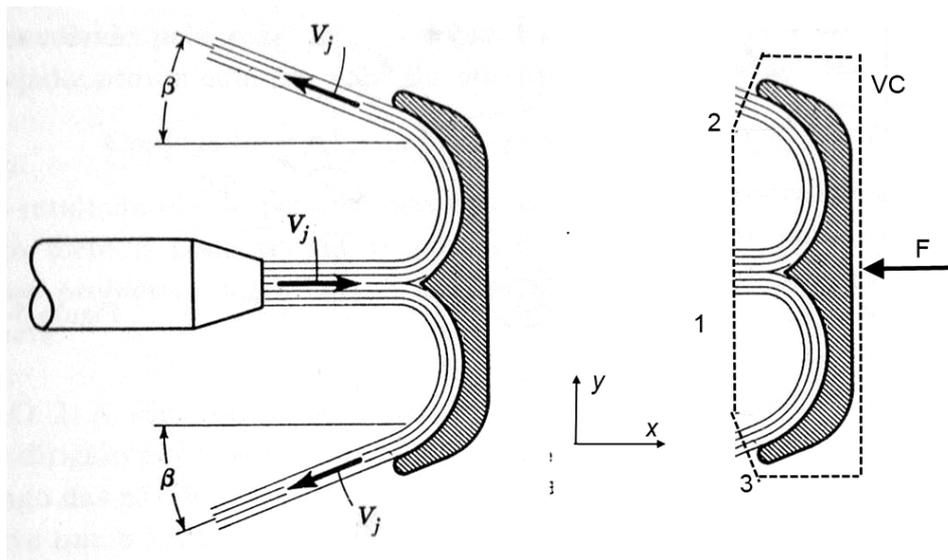
Portanto, $A_1 = A_2$.

$$F_x = \rho Q V_1 (1 - \cos \beta)$$

Desenvolvimento semelhante no eixo vertical leva a:

$$F_y - W = \rho Q V_1 \sin \beta$$

EXEMPLO 7.1: A figura mostra um bocal com $0,05\text{m}^2$ de área, descarregando um jato livre com $V_j = 10\text{m/s}$ numa pá defletora horizontal. A pá divide o jato pelo meio, e o ângulo $\beta = 30^\circ$. Calcule a força necessária para manter a pá no lugar.



Solução: Adotando um VC que inclui a pá e o jato, conforme o esquema a direita da figura, percebemos que a força devido à pressão atmosférica se anula. A força peso não age no problema, restrito ao plano horizontal.

$$\Sigma F_x = -F = \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} = \int_{A1} V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} + \int_{A2} V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} + \int_{A3} V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}$$

$$\begin{aligned}
 -F &= (+\rho V_j) \int_{A_1} \vec{V} \cdot d\vec{A} + (-\rho V_j \cos\beta) \int_{A_2} \vec{V} \cdot d\vec{A} + (-\rho V_j \cos\beta) \int_{A_3} \vec{V} \cdot d\vec{A} \\
 -F &= (+\rho V_j)(-V_j A_j) + (-\rho V_j \cos\beta) \frac{(+V_j A_j)}{2} + (-\rho V_j \cos\beta) \frac{(+V_j A_j)}{2} \\
 -F &= \rho 10 (-10 \times 0,05) - 2 \rho (10 \cos 30) (10 \times 0,025) \\
 F &= 9330 \text{ N}
 \end{aligned}$$

O sinal positivo indica que o sentido adotado(-i) é correto.

A repetição do balanço na direção y mostrará que $F_y = 0$, devido à simetria entre os jatos de saída nas áreas 2 e 3.

7.2 Aplicações Elementares: Curvas em Tubulações

O cálculo de forças em curvas de tubulação com escoamento forçado é similar ao de pás defletoras, com a adição das forças devido à pressão nas áreas de entrada e saída. A Figura 7.2 apresenta uma curva com redução em tubulação com paredes finas.

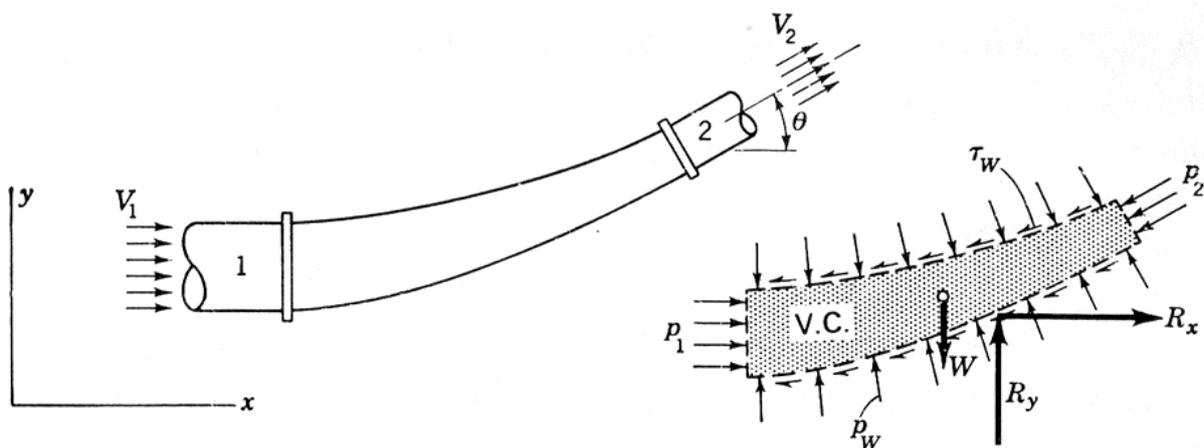


Figura 7.2: Curva com redução.

Adota-se como volume de controle a água no interior da tubulação. O volume de controle isolado como corpo livre aparece no esquema à direita da figura. As forças de contato são as forças de pressão nas faces 1 e 2, e as forças decorrentes das distribuições de pressão (p_w) e de tensão de cisalhamento (τ_w) ao longo da parede lateral da curva. A resultante dessas distribuições desconhecidas é a força resultante que a curva aplica sobre a água que compõe o VC. Além das forças de contato, já descritas, atua a força de campo (peso) na direção y.

Para calcular as forças de pressão vamos considerar a pressão efetiva nas seções 1 e 2. Com isso podemos ignorar a pressão atmosférica atuando sobre a curva.

Aplicando o balanço, para regime permanente, temos:

Direção x:

$$\Sigma F_x = F_{p,1} - F_{p,2} \cos \theta + R_x = \int_{SC} V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}$$

Direção y:

$$\Sigma F_y = R_y - W - F_{p,2} \sin \theta = \int_{SC} V_y \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}$$

Em que W representa o peso da água contida no interior da curva.

Desenvolvendo a componente x:

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + R_x = \int_1 V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} + \int_2 V_x \rho \vec{V} \cdot \vec{dA}$$

$$- F_x = (+V_1) \rho \int_1 \vec{V} \cdot \vec{dA} + (+V_2 \cos \beta) \rho \int_2 \vec{V} \cdot \vec{dA}$$

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + R_x = (+V_1) \rho (-V_1 A_1) + (+V_2 \cos \theta) \rho (+V_2 A_2)$$

Lembrando que, pela continuidade,

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q$$

A equação do balanço, para o caso especial da curva da figura, fica:

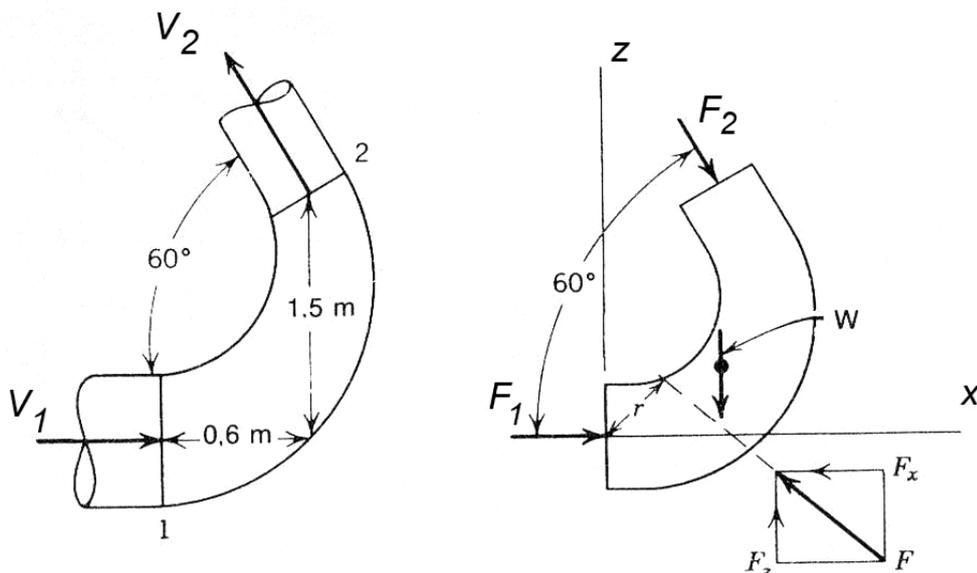
$$p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + R_x = \rho Q (V_2 \cos \theta - V_1)$$

O tratamento da direção y é semelhante, levando a:

$$R_y - W - p_2 A_2 \sin \theta = \rho Q V_2 \sin \theta$$

EXEMPLO 7.2: A figura mostra uma curva vertical de 120 com redução de 300mm para 200mm. A cota média da seção 2 situa-se 1,5m acima da cota média da seção 1. A pressão relativa na seção 1 é de 50 kPa. A vazão transportada pela tubulação é de 200 L/s. O volume interno da curva é de 85 L. Calcule a força exercida pela água sobre a curva.

Solução:



a) Primeiramente, calcular V_1 com a vazão dada e V_2 pela continuidade

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0,200}{0,0707} = 2,83 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0,200}{0,0314} = 6,37 \text{ m/s}$$

b) Com as velocidades, calcular p_2 com a equação da energia

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2}$$

$$\frac{50000}{9800} + 0 + \frac{2,83^2}{19,6} = \frac{p_2}{\gamma} + 1,5 + \frac{6,37^2}{19,6} + 0$$

$$p_2 = 19016 \text{ Pa}$$

c) Adotar e isolar um VC para calcular o somatório de forças e aplicar o balanço de quantidade de movimento.

O VC escolhido será a água no interior da curva. As distribuições de tensões tangenciais e normais ao longo das paredes internas são desconhecidas, mas sua integral sobre a área resulta na força da curva sobre a água, denotada por F na figura.

Direção x:

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 \cos 60 - F_x = \int_1 V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_2 V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 \cos 60 - F_x = (+V_1) \rho (-V_1 A_1) + (-V_2 \cos 60) \rho (+V_2 A_2)$$

$$F_x = p_1 A_1 + p_2 A_2 \cos 60 + \rho Q (V_1 + V_2 \cos 60)$$

$$F_x = 5036 \text{ N}$$

O sinal positivo indica que o sentido adotado (-i) é correto.

Direção z:

$$-p_2 A_2 \sin 60 - W + F_z = \int_1 V_z \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_2 V_z \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$-p_2 A_2 \sin 60 - W + F_z = (+0) \rho (-V_1 A_1) + (+V_2 \sin 60) \rho (+V_2 A_2)$$

$$F_z = p_2 A_2 \sin 60 + \gamma \text{Vol} + \rho Q (+V_2 \sin 60)$$

$$F_z = 517,37 + 833 + 1103,32 = 2454 \text{ N}$$

O sinal positivo indica que o sentido adotado (+k) é correto.

7.3 Aplicações Elementares: Perdas em Expansão Brusca

Quando a água em escoamento forçado encontra um aumento de diâmetro, passa pelo fenômeno da expansão brusca. O comportamento da água é mostrado na Figura 7.3: o núcleo do escoamento expande-se gradualmente e surge uma zona morta, com vórtices e escoamento reverso na região próxima da expansão. Como resultado, há uma perda de energia que pode ser quantificada com a aplicação do balanço global da quantidade de movimento.

Adota-se como volume de controle a água entre a seção imediatamente após expansão (1) e a seção em que a velocidade volta a ser uniforme na seção (2). O VC isolado é mostrado na figura (b).

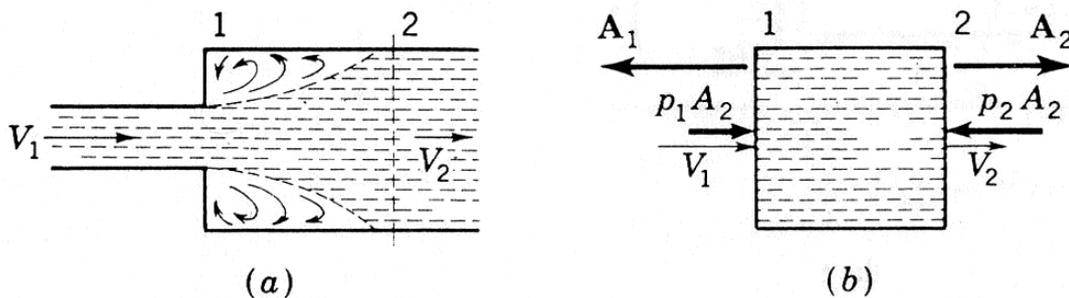


Figura 7.3: Expansão brusca em escoamento forçado.

Como primeira hipótese simplificadora, a força de atrito resultante da distribuição de tensões tangenciais na parede lateral do VC é desprezada.

Como as acelerações resultantes dos vórtices na zona de estagnação são pequenas, pode-se considerar, como segunda hipótese simplificadora, que a pressão é constante ao longo da seção 1.

Com as simplificações adotadas, o balanço de quantidade de movimento sobre o VC fica:

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = (+V_1) \rho (-V_1 A_1) + (+V_2) \rho (+V_2 A_2) *$$

Aplicando a equação da energia entre as seções 1 e 2:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} + \Delta h_{1-2}$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_2^2}{2} - \rho \frac{V_1^2}{2} + \gamma \Delta h_{1-2} **$$

Igualando o termo $p_1 - p_2$ das equações marcadas com asterisco, pode-se obter a perda de carga:

$$p_1 - p_2 = \rho V_2^2 - \rho V_1^2 \frac{A_1}{A_2} = \rho \frac{V_2^2}{2} - \rho \frac{V_1^2}{2} + \gamma \Delta h_{1-2}$$

$$\gamma \Delta h_{1-2} = \rho \frac{V_2^2}{2} + \rho \frac{V_1^2}{2} \left(1 - 2 \frac{A_1}{A_2}\right)$$

$$\Delta h_{1-2} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - 2 \frac{A_1}{A_2}\right) = \frac{V_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 + V_1^2 \left(1 - 2 \frac{A_1}{A_2}\right)}{2g}$$

$$\Delta h_{1-2} = \frac{V_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 + 1 - 2 \frac{A_1}{A_2}\right]}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

$$\Delta h_{1-2} = \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

O resultado mostra que as perdas aumentam com o quadrado da velocidade e diminuem quando A_1 se aproxima de A_2 .

7.4 Aplicações Elementares: Estruturas em Canais Abertos

O balanço global de quantidade de movimento pode ser usado para calcular os esforços provocados pela água em estruturas como comportas e vertedores em escoamentos livres. A Figura 7.4 ilustra um trecho de canal retangular, com largura L na direção perpendicular à figura, com a água represada por uma comporta plana com inclinação qualquer.

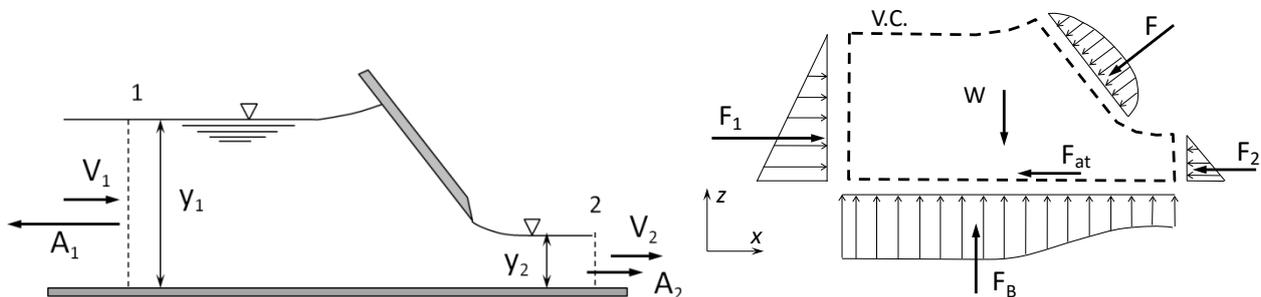


Figura 6.4: Estrutura em escoamento livre.

Isolando o V.C.

O volume de controle adotado é a água situada entre as seções 1 e 2. O diagrama à direita mostra o V.C. isolado, com as forças atuantes. O somatório de forças na direção x fica:

$$\Sigma F_x = F_1 - F_2 - F_{at} - F_x$$

A força F_x é a componente horizontal da força F que a comporta exerce sobre a água. A força F é resultante de uma distribuição desconhecida de pressões, ilustrada no diagrama. Observe que a distribuição de pressões mostra a pressão atmosférica atuando nos dois extremos da comporta em contato com a água. Sabemos também que F é perpendicular à face da comporta, porque consideramos desprezíveis as forças tangenciais, originadas da viscosidade do fluido. Da mesma forma, consideramos desprezível a força F_{at} causada pelas tensões tangenciais ao longo das paredes laterais e do fundo do canal.

Nas seções 1 e 2 o diagrama de pressões é triangular (distribuição isostática), porque as linhas de corrente são retílineas e paralelas.

_____ Força de Pressão

A força F resultante da distribuição isostática de pressões sobre uma área plana retangular é calculada a seguir, com base na Figura 7.5..

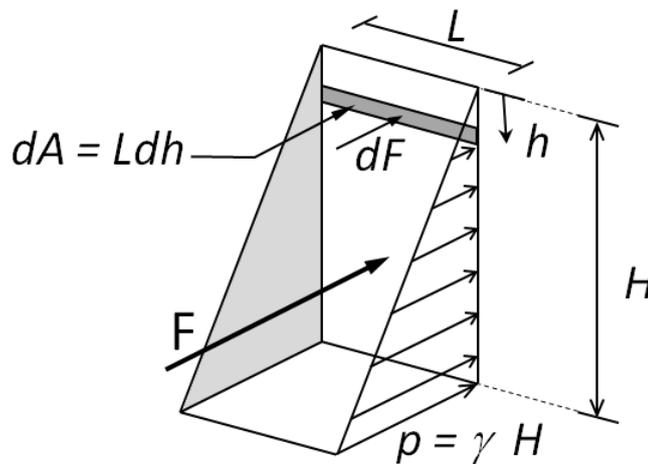


Figura 7.5: Carregamento de pressão isostática sobre superfície plana.

$$F = \int_A dF = \int_A p dA = \int_0^H \gamma h L dh$$

$$F = \gamma L \frac{H^2}{2}$$

_____ Aplicando o balanço

Aplicando o balanço de quantidade de movimento (eq. 7.2) na direção x ao V.C. adotado,

$$\gamma L \frac{y_1^2}{2} - \gamma L \frac{y_2^2}{2} - F_x = \int_1 V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_2 V_x \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\gamma L \frac{y_1^2}{2} - \gamma L \frac{y_2^2}{2} - F_x = (+V_1)(-\rho V_1 A_1) + (+V_2)(+\rho V_2 A_2)$$

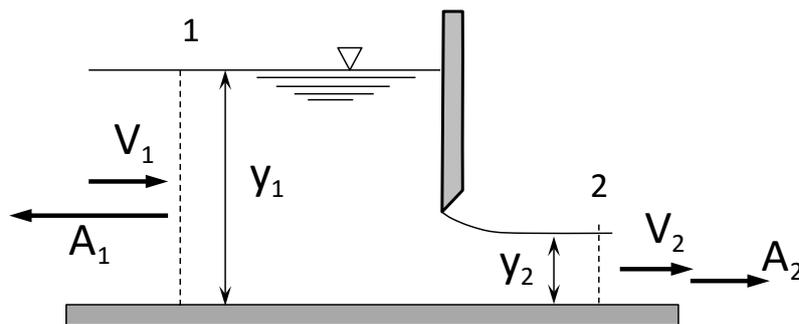
Lembrando que, pela continuidade,

$$V_1 y_1 = V_2 y_2 = q \left(\frac{m^2}{s} \right)$$

sendo $q = Q/L$ a vazão por metro de largura do canal, a equação do balanço pode ser resolvida para fornecer F_x .

Com a componente horizontal e conhecendo a inclinação da comporta calcula-se a componente vertical, sabendo que a resultante é perpendicular à superfície da comporta.

EXEMPLO 7.3: A figura mostra um trecho de canal retangular com 2m de largura, com uma comporta vertical controlando a vazão em regime permanente. Calcule a vazão e a força exercida pela água sobre a comporta, sabendo que o nível de montante é 5 m e o de jusante 2 m. Despreze a ação das tensões de cisalhamento.

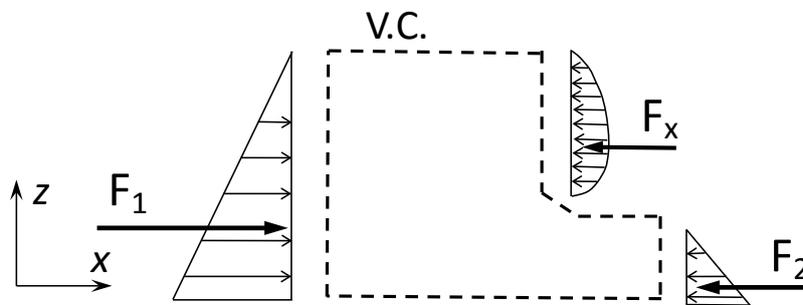


Análise:

A força de atrito no fundo será desprezada, bem como a força vertical da água sobre a comporta, resultante das tensões tangenciais. A equação da energia entre as seções 1 e 2, bem como a continuidade, serão utilizadas para determinar a vazão. Com a vazão conhecida pode ser aplicado o balanço global da quantidade de movimento para o volume de controle constituído pela água entre as seções 1 e 2.

Solução:

O volume de controle isolado é mostrado no esquema a seguir:



O balanço global aplicado ao V.C. isolado acima fornece, conforme a discussão do item 7.4:

$$\gamma L \frac{y_1^2}{2} - \gamma L \frac{y_2^2}{2} - F_x = (+V_1)(-\rho V_1 A_1) + (+V_2)(+\rho V_2 A_2)$$

O balanço de energia entre as seções 1 e 2 fornece:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2}$$

Desprezando as perdas e tomando as pressões e cotas na seção média

$$2,5 + 2,5 + \frac{V_1^2}{2g} = 1 + 1 + \frac{V_2^2}{2g}$$

A continuidade diz que:

$$V_1 L y_1 = V_2 L y_2 \Rightarrow V_2 = 2,5 V_1$$

Portanto,

$$\frac{V_1^2}{2g} (2,5^2 - 1) = 3 \Rightarrow V_1 = 3,347 \text{ m/s}$$

$$V_2 = 8,367 \text{ m/s}$$

$$Q = 33,47 \text{ m}^3/\text{s}$$

Substituindo no balanço de quantidade de movimento:

$$9800 \times 2 \left(\frac{5^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) - F_x = 1000 \times 33,47 (8,367 - 3,347)$$

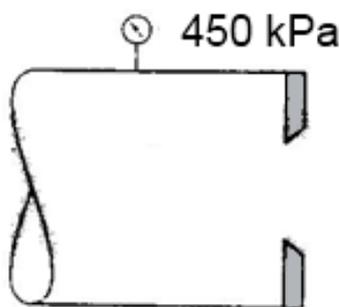
$$F_x = 37781 \text{ N}$$

O sinal positivo indica que o sentido adotado para a força exercida sobre a água é o correto (-i).

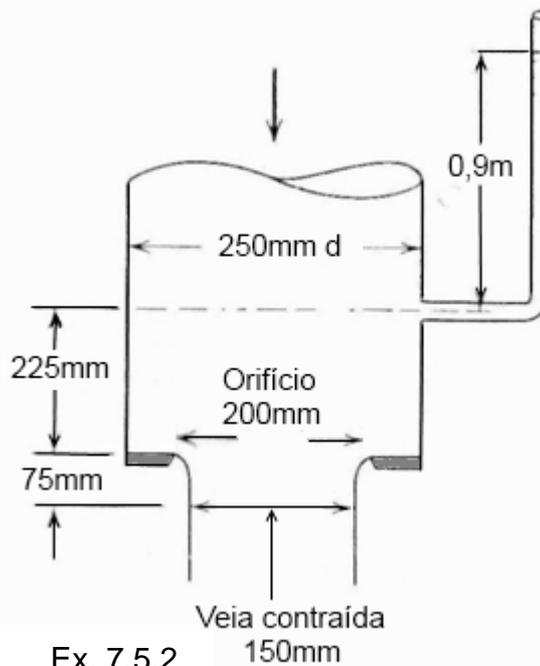
Resposta: A força exercida pela água sobre a comporta é de 37,8kN, no sentido positivo do eixo x (+i).

7.5 Exercícios Propostos

7.5.1. Calcule a força resultante da água sobre esta placa com orifício. O tubo tem diâmetro de 0,3 m e o diâmetro do orifício é de 0,2 m, sendo a *vena contracta* de 0,16 m.



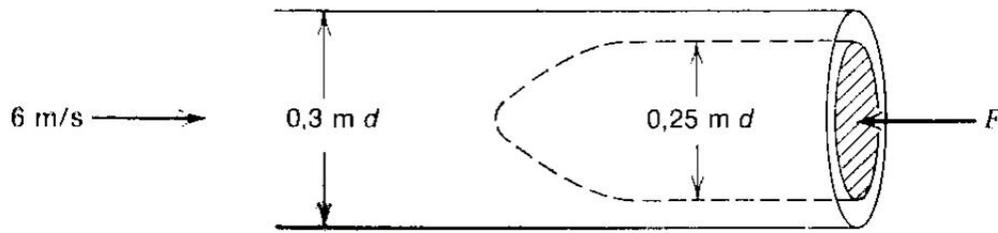
Ex. 7.5.1



Ex. 7.5.2

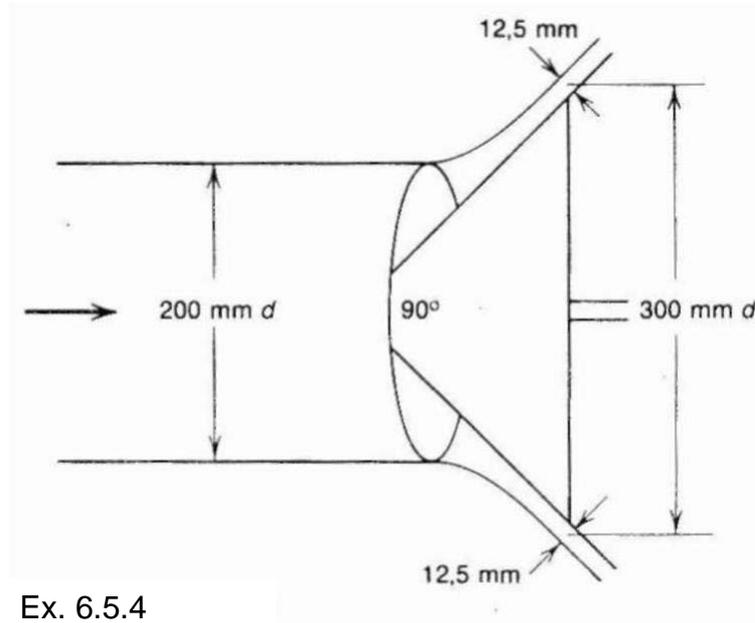
7.5.2. Calcule a força exercida pela água sobre esta placa com orifício. Suponha que a água entre o orifício e a *vena contracta* pese 18N.

7.5.3. O projétil enche parcialmente o terminal do tubo de 0,3 m. Calcule a força necessária para manter o projétil na posição indicada, quando a velocidade média no tubo for 6 m/s.



Ex. 6.5.3 1

7.5.4. Calcule a força horizontal exercida pela água sobre o cone quando a velocidade média no tubo de 200 mm for igual a 3 m/s.



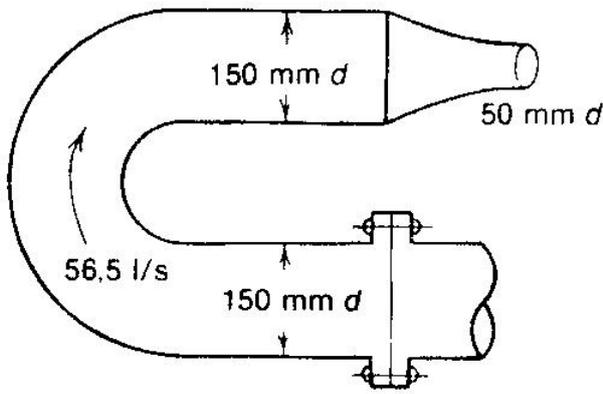
Ex. 6.5.4

7.5.5. Uma vazão de 1.820 l/min de água ocorre num tubo de 50 mm de diâmetro, o qual se alarga para 100 mm. Se a pressão no tubo pequeno for igual a 138 kN/m^2 , calcule o módulo e o sentido da força horizontal sobre o alargamento.

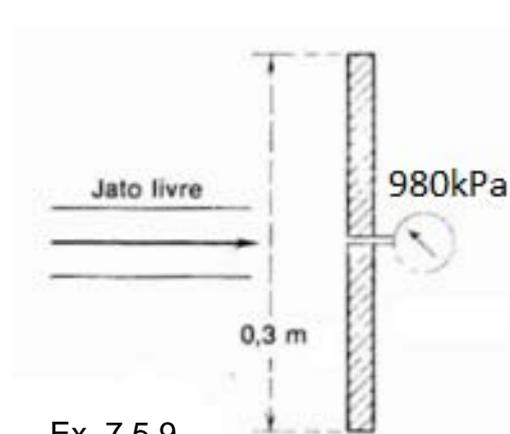
7.5.6. Um bocal de 100 mm é rebitado (com 6 rebites) numa dobra de uma tubulação horizontal de 300 mm e descarrega água na atmosfera. Determine a carga de tensão em cada rebite quando a pressão no tubo for igual a 600 kN/m^2 . Despreze as forças verticais.

7.5.7. Um tubo cônico divergente se encontra na horizontal, possui comprimento de 0,3 m, sendo o diâmetro do estrangulamento igual a 75 mm; o diâmetro na saída é igual a 100 mm, por onde ocorre uma descarga de 28,3 l/s para a atmosfera. Calcule o módulo e o sentido de cada componente da força que a água exerce sobre o tubo.

7.5.8. Neste escoamento de água no plano horizontal, determine a força sobre as cavilhas que prendem o conjunto curva-bocal à tubulação. O bocal descarrega em jato livre e as perdas são desprezíveis.



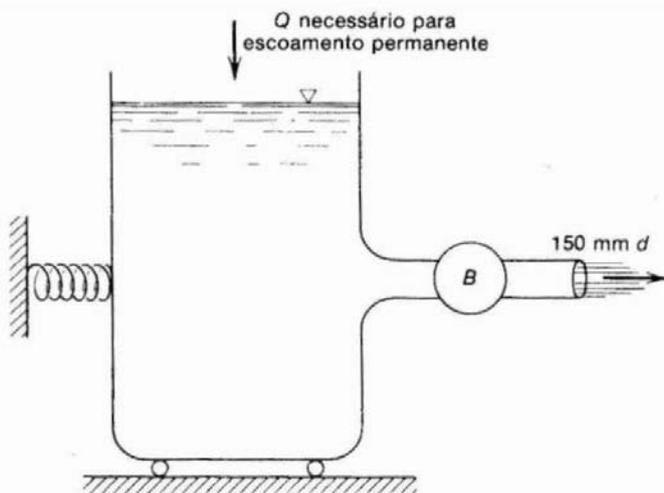
Ex. 7.5.8



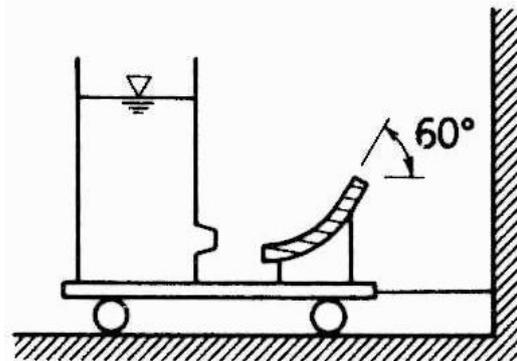
Ex. 7.5.9

7.5.9. Água está fluindo em regime permanente no jato livre com vazão de 50l/s. O jato é desviado pela placa circular com 0,3m de diâmetro. Um manômetro situado no centro da placa acusa uma pressão de 980kPa. Determine a velocidade do jato, a força exercida pela água sobre a placa e a força a ser exercida sobre a placa para mantê-la no lugar.

7.5.10. Quando a bomba indicada na figura pára de funcionar (e não oferece nenhuma resistência ao escoamento), a força exercida sobre a mola é igual a 672 N. Quando a bomba está funcionando, a força cresce para 2,24 kN. Qual a potência que a bomba está fornecendo para a água? Suponha que a superfície da água no tanque não se modifique..

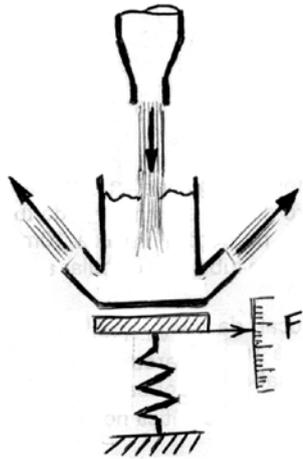


Ex. 7.5.11

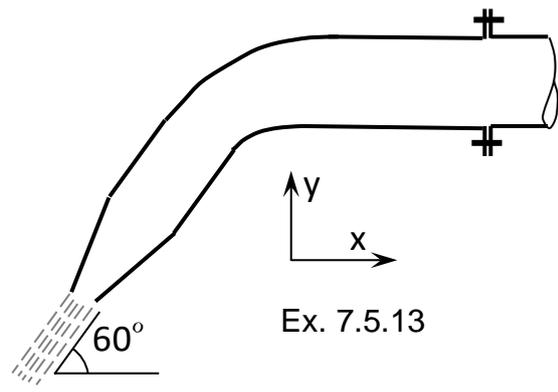


7.5.11. Um tanque é montado sobre um carro, conforme a figura. Considere a água que sai do tanque através de um bocal de $0,05\text{m}^2$, com velocidade de 10m/s . O nível da água no tanque é mantido constante pela adição de água por meio de uma tubulação vertical. Determinar a tensão no arame que mantém o carro estacionário.

7.5.12. A figura mostra um dispositivo que recebe um jato de água com 10m/s de velocidade e $0,1\text{m}^2$ de área. O jato recebido é desviado e descarrega por duas fendas laterais de $0,1\text{m}^2$ de área cada uma, com a velocidade formando um ângulo de 60° com o plano horizontal. A massa do dispositivo é de 5kg e 10 litros de a água ficam retidos em seu interior, em regime permanente. Pede-se: a) calcular a velocidade média de saída em cada fenda lateral; b) a força indicada no dinamômetro.



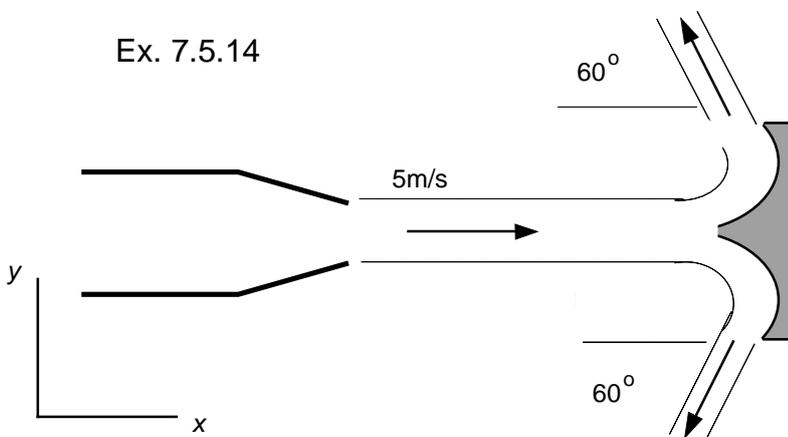
Ex. 7.5.12



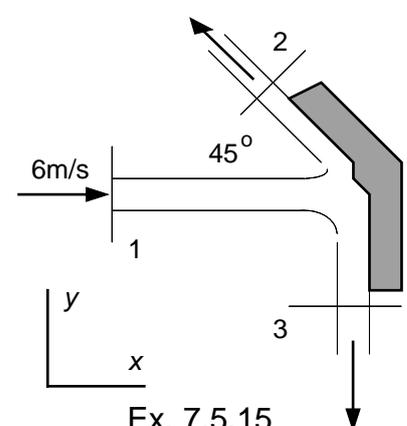
Ex. 7.5.13

7.5.13. Calcule a força sobre a curva com bocal da figura, situada no plano horizontal e descarregando com um jato livre. A área do tubo é 1 m^2 , a velocidade da água no tubo é 3 m/s e na saída do bocal é 9 m/s . A pressão na entrada da curva pode ser calculada sabendo que as perdas de carga entre a curva e o jato livre podem ser desprezadas.

7.5.14. Um bocal de $0,01\text{ m}^2$ de área lança um jato no plano horizontal sobre a pá dupla da figura, com velocidade 5 m/s . Sabendo que na pá o jato se divide em dois jatos iguais, calcule as resultantes R_x e R_y sobre a pá.



Ex. 7.5.14



Ex. 7.5.15

7.5.15. A figura mostra um jato livre de água de área $0,1\text{ m}^2$ e velocidade 6 m/s , atingindo um anteparo no plano horizontal. Ao bater no anteparo o módulo da velocidade não varia e o jato é dividido em duas partes. Sabe-se que sai pela seção 3 duas vezes mais água do que sai pela seção 2. Pede-se:

- áreas A_2 e A_3
- as reações sobre o anteparo

A N E X O - RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

CAPÍTULO 1

ITEM 1.6

1.6.1

a) $Q = 0,02\text{m}^3/\text{s}$; b) $F_M = 19,9\text{kg}/\text{s}$; c) $F_N = 4\text{g}/\text{s}$ (N = sólidos totais); d) $F_N = 3743\text{kW}$.

1.6.2

O mapa mostra que as maiores concentrações de matéria orgânica devem-se, provavelmente, à contribuição do afluente. O problema possui solução aberta. Uma das possíveis soluções é discutida a seguir.

a) Adotei divisão da seção em subáreas com velocidades constantes.

- Seção 1 triangular, com menores velocidades devido à pequena profundidade, com base 2m e profundidade máxima 0,5m. : $A_1 = 2 \times 0,5 / 2 = 0,5\text{m}^2$;
- Seção 2 trapezoidal, entre $y = 2,0$ e $y = 3,5\text{m}$, com área de transição entre as velocidades baixas da margem e o canal principal do rio com as maiores velocidades: $A_2 = (0,5 + 1,0) / 2 \times 1,5 = 1,125\text{m}^2$;
- Seção 3 retangular entre $y = 3,5\text{m}$ e $y = 5,5\text{m}$, com 1,5m da profundidade, considerando o núcleo de maiores velocidades do escoamento: $A_3 = 2 \times 1,5 = 3,0\text{m}^2$.

b) $Q = V_1A_1 + V_2A_2 + V_3A_3 = 8,0\text{m}^3/\text{s}$;

c) $F_M = 550\text{g}/\text{s}$.

1.6.3

a) $70\text{m}^3/\text{s}$; b) $74\text{ kg}/\text{s}$; c) $1.458.540\text{m}^3$.

1.6.4

$Q = 48\text{ L}/\text{s}$ ($0,048\text{m}^3/\text{s}$).

1.6.5 – trajetórias em regime permanente coincidem com as Linhas de Corrente. A seção 1 possui 6 tubos de corrente com igual vazão, visto que a velocidade é uniforme.

1. $Q_1 = 60\text{m}^3/\text{s}$, $V_2 = 0,533\text{m}/\text{s}$, $V_3 = 0,5\text{m}/\text{s}$;
2. $C_c = 1,875\text{g}/\text{m}^3$, $C_b = 0$;
3. $C_c = 0$, $C_b = 3,75\text{g}/\text{m}^3$; A alternativa de lançamento no ponto (a) é melhor do que no ponto (a'), porque a concentração resultante é menor.

1.6.6

Devido à simetria é possível resolver para metade da seção e dobrar o resultado.

a) $Q = 13,33\text{m}^3/\text{s}$, b) $F_N = 1.667\text{g}/\text{s}$ (N = massa de cloretos).

1.6.7

a) $V_M = 1\text{m}/\text{s}$; b) $Q = 3\text{m}^3/\text{s}$; c) $F_M = 3.000\text{kg}/\text{s}$; d) $F_N = 300\text{g}/\text{s}$ (N = massa de sal).

1.6.8

N = massa de cianetos.

Fluxo medido no rio $F_N = 30,6\text{mg}/\text{s}$;

Fluxo máximo permitido pelo acordo $F_N = 9\text{mg/s}$;

A empresa não está cumprindo o acordo.

ITEM 1.8

1.8.1: $Q = 0,8\text{m}^3/\text{s}$

1.8.2: $Q = 3,20\text{m}^3/\text{s}$

1.8.3: $Q = 1,667\text{m}^3/\text{s}$

1.8.4: Considerei Área 1 na direção i; Área 2 na direção j;

a) $Q_1 = 2\text{m}^3/\text{s}$, saída; $Q_2 = 3\text{m}^3/\text{s}$; saída, Total $Q = 5\text{m}^3/\text{s}$, saída

b) $F_M = 100\text{g/s}$, saída

c) $F_{M1} = 20\text{g/s}$, $F_{M2} = 30\text{g/s}$, Total: 50g/s , saída

d) $Q_1 = 1\text{m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 1,5\text{m}^3/\text{s}$

1.8.5:

a) $7,5\text{m}^3/\text{s}$; saída

b) 150g/s ; saída

c) 150g/s

d) $7,5\text{m}^3/\text{s}$

CAPÍTULO 3 ITEM 3.5

Ex 1 : $\Delta\text{Vol} = 77.760.000\text{m}^3$.

Ex. 2: $\Delta\text{Vol} = 23.328.008\text{m}^3$.

Ex.3: $Q = 2499\text{L/s}$ ($2,50\text{m}^3/\text{s}$).

Ex. 4: $\Delta\text{Vol} = 31.968.000\text{m}^3$.

Ex. 5: $Q = 1,571\text{m}^3/\text{s}$; $V = 0,222\text{m/s}$

Ex. 6: a) $h = 3,638\text{m}$; b) $t = 96,4\text{s}$; e) $t = 42,1\text{s}$

Item c)

t (s)	h (m)
0	5,000
20	4,470
40	3,996
60	3,572

t (s)	h (m)
0	5,000
5	4,867
10	4,738
15	4,613
20	4,491
25	4,372
30	4,256
35	4,143
40	4,033
45	3,926
50	3,822
55	3,721
60	3,622

Item d)

Item e) numericamente, interpolar linearmente entre 40 e 45 segundos:

$$\Delta t = 40 + \frac{(45 - 40)}{(4,033 - 3,926)} * (4,033 - 4,00) = 41,54 \text{ s}$$

Obs: analiticamente, obtém-se $t = 42,1\text{s}$

Ex. 7: $\Delta t = 29,2$ anos

Ex. 8: a) $Q_1 = Q_2 = 0,030\text{m}^3/\text{s}$;

b) $Q_3 = Q_4 = 0,015\text{m}^3/\text{s}$; $V_b = 1\text{m/s}$, sentido (-i) , portanto vazão de entrada.

CAPÍTULO 4

Ex. 4.5.1 $P = 336.735\text{Pa} = 337\text{kPa}$.

Ex. 4.5.2: $Q = 0,070\text{m}^3/\text{s}$

Ex. 4.5.3: a) $P_2 = 7.400 \text{ Pa}$; b) $P_3 = 29.600\text{Pa}$; c) $P_4 = 4.950 \text{ Pa}$; d) $Q = 0,0156 \text{ m}^3/\text{s}$.

Ex. 4.5.4: $V_{\text{Orifício}} = 5,67\text{m/s}$; $h = 1,64\text{m}$;

A vazão depende da área contraída o orifício: $Q = 5,67 A_{\text{Seção Contraída}} = 0,0073 \text{ m}^3/\text{s}$.

Ex. 4.5.5: $Q = 0,0148\text{m}^3/\text{s}$.

Ex. 4.5.6: a) $Q = 0,0430\text{m}^3/\text{s}$; b) $p = 84.264 \text{ Pa}$; c) $H = 11,82\text{m}$.

Ex. 4.5.7: a) $Q = 0,0964\text{m}^3/\text{s}$; b) $p = 44.491 \text{ Pa}$; c) $H = 7,69\text{m}$.

Ex. 4.5.8: a) $H = 3,29\text{m}$; b) $Q = 0,00215\text{m}^3/\text{s}$.

Ex. 4.5.9: A carga de pressão do ponto B é 1,51m. O nível do piezômetro C ficará 0,31 acima da cota do ponto A.

Ex. 4.5.10: $D = 0,0543\text{m}$

Ex. 4.5.11: $A \leq 0,0219\text{m}^2$.

Ex. 4.5.12: $V = 59,7\text{m/s}$.

Ex. 4.5.13: $Q = 0,0082\text{m}^3/\text{s}$; deflexão = 0,397m.

CAPÍTULO 6

6.7.1: $P = 32.279 \text{ Pa}$; $H = 4,82\text{m}$

6.7.2: $d = 0,236\text{m}$

6.7.3: Bomba com $H_M = 16,73\text{m}$; $Pot = 19,7\text{kW}$.

6.7.4: $Pot = 30.093\text{W}$

6.7.5: $h = 23,98\text{m}$

6.7.6:

a) $V_M = 0,5\text{m/s}$; $Q = 3,96 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$; $F_M = 3,93 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$

b) $410,7\text{W}$

c) $2,0 \text{ m/s}$

d) $2410,7\text{W}$

e) $146,75^\circ\text{C}$! (a água irá evaporar, mudando as condições do problema)

6.7.7:

a) a) Bomba ; b) $H_M = 29,96\text{m}$; c) $Pot = 293.625 \text{ J/s}$; d) $C = 2.763,5 \text{ kWh} = 9,95 \times 10^9 \text{ J}$.

6.7.8: OBS: Nas versões anteriores não foi incluída na proposta do problema a distância entre o centro do tubo e o nível do mercúrio no lado esquerdo do manômetro (2,0m). Com esse dado, as respostas ficam:

$Q = 0,871\text{m}^3/\text{s}$; b) $Pot = 302,9 \text{ kW}$

CAPÍTULO 7

Ex. 7.5.1

Força exercida pela água sobre a placa: $F_{a \rightarrow p} = (17.723 + 0,0393 P_{atm}) \text{ N}$ (sentido +x); esta resposta depende da pressão atmosférica local.

Força resultante sobre a placa : $F = 17.723 \text{ N}$ (sentido -x); esta é a força a ser aplicada pelos vínculos que unem o tubo à placa (parafusos, rebites, solda, etc). Esta força não depende da pressão atmosférica local.

Ex. 7.5.2

Força exercida pela água sobre a placa: $F_{a \rightarrow p} = (322,6 + 0,01767 P_{atm}) \text{ N}$ (sentido -z); esta resposta depende da pressão atmosférica local.

Força resultante sobre a placa : $F = 322,6 \text{ N}$ (sentido +z); esta é a força a ser aplicada pelos vínculos que unem o tubo à placa (parafusos, rebites, solda, etc). Esta força não depende da pressão atmosférica local.

7.5.3

Força necessária para manter o projétil $F = 6.570\text{N}$ (sentido -x)

7.5.4

Força exercida pela água sobre o cone: $F_{a \rightarrow c} = (1.477 + 0,031415 P_{atm}) \text{ N}$ (sentido +x); esta resposta depende da pressão atmosférica local.

Força resultante sobre o cone : $F = 1.477 \text{ N}$ (sentido -x); esta é a força a ser aplicada pela barra que mantém o cone no lugar. Esta força não depende da pressão atmosférica local.

7.5.5

Força aplicada pelo vínculo sobre a expansão $F = 1339\text{N}$ (sentido +x); a expansão comprime o tubo menor.

7.5.6

Tensão em cada rebite $T = 5655\text{N}$ (tração)

7.5.7

Componentes da Força exercida pela água sobre o tubo:

Componente X:

$F_{x\ a \rightarrow t} = (-17,34 + 0,003436 P_{atm})$ N (sentido $-x$); esta resposta depende da pressão atmosférica local.

O sentido coincide com o adotado ($-x$) quando $F_{x\ a \rightarrow t} > 0$. Isto ocorre para

$P_{atm} > 5049,5\text{Pa}$, o que abrange a maioria das situações comuns.

Componente Y:

$F_{y\ a \rightarrow t} = 18$ N (sentido $-y$)

7.5.8

Força do conjunto curva + bocal sobre as cavilhas $F_{VC \rightarrow Cavilhas} = 8.747$ N (sentido $-x$); O sentido indica que as cavilhas são tracionadas.

7.5.9

Velocidade do jato : $V = 44,27\text{m/s}$;

Força exercida pela água sobre a placa: $F_{a \rightarrow p} = (2.213,5 + 0,0707 P_{atm})$ N (sentido $+x$); esta resposta depende da pressão atmosférica local.

Força resultante sobre a placa : $F = 2.213,5$ N (sentido $-x$); esta é a força a ser aplicada pelos vínculos sobre a placa para mantê-la no lugar. Esta força não depende da pressão atmosférica local.

Ex. 7.5.10

Potência da bomba $Pot = 8.828\text{W}$

Ex. 7.5.11

Tensão no arame $T = 2.500\text{N}$ (tração no arame)

Ex. 7.5.12

Velocidade média de saída em cada fenda lateral $V = 5\text{m/s}$.

Força indicada no dinamômetro $F = 14.477\text{N}$ (força de compressão na mola)

Ex. 7.5.13

Componente X da força sobre a curva $F_x = 34.500\text{N}$ (sentido $+x$).

Componente Y da força sobre a curva: $F_y = 23.383\text{N}$ (sentido $-y$).

Ex. 7.5.14

Componente x da resultante sobre a pá $R_x = 375\text{N}$ (sentido $-x$)

Componente y da resultante sobre a pá $R_y = 0$.

Obs: a resultante sobre a pá é a força necessária para manter a pá no lugar.

Ex 7.5.15

a) Áreas: $A_2 = 0,03333... \text{ m}^2$; $A_3 = 0,06666... \text{ m}^2$.

b) Reações sobre o anteparo

Componente x: $R_x = 4.448\text{N}$ (sentido $-x$)

Componente y: $R_y = 1.551\text{N}$ (sentido $-y$)

Obs: a reação sobre o anteparo é a força necessária para manter o anteparo no lugar.