UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA – CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Eletricidade

Análise de Circuitos alimentados por fontes constantes

Prof. Sérgio Kurokawa

Ilha Solteira, março de 2013

Sumário

Prefácio

Esta apostila foi desenvolvida com a finalidade de servir como material auxiliar para os alunos do curso de Graduação em Engenharia Mecânica, da Faculdade de Engenharia – Campus de Ilha Solteira da Unesp, que cursam a disciplina *Eletricidade* e pretende complementar as informações que o professor transmite em sala de aula.

O material foi desenvolvido com base em livros tradicionais de *Circuitos Elétricos*, e mostra as leis e técnicas básicas de análise de circuitos elétricos alimentados por fontes de corrente e/ou tensão constantes. Uma vez que trata-se de uma análise em regime permanente, são abordados somente circuitos resistivos. Futuramente pretende-se desenvolver uma apostila abordando circuitos alimentados por fontes senoidais em regime permanente e neste material serão abordados circuitos constituídos por resistores, indutores e capacitores.

Esta é a primeira versão da apostila e, apesar de ter sido amplamente revisada, não está isenta de erros, sendo que toda sugestão e/ou correção será bem recebida e irá colaborar para o aperfeiçoamento do material.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Vamos definir um circuito elétrico como sendo uma interconexão de componentes elétricos onde circulam cargas elétricas.

Para entender o conceito de carga elétrica, vamos recorrer à teoria atômica clássica em que um átomo é constituído de um núcleo, carregado positivamente (cargas positivas), e de elétrons que orbitam ao seu redor e são carregados negativamente (cargas negativas). De acordo com a teoria atômica, sempre que uma carga elétrica se movimenta há a liberação ou absorção de energia pela mesma. A carga elétrica é medida em coulombs (C), sendo que a carga de um elétron corresponde a $1{,}602 \times 10^{-19}$ C.

Na análise de circuitos elétricos, iremos considerar sempre as carga elétricas negativas. Ao movimento de tais cargas ao longo do circuito elétrico, dá-se o nome de corrente elétrica, que matematicamente é definida como sendo:

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt} \tag{1.1}$$

Na equação 1.1 i(t) é a corrente elétrica e q(t) é a carga elétrica.

A unidade de corrente elétrica é o ampère, sendo que 1 A corresponde a 1 coulomb por segundo (1 C/s).

A corrente elétrica é classificada de acordo com seu sentido. Dá-se o nome de corrente contínua (*direct current* - dc) à corrente que possui um único sentido e, à corrente cujo sentido varia ao longo do tempo dá-se o nome de corrente alternada (*alternating current* - ac). Como exemplo de corrente contínua, podemos citar a corrente em que o valor e o sentido não variam em função do tempo e, como exemplo de corrente alternada cita-se a corrente senoidal, cuja amplitude e direção em função do tempo são descritas por meio de uma função senoidal. As Figuras. 1.1 e 1.2 mostram, respectivamente uma corrente contínua constante e uma corrente alternada senoidal.

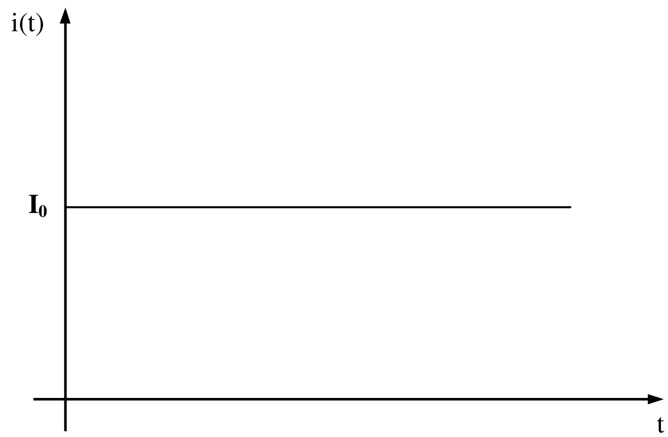


Fig. 1.1 - Corrente contínua de valor constante

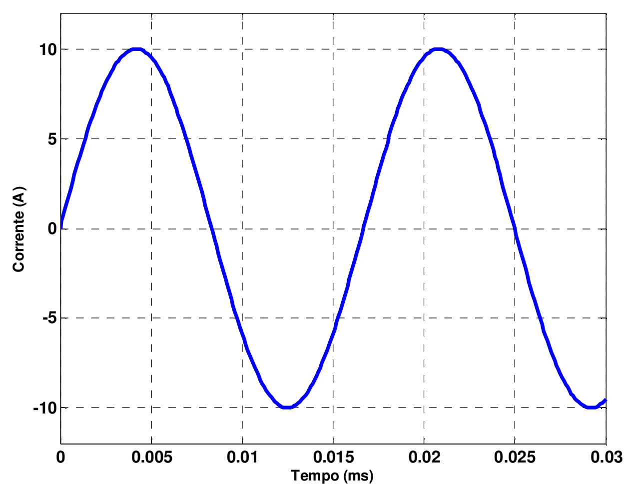


Fig. 1.2 - Corrente alternada com forma de onda senoidal

Na Figura 1.1 verifica-se que a corrente é contínua em função do tempo, devido ao fato da mesma não mudar de sentido, e é constante. Já na Figura 1.2 observa-se que a corrente é alternada, pois o sentido da mesma varia em função do tempo, e é descrita por uma função senoidal.

Para que ocorra o movimento das cargas elétricas entre dois pontos de um circuito, é necessário que exista uma diferença de potencial elétrico entre estes dois pontos (também denominada força eletromotriz, diferença de potencial ou tensão). Esta diferença de potencial é providenciada pelas fontes de tensão. A unidade da tensão é o volt (V) e equivale ao trabalho que deve ser realizado para mover 1 C entre dois pontos afastados 1 m um do outro.

As Figuras 1.3 e 1.4 mostram, esquematicamente, o processo de transferência de energia que pode ocorrer entre uma fonte de tensão e os demais componentes de um circuito elétrico.

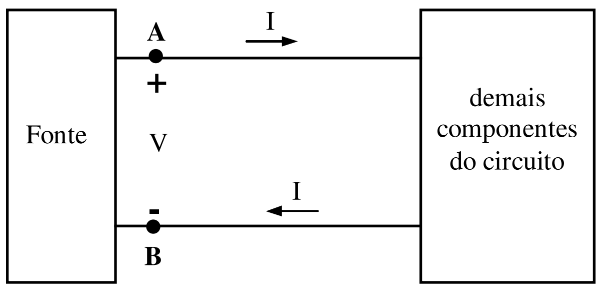


Fig. 1.3 - Fonte de tensão fornecendo energia para os demais componentes do circuito

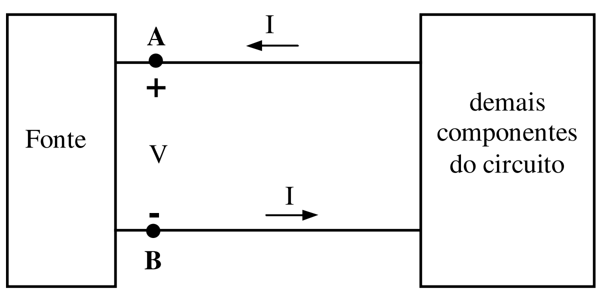


Fig. 1.4 - Fonte de tensão recebendo energia dos demais componentes do circuito

Nas Figs. 1.3 e 1.4 a variável V representa a diferença de potencial entre os pontos A e B. Nestas figuras os sinais "+" e "-" indicam os pontos de maior e de menor potencial respectivamente. Observa-se que quando a corrente "sai" do ponto positivo e "entra" no ponto negativo, a fonte de tensão fornece energia para o restante do circuito. Por outro lado, quando a corrente "sai" do ponto negativo e "entra" no ponto positivo, a fonte de tensão recebe energia do restante do circuito.

Capítulo 2

Bipolos

2.1 - Definição de bipolo

Dá-se o nome de bipolo a qualquer dispositivo que tenha dois terminais acessíveis e que pelo qual é possível circular uma corrente elétrica.

2.2 - Tipos de bipolos

Os bipolos podem ser classificados em bipolos ativos e passivos.

Os bipolos ativos são capazes de gerar energia elétrica. Como exemplo de bipolos ativos têm-se as fontes de tensão e as fontes de corrente.

Denomina-se bipolo passivo ao dispositivo de dois terminais que somente absorve energia elétrica. Como exemplo de bipolos passivos têm-se os resistores, os indutores e os capacitores.

2.2.1 - Fontes de tensão

Dá-se o nome de fonte de tensão ao bipolo ativo capaz de manter uma tensão específica entre seus terminais, independentemente da corrente que circula pelo mesmo. As Figs. 2.1 e 2.2 mostram os símbolos que representam uma fonte de tensão variável no tempo e uma fonte de tensão contínua, respectivamente.

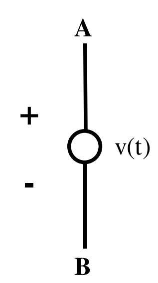


Fig. 2.1 - Representação de uma fonte de tensão v(t) variável no tempo

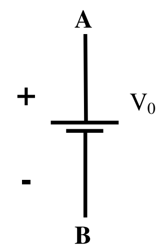


Fig. 2.2 - Representação de uma fonte de tensão V_0 constante

A Fig. 2.3 mostra uma fonte de tensão com tensão v(t) fornecendo energia para o restante do circuito.

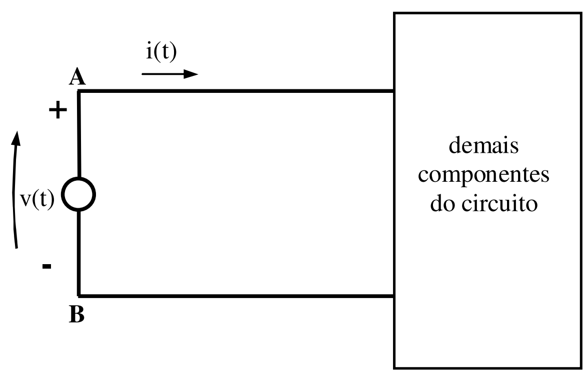


Fig. 2.3 - fonte de tensão fornecendo energia para o circuito

Observa-se na Fig. 2.3 que a seta que representa a tensão v(t) da fonte aponta para terminal positivo da mesma (terminal "+"). Uma vez que a corrente está "saindo" do terminal positivo da fonte, a mesma está fornecendo energia para o restante do circuito. Deste modo, conclui-se que quando uma fonte está fornecendo energia, a tensão e a corrente deste bipolo possuem a mesma direção.

A Fig. 2.4 mostra uma fonte de tensão com tensão v(t) recebendo energia do restante do circuito.

A Fig. 2.4 mostra que a corrente está "entrando" no terminal positivo da fonte, fazendo com que a mesma receba energia do circuito. Observa-se que quando a fonte está recebendo energia do restante do circuito, a tensão e a corrente deste bipolo possuem direções contrárias. Como exemplo de uma fonte de tensão que recebe energia elétrica do restante do circuito, pode ser citado o caso de uma bateria sendo recarregada.

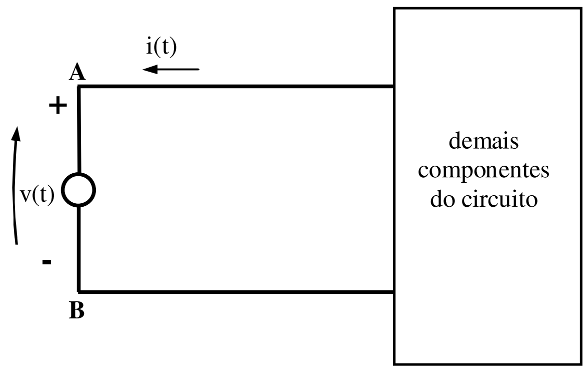


Fig. 2.4 - fonte de tensão recebendo energia do circuito

2.2.2 - Fontes de corrente

Dá-se o nome de fonte de corrente ao bipolo ativo capaz de manter uma corrente específica entre seus terminais, independentemente da tensão aplicada em seus terminais. As Figs. 2.5 e 2.6 mostram os símbolos que representam uma fonte de corrente variável no tempo e uma fonte de corrente constante, respectivamente.

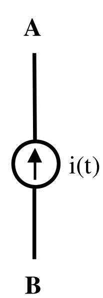


Fig. 2.5 - Representação de uma fonte de corrente i(t) variável no tempo

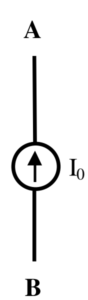


Fig. 2.6 - Representação de uma fonte de corrente I_0 de valor constante

A Fig. 2.7 mostra uma fonte de corrente i(t) fornecendo energia para o restante do circuito.

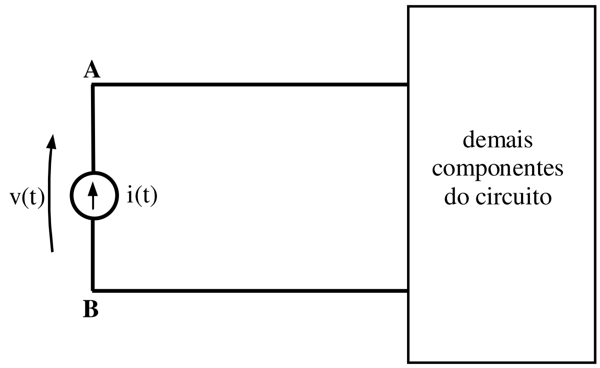


Fig. 2.7 - fonte de corrente fornecendo energia para o circuito

Observa-se na Fig. 2.7 que a corrente i(t) da fonte de corrente e a tensão v(t) sobre esta fonte possuem a mesma direção estando a fonte, deste modo, fornecendo energia para o restante do circuito.

A Fig. 2.8 mostra uma fonte de corrente i(t) recebendo energia para o restante do circuito.

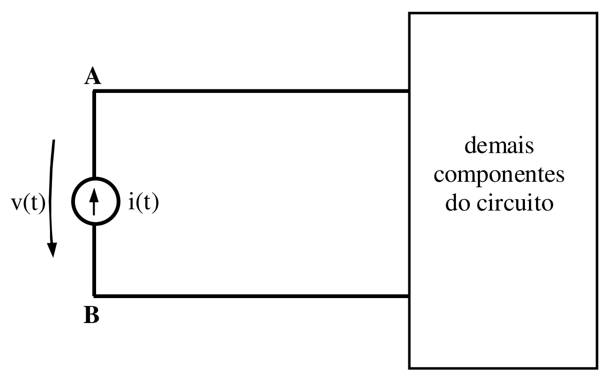


Fig. 2.8- fonte de corrente recebendo energia do circuito

Observa-se na Fig. 2.8 que a corrente i(t) da fonte de corrente e a tensão v(t) sobre esta fonte possuem direções contrárias estando a fonte, deste modo, recebendo energia do restante do circuito.

Assim, é possível concluir que um bipolo ativo estará fornecendo energia se a corrente e a tensão do mesmo tiverem a mesma direção. Caso a corrente e a tensão neste tipo de bipolo tenham direções opostas, o mesmo estará recebendo energia do restante do circuito.

2.2.3 - Resistores

Um resistor é um bipolo passivo em que a energia elétrica absorvida pelo mesmo é convertida em calor. A unidade utilizada para quantificar a resistência de um resistor é o Ω (ohm). A Fig. 2.9 mostra o símbolo utilizado para representar um resistor cuja resistência é R.

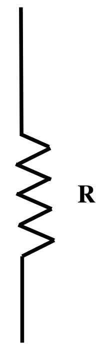


Fig. 2.9 - Representação de um resistor R

Quando um resistor de resistência R é submetido a uma tensão v(t), o mesmo é percorrido por uma corrente i(t) e a energia elétrica absorvida por este bipolo é dissipada na forma de calor. A Fig. 2.10 mostra um resistor R, submetido a uma tensão v(t) e percorrido por uma corrente i(t).

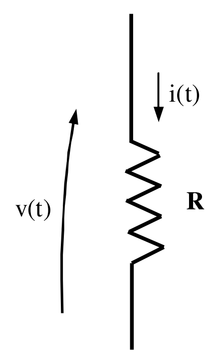


Fig. 2.10 - Representação de um resistor R submetido a uma tensão v(t) e percorrido por uma corrente i(t)

A Fig. 2. 10 mostra que a tensão v(t) e a corrente i(t) em um resistor possuem direções contrárias.

2.2.3 - Indutores

Um indutor é um bipolo passivo em que a energia elétrica absorvida pelo mesmo é armazenada sob a forma de um campo magnético. A unidade utilizada para quantificar a indutância de um indutor é o henry (H). A Fig. 2.11 mostra o símbolo utilizado para representar um indutor cuja indutância é L.

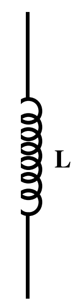


Fig. 2.11 - Representação de um indutor L

Quando um indutor de indutância L é submetido a uma tensão v(t), o mesmo é percorrido por uma corrente i(t) e a energia elétrica absorvida por este dispositivo é armazenada na forma de um campo magnético. A Fig. 2.12 mostra um indutor L, submetido a uma tensão v(t) e percorrido por uma corrente i(t).

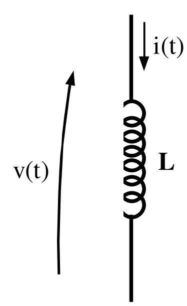


Fig. 2.12 - Representação de um indutor L submetido a uma tensão v(t) e percorrido por uma corrente i(t)

A Fig. 2. 12 mostra que a tensão v(t) e a corrente i(t) em um indutor possuem direções contrárias.

2.2.4 - Capacitores

Um capacitor é um bipolo passivo em que a energia elétrica absorvida pelo mesmo é armazenada no mesmo sob a forma de um campo elétrico. A unidade utilizada para quantificar a capacitância de um capacitor é o farad (F). A Fig. 2.13 mostra o símbolo utilizado para representar um capacitor cuja capacitância é C.

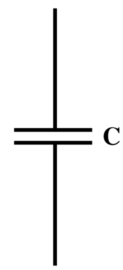


Fig. 2.13 - Representação de um capacitor C

Quando um capacitor de capacitância C é submetido a uma tensão v(t), o mesmo é percorrido por uma corrente i(t) e a energia elétrica absorvida por este componente é armazenada na forma de um campo elétrico. A Fig. 2.14 mostra um capacitor de capacitância C, submetido a uma tensão v(t) e percorrido por uma corrente i(t).

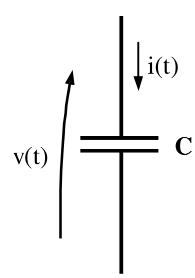


Fig. 2.14 - Representação de um capacitor C submetido a uma tensão v(t) e percorrido por uma corrente i(t)

A Fig. 2. 14 mostra que a tensão v(t) e a corrente i(t) em um capacitor possuem direções contrárias.

Verifica-se que em qualquer bipolo passivo a tensão e a corrente sempre possuem direções contrárias e que tais componentes sempre absorvem energia elétrica e esta energia é dissipada na forma de calor (no caso de resistores) ou é armazenada em um campo elétrico ou magnético (no caso de capacitores e indutores, respectivamente).

Capítulo 3

Lei de Ohm

3.1 - Introdução

A lei de Ohm estabelece a relação que existe entre a tensão e a corrente em um resistor. Esta lei, juntamente com as leis de Kirchhof, permite calcular a tensão e a corrente em qualquer parte de um circuito elétrico.

3.2 - Lei de Ohm

Considere um resistor R submetido a uma tensão v(t) e a uma corrente i(t). Sabe-se que por ser um elemento passivo, a corrente i(t) e a tensão v(t) no resistor R terão direções contrárias, conforme mostra a Fig. 3.1.

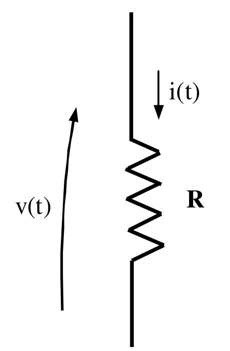


Fig. 3.1 - Resistor R submetido a uma tensão v(t) e percorrido por uma corrente i(t)

A lei de Ohm estabelece que a tensão em um resistor é diretamente proporcional á corrente que atravessa o mesmo, sendo que a constante de proporcionalidade entre a tensão e a corrente é a resistência do resistor. Deste modo, aplicando a lei de Ohm no resistor R mostrado na Fig. 3.1, é possível escrever:

$$v(t) = R\,i(t) \tag{3.1}$$

Em (3.1) v(t) e i(t) são a tensão e a corrente, respectivamente, no resistor mostrado na Fig. 3.1 e R é a resistência do resistor expressa em ohms.

Utilizando somente a lei de Ohm é possível calcular a corrente e/ou a tensão nos bipolos de circuitos constituídos por uma única fonte (de tensão ou de corrente) e por um resistor, conforme será mostrado em seguida.

Exemplo 3.1) Uma fonte de tensão contínua com tensão V_F = 12 V é conectada em um resistor de 10 Ω, conforme mostra a Fig. 3.2. Determine a tensão e a corrente no resistor.

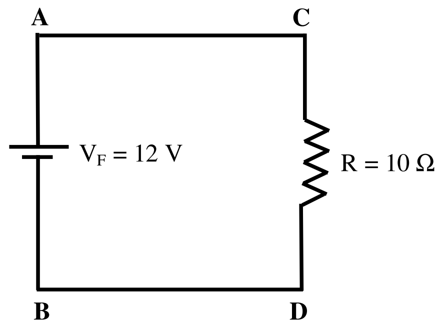


Fig. 3.2 - Fonte de tensão V_F alimentando um Resistor R

Inicialmente será indicada a direção da tensão V_F da fonte, conforme mostrado na Fig. 3.3.

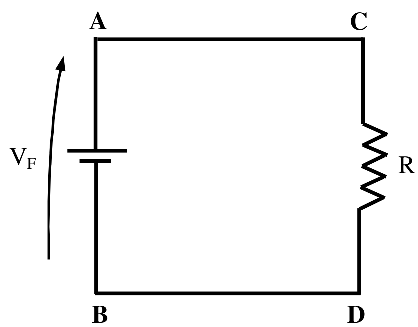


Fig. 3.3 - Direção da tensão V_F no circuito

Verifica-se no circuito mostrado na Fig. 3.3 que entre os pontos A e C não existe nenhum bipolo, sendo que o mesmo ocorre entre os pontos B e D. Deste modo, os pontos A e C são, do ponto de vista elétrico, coincidentes. O mesmo ocorre para os pontos B e D. Deste modo, o circuito mostrado na Fig. 3.3 pode ser desenhado conforme mostra a Fig. 3.4.

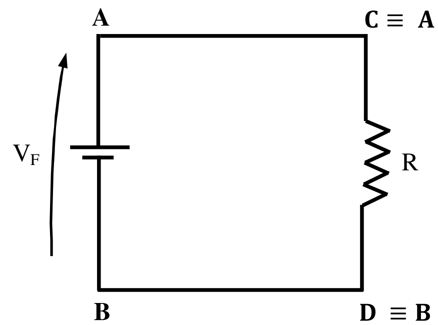


Fig. 3.4 - Indicação dos pontos coincidentes no circuito

Sabendo que a tensão entre os pontos A e B é V_F, conclui-se que o resistor R também está submetido à tensão $\mathbf{V_F = 12\ V}$ conforme mostra a Fig. 3.5.

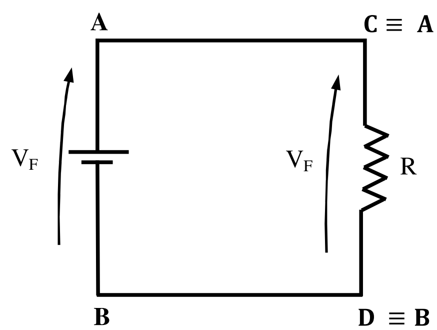


Fig. 3.5 - Identificação da tensão no resistor R

O circuito possui somente dois bipolos sendo um ativo (a fonte de tensão) e o outro passivo (o resistor R). Assim, toda a energia consumida pelo resistor deve ser fornecida pela fonte de tensão. Sabendo que para que um bipolo ativo forneça energia a tensão e a corrente devem ter a mesma direção, conclui-se que a corrente deve percorrer o circuito no sentido A-C-D-B.

Uma outra maneira para determinar a direção da corrente no circuito é partir da condição de que em um resistor a corrente e a tensão devem ter sempre direções opostas. Deste modo verifica-se que a corrente no resistor deve ir do ponto C para o ponto D. Novamente conclui-se a corrente faz o percurso A-C-D-B no circuito.

A Fig. 3.6 mostra a corrente I no circuito.

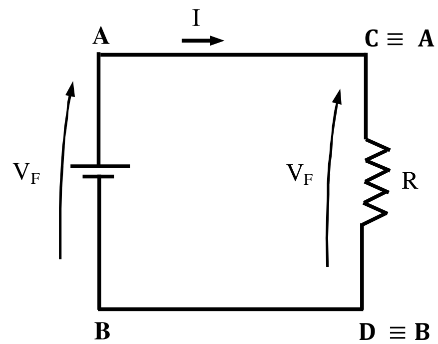


Fig. 3.6 - Corrente I no circuito

A Fig. 3.6 mostra que o resistor R está submetido a uma tensão V_F e é percorrido por uma corrente I. Com base na lei de Ohm, é possível escrever:

$$V_F = R\,I \tag{3.2}$$

A partir de (3.2) obtém-se:

$$I = \frac{V_F}{R} \tag{3.3}$$

Sabendo que a tensão V_F é igual a 12 V e que a resistência do resistor R é 10 Ω, conclui-se que a corrente no resistor R é **I = 1,2 A**.

Observe que não basta encontrar o valor de uma corrente e/ou de uma tensão em uma determinada parte de um circuito. É necessário também indicar a direção destas grandezas. Neste exemplo, as direções da corrente e da tensão no resistor estão indicadas na Fig. 3.6.

Exemplo 3.2) Uma fonte de corrente contínua I = 5 A é conectada em um resistor de 10 Ω, conforme mostra a Fig. 3.7. Determine a tensão e a corrente no resistor e a tensão na fonte.

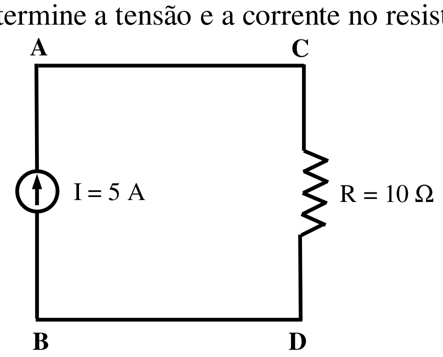


Fig. 3.7 - Fonte de corrente I alimentando um Resistor R

A presença da fonte de corrente, no circuito mostrado na Fig. 3.7, define o valor e a direção da corrente que percorre este circuito. Tal corrente terá o valor de 5 A e percorrerá o circuito no sentido A-C-D-B. Sabe-se também que a corrente e a tensão em um resistor possuem direção contrárias. Deste modo, a tensão e a corrente no resistor R terão as direções mostradas na Fig. 3.8.

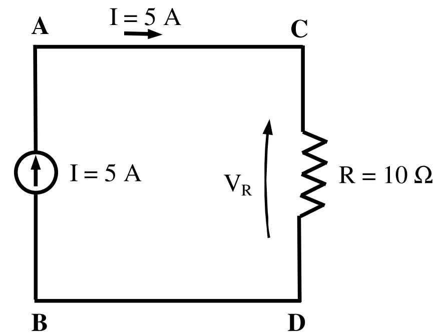


Fig. 3.8 - Corrente e tensão no resistor R

Com base na lei de Ohm, têm-se:

$$V_R = R\,I \tag{3.4}$$

Sabendo que I = 5 A e que R = 10 Ω, obtém-se que a tensão no resistor é $\mathbf{V_R = 50\ V}$.

Para determinar a tensão sobre a fonte de corrente, deve-se levar em conta que não existe nenhum bipolo conectado entre os pontos A e C e ente os pontos B e D. Sendo assim, a tensão entre os pontos A e B (tensão sobre a fonte de corrente) é a mesma tensão que está aplicada entre os pontos C e D (tensão sobre o resistor) que é $\mathbf{V_R = 50\ V}$, conforme mostra a Fig. 3.9.

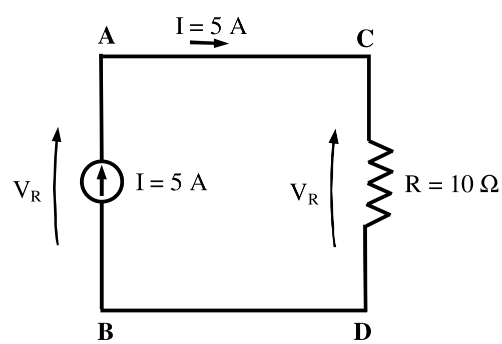


Fig. 3.9 - Corrente e tensões no circuito

Exercício 3.1) Uma fonte de tensão contínua com tensão V_F = 12 V é conectada em um resistor de 2 Ω, conforme mostra a Fig. 3.10. Determine a tensão e a corrente no resistor.

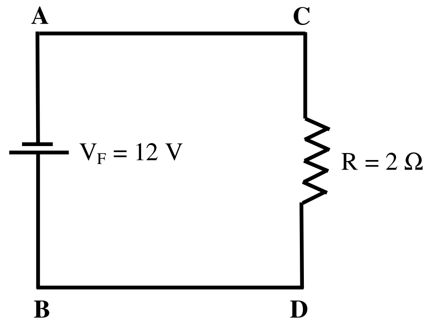


Fig. 3.10

Exercício 3.2) Sabendo que a corrente I no circuito mostrado na Fig. 3.11 é 2 A, determine a tensão da fonte V_F e a tensão no resistor R.

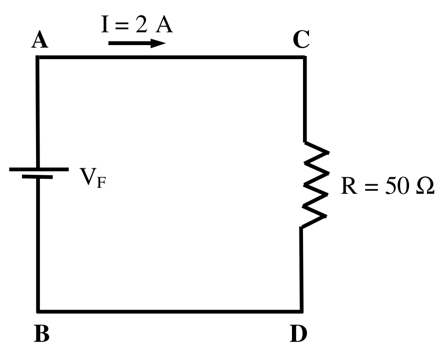


Fig. 3.11

Exercício 3.3) No circuito mostrado na Fig. 3.12 determine o valor do resistor R e a tensão aplicada sobre o mesmo.

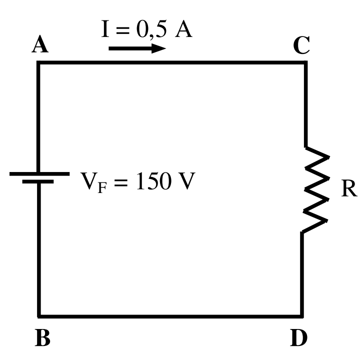


Fig. 3.12

Exercício 3.4) No circuito mostrado na Fig. 3.13 o resistor R é alimentado por uma fonte de corrente I. sabendo que a tensão V_R é 100 V, determine a valor da corrente fornecida pela fonte de corrente e a direção da mesma.

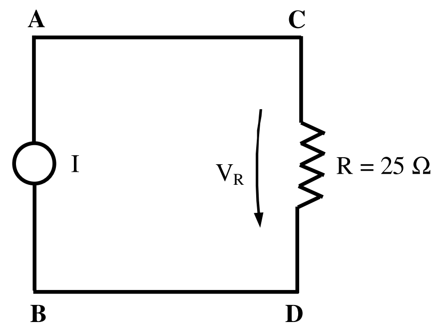


Fig. 3.13

Exercício 3.5) Determine a corrente no circuito mostrado na Fig. 3.14, considerando os seguintes valores para o resistor R: 2 Ω, 5 Ω, 10 Ω e 20 Ω

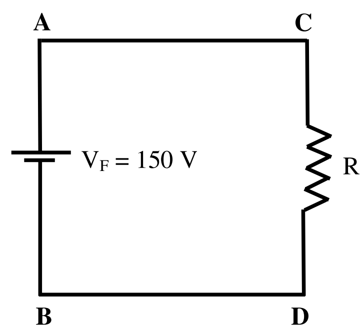


Fig. 3.14

Exercício 3.6) No circuito mostrado na Fig. 3.15, determine a tensão no resistor R considerando os seguintes valores para o resistor R: 2 Ω, 5 Ω, 10 Ω e 20 Ω

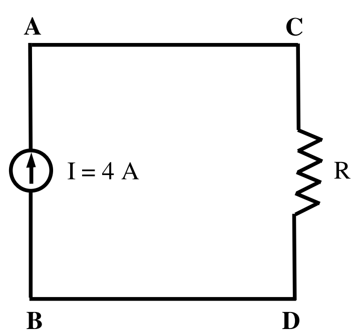


Fig. 3.15

Capítulo 4

Potência Elétrica

4.1 - Introdução

Nesta aula será mostrado o conceito de potência elétrica fornecida/absorvida por um bipolo genérico. Este conceito genérico de potência elétrica será utilizado na dedução de equações específicas que permitam calcular a potência elétrica absorvida por resistores.

4.2 - Potência elétrica

Sabe-se que o termo potência é definido como sendo a quantidade de trabalho (conversão de energia de uma forma para outra) realizado em um determinado intervalo de tempo, que corresponde à taxa de variação de energia em relação ao tempo. Aplicando a definição de potência para o caso de bipolos, pode-se dizer que potência elétrica é a quantidade de energia elétrica que é convertida para uma outra forma de energia em um determinado intervalo de tempo ou, de maneira mais formal, a taxa de variação de energia elétrica em um bipolo em relação ao tempo.

A unidade de potência é o Joule/segundo (J/s) que, em se tratando de potência elétrica, é denominada Watt (W).

Considere dois bipolos genéricos submetidos a uma tensão v(t) e percorridos por uma corrente i(t) conforme mostram as figuras 4.1a e 4.1b.

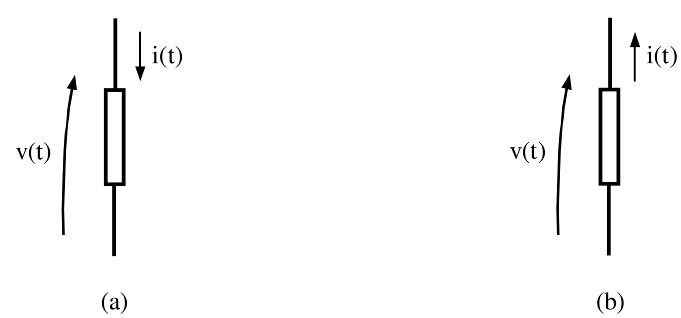


Fig. 4.1 - Bipolos com suas respectivas tensões e correntes

Na Fig. 4.1a, o bipolo está absorvendo energia elétrica enquanto que na Fig. 4.1b o bipolo está fornecendo energia elétrica. Consequentemente, a partir da definição de potência, conclui-se que na Fig. 4.1a o bipolo absorve potência elétrica e que na Fig. 4.1b o bipolo fornece potência elétrica.

É possível provar que a potência elétrica absorvida ou fornecida por um bipolo, submetido a uma tensão v(t) e percorrido por uma corrente i(t), é dada pelo produto da tensão pela corrente no mesmo. Assim, a potência elétrica absorvida pelo bipolo mostrado na Fig. 4.1a e fornecida pelo bipolo mostrado na Fig. 4.1b é escrita como sendo:

$$p(t) = v(t)\, i(t) \qquad (4.1)$$

A energia elétrica absorvida pelo bipolo mostrado na Fig. 4.1a, em um intervalo de tempo Δt é escrita como sendo:

$$E_{el} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt \quad , \quad \text{sendo } \Delta t = t_2 - t_1 \qquad (4.2)$$

A energia elétrica E_{el} será armazenada na forma de energia elétrica no bipolo mostrado na Fig. 4.1a, caso este bipolo seja uma fonte de tensão ou de corrente. Se este bipolo for um bipolo passivo, a energia elétrica E_{el} será convertida para outra forma de energia. Caso o bipolo seja um motor, a energia elétrica será convertida em movimento (energia mecânica); Caso o bipolo seja um resistor (aquecedor/chuveiro) a energia elétrica será convertida em energia térmica e será dissipada na forma de calor.

No caso do bipolo mostrado na Fig. 4.1b, como trata-se de um bipolo ativo, o mesmo está forncendo a energia elétrica E_{el}.

4.3 - Potência elétrica absorvida por resistores

A Fig. 4.2 mostra uma fonte de tensão v(t) genérica alimentando uma resistência R.

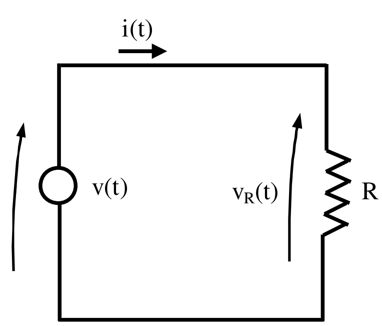


Fig. 4.2 - Fonte v(t) alimentando um resistor R

No circuito mostrado na Fig. 4.2 i(t) é a corrente no circuito e $v_R(t)$ é a tensão sobre a resistência R. Observe que as tensões v(t) e $v_R(t)$ são idênticas.

A potência fornecida pela fonte de tensão é dada por:

$$p_F(t) = v_F(t)\, i(t) \tag{4.3}$$

A potência absorvida pelo resistor R é escrita como sendo:

$$p_R(t) = v_R(t)\, i(t) \tag{4.4}$$

Aplicando a lei de Ohm no circuito mostrado na Fig. 4.2 obtém-se:

$$v_R(t) = R\, i(t) \tag{4.5}$$

A partir de (4.5) têm-se:

$$i(t) = \frac{v_{R\,(t)}}{R} \tag{4.6}$$

Substituindo (4.5) em (4.4) verifica-se que a potência absorvida pelo resistor R pode ser escrita como sendo:

$$p_R(t) = R\ i(t)^2 \tag{4.7}$$

A partir da substituição de (4.6) em (4.4) verifica-se que a potência absorvida pelo resistor R também pode ser expressa por:

$$p_r(t) = \frac{v_R(t)^2}{R} \tag{4.8}$$

Com base em (4.4), (4.7) e (4.8) verifica-se que a potência absorvida por um resistor pode ser escrita de três maneiras distintas. Esta potência pode ser calculada a partir da definição de potência elétrica (equação (4.4)), a partir da corrente que circula na resistência R (equação (4.7)) ou a partir da tensão aplicada na resistência R (equação (4.8)). Estas três equações resultam no mesmo valor para a potência absorvida pelo resistor.

Exemplo 4.1) Determine, no circuito mostrado na Fig. 4.3, a corrente no circuito, a potência fornecida pela fonte e a potência dissipada no resistor R.

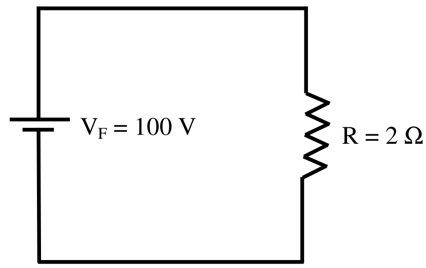


Fig. 4.3 - Circuito referente ao exemplo 4.1

Inicialmente serão indicadas as tensões e a corrente nos bipolos do circuito.

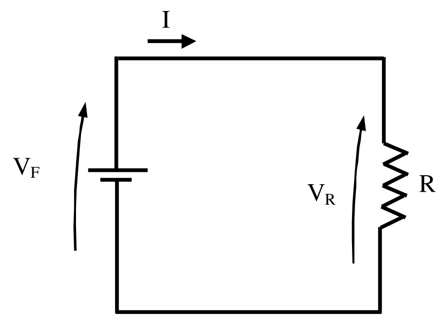


Fig. 4.4 - Circuito referente ao exemplo 4.1: indicação das tensões e da corrente

A tensão sobre o resistor R é igual à tensão da fonte. Portanto, a tensão sobre o resistor R é 100 V.

Aplicando a lei de Ohm no circuito mostrado na Fig. 4.4 verifica-se que a corrente I é igual a 50 A.

Utilizando o conceito de potência elétrica (equação 4.1), verifica-se que a fonte de tensão fornece 5000 W (5 kW) para o circuito e que o resistor R absorve uma potência igual a 5 kW (este valor pode ser obtido a partir de 4.4, 4.7 ou 4.8) que irá ser dissipada na forma de calor.

Exemplo 4.2) Determine, no circuito mostrado na Fig. 4.5, as tensões na fonte de corrente e no resistor R, a potência fornecida pela fonte e a potência dissipada no resistor R.

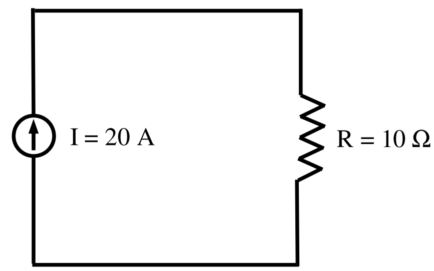


Fig. 4.5 - Circuito referente ao exemplo 4.2

Indicação do sentido das tensões e da corrente no circuito.

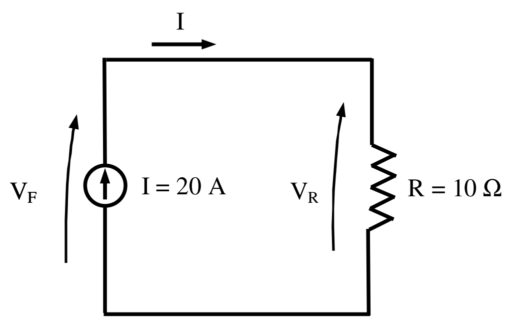


Fig. 4.6 - Circuito referente ao exemplo 4.2: indicação das tensões e da corrente

A corrente no circuito é I = 20 A, pois é esta a corrente que a fonte de corrente fornece.

A tensão V_R no resistor R pode ser encontrada aplicando a lei de Ohm, sendo que esta tensão terá um valor $V_R = 200$ V. A tensão na fonte de corrente é igual à tensão no resistor R. Deste modo, a fonte de corrente estará submetida a uma tensão $V_F = 200$ V.

A potência fornecida pela fonte é determinada por meio da definição de potência elétrica (equação 4.1) e possui valor igual a 4000 W (4 kW). A potência absorvida pelo resistor R pode ser calculada a partir das equações 4.4 , 4.7 ou 4.8. A utilização de qualquer uma destas equações resultará em uma potência igual a 4 kW que será absorvida pelo resistor e será dissipada na forma de calor.

Capítulo 5

Leis de Kirchhoff

5.1 - Introdução

Os circuitos que foram analisados até o presente momento eram constituídos de uma fonte (de tensão ou de corrente) e de um resistor. A partir desta aula, serão mostradas as duas leis de Kirchhoff que, juntamente com a lei de Ohm, permitirá a análise de circuitos genéricos constituídos por quaisquer quantidade de bipolos.

A aplicação das leis de kirchhoff exige o conhecimento dos conceitos de *nó*, *malha* e *ramo*.

5.2 -Definição de *nó*, malha e *ramo*

Um nó é definido como sendo um ponto de conexão de dois ou mais bipolos. Define-se ramo como sendo qualquer porção de circuito situada entre dois nós. Uma malha é definida como sendo qualquer conjunto de ramos que forme um caminho fechado.

Como ilustração, considere o circuito mostrado na Fig. 5.1.

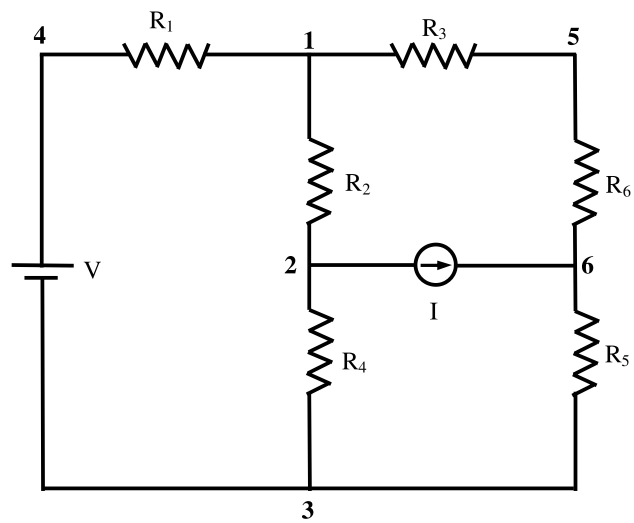


Fig. 5.1 - Circuito com mais de uma fonte e com mais de um resistor

No circuito mostrado na Fig. 5.1 é possível verificar que existem 6 nós (nós 1, 2, 3, 4, 5 e 6). O nó 1 faz a conexão dos resistores R_1, R_2 e R_4; no nó 2 estão conectados os resistores R_2 e R_3 e a fonte de corrente I; o nó 3 faz a conexão dos resistores R_3 e R_6 e a fonte de tensão

V; no nó 4 estão conectados o resistor R_1 e a fonte de tensão V; o nó 5 faz a conexão dos resistores R_4 e R_5 enquanto que no nó 6 estão conectados a fonte de corrente I e os resistores R_5 e R_6.

Verifica-se na Fig. 5.1 a existência de 8 ramos que são os trechos do circuito compreendidos entre os nós 1 - 2, 1 - 4, 1 - 5, 2 - 3, 2 - 6, 3 - 4, 3 - 6 e 5 - 6.

Com base na definição de malha, verifica-se a existência das malhas 1-2-3-4-1, 1-2-6-5-1, 1-2-6-3-4-1, 1-4-3-6-5-1, etc...

5.2 - Primeira lei de Kirchhoff

A primeira lei de Kirchhoff é também conhecida como lei de Kirchhoff para as correntes ou lei dos nós.

Considere o nó mostrado na Fig. 5.2 e as respectivas correntes nos ramos conectados a este nó.

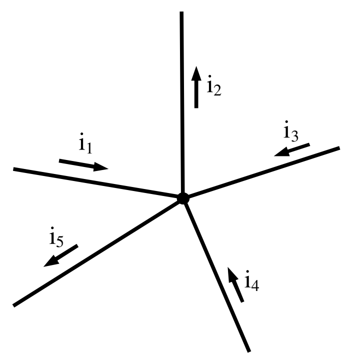


Fig. 5.2 - Nó com os respectivos ramos

Na Fig. 5.2 diz-se que as correntes i_1, i_3 e i_4 estão "entrando" no nó e que as correntes i_2 e i_5 estão "saindo" do nó.

A lei de Kirchhoff para as correntes (ou lei dos nós) garante que *a soma algébrica das correntes "entrando" em um nó é nula*. Deste modo, aplicando a lei dos nós no nó mostrado na Fig. 5.2 é possível escrever:

$$i_1 + (-i_2) + i_3 + i_4 + (-i_5) = 0 \qquad (5.1)$$

A partir de (5.1) obtém-se:

$$i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5 \qquad (5.2)$$

Em (5.2) mostra-se que a primeira lei de Kirchhoff garante que a soma das correntes que entram em um nó é igual á soma das correntes que saem do mesmo.

Exemplo 5.1) Considere os nós 1, 2, ...n, com as respectivas correntes, que possuem como particularidade o fato de conectarem somente dois bipolos, conforme mostra a Fig. 5.3.Aplique a primeira lei de Kirchhoff nestes nó.

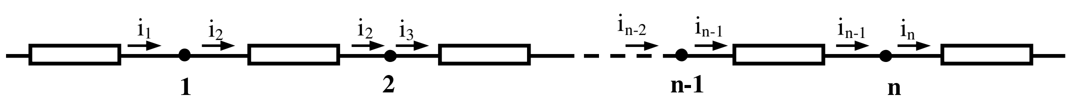


Fig. 5.3 - Circuito com bipolos conectados em série

Diz-se que os bipolos mostrados na Fig. 5.2 estão conectados em série.

Aplicando a primeira lei de Kirchhoff nos nós mostrados na Fig. 5.3 obtém-se:

$$i_1 = i_2 = i \tag{5.3}$$

$$i_2 = i_3 \quad \Rightarrow \quad i_3 = i \tag{5.4}$$

$$\vdots$$

$$i_{n-2} = i_{n-1} \quad \Rightarrow \quad i_{n-1} = i \tag{5.5}$$

$$i_{n-1} = i_n \quad \Rightarrow \quad i_n = i \tag{5.6}$$

A partir de (5.3)-(5.6) é possível afirmar que bipolos conectados em série são percorridos pela mesma corrente.

5.3 - Segunda lei de Kirchhoff

A segunda lei de Kirchhoff é também conhecida como lei de Kirchhoff para as tensões ou lei das malhas.

Considere a malha constituída por bipolos genéricos, e as respectivas tensões em cada um dos bipolos, mostrada na Fig. 5.4.

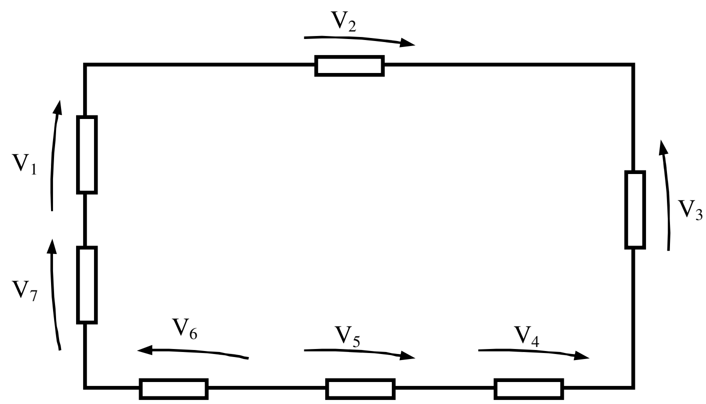


Fig. 5.4 - Malha com seus bipolos e as respectivas tensões

A segunda lei de Kirchhoff estabelece que a soma das tensões ao longo de malha qualquer (no sentido horário ou anti-horário) é nula. Assim, para a malha mostrada na Fig. 5.4, é possível escrever:

$$V_1 + V_2 + (-V_3) + (-V_4) + (-V_5) + V_6 + V_7 = 0 \qquad (5.7)$$

Exemplo 5.2) No circuito mostrado na Fig. 5.5 determine a corrente e a tensão nos bipolos, bem como a potência fornecida ou consumida pelos mesmos.

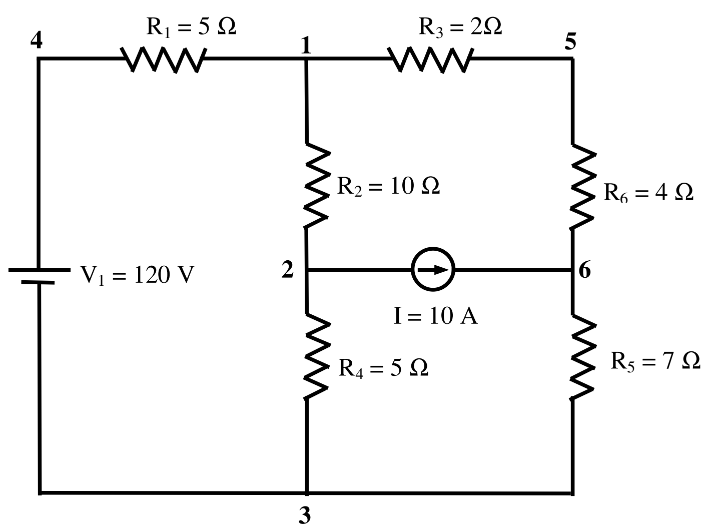


Fig. 5.5 - Circuito do exemplo 5.2

Inicialmente deve-se indicar, no circuito, todas as tensões e as correntes já conhecidas. Neste exemplo, são conhecidas apenas a tensão V_1 da fonte de tensão e a corrente I da fonte de corrente. A Fig. 5.6 mostra o circuito com a tensão V_1 e a corrente I "entrando" no nó 6.

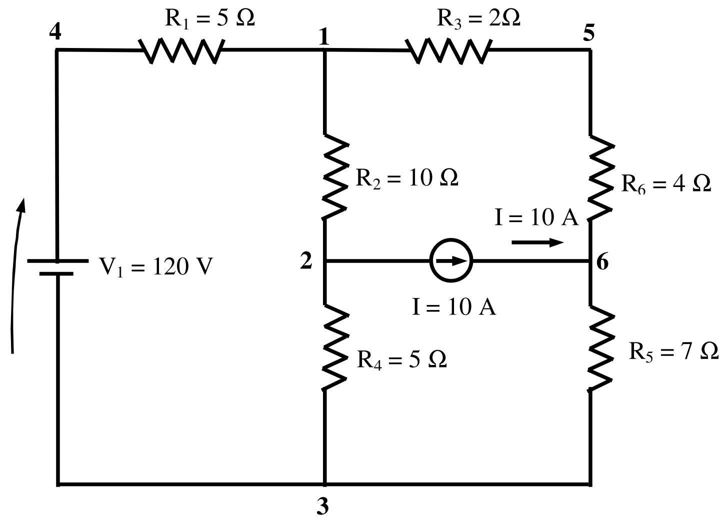


Fig. 5.6 - Circuito com a tensão V_1 e com a corrente I

Em seguida todos os nós com 3 ou mais bipolos conectados devem ser identificados. No circuito mostrado na Fig. 5.5 verifica-se que os nós 1, 2, 3 e 6 atendem a estas condições.

Considerando que o circuito em análise possui *n* nós com 3 ou mais bipolos conectados, deve-se escolher *n-1* nós. Neste exemplo serão escolhidos os nós 1, 2 e 6. A próxima etapa consiste em "chutar" uma direção para as correntes que percorrem os bipolos conectados nestes *n-1* nós. A Fig. 5.7 mostra as correntes nos nós 1, 2 e 6.

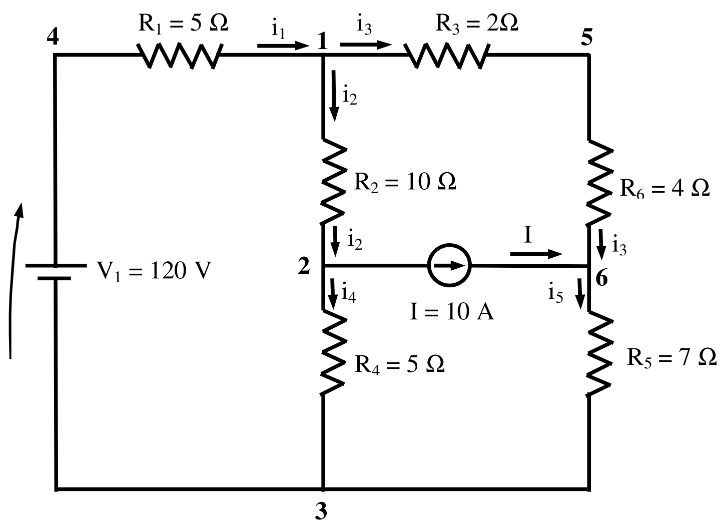


Fig. 5.6 - "Chute" das correntes nos *n-1* nós com 3 ou mais bipolos conectados

Uma vez escolhidos os sentidos das correntes que "entram" e que "saem" dos nós com 3 ou mais bipolos conectados, aplica-se a primeira lei de Kirchhoff nos mesmos.

Aplicando a primeira lei de Kirchhoff no nó 1, é possível escrever:

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{5.8}$$

Aplicando a primeira lei de Kirchhoff no nó 2, têm-se:

$$i_2 = i_4 + I \tag{5.9}$$

Analogamente, para o nó 6, obtém-se:

$$I = i_3 + i_5 \tag{5.10}$$

Para aplicar a segunda lei de Kirchhoff no circuito, inicialmente deve-se indicar todas as tensões desconhecidas. O sentido destas tensões devem ser coerentes com o sentido das correntes, conforme mostra a Fig. 5.7.

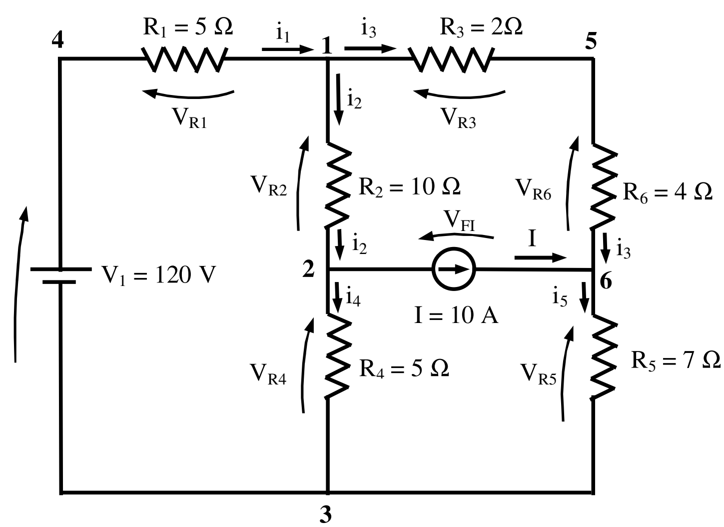


Fig. 5.7 - Tensões no circuito

As direções das tensões nos resistores foram escolhidas levando em conta que tais elementos são bipolos passivos em que a corrente e a tensão possuem direções opostas. A direção da tensão V_{FI} na fonte de corrente deve ser escolhida levando em conta que a fonte é um bipolo ativo que pode fornecer ou receber potência. Uma vez que ainda não se sabe se tal bipolo fornece ou recebe potência, deve se "chutar" a direção desta tensão.

Sabe-se que as tensões e correntes nos resistores do circuito mostrado na Fig. 5.7 obedecem à lei de Ohm, sendo que uma vez obtidas as correntes i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5 é possível obter as tensões em todos os resistores. Deste modo, pode-se considerar como incógnita as correntes i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5 e a tensão V_{FI} na fonte de corrente, resultando em um total de 6 incógnitas. Deve-se portanto encontrar 6 equações que relacionam estas incógnitas para que seja possível determinar os valores das mesmas. As 3 primeiras equações são as equações (5.8), (5.9) e (5.10) obtidas a partir da primeira lei de kirchhoff e as 3 últimas equações que faltam para montar o sistema podem ser obtidas a partir da aplicação da segunda lei de Kirchhoff. Assim, deve-se escolher 3 malhas no circuito mostrado na Fig. 5.7 e aplicar a segunda lei de Kirchhoff nas mesmas. Serão escolhidas as malhas constituídas pelos ramos compreendidos entre os nós 1-5-6-2, 2-6-3 e 1-2-3-4. As malhas escolhidas devem resultar, após a aplicação da lei de Kirchhoff para as tensões, em 3 equações linearmente independente.

Aplicando a segunda lei de Kirchhoff na malha 1-5-6-2 obtêm-se:

$$V_{R2} - V_{R3} - V_{R6} + V_{FI} = 0 \tag{5.11}$$

Se a segunda lei de Kirchhoff for aplicada na malha 2-6-3 obtêm-se:

$$V_{R4} - V_{FI} - V_{R5} = 0 \tag{5.12}$$

Analogamente, para a malha 1-2-3-4 obtêm-se:

$$V_1 - V_{R1} - V_{R2} - V_{R4} = 0 \tag{5.13}$$

Escrevendo as equações V_{R2}, V_{R3} e V_{R6} em função das correntes que circulam nos resistores R_2, R_3 e R_6 (utilizando a lei de Ohm) e em seguida substituindo os resultados em (5.11) obtêm-se:

$$R_2\, i_2 - (R_3 + R_6)\, i_3 + V_{FI} = 0 \tag{5.14}$$

Escrevendo as equações V_{R4} e V_{R5} em função das correntes que circulam nos resistores R_5 e R_5 (utilizando a lei de Ohm) e em seguida substituindo os resultados em (5.12) obtêm-se:

$$R_4\, i_4 - V_{FI} - R_5\, i_5 = 0 \tag{5.15}$$

Utilizando o mesmo procedimento em (5.13) obtêm-se:

$$V_1 - R_1\, i_1 - R_2\, i_2 - R_4\, i_4 = 0 \tag{5.16}$$

As equações (5.8), (5.9), (5.10), (5.14), (5.15) e (5.16) constituem um sistema de 6 equações e 6 incógnitas sendo que as incógnitas são as correntes i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5 e a tensão V_{FI} na fonte de corrente. Manipulando as equações mencionadas anteriormente é possível escrever as mesmas da seguinte maneira:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \tag{5.17}$$
$$i_2 - i_4 = I \tag{5.18}$$
$$i_3 - i_5 = -I \tag{5.19}$$
$$R_2\, i_2 - (R_3 + R_6)\, i_3 + V_{FI} = 0 \tag{5.20}$$
$$R_4\, i_4 - R_5\, i_5 - V_{FI} = 0 \tag{5.21}$$
$$R_1\, i_1 + R_2\, i_2 + R_4\, i_4 = V_1 \tag{5.22}$$

Resolvendo o sistema anterior obtêm-se:

i_1 = 8,836 A

i_2 = 8,388 A

i_3 = 0,448 A

i_4 = **-1,612** A

i_5 = 10,448 A

V_{FI} = **-81,194** V

Os sinais negativos de i_4 e de V_{FI} indicam que as direções de i_4 e de V_{FI} foram "chutadas" erroneamente. Deste modo, deve-se inverter as direções destas grandezas, no circuito mostrado na Fig. 5.7, e inverter também o sinal das mesmas. Assim, as correntes i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5 e a tensão V_{FI} terão os seguintes valores:

i_1 = 8,836 A

i_2 = 8,388 A

i_3 = 0,448 A

i_4 = **1,612** A

i_5 = 10,448 A

V_{FI} = **81,194** V

A Fig. 5.8 mostra o circuito 5.2 com as direções de i_4 e de V_{FI} invertidas. Observe que uma vez que a direção de i_4 foi invertida, a direção da tensão no resistor R_4 também deve ser invertida no circuito.

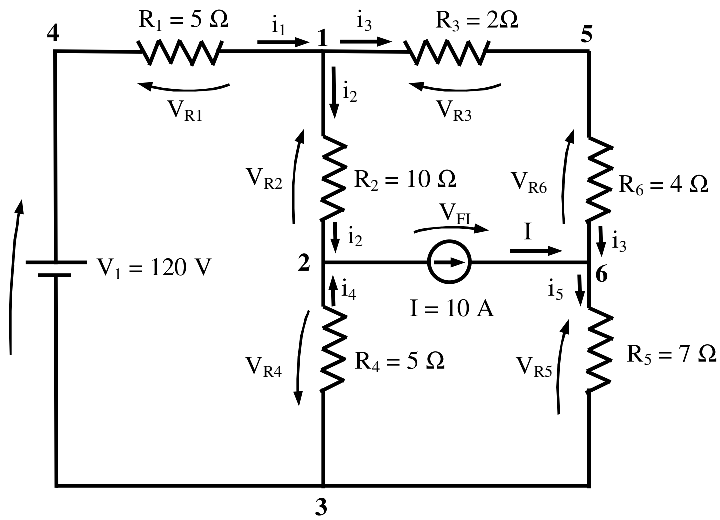


Fig. 5.8 - Tensões e corrente no circuito

Observe, no circuito mostrado na Fig. 5.8 que as duas fontes fornecem potência para o circuito, pois as tensões e correntes nas mesmas possuem a mesma direção. Esta potência, fornecida pelas duas fontes, é absorvida pelos resistores do circuito e convertida em calor.

As tensões nos resistores podem ser calculadas a partir da lei de Ohm, ou seja:

$$V_{R1} = R_1\ i_1 \Rightarrow V_{R1} = 44{,}179\ \text{V}$$

$$V_{R2} = R_2\ i_2 \Rightarrow V_{R2} = 83{,}881\ \text{V}$$

$$V_{R3} = R_3\ i_3 \Rightarrow V_{R3} = 0{,}896\ \text{V}$$

$$V_{R4} = R_4\ i_4 \Rightarrow V_{R4} = 8{,}060\ \text{V}$$

$$V_{R5} = R_5\ i_5 \Rightarrow V_{R5} = 73{,}134\ \text{V}$$

$$V_{R6} = R_6\ i_3 \Rightarrow V_{R6} = 1{,}791\ \text{V}$$

A potência fornecida ou absorvida por cada um dos bipolos é:

Fonte de tensão V_1	$P_{V1} = V_1\ i_1$	$\Rightarrow P_{V1} = 1060{,}3\ \text{W}$ ou $1{,}0603\ \text{kW}$	fornecida
Fonte de corrente I	$P_I = V_{FI}\ T$	$\Rightarrow P_I = 811{,}940\ \text{W}$	fornecida
Resistor R_1	$P_{R1} = V_{R1}\ i_1$	$\Rightarrow P_{R1} = 390{,}359\ \text{W}$	absorvida
Resistor R_2	$P_{R2} = V_{R2}\ i_2$	$\Rightarrow P_{R2} = 703{,}596\ \text{W}$	absorvida
Resistor R_3	$P_{R3} = V_{R3}\ i_3$	$\Rightarrow P_{R3} = 0{,}401\ \text{W}$	absorvida
Resistor R_4	$P_{R4} = V_{R4}\ i_4$	$\Rightarrow P_{R4} = 12{,}992\ \text{W}$	absorvida
Resistor R_5	$P_{R5} = V_{R5}\ i_5$	$\Rightarrow P_{R5} = 764{,}090\ \text{W}$	absorvida
Resistor R_6	$P_{R6} = V_{R6}\ i_3$	$\Rightarrow P_{R6} = 0{,}802\ \text{W}$	absorvida

Exercício 5.1) No circuito mostrado na Fig. 5.9 determine a corrente e a tensão nos bipolos, bem como a potência fornecida ou consumida pelos mesmos.

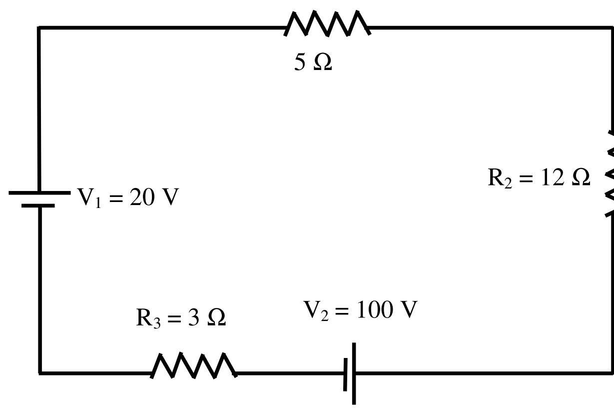


Fig. 5.9 - Circuito para o exercício 5.1

Exercício 5.2) No circuito mostrado na Fig. 5.10 determine a corrente e a tensão nos bipolos, bem como a potência fornecida ou consumida pelos mesmos.

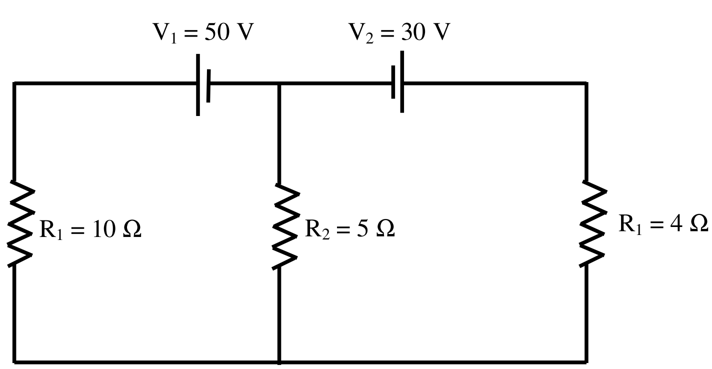


Fig. 5.10 - Circuito para o exercício 5.2

Exercício 5.3) No circuito mostrado na Fig. 5.11 determine a corrente e a tensão nos bipolos, bem como a potência fornecida ou consumida pelos mesmos.

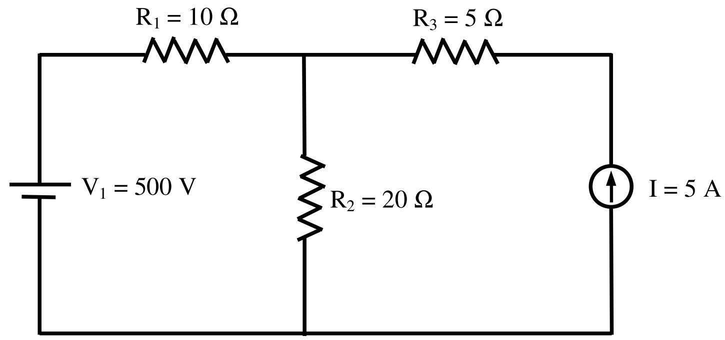


Fig. 5.11 - Circuito para o exercício 5.3

Exercício 5.4) No circuito mostrado na Fig. 5.12 sabe-se que a fonte de corrente fornece 500 W para o circuito. Determine o valor da tensão V_F da fonte de tensão bem como a polaridade da mesma. Verifique também se a fonte de tensão fornece ou absorve potência.

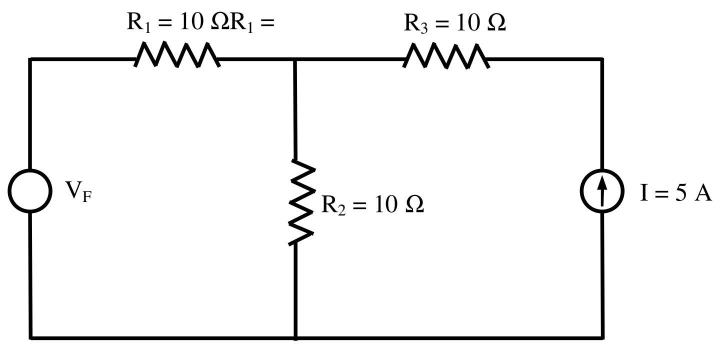


Fig. 5.12 - Circuito para o exercício 5.4

Exercício 5.5) No circuito mostrado na Fig. 5.13 determine a tensão e a polaridade da fonte de tensão V_F e verifique se os bipolos estão fornecendo ou recebendo potência.

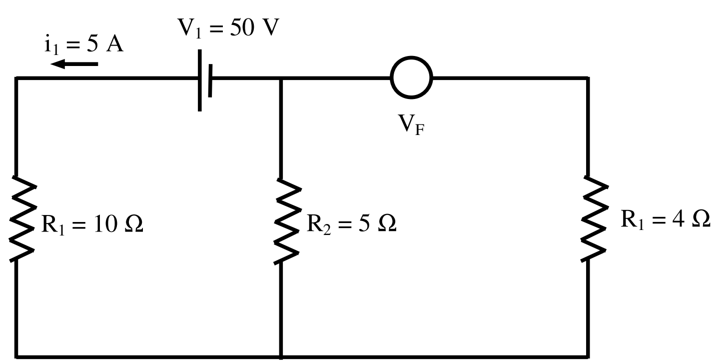


Fig. 5.13 - Circuito para o exercício 5.5

Capítulo 6

Associação de Resistores em Série e em Paralelo

6.1 - Introdução

Nesta aula será mostrado que uma associação de resistores pode ser substituído por um único resistor. Para que isto seja possível, serão mostrados os conceitos de resistores associados em série e de resistores associados em paralelo.

6.2 - Resistores associados em série

Considere o circuito mostrado na Fig. 6.1, em que uma fonte de tensão V alimenta n resistores.

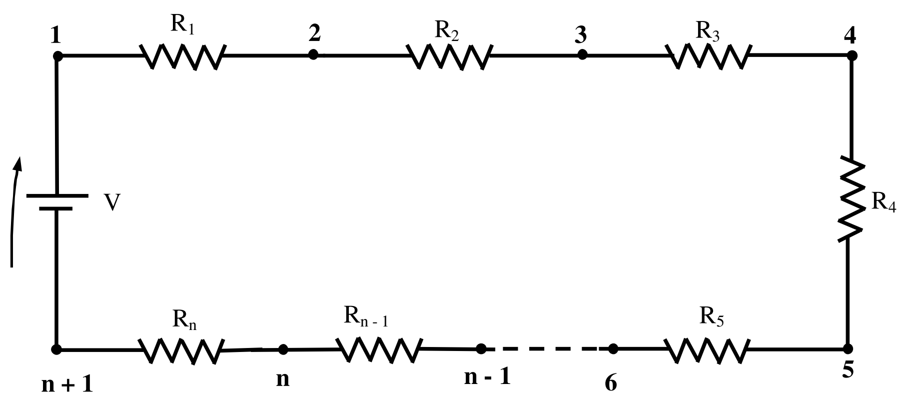


Fig. 6.1 - Circuito com n resistores conectados em série

Aplicando a lei dos nós (primeira lei de kirchhoff) no circuito mostrado na Fig. 6.1, é possível verificar que todos os elementos do circuito são percorridos pela mesma corrente i e cada resistor ficará submetido a uma tensão conforme mostra a Fig. 6.2.

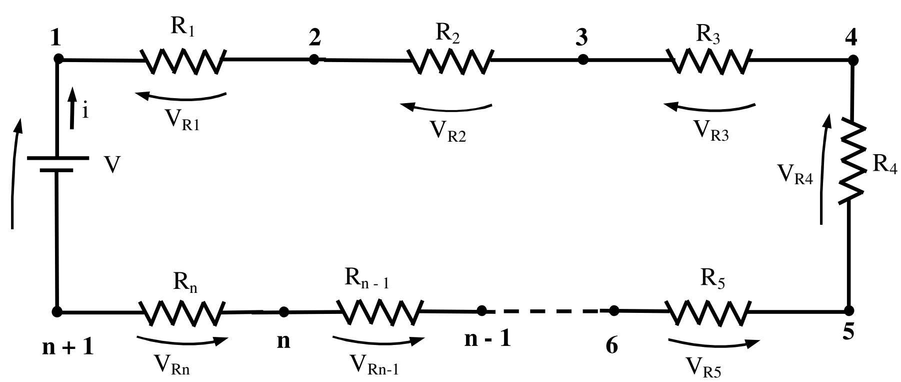


Fig. 6.2 - Corrente e tensões em um circuito com n resistores conectados em série

Aplicando a segunda lei de Kirchhoff no circuito mostrado na Fig. 6.2 obtém-se:

$$V - V_{R1} - V_{R2} - V_{R3} - V_{R4} - V_{R5} - \cdots - V_{Rn-1} - V_{Rn} = 0 \quad (6.1)$$

Aplicando a lei de Ohm em cada um dos resistores do circuito mostrado na Fig. 6.2, verifica-se que (6.1) pode ser escrita como sendo:

$$V - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + \cdots + R_{n-1} + R_n)i = 0 \quad (6.2)$$

A equação (6.2) pode ser escrita na forma:

$$V = R_{eq}\, i \quad (6.3)$$

sendo:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + \cdots + R_{n-1} + R_n \quad (6.4)$$

Portanto conclui-se que os n resistores do circuito mostrado na Fig. 6.1 podem ser substituídos por um único resistor R_{eq}. Diz-se que os resistores do circuito mostrado na Fig. 6.1 estão conectados em série. Observe que quando dois ou mais elementos estão conectados em série, tais elementos são percorridos pela mesma corrente.

O circuito mostrado na Fig. 6.1 pode ser substituído pelo circuito mostrado na Fig. 6.3.

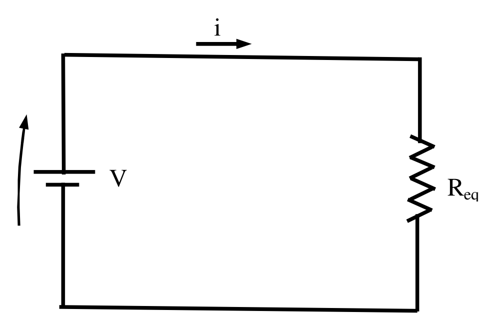


Fig. 6.3 - Circuito equivalente ao circuito da Fig. 6.1

O valor do resistor R_{eq} é obtido a partir de (6.4).

6.2 - Resistores associados em paralelo

A Fig. 6.4 mostra n resistores sendo alimentados por uma fonte de tensão V.

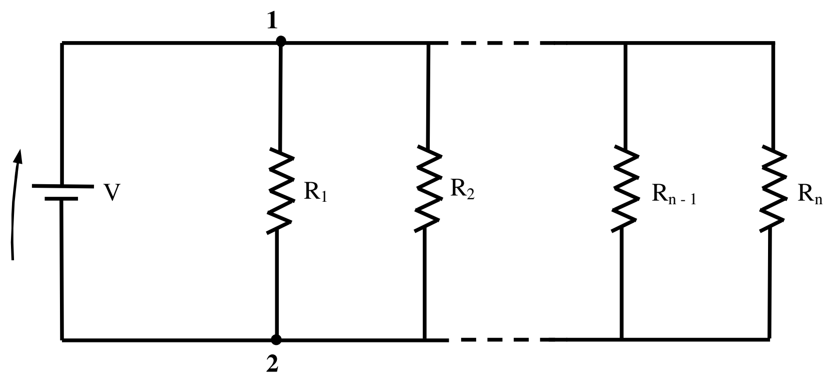


Fig. 6.4 - Circuito com n resistores conectados em paralelo

Aplicando a lei das malhas (segunda lei de Kirchhoff) no circuito mostrado na Fig. 6.4 verifica-se que todos os resistores estão submetidos à mesma tensão V e serão percorridos por correntes conforme mostra a Fig. 6.5.

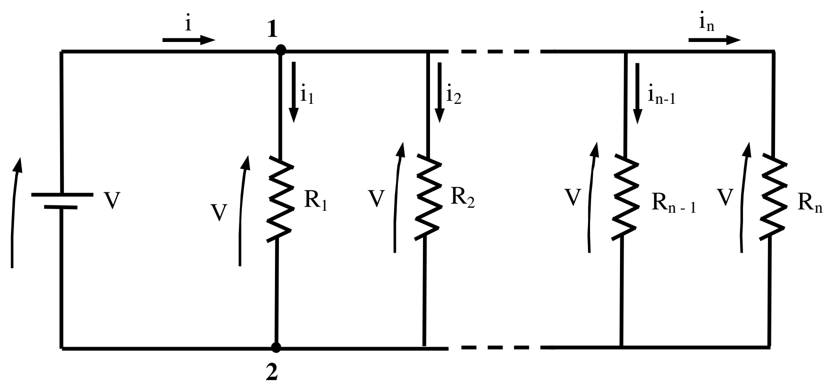


Fig. 6.5 - Correntes e tensões em um circuito com n resistores conectados em paralelo

Observa-se que o circuito mostrado na Fig. 6.5 possui somente dois nós. Aplicando a lei dos nós no nó 1 do circuito obtém-se:

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_{n-1} + i_n \tag{6.5}$$

Aplicando a lei de Ohm nos resistores do circuito mostrado na Fig. 6.5 verifica-se que a (6.5) pode ser escrita como sendo:

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \cdots + \frac{V}{R_{n-1}} + \frac{V}{R_n} \qquad (6.6)$$

A partir de (6.6) obtém-se:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_n} \qquad (6.7)$$

Portanto conclui-se que os n resistores do circuito mostrado na Fig. 6.4 pode ser substituído por um único resistor R_{eq}. Diz-se que os resistores do circuito mostrado na Fig. 6.4 estão conectados em paralelo. Observe que quando dois ou mais elementos estão conectados em paralelo, tais elementos estão submetidos à mesma tensão.

O circuito mostrado na Fig. 6.4 pode ser substituído pelo circuito mostrado na Fig. 6.6.

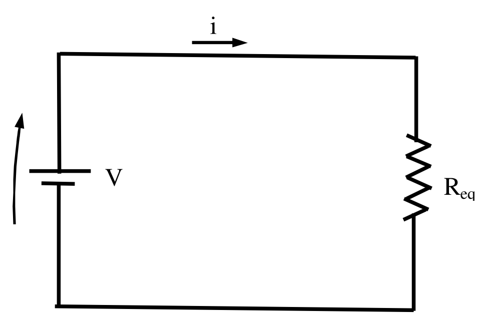


Fig. 6.6 - Circuito equivalente ao circuito da Fig. 6.4

O valor do resistor R_{eq} é obtido a partir de (6.7).

Exemplo 6.1) Determine o resistor equivalente à associação de resistores mostrada na Fig. 6.7, "visto" dos pontos A e B.

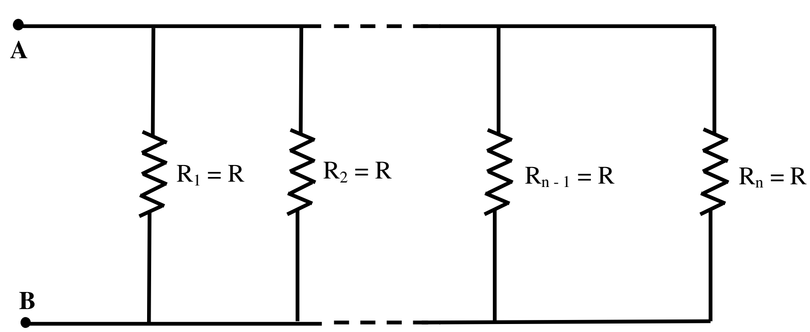


Fig. 6.7 - Associação em paralelo de n resistores idênticos iguais

os resistores mostrados na Fig. 6.7 estão conectados em paralelo. deste modo, o conjunto de resistores pode ser substituído por um único resistor R_{eq} cujo valor será dado por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_{n-1}} + \frac{1}{R_n} \tag{6.8}$$

No circuito mostrado na Fig. 6.7 verifica-se que todos os resistores são iguais e possuem a mesma resistência R. deste modo, (6.8) será escrita como sendo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{n}{R} \Leftrightarrow R_{eq} = \frac{R}{n} \tag{6.9}$$

Portanto, os resistores do circuito mostrado na Fig. 6.7 podem ser substituído por um único resistor de valor R/n, conforme mostra a Fig. 6.8.

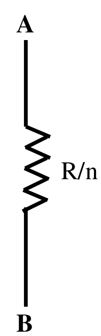


Fig. 6.8 - Resistor equivalente a n resistores iguais conectados em paralelo

Exemplo 6.2) Determine o resistor equivalente à associação de resistores mostrada na Fig. 6.9, "visto" dos pontos A e B.

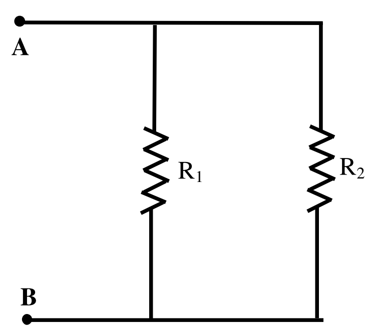


Fig. 6.9 - Associação de dois resistores em paralelo

O resistor equivalente à associação mostrada na Fig. 6.9 é dada por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{6.10}$$

Manipulando (6.10) obtém-se:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \tag{6.11}$$

Portanto, os resistores do circuito mostrado na Fig. 6.9 podem ser substituído por um único resistor conforme mostra a Fig. 6.10.

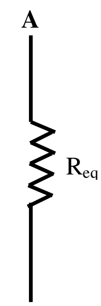


Fig. 6.10 - Resistor equivalente a dois resistores conectados em paralelo

O valor de R_{eq}, mostrado na Fig. 6.10 é calculado a partir de (6.11).

Exemplo 6.3) Determine o resistor equivalente à associação de resistores mostrada na Fig. 6.11, "visto" dos pontos A e B.

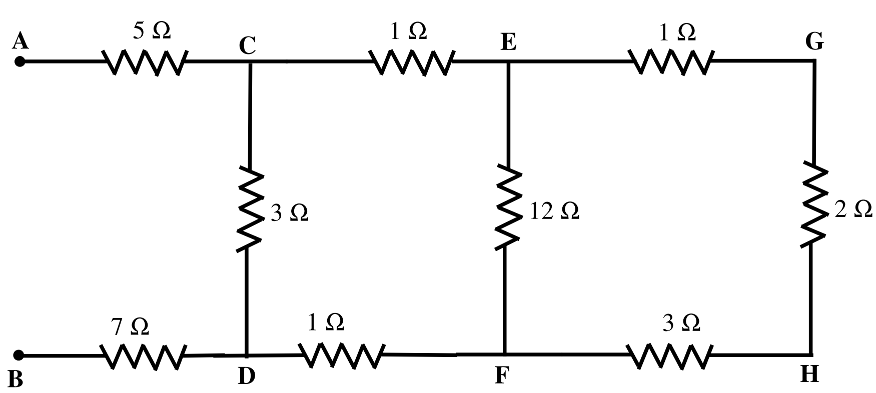


Fig. 6.11 - Circuito para o exemplo 6.3

Os resistores de 1 Ω, 2 Ω e de 3 Ω, indicados na Fig. 6.12, estão conectados em série e resultarão em um único resistor de 6 Ω, conectado entre os nós E e F, conforme mostrado na Fig. 6.13.

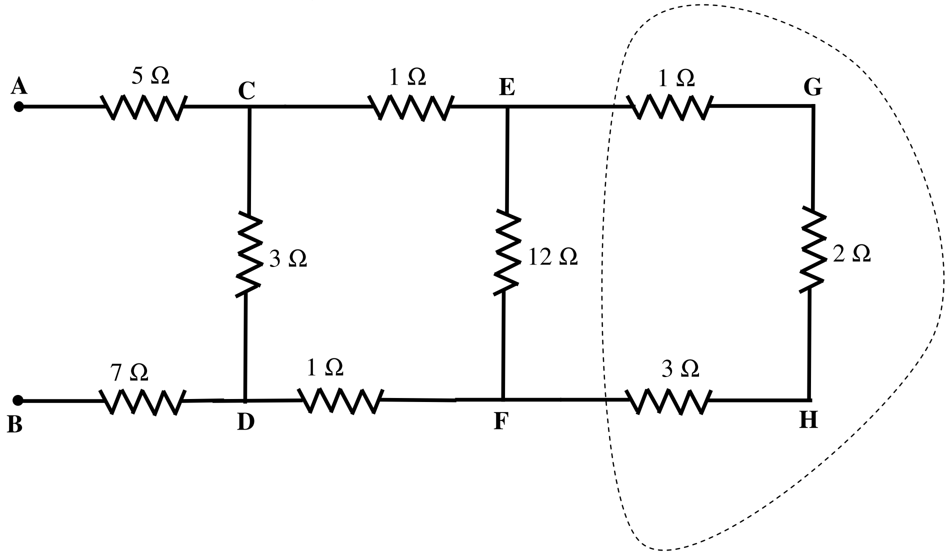


Fig. 6.12 - Resistores de 1 Ω, 2 Ω e de 3 Ω conectados em série

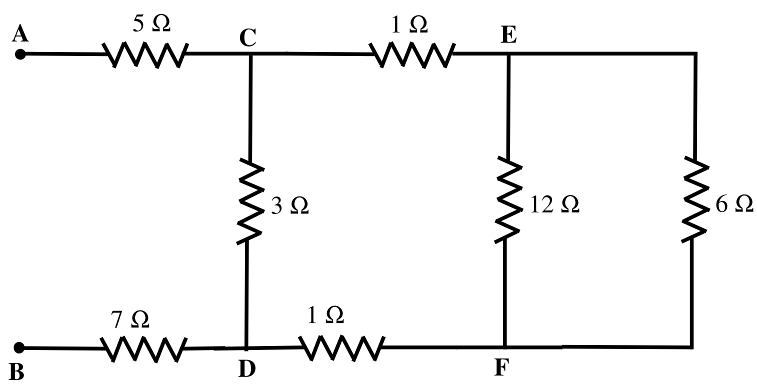


Fig. 6.13 - Circuito equivalente após a substituição dos resistores de 1 Ω, 2 Ω e de 3 Ω por um resistor equivalente de 6 Ω

Os resistores de 12 Ω e de 6 Ω, indicados na Fig. 6.14, estão conectados em paralelo e resultarão em um único resistor de 4 Ω conectado entre os nós E e F conforme mostra a Fig. 6.15.

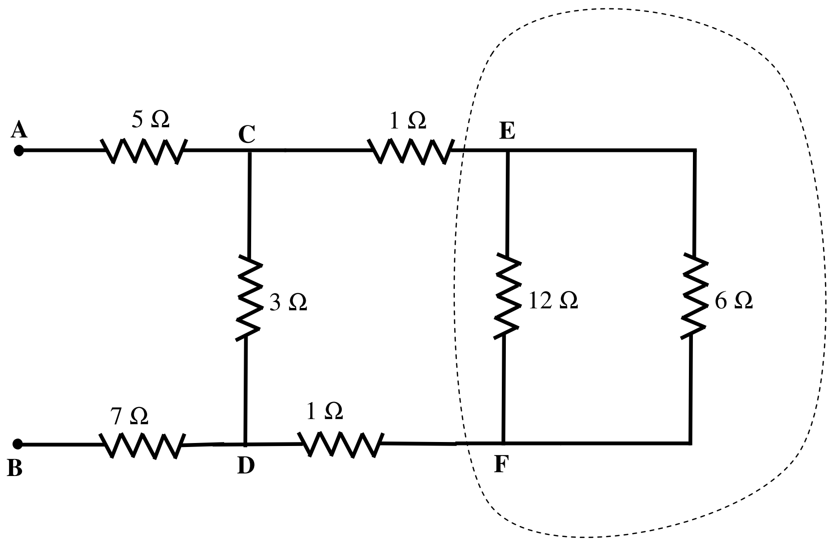


Fig. 6.14 - Resistores de 12 Ω e de 6 Ω conectados em paralelo

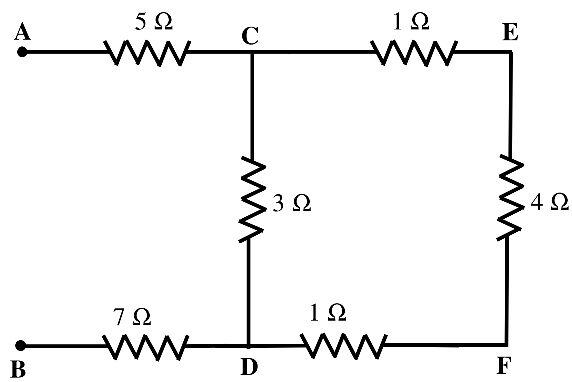


Fig. 6.15 - Circuito equivalente após a substituição dos resistores de 12 Ω e de 6 Ω por um resistor equivalente de 4 Ω

Os dois resistores de 1 Ω e o resistor de 4 Ω, indicados na Fig. 6.16, estão conectados em série e resultarão em um único resistor de 6 Ω conectado entre os nós C e D conforme mostra a Fig. 6.17.

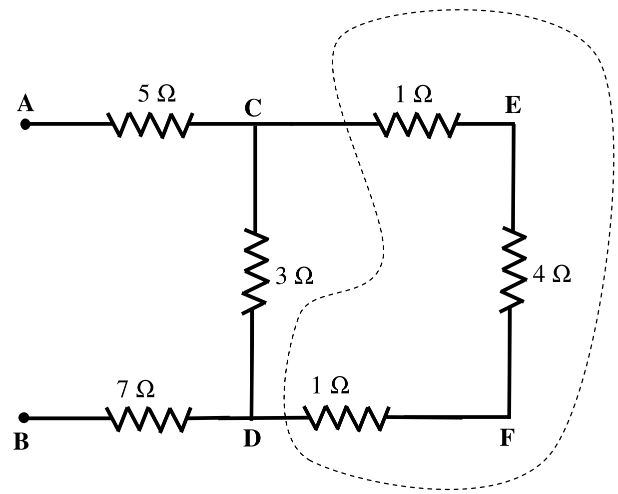


Fig. 6.16 - Resistores de 1 Ω e resistor de 4 Ω conectados em série

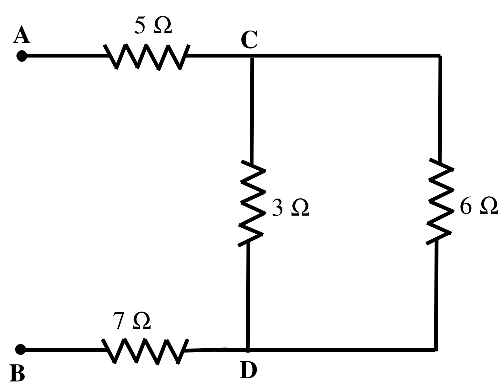


Fig. 6.17 - Circuito equivalente após a substituição dos resistores de 1 Ω e do resistor de 4 Ω por um resistor equivalente de 6 Ω

Os resistores de 3 Ω e de 6 Ω, indicados na Fig. 6.18, estão conectados em paralelo e resultarão em um único resistor de 2 Ω conectado entre os nós C e D conforme mostra a Fig. 6.19.

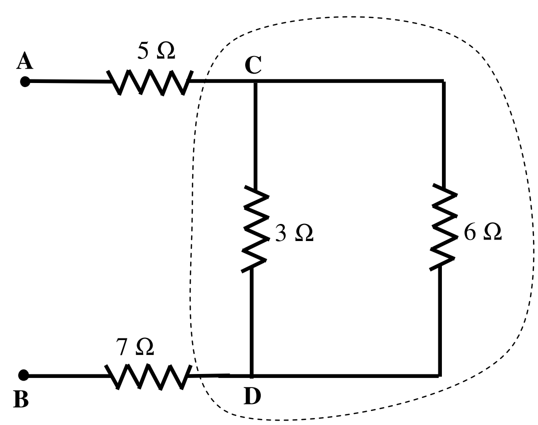


Fig. 6.18 - Resistores de 3 Ω e de 6 Ω conectados em paralelo

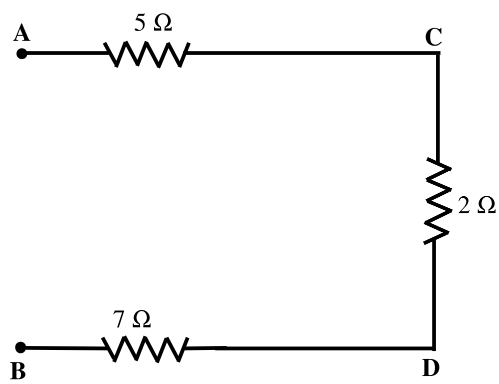


Fig. 6.19 - Circuito equivalente após a substituição dos resistores de 3 Ω e de 6 Ω por um resistor equivalente de 2 Ω

Os resistores de 5 Ω, 2 Ω e de 7 Ω, mostrados na Fig. 6.19, estão conectados em série e resultarão em um único resistor de 14 Ω conectado entre os nós A e B conforme mostra a Fig. 6.20. Portanto o resistor equivalente à associação de resistores mostrada na Fig. 6.11 é um resistor de 14 Ω.

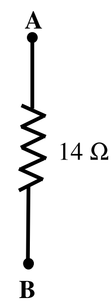


Fig. 6.20 - Resistor equivalente à associação de resistores mostrada na Fig. 6.11

Exercício 6.1) Determine o resistor equivalente à associação de resistores mostrada na Fig. 6.21, "visto" dos pontos A e B.

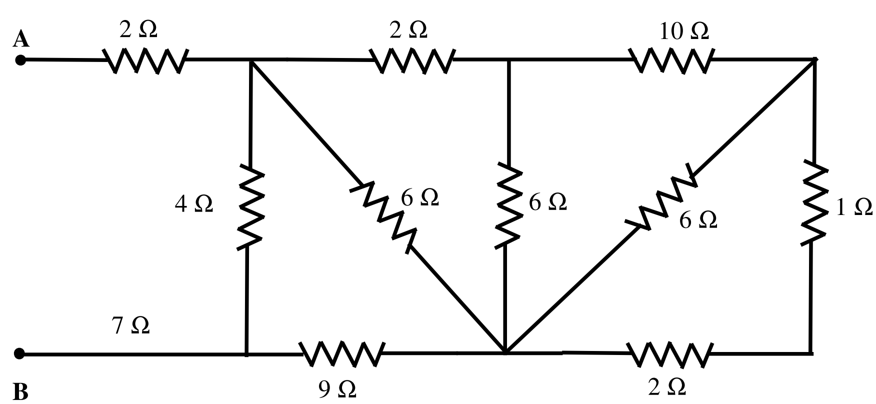


Fig. 6.21 - Circuito para o exercício 6.1

Exercício 6.2) Determine o resistor equivalente à associação de resistores mostrada na Fig. 6.22, "visto" dos pontos A e B.

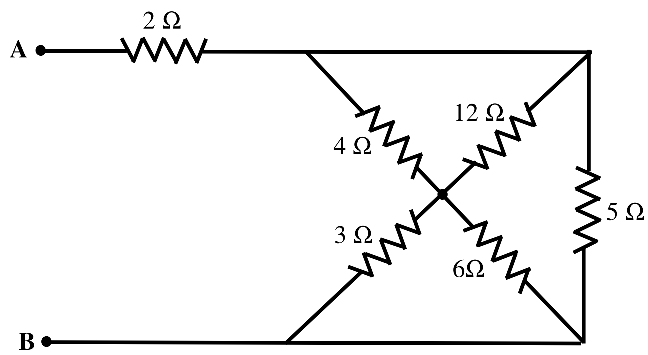


Fig. 6.22 - Circuito para o exercício 6.2

Capítulo 7

Análise de Malhas e Análise Nodal

7.1 - Introdução

Já foi verificado em aulas anteriores que as duas leis de Kirchhof, juntamente com a lei de Ohm, permite obter as correntes e tensões em quaisquer circuitos. Nesta aula serão estudadas duas novas técnicas de análise de circuitos que são a análise de malhas e a análise nodal. Estas duas técnicas nada mais são do que as aplicações das leis de Kirchhoff de maneira sistematizada.

7.2 - Análise de malhas

Esta técnica de análise de circuitos somente pode ser aplicada em circuitos que sejam alimentados somente por fontes de tensão. Para entender a técnica, considere o circuito mostrado na Fig. 7.1

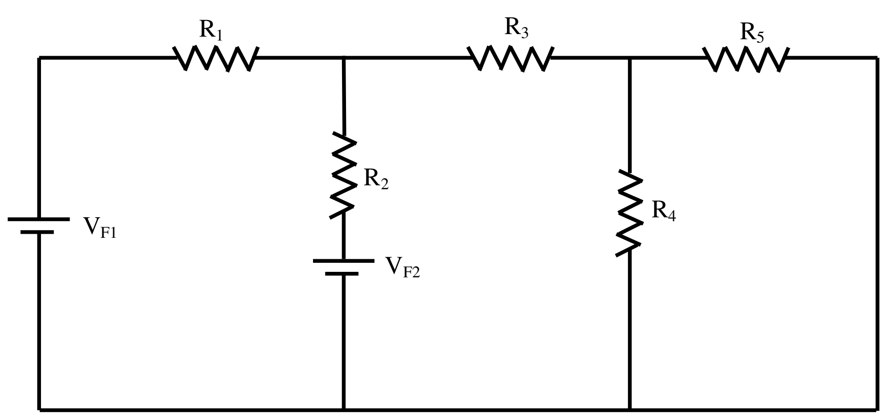


Fig. 7.1 - Circuito para explicação da análise de malhas

Inicialmente será dado nome às malhas do circuito mostrado na Fig. 7.1. A Fig. 7.2 mostra o circuito com as malhas já identificadas.

Será definida uma grandeza denominada *corrente de malha*. A corrente de malha é uma corrente fictícia que percorre cada uma das malhas sempre no sentido horário. Na Fig. 7.3 são mostradas as correntes de malha e na Fig. 7.4 são mostradas as tensões nos resistores em função das correntes de malha.

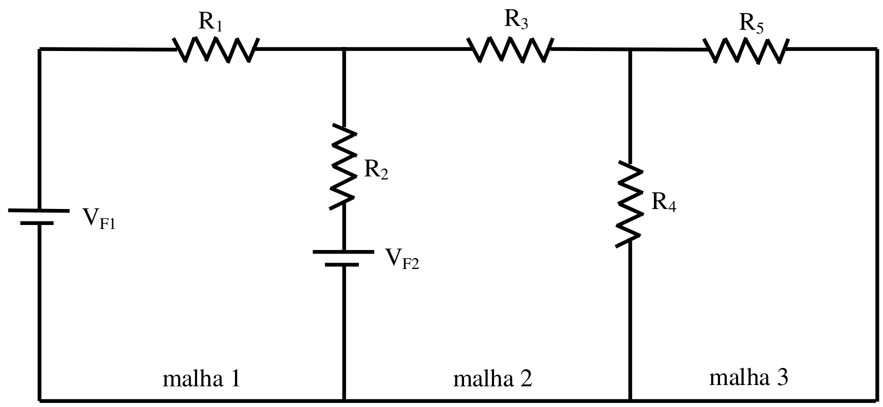


Fig. 7.2 - Identificação das malhas

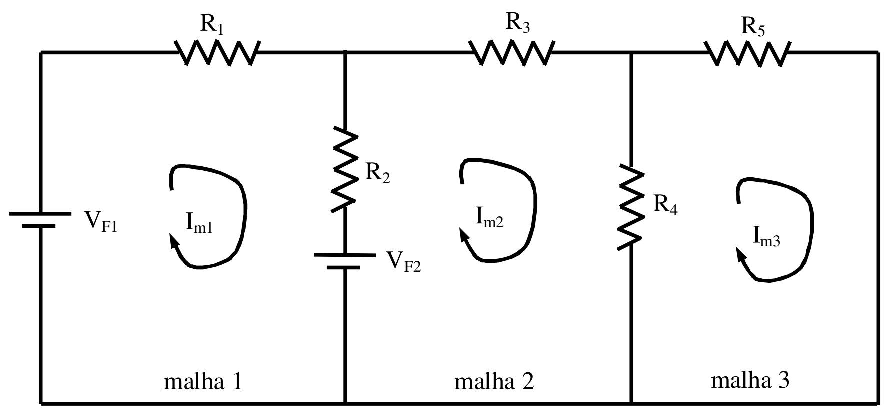


Fig. 7.3 - Correntes de malha

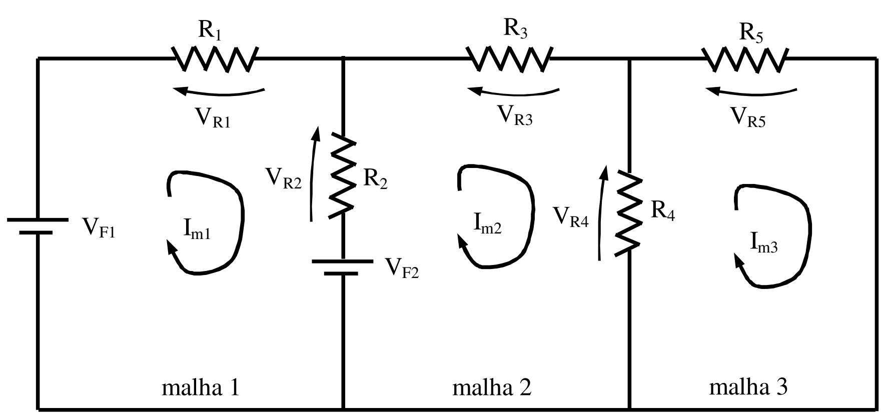


Fig. 7.4 - Tensões nos resistores em função das correntes de malha

Verifica-se, no circuito mostrado na Fig. 7.4, que as correntes de malhas I_{m1}, I_{m2} e I_{m3} são as correntes que percorrem os resistores R_1, R_2 e R_3, respectivamente. As direções das tensões nos resistores R_2 e R_3 foram adotadas considerando que I_{m1} é maior que I_{m2} e que I_{m2} é maior que I_{m3}.

Aplicando a segunda lei de Kirchhoff nas malhas 1, 2 e 3 do circuito mostrado na Fig. 7.4 obtém-se:

$$V_{F1} - V_{R1} - V_{R2} - V_{F2} = 0 \tag{7.1}$$

$$V_{F2} + V_{R2} - V_{R3} - V_{R4} = 0 \tag{7.2}$$

$$V_{R4} - V_{R5} = 0 \tag{7.3}$$

Aplicando a lei de Ohm em cada um dos resistores do circuito mostrado na Fig. 7.4, verifica-se que (7.1) - (7.3) podem ser escritas como sendo:

$$V_{F1} - R_1 I_{m1} - R_2 (I_{m1} - I_{m2}) - V_{F2} = 0 \tag{7.4}$$

$$V_{F2} + R_2 (I_{m1} - I_{m2}) - R_3 I_{m2} - R_4 (I_{m2} - I_{m3}) = 0 \tag{7.5}$$

$$R_4 (I_{m2} - I_{m3}) - R_5 I_{m3} = 0 \tag{7.6}$$

Manipulando (7.4) - (7.6) obtém-se:

$$(R_1 + R_2) I_{m1} - R_2 I_{m2} - 0 I_{m3} = V_{F1} - V_{F2} \tag{7.7}$$

$$- R_2 I_{m1} + (R_2 + R_3 + R_4) I_{m2} - R_4 I_{m3} = V_{F2} \tag{7.8}$$

$$0 I_{m1} - R_4 I_{m2} + (R_4 + R_5) I_{m3} = 0 \tag{7.9}$$

As equações (7.7) - (7.9) podem ser escritas, na forma matricial, como sendo:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{F1} - V_{F2} \\ V_{F2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

A equação (7.10) pode ser escrita, de maneira resumida, como sendo:

$$[\mathrm{R}]\,[\mathrm{I_m}] = [\mathrm{V}] \tag{7.11}$$

sendo:

$$[\mathrm{R}] = \begin{bmatrix} \mathrm{R_1 + R_2} & -\mathrm{R_2} & 0 \\ -\mathrm{R_2} & \mathrm{R_2 + R_3 + R_4} & -\mathrm{R_4} \\ 0 & -\mathrm{R_4} & \mathrm{R_4 + R_5} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} \mathrm{I_{m1}} \\ \mathrm{I_{m2}} \\ \mathrm{I_{m3}} \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

$$[\mathrm{V}] = \begin{bmatrix} \mathrm{V_{F1} - V_{F2}} \\ \mathrm{V_{F2}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

[R] é uma matriz quadrada e simétrica, de ordem n, sendo n a quantidade de malhas do circuito. A matriz [R] é denominada matriz de resistências do circuito e obedece a seguinte ordem de formação:

i) Um elemento R_{kk} genérico corresponde à soma de todas as resistências que estão na *k-ésima* malha do circuito;

ii) Um elemento R_{jk} corresponde à soma de todas as resistências (com o sinal trocado) que estão na malha j e na malha k simultaneamente;

[V] é um vetor de n linhas e uma coluna, onde um elemento genérico V_k corresponde à soma de todas as fontes de tensão que estão na *k-ésima* malha do circuito.

$[I_m]$ é um vetor com n linhas e uma coluna que contém as correntes de malha do circuito.

Na equação (7.11) [R] e [V] são conhecidos. Para obter o vetor $[I_m]$ deve-se pré-multiplicar (7.11) pela inversa de [R], obtendo-se assim:

$$[\mathrm{R}]^{-1}[\mathrm{R}]\,[\mathrm{I_m}] = [\mathrm{R}]^{-1}[\mathrm{V}] \tag{7.15}$$

Portanto, o vetor $[I_m]$ é escrito como sendo:

$$[I_m] = [R]^{-1}[V] \tag{7.16}$$

Uma vez obtidas as correntes de malha do circuito, é possível então definir as correntes em cada um dos resistores. A Fig. 7.5 mostra o circuito com as correntes em todos os resistores.

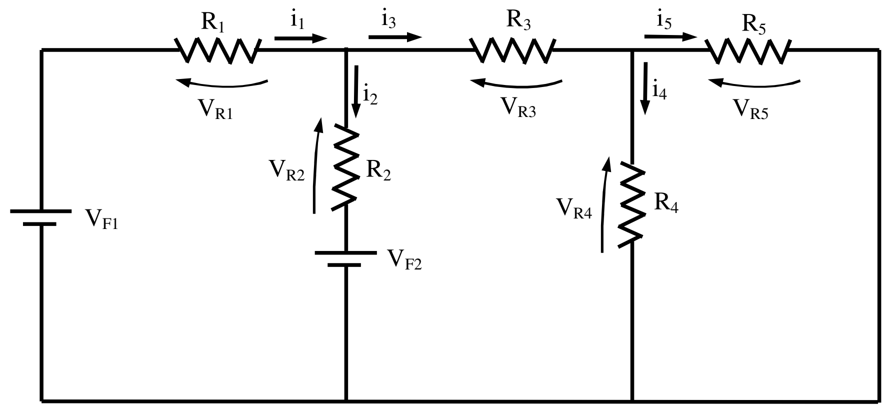


Fig. 7.5 - Tensões e correntes nos bipolos do circuito

Comparando as correntes no circuito mostrado na Fig. 7.5 com as correntes de malha do circuito mostrado na Fig. 7.3 obtém-se:

$$i_1 = I_{m1} \tag{7.17}$$

$$i_3 = I_{m2} \tag{7.18}$$

$$i_5 = I_{m3} \tag{7.19}$$

$$i_2 = I_{m1} - I_{m2} \tag{7.20}$$

$$i_4 = I_{m2} - I_{m3} \tag{7.21}$$

Uma vez calculadas as correntes em todos os ramos é possível obter as tensões nos resistores a partir da lei de Ohm, ou seja:

$$V_{R1} = R_1\, i_1 \tag{7.22}$$

$$V_{R2} = R_2\, i_2 \tag{7.23}$$

$$V_{R3} = R_3\, i_3 \tag{7.24}$$

$$V_{R4} = R_4\, i_4 \tag{7.25}$$

$$V_{R5} = R_5\, i_5 \tag{7.26}$$

Exemplo 7.1) Determine a corrente e a tensão em cada um dos resistores do circuito mostrado na Fig. 7.6.

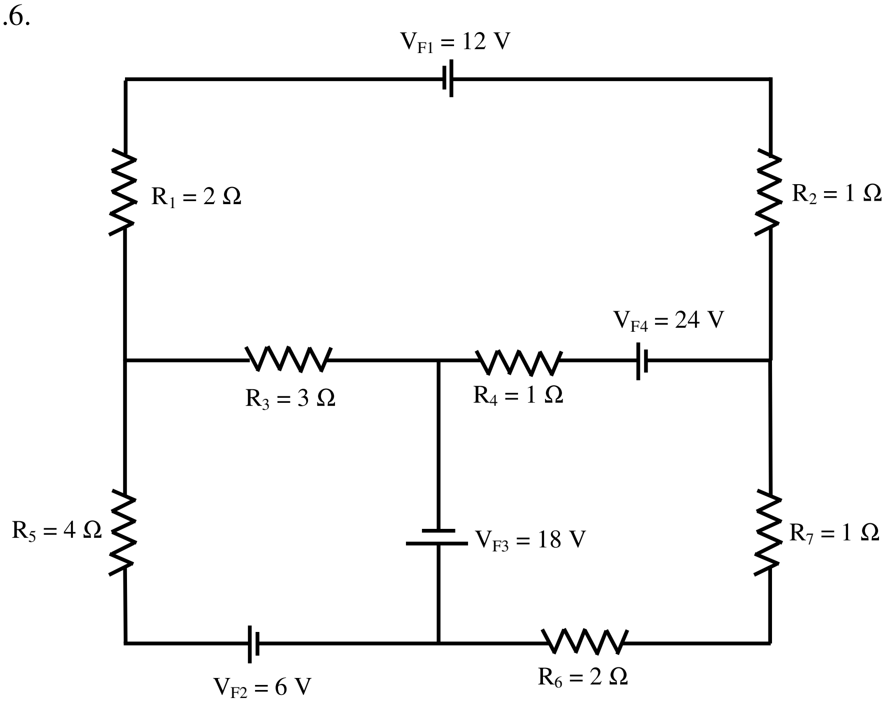


Fig. 7.6 - Circuito para o exemplo 7.1

É possível verificar, no circuito mostrado na Fig. 7.6, a existência de três malhas que atendem ao método de análise de malhas. A Fig. 7.7 mostra a identificação das três malhas com as respectivas correntes de malha.

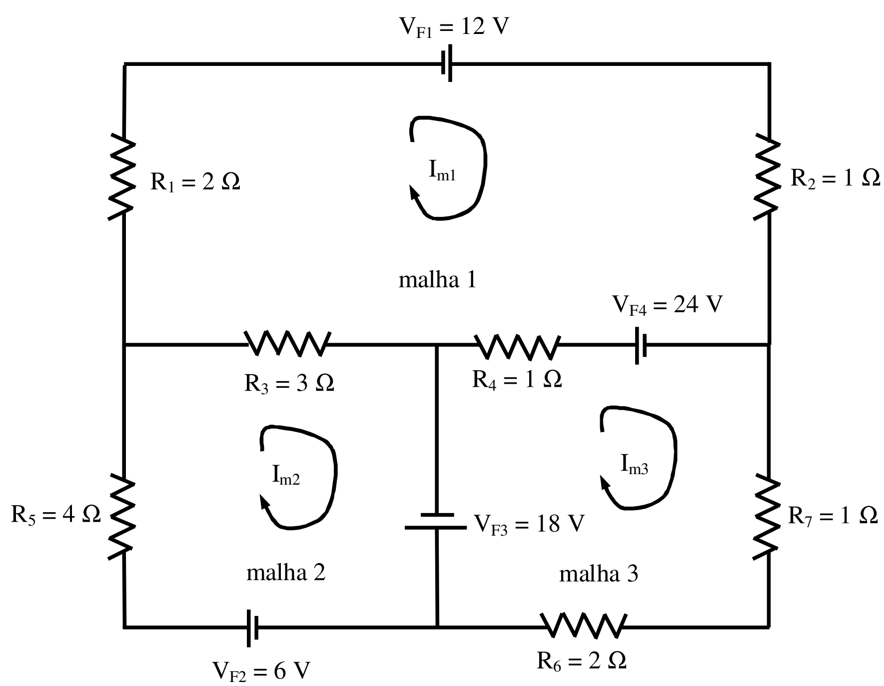


Fig. 7.7 - identificação das malhas e das correntes de malha no circuito

A matriz de resistências [R], do circuito mostrado na Fig. 7.7 é escrita como sendo:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 & -R_3 & -R_4 \\ -R_3 & R_3 + R_5 & 0 \\ -R_4 & 0 & R_4 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \qquad (7.27)$$

O vetor com as tensões do circuito é escrito como sendo:

$$[V] = \begin{bmatrix} V_{F1} + V_{F4} \\ V_{F3} + V_{F2} \\ -V_{F3} - V_{F4} \end{bmatrix} \qquad (7.28)$$

O vetor com as correntes de malha do circuito é:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} \qquad (7.29)$$

Substituindo os valores das resistências e das fontes de tensão em (7.27) e (7.28), respectivamente, obtém-se:

$$[R] = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad (7.30)$$

$$[V] = \begin{bmatrix} 36 \\ 24 \\ -42 \end{bmatrix} \qquad (7.31)$$

Sabendo que $[R]\,[I_m] = [V]$ é possível escrever, a partir de (7.29) - (7.31), o seguinte sistema de equações algébricas.

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 24 \\ -42 \end{bmatrix} \qquad (7.32)$$

Resolvendo o sistema de equações algébricas mostrado em (7.32) obtém-se os seguintes valores para as correntes de malha do circuito:

I_{m1} = 6,549 A

I_{m2} = 6,235 A

I_{m3} = - 8,893 A

Uma vez obtidas as correntes de malha, é possível obter as correntes nos resistores e nas fontes de tensão.

Verifica-se, na Fig. 7.7, que a corrente que circula no resistores R_2 é a própria corrente de malha I_{m1}. Denominando a corrente em R_2 de i_1, tem-se então que i_1 = 6,549 A na mesma direção de I_{m1}. Observe que o resistor R_1 e a fonte V_{F1} também são percorridos por i_1.

Em R_4, e na fonte V_{F4}, circula a corrente de malha I_{m1} da direita para a esquerda e a corrente de malha I_{m3} da esquerda para a direita. Deste modo tem-se que em R_4 circula $i_2 = I_{m1} - I_{m3}$ que resulta em i_2 = 15,412 A da direita para a esquerda.

A corrente que circula no resistor R_7 é a própria corrente de malha I_{m3}, que circula de cima para baixo. Denominado a corrente em R_7 de i_3, conclui-se que i_3 = -8,863 A de cima para baixo. Uma vez que i_3 resultou em um valor negativo deve-se inverter a direção e o sinal da mesma. Então, tem-se que i_3 = 8,863 de baixo para cima em R_7. Observe que o resistor R_6 também é percorrido pela corrente i_3.

O resistor R_3 é percorrido, da direita para a esquerda, pela corrente de malha I_{m1} e também é percorrido, da esquerda para a direita pela corrente de malha I_{m2}. Assim a corrente que circula em R_3, que será denominada i_4, será $i_4 = I_{m1} - I_{m2}$. Verifica-se que i_4 = 0,314 A da direita para a esquerda.

A fonte de tensão V_{F3} é percorrida, de cima para baixo, pela corrente de malha I_{m2} e, de baixo pra cima, pela corrente de malha I_{m3}. Assim a corrente na fonte V_{F3}, que será denominada i_5, será escrita como sendo $i_5 = I_{m2} - I_{m3}$ resultando em i_5 = 15,098 A de cima para baixo.

A fonte de tensão V_{F2} é percorrida somente pela corrente de malha I_{m2}. Denominando de i_6 a corrente que percorre a fonte V_{F2} (e também o resistor R_5) verifica-se então que a corrente nesta fonte é i_6 = 6,235 A da direita para a esquerda.

A Fig. 7.8 mostra as correntes e tensões em todos os bipolos do circuito.

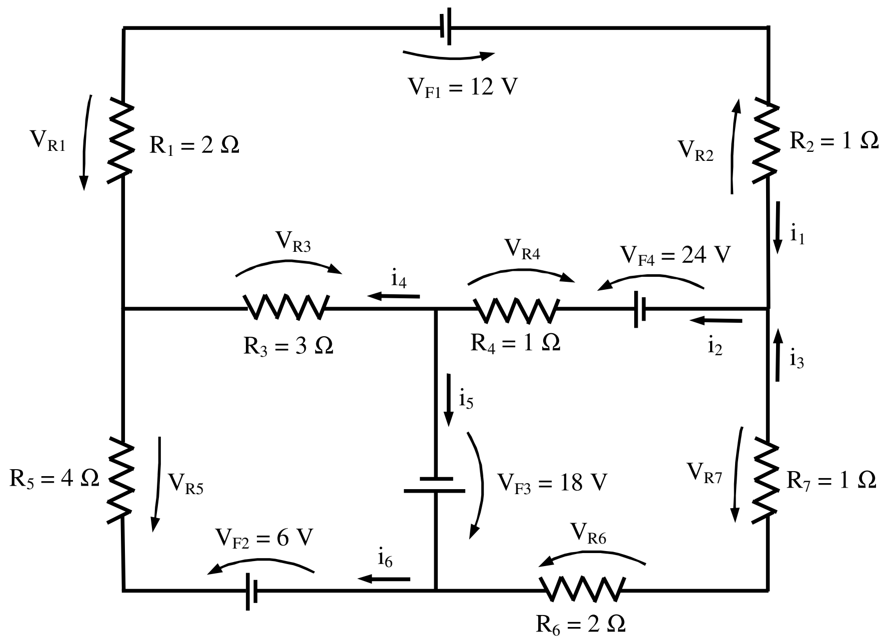


Fig. 7.8 - Correntes e tensões no circuito

As tensões nos resistores, calculadas utilizando a lei de Ohm, são dadas por:

$V_{R1} = R_1\, i_1 \implies V_{R1} = 13{,}098\ \text{V}$

$V_{R2} = R_2\, i_1 \implies V_{R1} = 6{,}549\ \text{V}$

$V_{R3} = R_3\, i_4 \implies V_{R3} = 0{,}942\ \text{V}$

$V_{R4} = R_4\, i_2 \implies V_{R4} = 15{,}412\ \text{V}$

$V_{R5} = R_5\, i_6 \implies V_{R3} = 24{,}94\ \text{V}$

$V_{R6} = R_6\, i_3 \implies V_{R3} = 17{,}726\ \text{V}$

$V_{R7} = R_7\, i_3 \implies V_{R3} = 8{,}863\ \text{V}$

Observe que todos os nós e malhas devem obedecer a primeira e a segunda lei de Kirchhoff, respectivamente.

Exercício 7.1) Determine a corrente e a tensão em cada um dos resistores do circuito mostrado na Fig. 7.9.

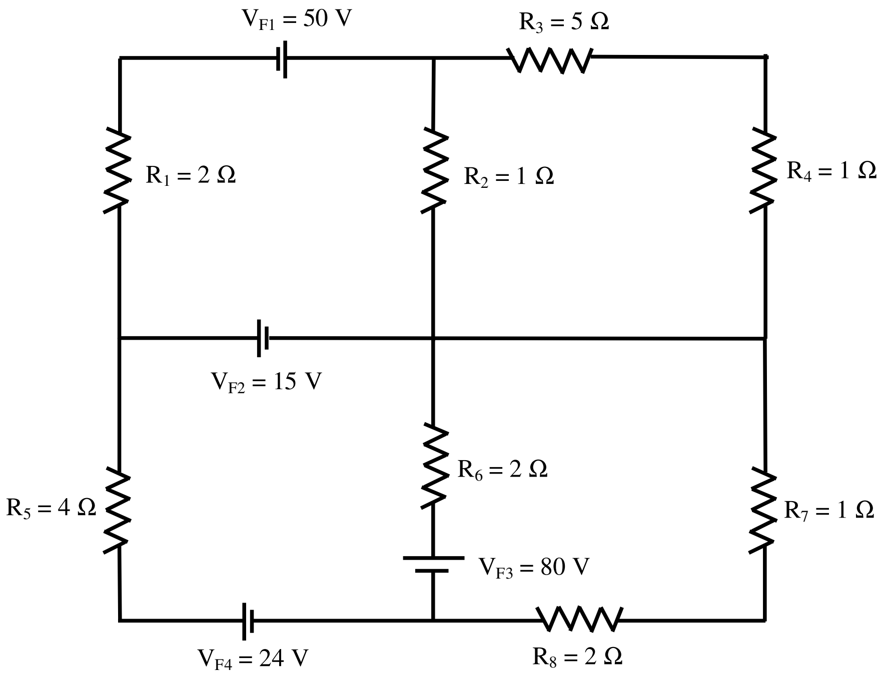


Fig. 7.9 - Circuito para o exercício 7.1

Exercício 7.2) Determine a corrente e a tensão em cada um dos resistores do circuito mostrado na Fig. 7.10.

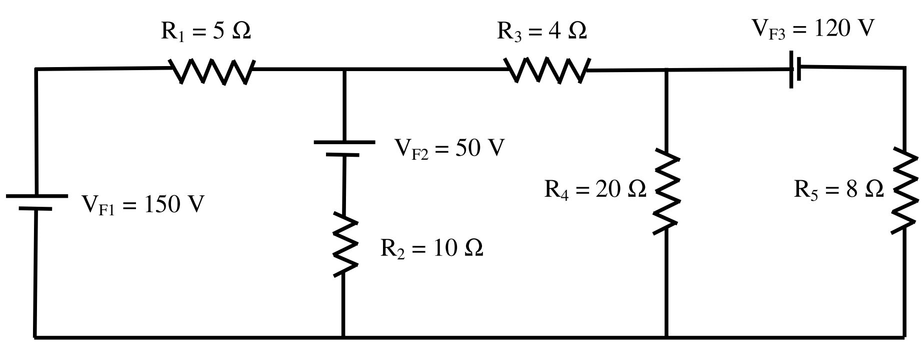


Fig. 7.10 - Circuito para o exercício 7.2

7.3 - Análise nodal

A análise nodal é uma técnica de análise de circuitos que somente pode ser aplicada em circuitos alimentados única e exclusivamente por fontes de corrente.

Considere o circuito mostrado na Fig. 7.11.

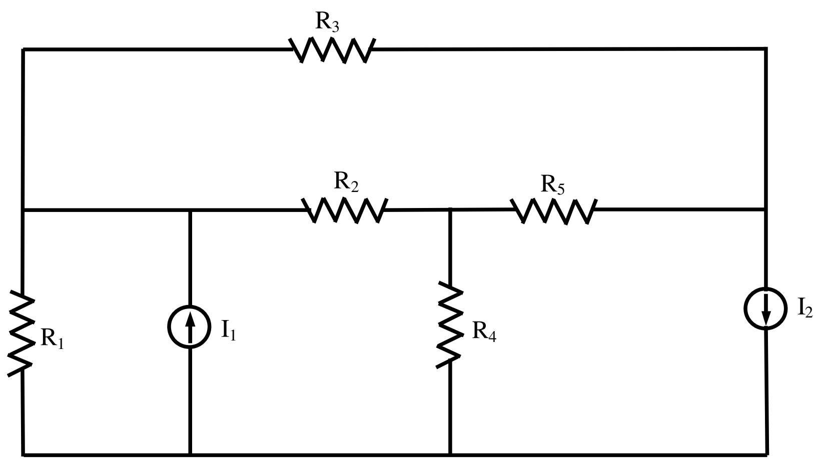


Fig. 7.11 - Circuito alimentado por duas fontes de corrente

Observa-se que o circuito mostrado na Fig. 7.11 possui 4 nós. Para uma melhor visualização de todos os nós do circuito, o mesmo será desenhado conforme mostrado na Fig. 7.12.

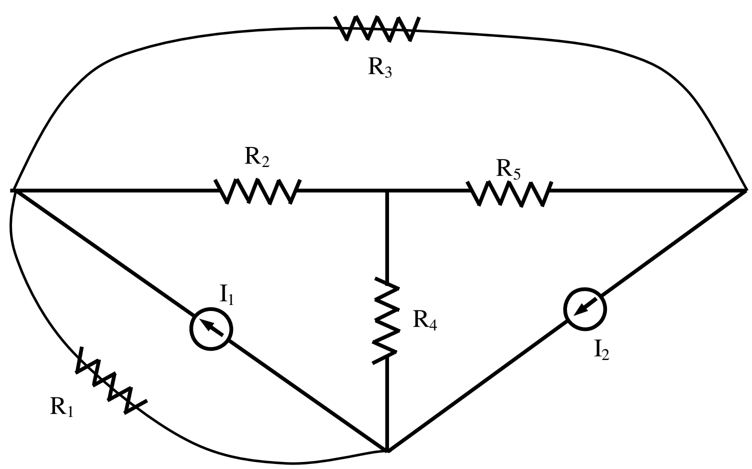


Fig. 7.12 - Circuito da Fig. 7.11 desenhado de outra maneira

Inicialmente todos os nós do circuito devem ser identificados de modo tal que um dos nós seja o nó de referência e que seja denominado nó zero, conforme mostra a Fig. 7.13.

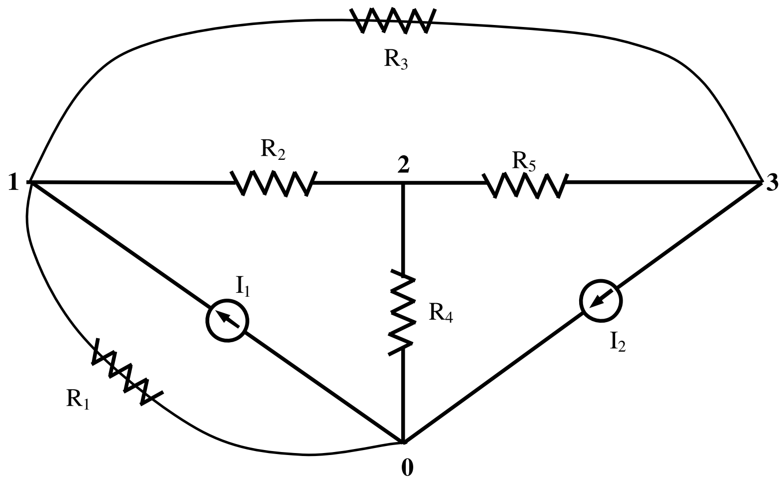


Fig. 7.13 - Identificação dos nós do circuito

Em uma próxima tensão serão indicadas o potencial (a tensão) de todos os nós em relação ao nó zero, conforme mostra a Fig. 7.14. Estas tensões serão denominadas *tensões de nós* ou *potenciais de nós*.

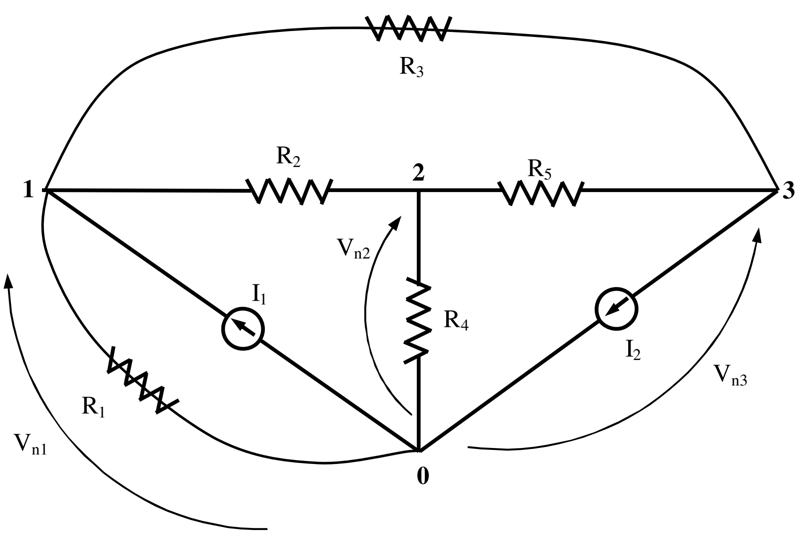


Fig. 7.14 - Potenciais de nós

Uma vez identificados os potenciais de nós, deve-se indicar as correntes nos resistores do circuito. Observe que, devido às direções dos potenciais de nós V_{n1} e V_{n2}, as correntes nos resistores R_1 e R_4 devem possuir direções do nó 1 para o nó zero e do nó 2 para o nó zero, respectivamente. As correntes dos demais resistores podem ser escolhidas aleatoriamente. A Fig. 7.15 mostra o circuito com as correntes nos resistores.

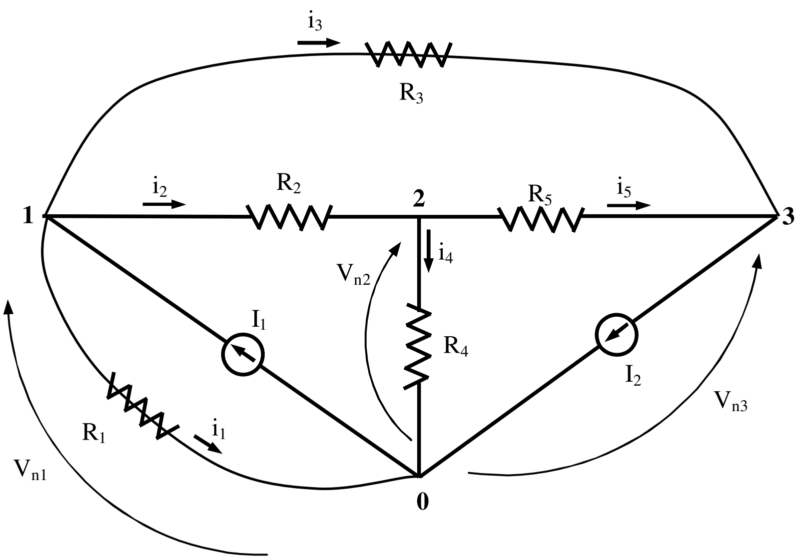


Fig. 7.15 - Circuito com as correntes nos resistores

Agora que as direções das correntes nos resistores foram indicadas, é possível indicar também as direções das tensões nestes elementos. A Fig. 7.16 mostra as tensões nos resistores.

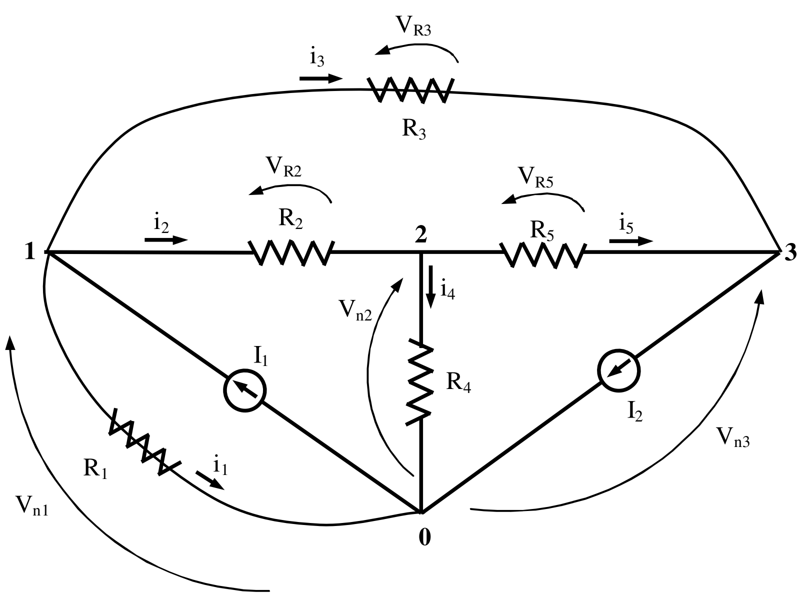


Fig. 7.16 - Circuito com as correntes e tensões nos resistores

Aplicando a primeira lei de Kirchhoff nos nós 1, 2 e 3 do circuito mostrado na Fig. 7.16 obtém-se:

$$I_1 = i_1 + i_2 + i_3 \tag{7.33}$$

$$0 = i_2 - i_4 - i_5 \tag{7.34}$$

$$I_2 = i_3 + i_5 \tag{7.35}$$

Com base na segunda lei de Kirchhoff, as tensões V_{R2} , V_{R3} e V_{R5} podem ser escritas como sendo:

$$V_{R2} = V_{n1} - V_{n2} \tag{7.36}$$

$$V_{R3} = V_{n1} - V_{n3} \tag{7.37}$$

$$V_{R5} = V_{n2} - V_{n3} \tag{7.38}$$

Utilizando a lei de Ohm, verifica-se que as tensões V_{R2} , V_{R3} e V_{R5} também podem ser escritas como sendo:

$$V_{R2} = R_2\, i_2 \tag{7.39}$$

$$V_{R3} = R_3\, i_3 \tag{7.40}$$

$$V_{R5} = R_5\, i_5 \tag{7.41}$$

Ainda utilizando a lei de Ohm, é possível escreve as correntes i_1 e i_2 como sendo:

$$i_1 = \frac{V_{n1}}{R_1} \tag{7.42}$$

$$i_4 = \frac{V_{n2}}{R_4} \tag{7.43}$$

Igualando (7.36) com (7.39), (7.37) com (7.40) e (7.38) com (7.41) obtém-se:

$$i_2 = \frac{V_{n1} - V_{n2}}{R_2} \tag{7.44}$$

$$i_3 = \frac{V_{n1} - V_{n3}}{R_3} \tag{7.45}$$

$$i_5 = \frac{V_{n2} - V_{n3}}{R_5} \tag{7.46}$$

Substituindo (7.42) - (7.46) em (7.33) - (7.35) obtém-se:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) V_{n1} - \frac{1}{R_2} V_{n2} - \frac{1}{R_3} V_{n3} = I_1 \tag{7.47}$$

$$-\frac{1}{R_2} V_{n1} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_{n2} - \frac{1}{R_5} V_{n3} = 0 \tag{7.48}$$

$$-\frac{1}{R_3} V_{n1} - \frac{1}{R_5} V_{n2} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) V_{n3} = -I_2 \tag{7.49}$$

Define-se a condutância como sendo o inverso da resistência. Deste modo, a condutância de um resistor genérico com resistência R_k é escrita como sendo:

$$G_k = \frac{1}{R_k} \tag{7.50}$$

A unidade da condutância é o siemens (S).

Escrevendo as resistências das equações (7.47) - (7.49) na forma de condutâncias, tais equações serão escritas como sendo:

$$(G_1 + G_2 + G_3) V_{n1} - G_2 V_{n2} - G_3 V_{n3} = I_1 \tag{7.47}$$

$$-G_2 V_{n1} + (G_2 + G_4 + G_5) V_{n2} - G_5 V_{n3} = 0 \tag{7.48}$$

$$-G_3 V_{n1} - G_5 V_{n2} + (G_3 + G_5) V_{n3} = -I_2 \tag{7.49}$$

Na forma matricial, (7.47)-(7.49) tornam-se:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & -G_3 \\ -G_2 & G_2 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ -G_3 & -G_5 & G_3 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{7.50}$$

A equação (7.50) pode ser escrita, de maneira resumida, como sendo:

$$[G]\,[V_n] = [I] \tag{7.51}$$

sendo:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & -G_3 \\ -G_2 & G_2 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ -G_3 & -G_5 & G_3 + G_5 \end{bmatrix} \tag{7.52}$$

$$[V_n] = \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix} \tag{7.53}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{7.54}$$

[G] é uma matriz quadrada e simétrica, de ordem n sendo n a quantidade de nós do circuito (com exceção do nó de referência). A matriz [G] é denominada matriz de condutâncias do circuito e obedece a seguinte ordem de formação:

i) Um elemento G_{kk} genérico corresponde à soma de todas as condutâncias que estão conectadas ao *k-ésimo* no do circuito;

ii) Um elemento G_{jk} corresponde à soma de todas as condutâncias (com o sinal trocado) conectadas entre os nós j e k;

[I] é um vetor de n linhas e uma coluna, onde um elemento genérico I_k corresponde à soma de todas as fontes de corrente que estão conectadas ao *k-ésimo* nó do circuito.

$[V_n]$ é um vetor com n linhas e uma coluna que contém as tensões de nós, em relação ao nó de referência, do circuito.

Na equação (7.51) [G] e [I] são conhecidos. Para obter o vetor $[V_{mn}$ deve-se pré-multiplicar (7.11) pela inversa de [G], obtendo-se assim:

$$[G]^{-1}[G]\,[V_n] = [G]^{-1}[I] \tag{7.55}$$

Portanto, o vetor $[V_n]$ é escrito como sendo:

$$[V_n] = [G]^{-1}[I] \tag{7.56}$$

Uma vez obtidas as tensões de nó do circuito, é possível então calcular as correntes e tensões em todos os bipolos do circuito.

Exemplo 7.2) Determine a corrente e a tensão em cada um dos resistores do circuito mostrado na Fig. 7.17, utilizando análise nodal.

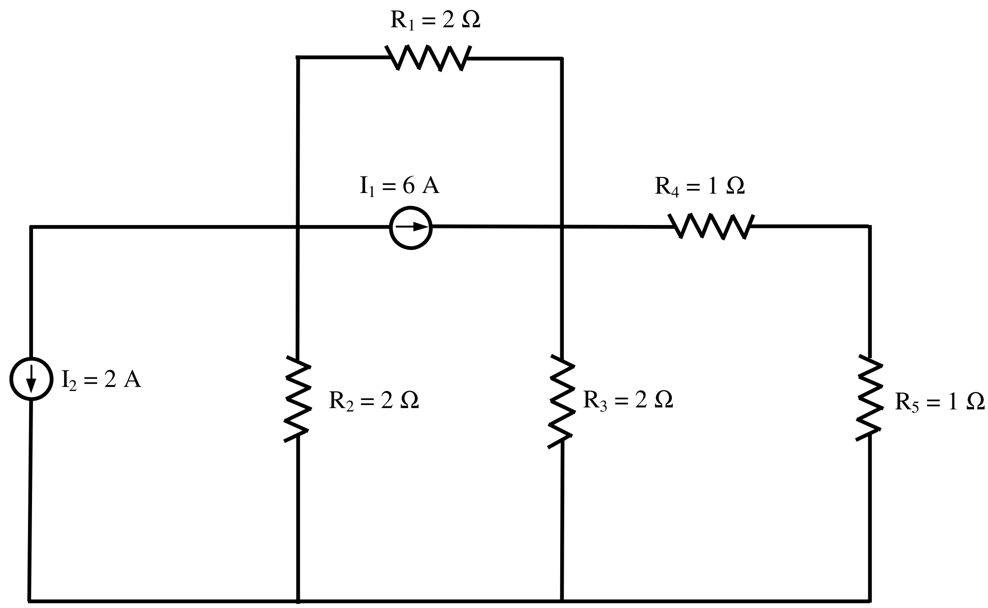


Fig. 7.14 - Circuito para o exemplo 7.2

No circuito mostrado na Fig. 7.17 existem 4 nós que serão identificados na Fig. 7.15.

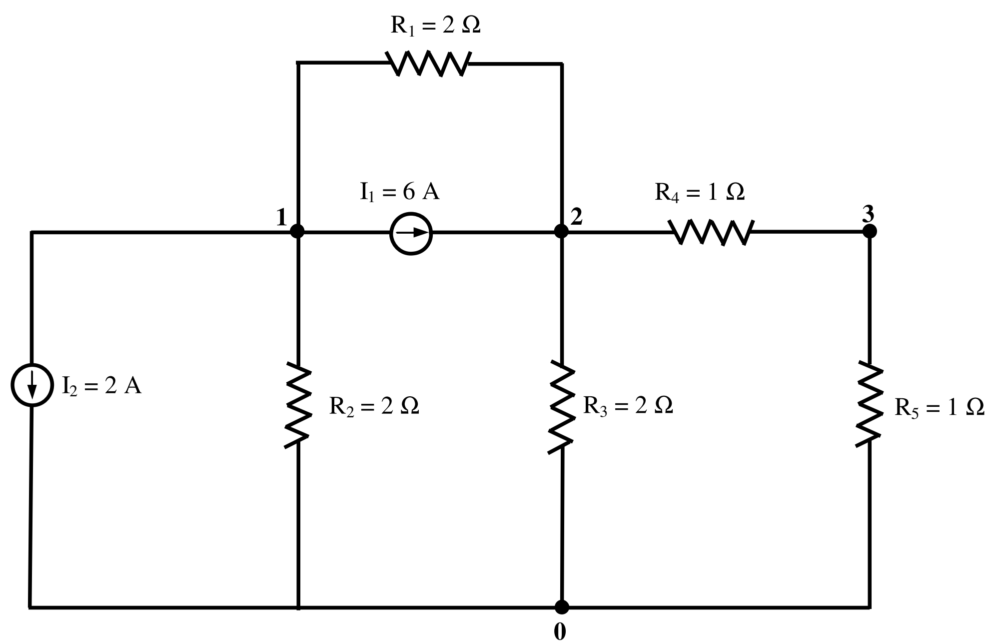


Fig. 7.17 - Identificação dos nós

A próxima etapa consiste em indicar no circuito os potenciais dos nós, conforme mostra a Fig. 7.18

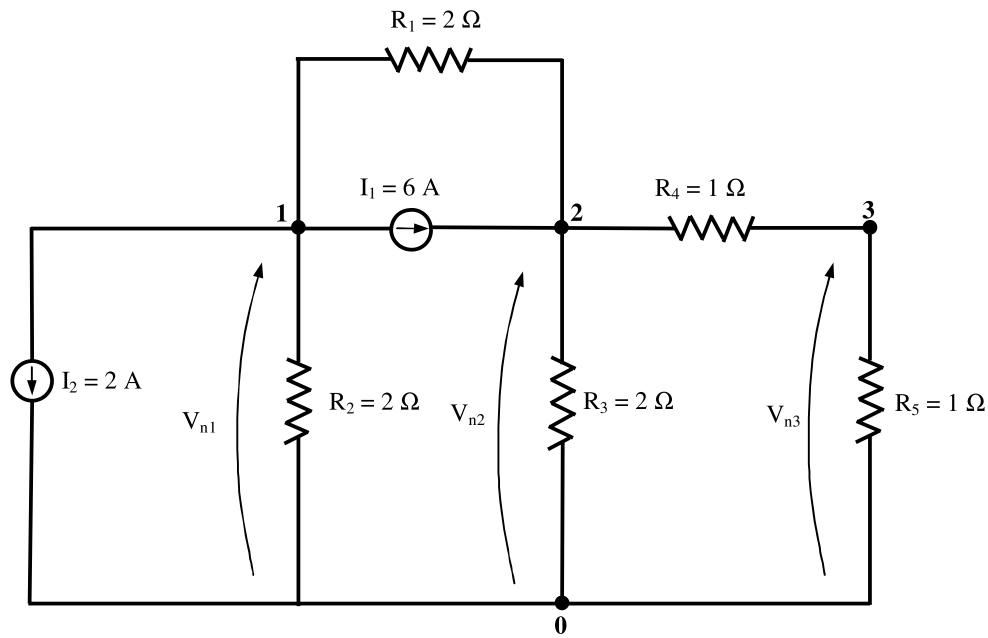


Fig. 7.18 - Indicação das tensões de nós

As condutâncias do circuito mostrado na Fig. 7.18 são:

$G_1 = \frac{1}{R_1} \Rightarrow G_1 = 0{,}5\ S$

$G_2 = \frac{1}{R_2} \Rightarrow G_2 = 0{,}5\ S$

$G_3 = \frac{1}{R_3} \Rightarrow G_3 = 0{,}5\ S$

$G_4 = \frac{1}{R_4} \Rightarrow G_4 = 1\ S$

$G_5 = \frac{1}{R_5} \Rightarrow G_1 = 1\ S$

A matriz de condutâncias [G] é escrita como sendo:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \tag{7.57}$$

O vetor com as tensões de nós é escrito como sendo:

$$[V_n] = \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ V_{n3} \end{bmatrix} \tag{7.58}$$

O vetor com as fontes de corrente é:

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} -\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.59}$$

Substituindo os valores numéricos em (7.57) e (7.59) obtém-se:

$$[\mathrm{G}] = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.60}$$

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.61}$$

Sabendo que $[\mathrm{G}]\,[\mathrm{I_n}] = [\mathrm{I}]$ é possível escrever, a partir de (7.58), (7.60) e (7.61), o seguinte sistema de equações algébricas.

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{V_{n1}} \\ \mathrm{V_{n2}} \\ \mathrm{V_{n3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.62}$$

Resolvendo o sistema de equações algébricas mostrado em (7.62) obtém-se os seguintes valores para as tensões dos nós:

$$V_{n1} = -7{,}2 \text{ V} \tag{7.63}$$

$$V_{n2} = 1{,}6 \text{ V} \tag{7.64}$$

$$V_{n3} = 0{,}8 \text{ V} \tag{7.65}$$

O sinal negativo na tensão V_{n1} significa que a direção da mesma é contrária à direção indicada na Fig. 7.18. Assim, o sinal de V_{n1}, em (7.63), deve ser invertido e a direção da mesma, na Fig. 7.18, também deve ser invertido. Assim, as tensões de nós terão os seguintes valores:

$$V_{n1} = 7{,}2 \text{ V} \tag{7.66}$$

$$V_{n2} = 1{,}6 \text{ V} \tag{7.67}$$

$$V_{n3} = 0{,}8 \text{ V} \tag{7.68}$$

A Fig. 7.19 mostra o circuito com suas respectivas tensões de nós.

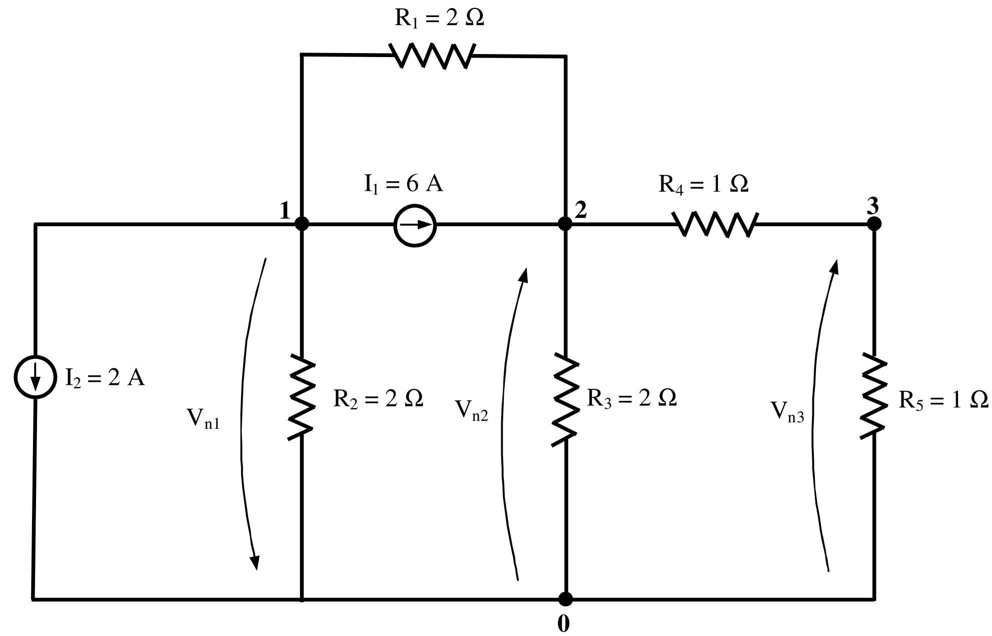


Fig. 7.19 - Circuito com as respectivas tensões de nós

Verifica -se, no circuito mostrado na Fig. 7.19, que as tensões V_{n1}, V_{n2} e V_{n3} são as tensões aplicadas nos resistores R_2, R_3 e R_5, respectivamente. Sabendo que em um resistor (bipolo passivo) a corrente e a tensão possuem direções contrárias, é possível determinar a direção das correntes nos resistores R_2, R_3 e R_5. As direções destas correntes são mostradas na Fig. 7.20.

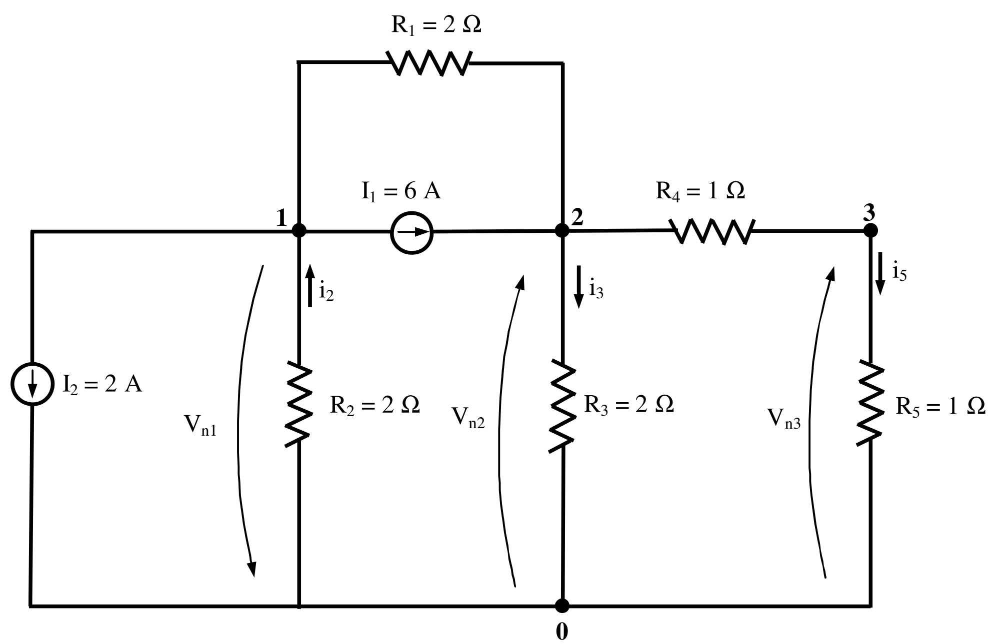


Fig. 7.20 - Correntes i_2, i_3 e i_5 nos resistores R_2, R_3 e R_5, respectivamente

As correntes i_2, i_3 e i_5, indicadas na Fig. 7.20 podem ser calculadas a partir da lei de Ohm ou seja:

$$i_2 = \frac{V_{n1}}{R_2} \Rightarrow i_2 = \frac{7{,}2}{2} \Rightarrow i_2 = 3{,}6 \text{ A}$$

$$i_3 = \frac{V_{n2}}{R_3} \Rightarrow i_3 = \frac{1{,}6}{2} \Rightarrow i_3 = 0{,}8 \text{ A}$$

$$i_5 = \frac{V_{n3}}{R_5} \Rightarrow i_5 = \frac{0{,}8}{1} \Rightarrow i_5 = 0{,}8 \text{ A}$$

Resta determinar as correntes e tensões nos resistores R_1 e R_4. Para determinar tais correntes e tensões é possível utilizar a lei dos nós ou a lei das malhas juntamente com a lei de Ohm. Neste exemplo as tensões e correntes em R_1 e R_4 serão calculadas inicialmente utilizando as lei dos nós e de Ohm e em seguida tais grandezas serão obtidas a partir das leis das malhas e de Ohm sendo que os valores obtidos pelos dois métodos devem ser idênticos.

1ª solução: Utilizando a lei dos nós e a lei de Ohm

Neste caso, adota-se uma direção aleatória para as correntes em R_1 e R_4 conforme é mostrado na Fig. 7.21.

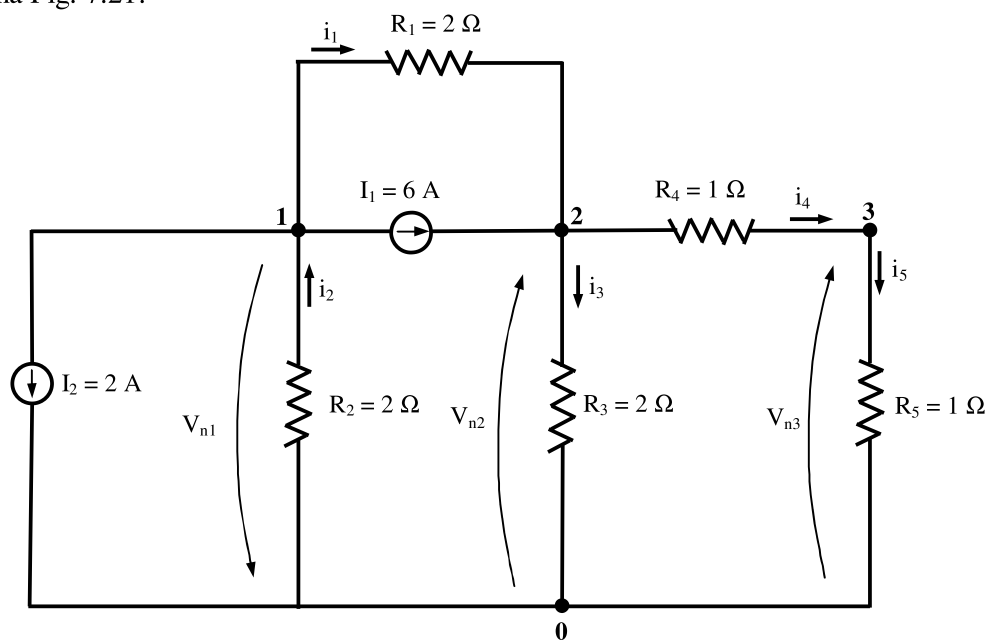


Fig. 7.21 - Indicação das correntes i_1 e i_4 nos resistores R_1 e R_4, respectivamente

Aplicando a lei dos nós no nó 1:

$$i_2 = i_1 + I_1 + I_2 \Rightarrow i_1 = i_2 - I_1 - I_2 \Rightarrow i_1 = -4{,}4 \text{ A}$$

Aplicando a lei dos nós no nó 2:

$$i_1 + I_1 = i_3 + i_4 \Rightarrow i_4 = i_i + I_1 - i_3 \Rightarrow i_4 = 0{,}8 \ \ A$$

O sinal negativo em i_1 significa que a direção da mesma é contrária à direção adotada na Fig. 7.19. Deve-se então trocar o sinal desta corrente (então i_1 = 4,4 A) e inverter a direção da mesma no circuito. Quanto às tensões nos resistores R_1 e R_4, as mesmas possuem direções contrárias às correntes i_1 e i_4 e seus valores podem ser obtidos pela lei de Ohm. A Fig. 7.22 mostra as correntes e tensões nos resistores R_1 e R_4.

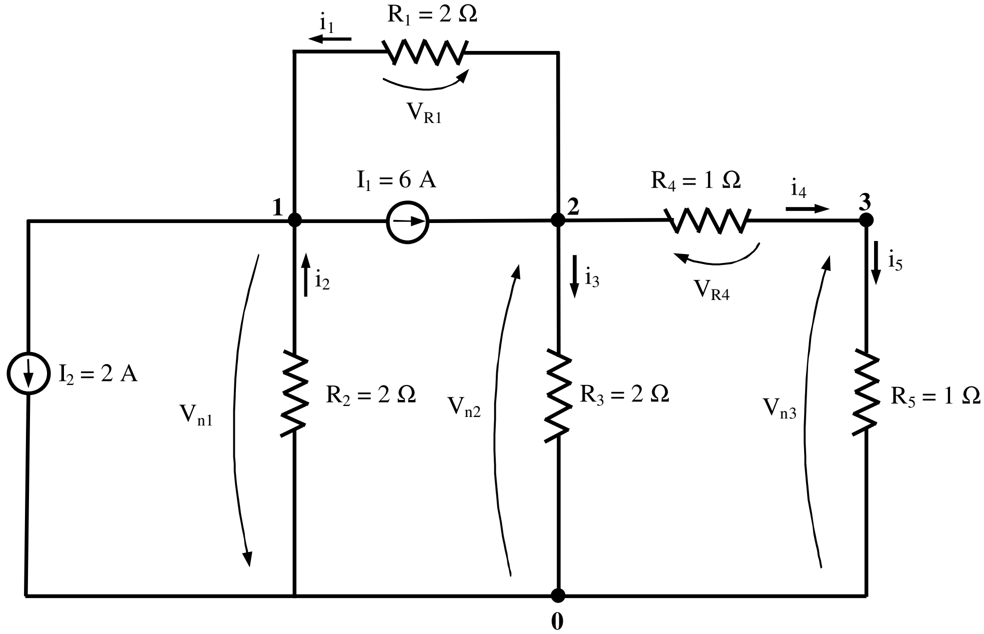


Fig. 7.22 - Correntes e tensões em R_1 e R_4

Aplicando a lei de Ohm nos resistores R_1 e R_4:

$$V_{R1} = R_1\, i_1 \implies V_{R1} = 8{,}8 \ \ V \qquad\qquad V_{R4} = R_4\, i_4 \implies V_{R4} = 0{,}8 \, V$$

2ª solução: Utilizando a lei das malhas e a lei de Ohm

Neste caso, adota-se uma direção aleatória para as tensões em R_1 e R_4 conforme é mostrado na Fig. 7.23.

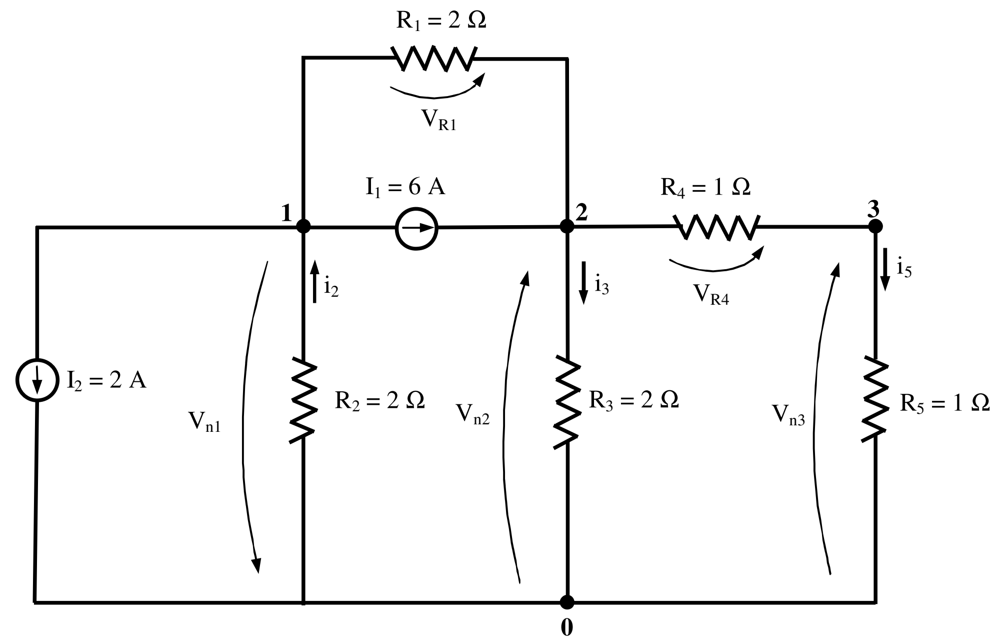


Fig. 7.23 - Indicação das tensões em R_1 e R_4

Para determinar as tensões V_{R1} e V_{R4} no circuito mostrado na Fig. 7.23, aplica-se a lei das malhas nas malhas constituídas pelos nós 0-1-2 e pelos nós 0-2-3. Deste modo, tem-se:

malha 0-1-2:

$$-V_{n1} + V_{R1} - V_{n2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_{R1} = 8{,}8\ \text{V}$$

malha 0-2-3:

$$V_{n2} + V_{R4} - V_{n3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_{R4} = -0{,}8\ \text{V}$$

O sinal negativo na tensão V_{R4} significa que a direção da mesma é contrária á direção adotada inicialmente, na Fig. 7.23. Assim, inverte-se o sinal de V_{R4} que passará a valer 0,8 V e troca-se a direção desta tensão no circuito. Uma vez conhecidas as tensões V_{R1} e V_{R4} é possível obter as correntes nos resistores R_1 e R_4 a partir da aplicação da lei de Ohm nestes bipolos. A Fig. 7.24 mostra as correntes e tensões nos resistores R_1 e R_4.

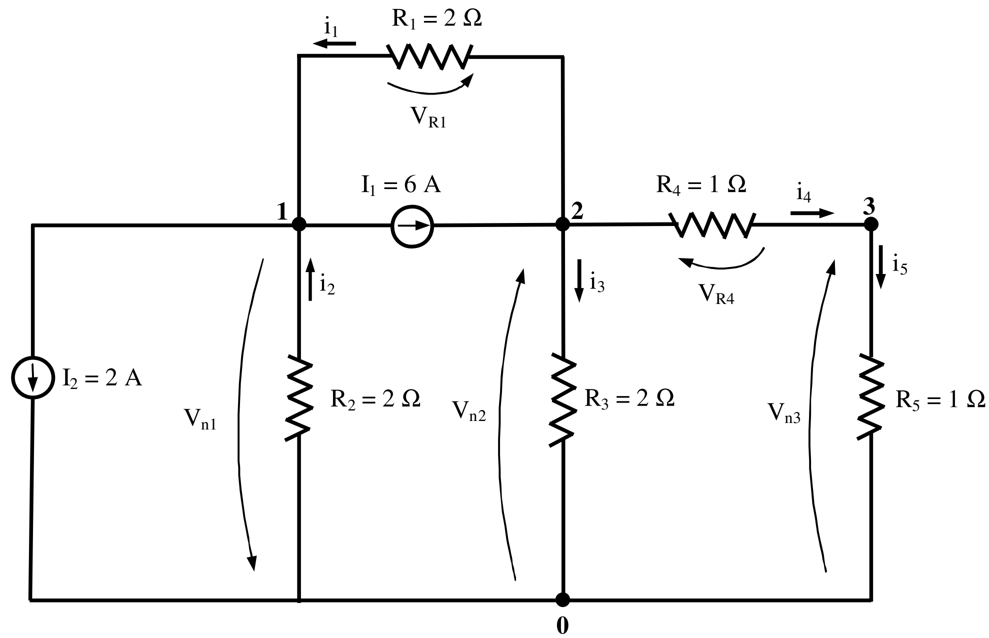


Fig. 7.24 - Correntes e tensões em R_1 e R_4

Aplicando a lei de Ohm nos resistores R_1 e R_4:

$$V_{R1} = R_1\, i_1 \implies i_1 = \frac{V_{R1}}{R_1} \Rightarrow i_1 = 4{,}4 \text{ A}$$

$$V_{R4} = R_4\, i_4 \implies i_4 = \frac{V_{R4}}{R_4} \Rightarrow i_4 = 0{,}8 \text{ A}$$

Observe que as correntes e tensões nos resistores R_1 e R_4 obtidas tanto a partir da 1ª solução quanto a partir da 2ª solução apresentaram os mesmos valores, conforme era esperado.

A Fig. 7.25 mostra o circuito com as correntes e tensões em todos os bipolos. Observe, na Fig. 7.25 que as duas fontes de corrente estão fornecendo potência para o circuito pois a corrente e a tensão, nestas fontes, possuem a mesma direção. A Fonte de corrente I_1 está submetida à tensão V_{R1} e a fonte I_2 está submetida à tensão V_{n1}.

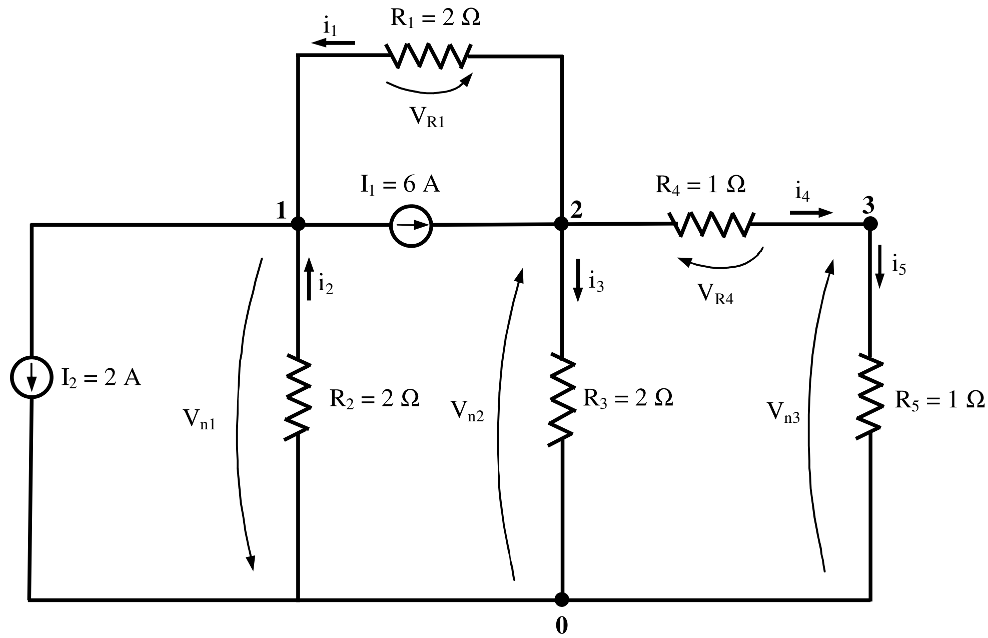


Fig. 7.25 - Correntes e tensões em todos os bipolos

$V_{n1} = 7{,}2$ V	$i_1 = 4{,}4$ A
$V_{n2} = 1{,}6$ V	$i_2 = 3{,}6$ A
$V_{n3} = 0{,}8$ V	$i_3 = 0{,}8$ A
$V_{R1} = 8{,}8$ V	$i_4 = 0{,}8$ A
$V_{R4} = 0{,}8$ V	$i_5 = 0{,}8$ A

Exercício 7.3) Determine a corrente e a tensão em cada um dos resistores do circuito mostrado na Fig. 7.26.

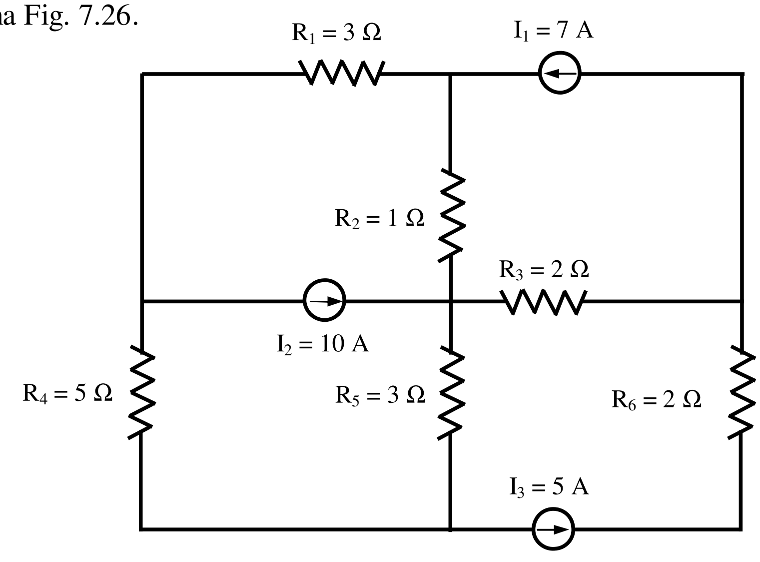


Fig. 7.26 - Circuito para o exercício 7.3

Exercício 7.4) Determine a corrente e a tensão em cada um dos resistores do circuito mostrado na Fig. 7.27.

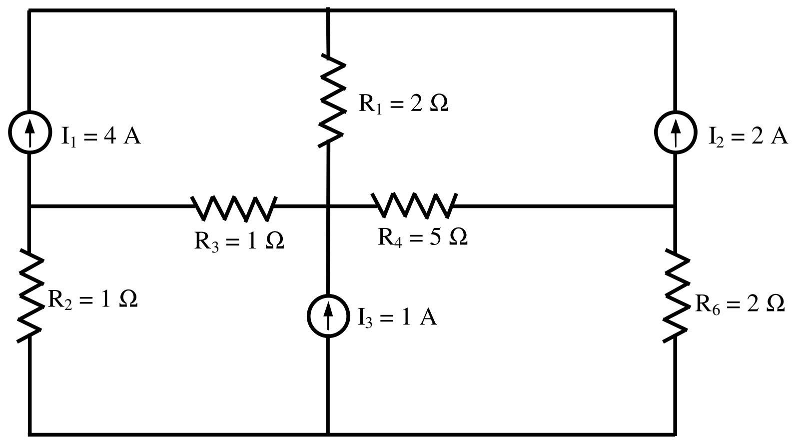


Fig. 7.27 - Circuito para o exercício 7.4

Capítulo 8

Teorema de Thévenin

8.1 - Introdução

O teorema de Thévenin é bastante útil quando se deseja calcular a corrente e/ou tensão em somente um resistor de um circuito genérico. Este teorema também é de grande utilidade quando se necessita determinar a corrente e/ou a tensão em um único resistor de um circuito, considerando que tal resistor pode assumir diversos valores.

8.2 - Teorema de Thévenin

O teorema de Thévenin permite substituir um circuito, com exceção do resistor (denominado carga) cuja corrente e tensão devam ser calculadas, por um circuito equivalente que contém somente um fonte de tensão (denominada tensão de Thévenin) conectada em série com uma resistência denominada resistência de Thévenin. O teorema de Thévenin garante que a corrente e a tensão calculadas no circuito original e no circuito equivalente de Thévenin são idênticas.

Para entender o teorema de Thévenin, considere o circuito mostrado na Fig. 8.1 onde há um resistor R, situado entre os nós A e B, que será denominado de carga.

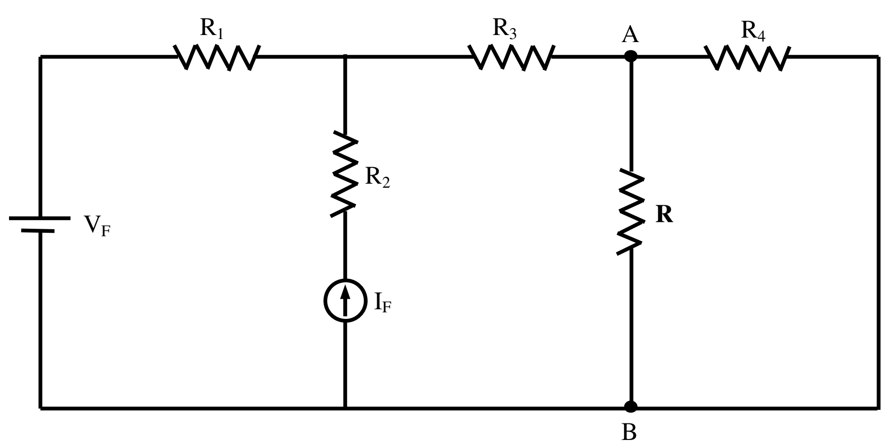


Fig. 8.1 - Circuito para explicação do teorema de Thévenin

Considere que seja necessário calcular a corrente e a tensão (ou a potência) na carga. Sabe-se que estes cálculos podem ser realizados com o auxílio das leis de Kirchhoff e da lei de Ohm. No entanto o teorema de Thévenin permite transformar o circuito original em um circuito bem mais simples, denominado circuito equivalente de Thévenin.

O teorema de Thévenin garante que o circuito mostrado na Fig. 8.1 pode ser substituído pelo circuito equivalente de Thévenin mostrado na Fig. 8.2

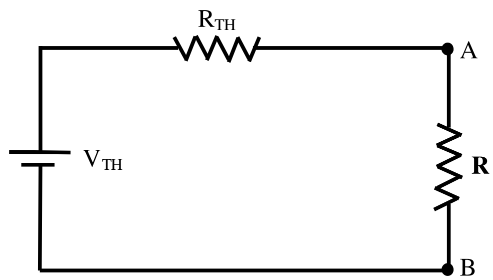


Fig. 8.2 - Circuito equivalente de Thévenin

Na Fig. 8.2 a fonte de tensão V_{TH} e R_{TH} são, respectivamente, a tensão de Thévenin e a resistência de Thévenin. Observe que a grande vantagem do teorema de Thévenin é reduzir um circuito complicado, como o mostrado na Fig. 8.1, em um circuito simples que é mostrado na Fig. 8.2.

8.2.1 - Cálculo da tensão de Thévenin

A tensão de Thévenin V_{TH} é a tensão existente entre os pontos A e B, na Fig. 8.1 sem a presença da carga, conforme ilustra a Fig. 8.3.

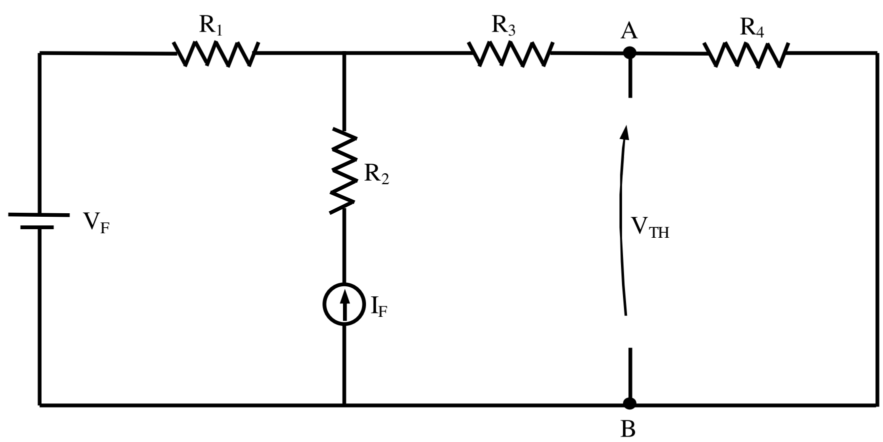


Fig. 8.3 - Tensão de Thévenin no circuito mostrado na Fig. 8.1

Observe, na Fig. 8.3, que a tensão de Thévenin é a tensão aplicada no resistor R_4. Esta tensão pode ser calculada utilizando as leis de Kirchhoff e a lei de Ohm.

8.2.2 - Cálculo da resistência de Thévenin

A resistência de Thévenin é a resistência "enxergada" a partir dos pontos A e B no circuito mostrado na Fig. 8.1 sem a carga, considerando que todas as fontes de corrente do circuito estejam abertas e que todas as fontes de tensão estejam em curto-circuito. A Fig. 8.4 mostra o circuito da Fig. 8.1 sem a carga, com as fontes de corrente em aberto e com as fontes de tensão em curto-circuito.

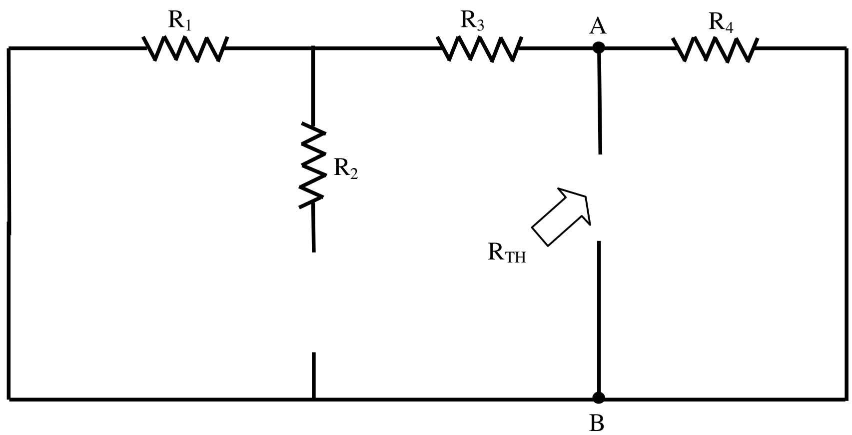


Fig. 8.4 - Resistência de Thévenin no circuito mostrado na Fig. 8.1

Observe que a resistência de Thévenin, na Fig. 8.4, consiste da soma de R_1 e R_3 em paralelo com R_4.

Exemplo 8.1) No circuito mostrado na Fig. 8.5 determine a corrente e a tensão na resistência R utilizando as leis de Kirchhoff e utilizando o teorema de Thévenin.

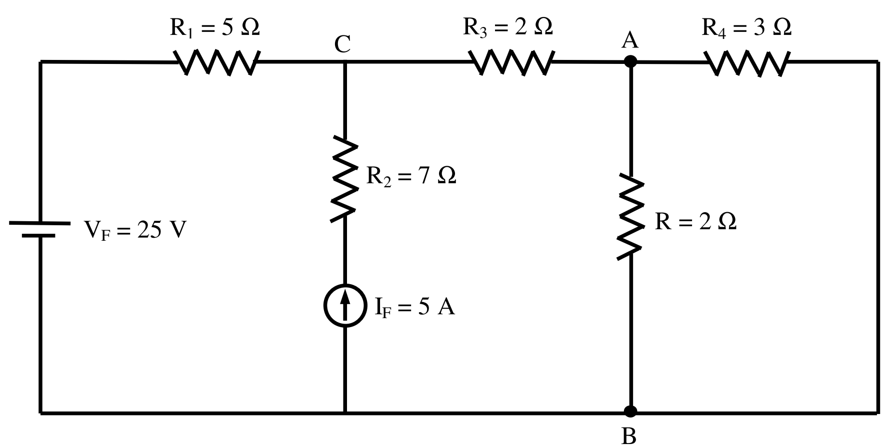


Fig. 8.5 - Circuito do exemplo 8.1

Resolução do exemplo 8.1 utilizando as leis de kirchhoff:

Escolha da direção das correntes e tensões no circuito mostrado na Fig. 8.5.

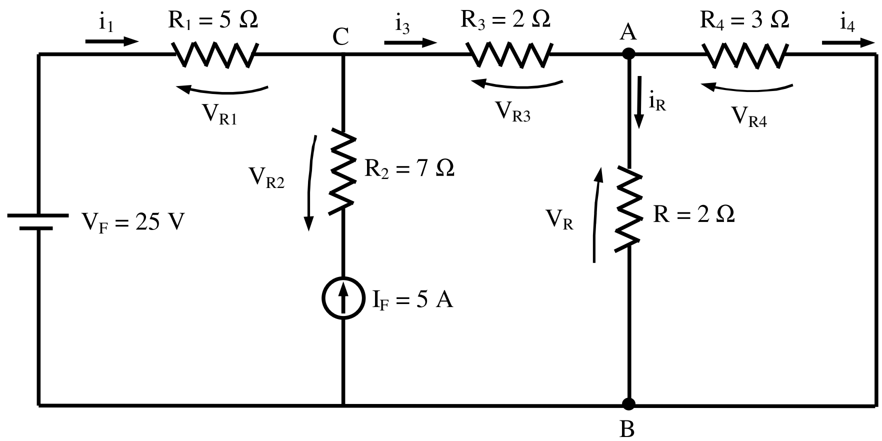


Fig. 8.6 - Escolha das correntes e tensões no circuito do exemplo 8.1

Aplicando a primeira lei de Kirchhoff nos nós A e C do circuito mostrado na Fig. 8.6 é possível escrever as seguintes equações:

$$i_3 - i_1 = I_F \tag{8.1}$$

$$i_3 - i_4 - i_R = 0 \tag{8.2}$$

Utilizando a segunda lei de Kirchhoff, obtém-se:

$$V_{R1} + V_{R3} + V_R = V_F \tag{8.3}$$

$$V_R - V_{R4} = 0 \tag{8.4}$$

Utilizando a lei de Ohm é possível escrever as equações (8.3) e (8.4) em função das correntes no circuito, fazendo com que tais equações sejam escritas como sendo:

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 + R\, i_R = V_F \tag{8.5}$$

$$R\, i_R - R_4 i_4 = 0 \tag{8.6}$$

As equações (8.1), (8.2), (8.5) e (8.6) constituem um sistema de quatro equações algébricas e quatro incógnitas (correntes i_1, i_3, i_4 e i_R).

Resolvendo este sistema obtém-se $i_R = 3{,}6585$ A.

A tensão no resistor R, obtida a partir da aplicação da lei de Ohm, possui valor $V_R = 7{,}3170$ V.

Resolução do exemplo 8.1 utilizando o teorema de Thévenin:

Retirando a carga do circuito mostrado na Fig. 8.5, verifica-se que a tensão de Thévenin deve ser calculada no circuito mostrado na Fig. 8.7.

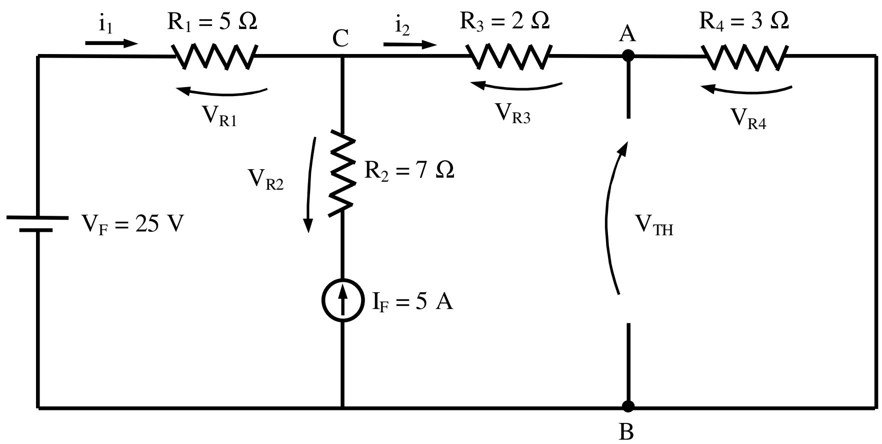


Fig. 8.7 - Escolha das correntes e tensões no circuito do exemplo 8.1

Com base na segunda lei de Kirchhoff, conclui-se que a tensão de Thévenin, no circuito mostrado na Figura 8.7, é igual à tensão V_{R4}.

Utilizando as leis de Kirchhoff e a lei de Ohm, chega-se á conclusão que $V_{TH} = 15$ V .

Para obter a resistência de Thévenin as fontes V_F e I_F do circuito mostrado na Fig. 5.1 devem ser colocada em curto-circuito e em aberto, respectivamente, conforme mostra a Fig. 8.8.

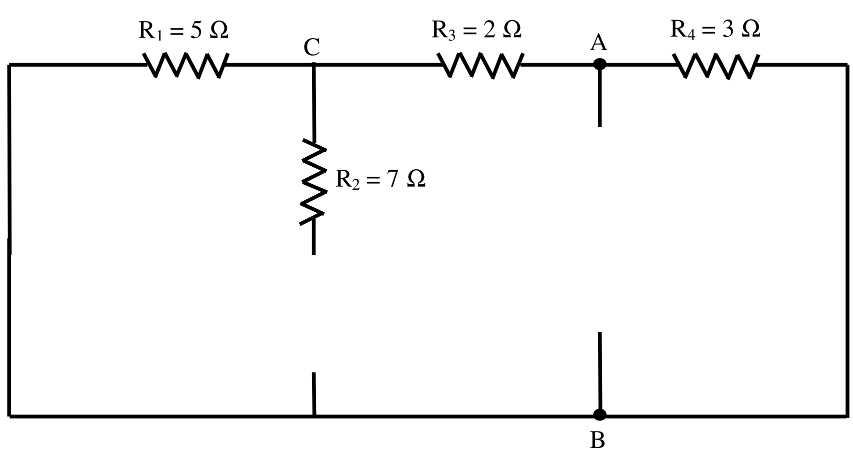


Fig. 8.8 - Resistência de Thévenin

A resistência de Thévenin, que é a resistência "enxergada" a partir dos pontos A e B no circuito mostrado na Fig. 8.8, é escrita como sendo:

$$R_{TH} = \frac{R_X R_4}{R_X + R_4} \quad \text{, onde } R_X = R_1 + R_3 \tag{8.7}$$

A partir de (8.7) chega-se que $R_{TH} = 2{,}1\ \Omega$.

Então, o circuito equivalente de Thévenin, para o circuito mostrado na Fig. 8.5, é o circuito mostrado na Fig. 8.9.

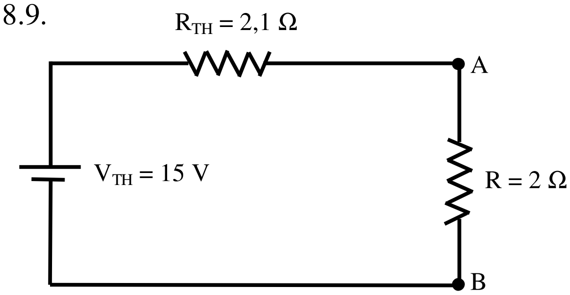


Fig. 8.9 - Circuito equivalente de Thévenin para o circuito mostrado na Fig. 8.5

Calculando a corrente e a tensão no resistor R, no circuito mostrado na Fig. 8.9, obtém-se os mesmos valores que foram obtidos quando tais valores foram calculados a partir das leis de Kirchhoff.

A Fig. 8.10 mostra a corrente e a tensão no resistor R, que foram obtidas a partir do circuito mostrado na Fig. 8.9.

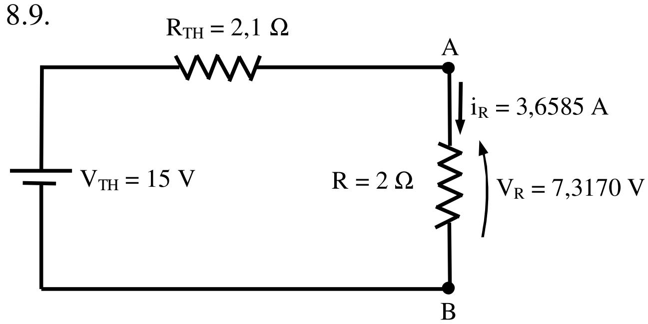


Fig. 8.10 - Correntes e tensões no resistor R, no circuito mostrado na Fig. 8.5, obtidas a partir do teorema de Thévenin

Observe que V_{TH} e R_{TH}, no circuito equivalente de Thévenin, são valores únicos independentemente do valor assumido pela carga (no caso do exemplo 1, a carga é o resistor R). Portanto, o teorema de Thévenin é bastante útil quando se deseja calcular o valor da corrente e da tensão em uma carga em um circuito, considerando que tal carga pode assumir diversos valores no circuito.

Exercício 8.1) Calcule a corrente e a tensão no resistor R_2, no circuito mostrado na Fig. 8.11, utilizando análise de malhas e utilizando o teorema de Thévenin.

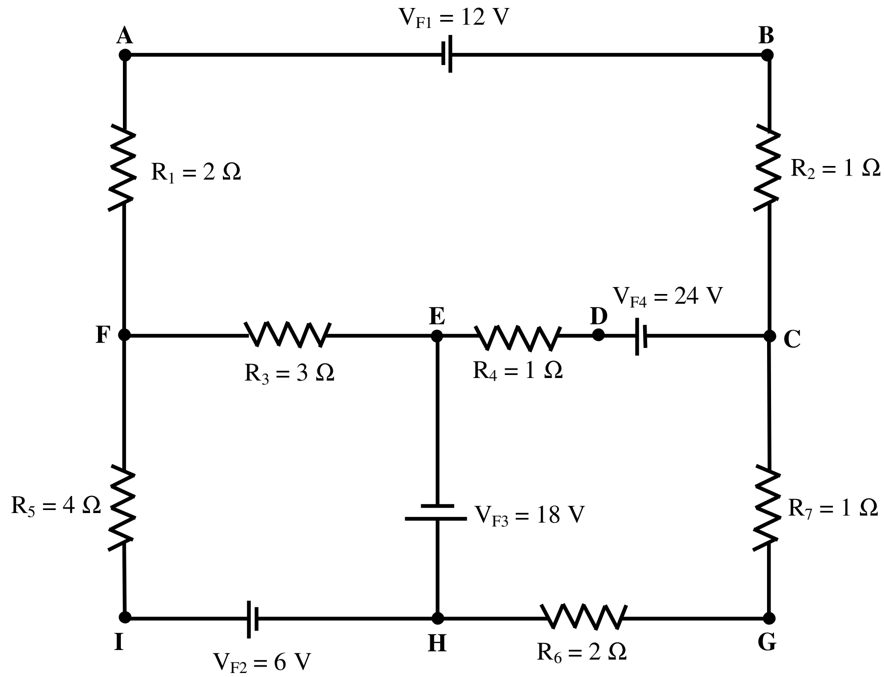


Fig. 8.11 - Circuito do exercício 8.1

Exercício 8.2) Repita o exercício 8.1, considerando agora que a carga é o resistor R_4.

Exercício 8.3) Determine o circuito equivalente de Thévenin para o circuito mostrado na Fig. 8.12, considerando que a carga neste circuito é o resistor R_4. Em seguida, utilizando o circuito equivalente de Thévenin, determine a corrente e a tensão na carga.

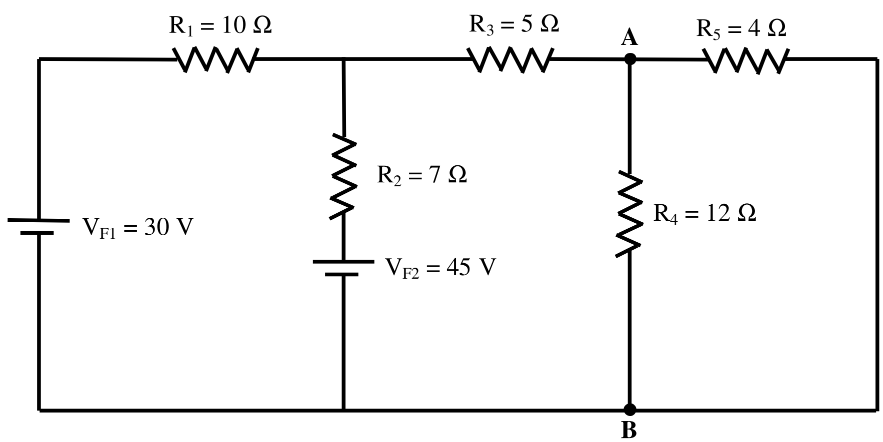


Fig. 8.12 - Circuito do exercício 8.3

Exercício 8.4) Repita o exercício 8.3, considerando agora que a resistência do resistor R_4 é 7 Ω.

Capitulo 9

Teorema da Superposição

9.1 - Introdução

É possível verificar que em todos os circuitos que foram analisados até o presente momento são sistemas lineares. Deste modo é possível utilizar o princípio da superposição para calcular as correntes e tensões que são alimentados por mais de uma fonte.

9.2 - Teorema da superposição

O princípio da superposição estabelece que a resposta (a corrente e/ou a tensão) em qualquer parte de um circuito linear que tenha mais de uma fonte independente pode ser obtida a partir da soma das respostas originadas pela ação de cada fonte independente agindo sozinha.

Assim o teorema da superposição garante que em qualquer circuito, que contenha mais de uma fonte, a corrente ou a tensão pode ser obtida somando-se algebricamente todas as corrente ou tensões causadas pela ação individual de cada fonte, que exista no circuito, sendo todas as outras fontes de tensão substituídas por curto-circuitos e as fontes de corrente substituídas por circuitos abertos.

Para entender o teorema da superposição, considere o circuito mostrado na Fig. 9.1 onde se deseja calcular a tensão e/ou a corrente no resistor R_5 , situado entre os nós A e B do circuito.

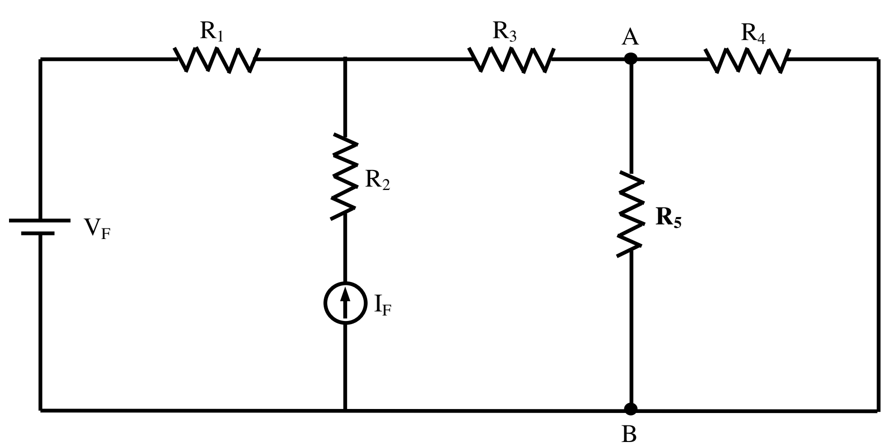


Fig. 9.1 - Circuito para explicação do teorema da superposição

Verifica-se que o circuito mostrado na Fig. 9.1 é alimentado por duas fontes. Para calcular a tensão e a corrente no resistor R_5 calcula-se a corrente e a tensão em R_5 devido à cada uma das fontes individualmente e, em seguida, soma-se os efeitos devido à cada uma das fontes.

9.2.1 - Efeito da fonte de tensão V_F

Para calcular a tensão e a corrente em R_5 devido à fonte de tensão V_F, deve-se abrir a fonte de corrente. Abrindo a fonte de corrente, no circuito mostrado na Fig. 9.1, obtém-se o circuito mostrado na Fig. 9.2

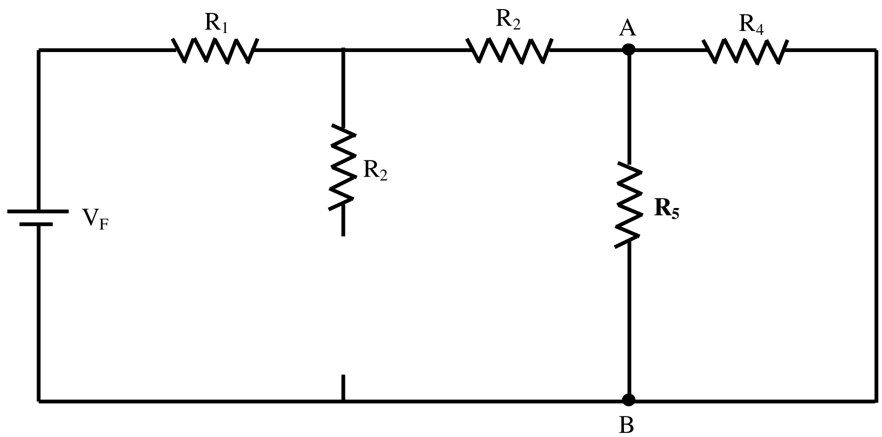


Fig. 9.2 - Circuito sem a fonte I_F

Em seguida calcula-se a corrente e a tensão em R_5 no circuito mostrado na Fig. 9.2. Observe que não haverá corrente circulando em R_2 e, consequentemente, a tensão sobre este elemento é nula e o mesmo pode ser retirado do circuito. Na Fig. 9.3 são mostrados a corrente e a tensão em R_5 devido à fonte V_F.

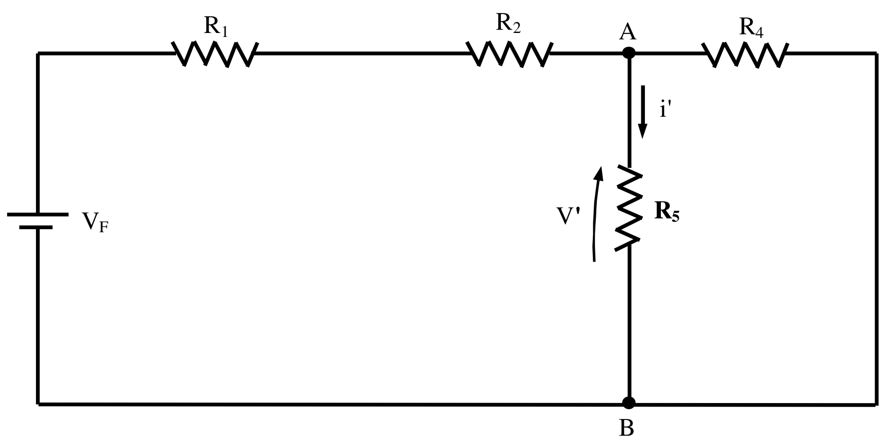


Fig. 9.3 - Corrente e tensão em R_5 devido à fonte de tensão V_F

A tensão e a corrente em R_5 podem ser obtidas utilizando qualquer um dos métodos estudados (leis de Kirchhoff, análise de malhas ou teorema de Thévenin).

9.2.2 - Efeito da fonte de corrente I_F

O efeito da fonte de corrente I_F no resistor R_5 é obtida após a retirada das demais fontes (no caso, somente V_F) do circuito. Uma vez que V_F é uma fonte de tensão, deve-se curto-circuitar a mesma conforme mostra a Fig. 9.4.

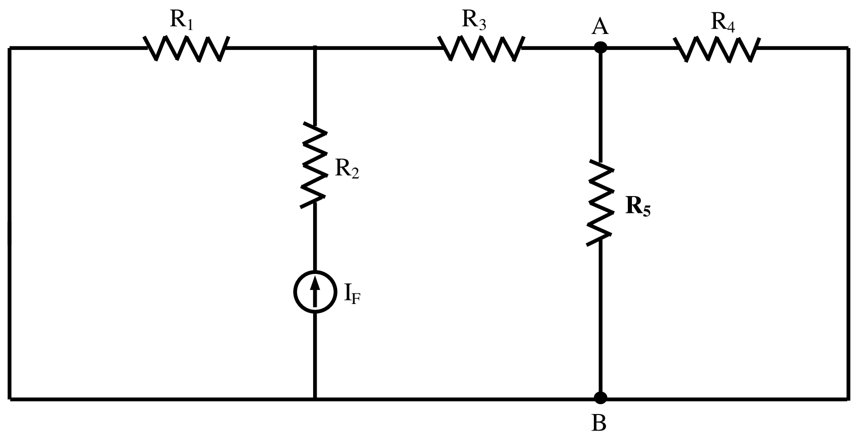


Fig. 9.4 - Circuito sem a fonte V_F

A próxima etapa consiste em calcular a corrente e a tensão sobre o resistor R_5 no circuito mostrado na Fig. 9.4.

A Fig. 9.5 mostra a tensão e a corrente em R_5, devido somente à fonte I_F.

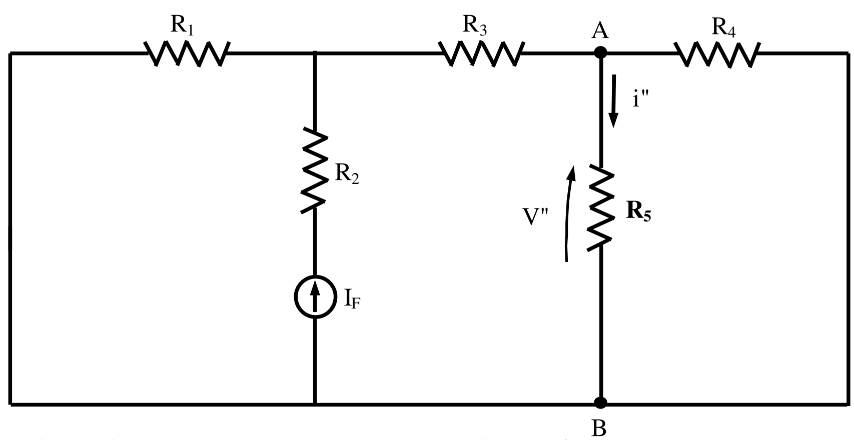


Fig. 9.5 - Corrente e tensão em R_5 devido à fonte de corrente I_F

A tensão e a corrente em R_5 podem ser obtidas utilizando qualquer um dos métodos estudados (leis de Kirchhoff, análise nodal ou teorema de Thévenin).

9.2.3 - Superposição dos efeitos das fontes

Para obter a corrente e a tensão no resistor R_5 deve-se fazer a superposição dos efeitos ou seja, a corrente total no resistor é igual á soma das correntes devido à cada uma das fontes individuais e a tensão no resistor é igual à soma das tensões devido á cada uma das fontes presentes no circuito. Deste modo, obtém-se:

$$i = i' + i'' \tag{9.1}$$

$$V = V' + V'' \tag{9.2}$$

Nas equações (9.1) e (9.2) i e V são, respectivamente, a corrente e a tensão no resistor R_5, no circuito mostrado na Fig. 9.1.

Exemplo 9.1) Utilize o teorema da superposição para determinar, no circuito mostrado na Fig. 9.6, a tensão V_6 sobre o resistor R_6.

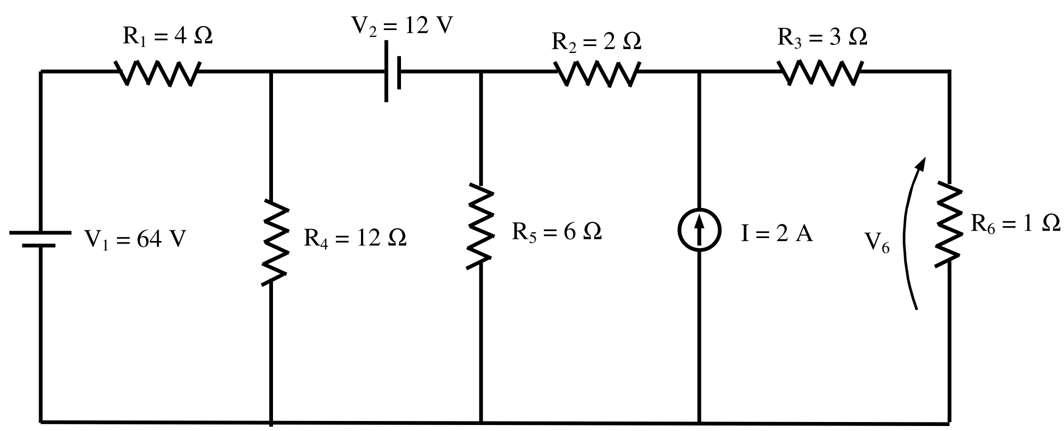


Fig. 9.6 - Circuito do exemplo 9.1

Para calcular a contribuição da fonte de tensão V_1 para tensão sobre o resistor R_6 é necessário abrir a fonte de corrente e colocar a fonte de tensão V_2 em curto-circuito, conforme mostra a Fig. 9.7.

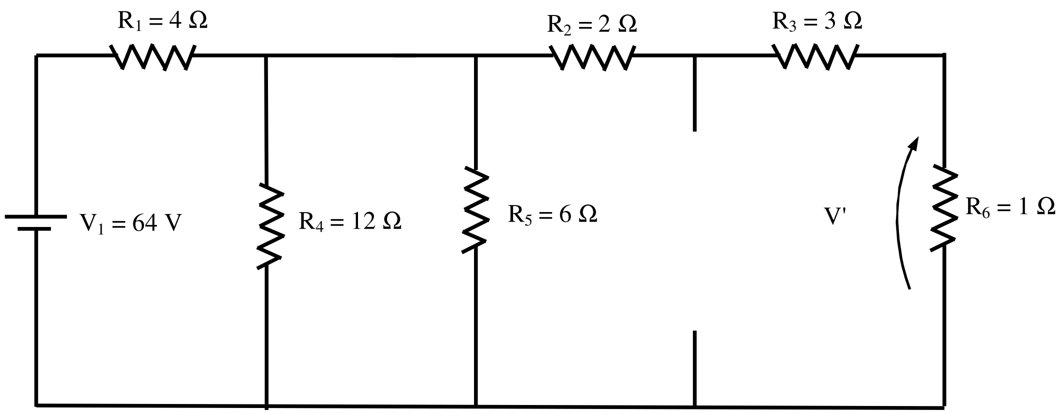


Fig. 9.7 - Contribuição da fonte de tensão V_1 para a tensão sobre R_6

Na Fig. 9.7 V' é a tensão sobre R_6 devido à contribuição da fonte de tensão V_1. Utilizando as Leis de Kirchhof, análise de malhas ou o teorema de Thévenin obtém-se V'= 4 V.

Para calcular a contribuição da fonte de tensão V_2 para a tensão sobre R_6 deve-se abrir a fonte de corrente e colocar a fonte de tensão V_1 em curto-circuito, conforme mostra a Fig. 9.8.

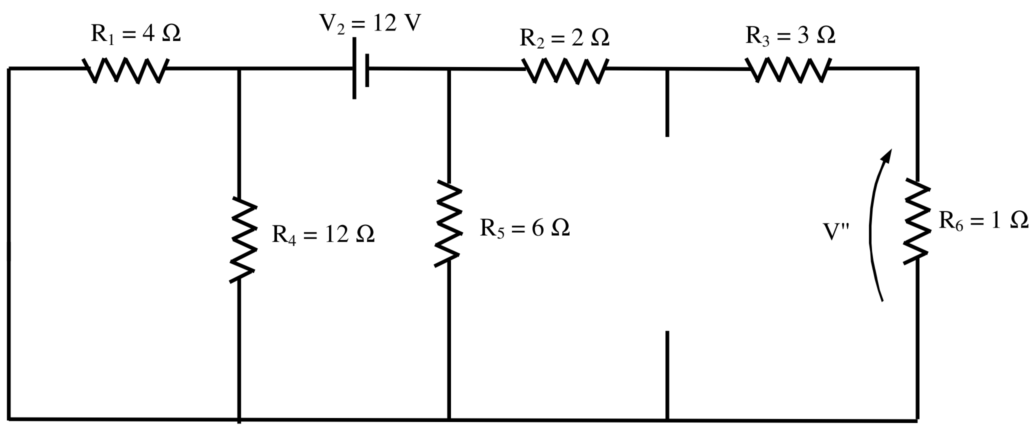


Fig. 9.8 - Contribuição da fonte de tensão V_2 para a tensão sobre R_6

Na Fig. 9.8 V'' é a tensão sobre R_6 devido à contribuição da fonte de tensão V_2. Utilizando as Leis de Kirchhof, análise de malhas ou o teorema de Thévenin obtém-se V''= -1 V.

Para obter a contribuição da fonte de corrente para a tensão sobre R_6 é necessário colocar as fontes de tensão V_1 e V_2 em curto-circuito, conforme mostra a Fig. 9.9.

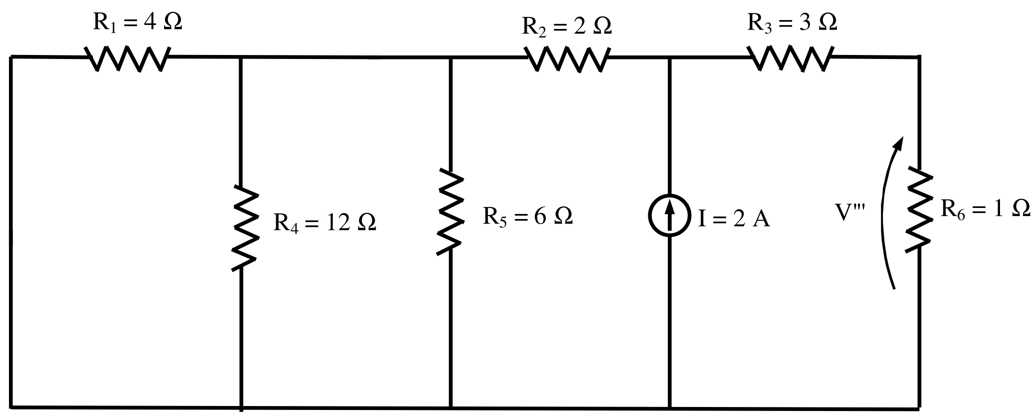


Fig. 9.9 - Contribuição da fonte de corrente para a tensão sobre R_6

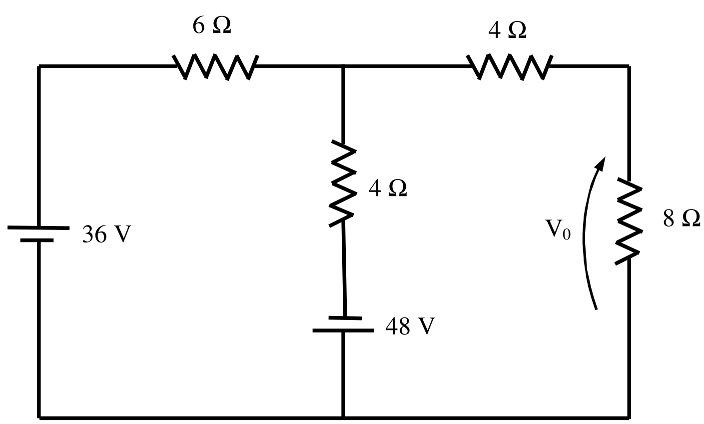
Na Fig. 9.9 V''' é a tensão sobre R_6 devido à contribuição da fonte de corrente. Utilizando as Leis de Kirchhof, análise nodal ou o teorema de Thévenin obtém-se V''= 1 V.

De acordo com o teorema da superposição, a tensão sobre o resistor R_6, no circuito mostrado na Fig. 9.6, é igual à soma das tensões V', V'' e V'''. Portanto obtém-se $V_6 = 4$ V.

Para certificar-se da validade do teorema da superposição calcule a tensão V_6, na Fig. 9.6, utilizando as Leis de Kirchhoff.

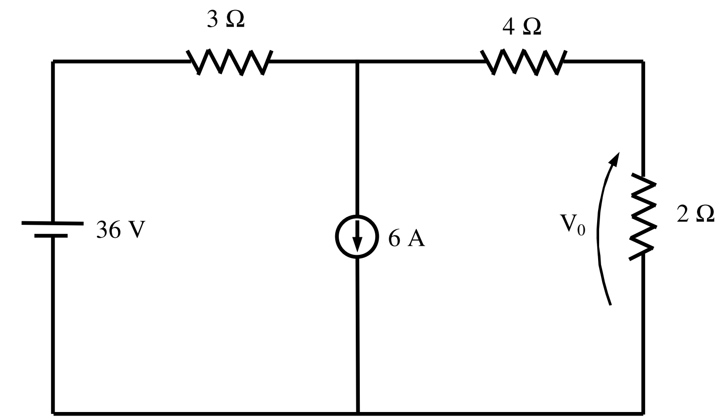
Exercício 9.1) Determine, nos circuitos mostrados em seguida, a tensão V_0 utilizando o teorema da superposição.

a)



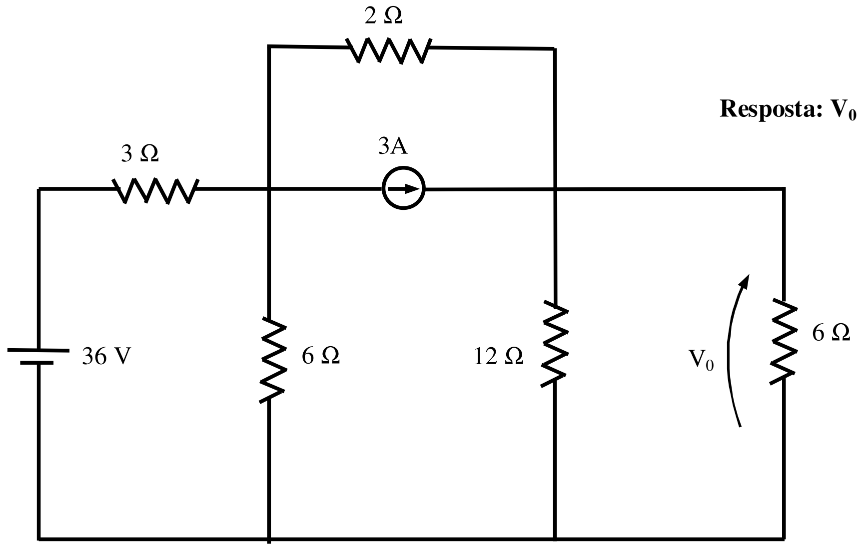
Resposta: V_0 = -8 V

b)



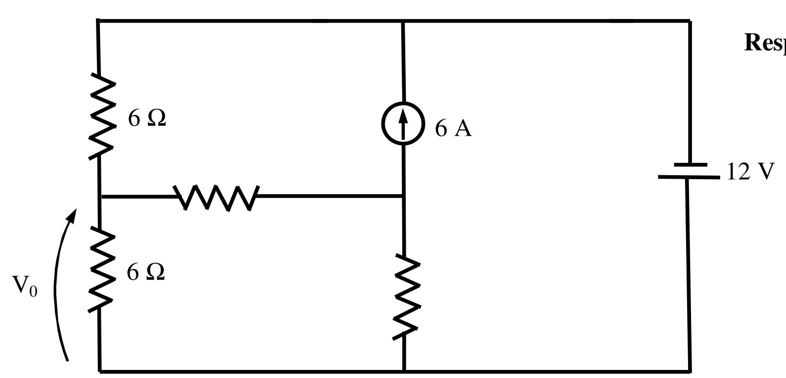
Resposta: V_0 = 4 V

c)



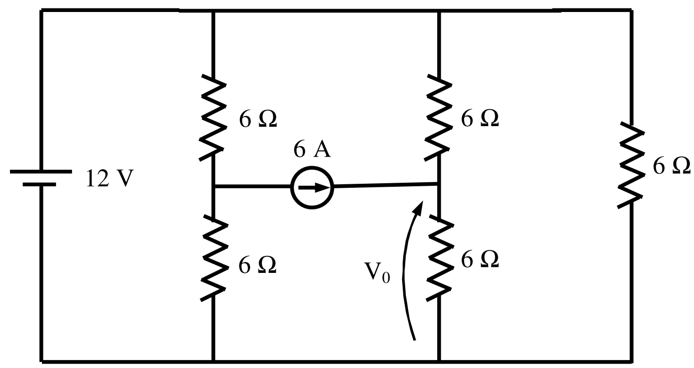
Resposta: V_0 = 15 V

d)



Resposta: V_0 = -12 V

e)



Resposta: $V_0 = 24$ V

Capitulo 10

Teorema da Máxima Transferência de Potência

10.1 - Introdução

O teorema da máxima transferência permite determinar qual é a máxima potência que um circuito pode transferir para uma carga.

10.2 - Potência transferida, por um circuito, para uma carga

Considere um circuito genérico que alimenta uma carga. No capítulo 8 foi mostrado que um circuito genérico pode ser representado por um circuito equivalente de Thévenin do tipo mostrado na Fig. 10.1.

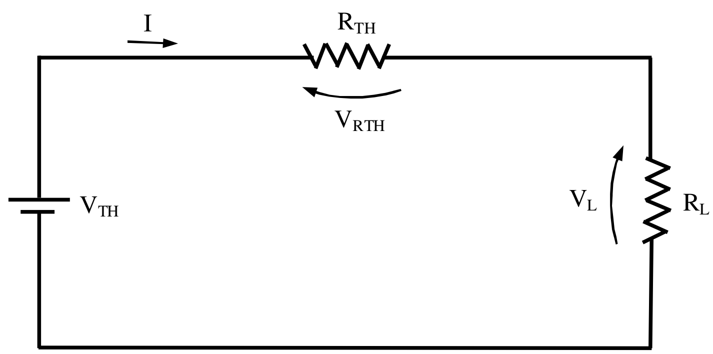


Fig. 10.1 - Circuito equivalente de Thévenin alimentando uma carga resistiva R_L

Na Fig. 10.1 V_{TH} é a tensão de Thévenin do circuito, R_{TH} é a resistência equivalente de Thévenin e o resistor R_L é a carga resistiva do circuito.

No circuito equivalente de Thévenin a corrente I faz com que o resistor R_{TH} e a carga (resistor R_L) fiquem sujeitos às tensões V_{RTH} e V_L, respectivamente.

Aplicando a segunda lei de Kirchhoff no circuito mostrado na Fig. 10.1 têm-se:

$$V_{TH} - (R_{TH} + R_L)\, I = 0 \qquad (10.1)$$

De (10.1) obtém-se que a corrente I no circuito é escrita como sendo:

$$I = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} \qquad (10.2)$$

Com base na lei de Ohm verifica-se que a tensão V_L na carga é dada por:

$$V_L = R_L\, I \tag{10.3}$$

Substituindo (10.2) em (10.3) obtém-se:

$$V_L = \frac{R_L}{R_{TH}+R_L}\, V_{TH} \tag{10.4}$$

A potência P_L consumida pela carga R_L é escrita como sendo:

$$P_L = V_L\, I \tag{10.5}$$

Substituindo (10.2) e (10.4) em (10.5), verifica-se que a potência fornecida para a carga é função de sua resistência R_L (considerando que as fontes e as demais resistências do circuito são constantes) e é escrita como sendo:

$$P_L = {V_{TH}}^2\, \frac{R_L}{(R_{TH}+R_L)^2} \tag{10.6}$$

A partir de (10.6) verifica-se que o gráfico da potência fornecida para a carga em função da resistência da carga possui o aspecto mostrado na Fig. 10.2.

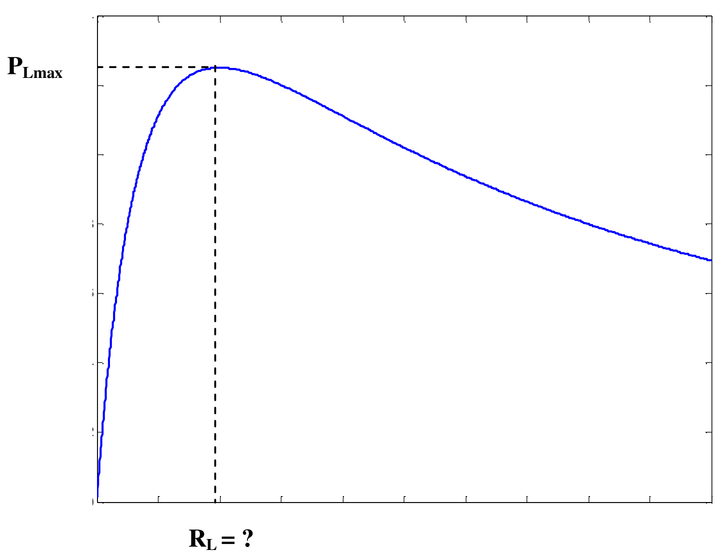


Fig. 10.2 - Potência fornecida para a carga em função de sua resistência R_L

A Fig. 10.2 mostra que existe um valor da resistência da carga R_L para o qual a potência fornecida para esta carga é máxima.

10.3 - Máxima potência transferida para uma carga

Para determinar o máximo valor de potência que é transferida para uma carga, bem como o valor da resistência da carga para que ocorra a máxima transferência de potência, deve-se calcular o ponto de máximo da função descrita em (10.6).

Derivando (10.6) em relação à R_L obtém-se:

$$\frac{d\,P_L}{d\,R_L} = \frac{V_{TH}{}^2\,(R_{TH}+R_L)^2 - 2\,(R_{TH}+R_L)\,V_{TH}{}^2\,R_L}{(R_{TH}+R_L)^4} \qquad (10.7)$$

No ponto de máximo de uma função a sua derivada deve ser nula. Deste modo, fazendo (10.7) igual a zero obtém-se:

$$V_{TH}{}^2\,(R_{TH}+R_L)^2 - 2\,(R_{TH}+R_L)\,V_F{}^2\,R_L = 0 \qquad (10.8)$$

A partir de (10.8) obtém-se:

$$R_L = R_{TH} \qquad (10.9)$$

A equação (10.9) mostra que para que uma carga receba a máxima potência do circuito, ao qual ela está conectada, a mesma deve ter uma resistência igual à resistência de Thévenin do circuito.

Para determinar a máxima potência que o circuito consegue fornecer para a carga, deve-se substituir (10.9) em (10.6) obtendo -se então:

$$P_{Lmax} = \frac{V_{TH}{}^2}{4R_{TH}} \qquad (10.10)$$

Em (10.10) P_{Lmax} é o valor da máxima potência transferida para a carga e este valor é obtido quando a resistência da carga é igual a R_{TH}. Nestas condições, verifica-se que metade da potência fornecida pela fonte vai para a carga R_L e metade é dissipada nos demais resistores do circuito. Portanto, quando um circuito está operando na condição de máxima transferência de potência o rendimento do mesmo será 50%.

Exemplo 10.1) No circuito mostrado na Fig. 10.2 determine o valor da resistência R da carga de modo que ocorra a máxima transferência de potência para a mesma. Determine também o valor da máxima potência que pode ser transferida para a carga.

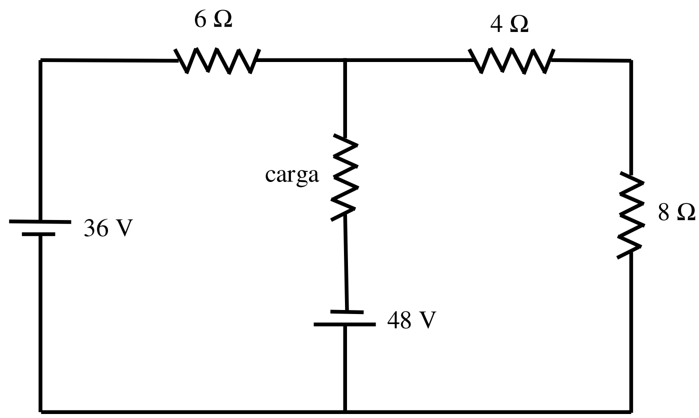


Fig. 10.2 - Circuito do exemplo 10.1

Inicialmente deve ser obtido o circuito equivalente de Thévenin para o circuito mostrado na Fig. 10.2, que é constituído por uma fonte de tensão (tensão de Thévenin), pela resistência de Thévenin e pela carga, sendo que todos estes bipolos estão conectados em série.

Para obter a tensão de Thévenin, é necessário retirar a carga do circuito e em seguida calcular a tensão entre os pontos nos quais a carga estava conectada. Retirando a carga do circuito mostrado na Fig. 10.2 obtém-se o circuito mostrado na Fig. 10.3.

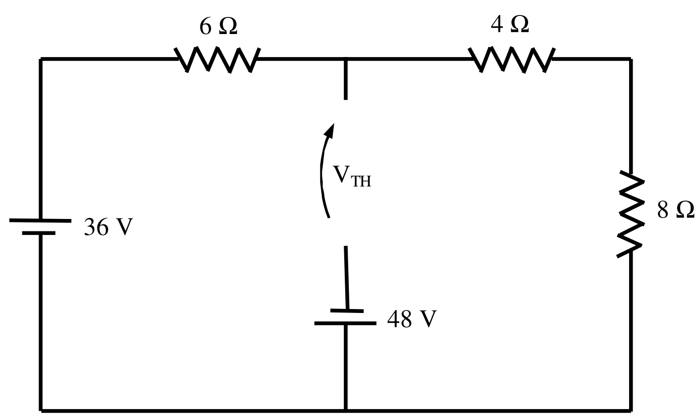


Fig. 10.3 - Circuito para o cálculo da tensão de Thévenin

A partir do circuito mostrado na Fig. 10.3 obtém-se $\mathbf{V_{TH} = 72\ V}$.

A resistência de Thévenin é obtida retirando-se a carga e anulando-se as fontes do circuito (as fontes de tensão devem-se ser colocadas em curto-circuito) conforme mostra a Fig. 10.4.

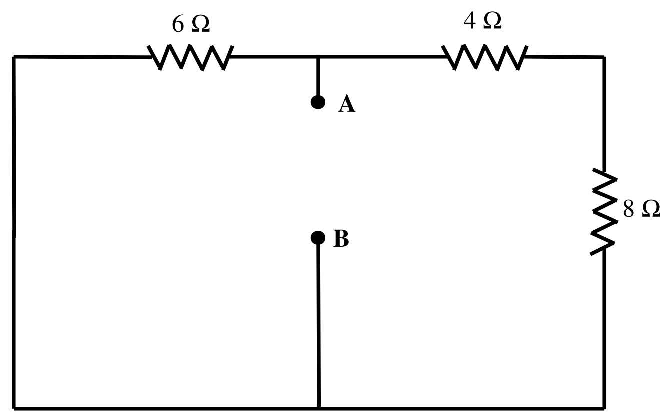


Fig. 10.4 - Circuito para o cálculo da resistência de Thévenin

Calculando a resistência de Thévenin, que é a resistência entre os pontos A e B do circuito mostrado na Fig. 10.4, obtém-se $\mathbf{R_{TH} = 4\ \Omega}$.

A Fig. 10.5 mostra o circuito equivalente de Thévenin para o circuito mostrado na Fig. 10.2.

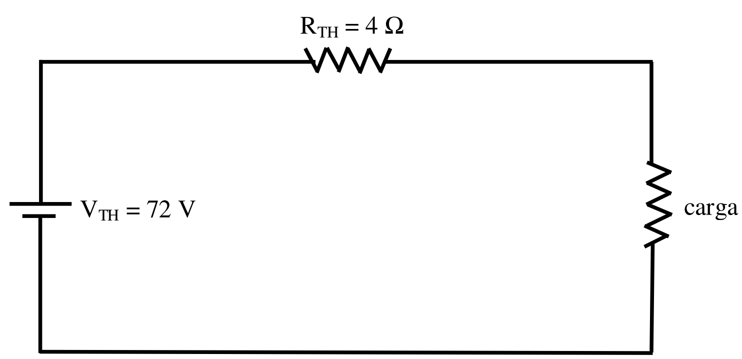
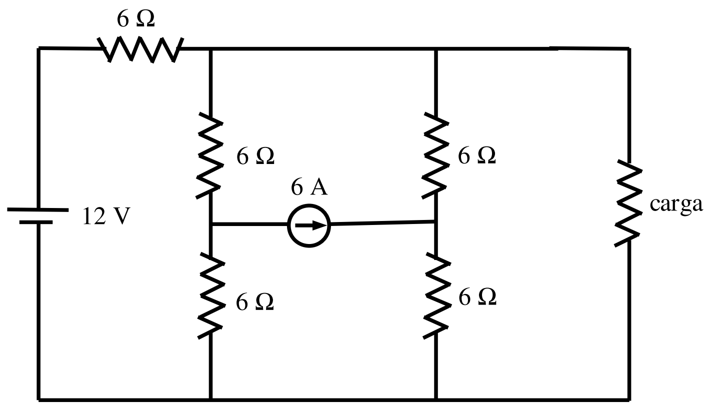


Fig. 10.5 - Circuito equivalente de Thévenin

Sabe-se que para que a carga receba a máxima potência do circuito, a resistência da mesma mesma deve ser igual à resistência de Thévenin do circuito. Deste modo conclui-se que a carga do circuito mostrado na Fig. 10.2 deve ter uma resistência $\mathbf{R = 4\ \Omega}$, valor este que garante que tal carga receberá a máxima potência do circuito. Nestas condições, verifica-se que a carga recebe uma potência igual a **324 W**, valor este que pode ser obtido da equação (10.10) ou a partir do circuito mostrado na Fig. 10.5.

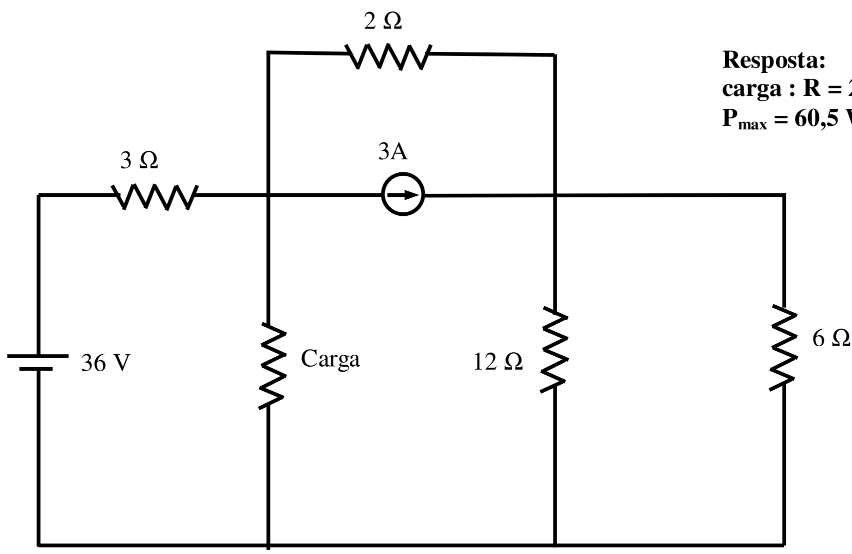
Exercícios) Nos circuito mostrado em seguida, determine o valor da resistência R da carga de modo que ocorra a máxima transferência de potência para a mesma. Determine também o valor da máxima potência que pode ser transferida para a carga.

a)



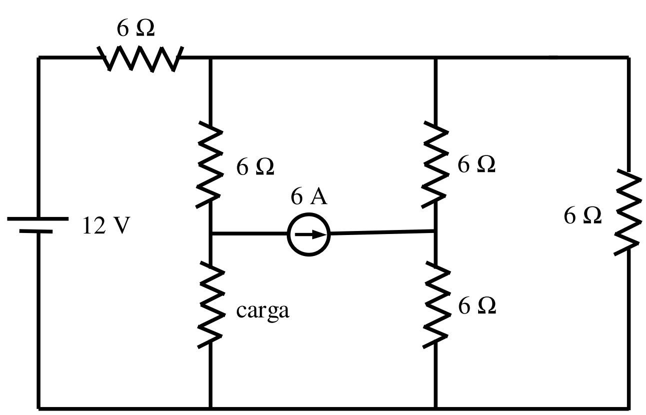
Resposta:
carga : R = 3 Ω
P_{max} = 3 W

b)



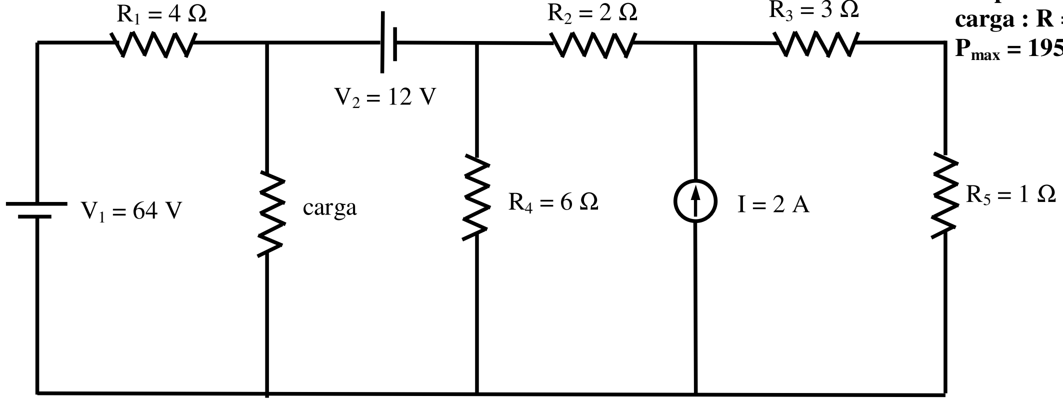
Resposta:
carga : R = 2 Ω
P_{max} = 60,5 W

c)



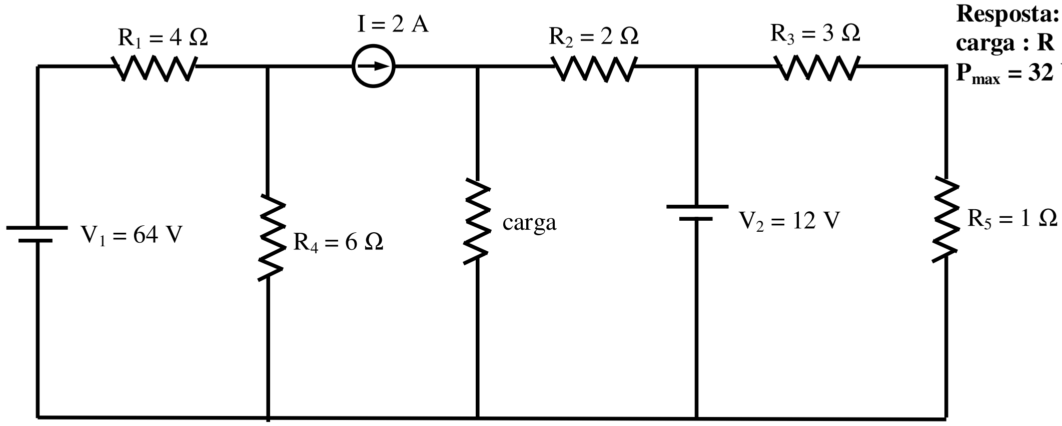
Resposta:
carga : R = 8,4 Ω
P_{max} = 24,6857 W

d)



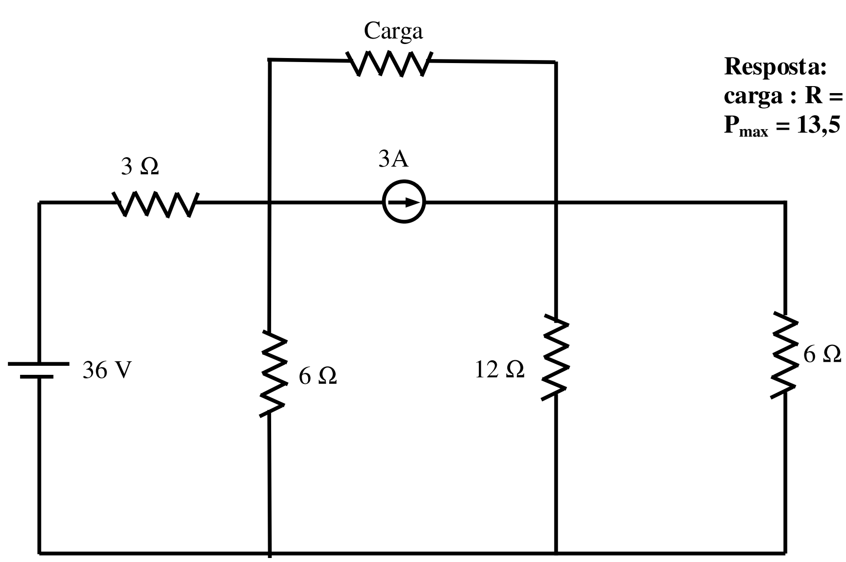
Resposta:
carga : R = 1,7143 Ω
P_{max} = 195,0476 W

e)



Resposta:
carga : R = 2 Ω
P_{max} = 32 W

f)



Resposta:
carga : R = 6 Ω
P_{max} = 13,5 W

Capitulo 11

Teorema da Transformação de Fontes

11.1 - Introdução

O teorema da transformação de fontes garante que uma fonte de tensão não ideal pode ser transformada em uma fonte de corrente não ideal. O contrário também é verdadeiro ou seja, uma fonte de corrente não ideal pode ser transformada em uma fonte de tensão não ideal.

11.2 - Fonte de tensão não ideal

Nos capítulos iniciais foi dito que uma fonte de tensão, com uma tensão nominal V, fornece uma tensão V_N em seus terminais independentemente da carga conectada entre os mesmos. Esta descrição, no entanto, somente é válida para fontes de tensão ideais.

Uma fonte de tensão real é constituída de uma fonte de tensão ideal conectada em série com uma resistência (denominada resistência interna da fonte de tensão). A Fig. 11.1 mostra uma fonte de tensão real de tensão nominal V, com uma resistência interna R_v, alimentando uma carga R.

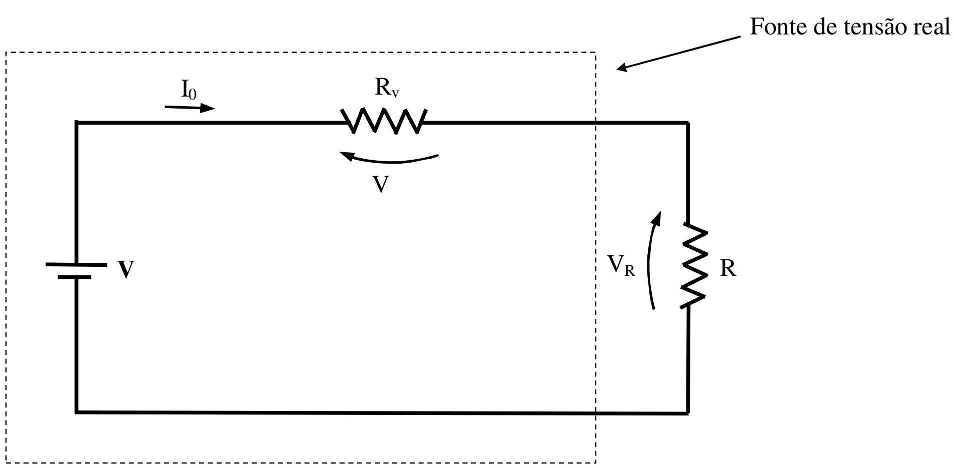


Fig. 11.1 – Fonte de tensão alimentando uma carga resistiva

Utilizando a lei de Ohm, juntamente com a segunda lei de Kirchhoff, verifica-se que a tensão V_R nos terminais da fonte, quando a mesma alimenta uma resistência R, é escrita como sendo:

$$V_R = \frac{R}{R_V + R}\, V \tag{11.1}$$

A expressão (11.1) mostra que a tensão na carga, que é alimentada por uma fonte de tensão real, depende da resistência desta carga.

11.3 - Fonte de corrente não ideal

Uma fonte de corrente ideal foi definida, nos capítulos anteriores, como sendo um dispositivo capaz de fornecer uma corrente I_N em seus terminais independentemente da carga conectada entre os mesmos. No entanto, uma fonte de corrente ideal não existe, sendo que uma fonte de corrente real é constituída de uma fonte de corrente ideal conectada em paralelo com uma resistência denominada resistência interna da fonte de corrente. A Fig. 11.2 mostra uma fonte de corrente real de corrente nominal I, com uma resistência interna R_I, alimentando uma carga R.

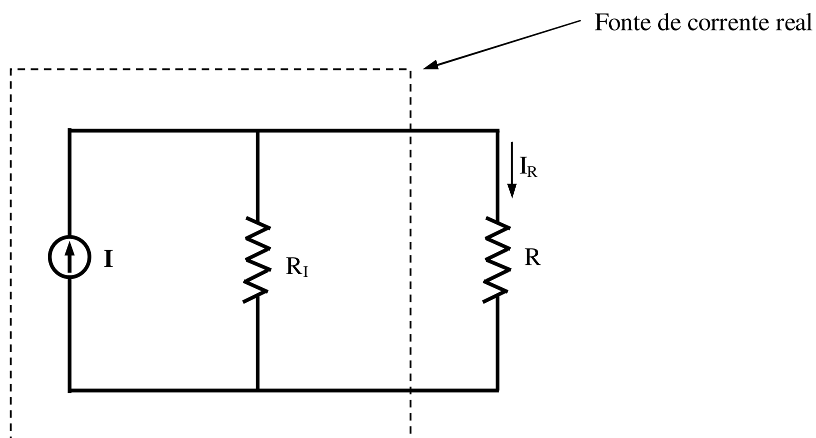


Fig. 11.2 – Fonte de corrente alimentando uma carga resistiva

Utilizando a lei de Ohm, juntamente com a primeira lei de Kirchhoff, verifica-se que a corrente I_R nos terminais da fonte, quando a mesma alimenta uma resistência R, é escrita como sendo:

$$I_R = \frac{R_I}{R_I + R}\, I \tag{11.2}$$

A expressão (11.2) mostra que a corrente na carga, que é alimentada por uma fonte de corrente real, é função da resistência R desta carga.

11.4 – Teorema da transformação de fontes

O teorema da transformação de fontes diz que uma fonte de corrente pode ser substituída por uma fonte de tensão, sem que a corrente e a tensão na carga sejam alteradas. Do mesmo modo, uma fonte de tensão pode ser transformada em uma fonte de corrente sem que a corrente e a tensão na carga sofram alterações.

Considere então que uma carga, com resistência R, que é alimentada por uma fonte de tensão conforme mostra a Fig. 11.3.

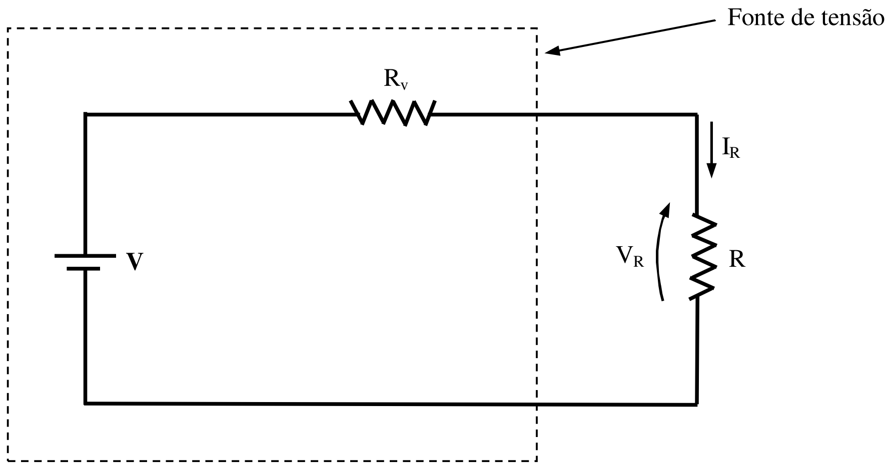


Fig. 11.3 – Carga R alimentada por uma fonte de tensão

O teorema da transformação de fontes diz que a fonte de tensão mostrada na Fig. 11.3 pode ser substituída por uma fonte de corrente sem que a corrente e a tensão na carga seja alterada. Transformando a fonte de tensão em uma fonte de corrente obtém-se o circuito mostrado na Fig. 11.4.

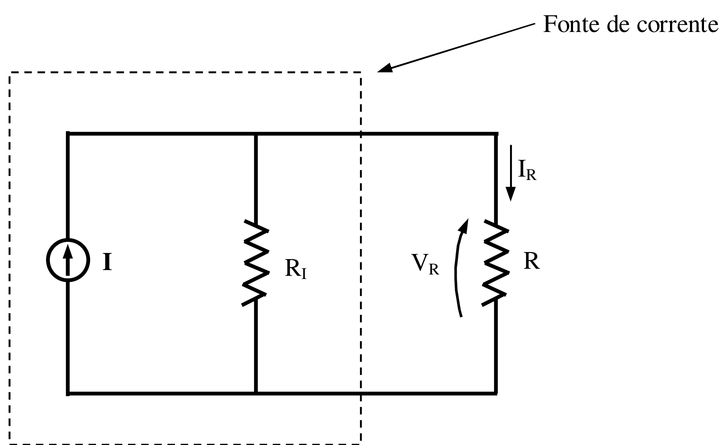


Fig. 11.4 – Carga R alimentada por uma fonte de corrente

Agora, é necessário determinar as relações entre V, R_v, I e R_I, nos circuitos mostrados nas Figs. 11.3 e 11.4, de modo que a carga R esteja submetida à mesma tensão e à mesma corrente.

Aplicando a segunda lei de Kirchhoff e a lei de Ohm no circuito mostrado na Fig. 11.3 obtém-se:

$$I_R = \frac{V}{R_v} - \frac{V_R}{R_v} \qquad (11.3)$$

Aplicando a primeira lei de Kirchhoff e a lei de Ohm no circuito mostrado na Fig. 11.4 obtém-se:

$$I_R = I - \frac{V_R}{R_i} \qquad (11.4)$$

Comparando (11.3) e (11.4) obtém-se as seguintes relações entre V, R_v, I e R_I:

$$I = \frac{V}{R_v} \qquad (11.5)$$

$$R_I = R_v \qquad (11.6)$$

Conclui-se então que uma fonte de tensão, com tensão nominal V e com resistência interna R_v, pode ser substituída por uma fonte de corrente com corrente nominal dada por 11.5. Esta fonte de corrente deve ter uma resistência interna igual à resistência interna da fonte de tensão. Deste modo, a carga estará submetida à tensão V_R e à corrente I_R independentemente de ser alimentada pela fonte de tensão ou pela fonte de corrente.

Se as fontes mostradas nas Figs. 11.3 e 11.4 obedecerem (11.5) e (11.6) diz-se que tais fontes são equivalentes.

Exemplo 11.1) Determine a fonte de corrente equivalente à fonte de tensão mostrada na Fig. 11.5.

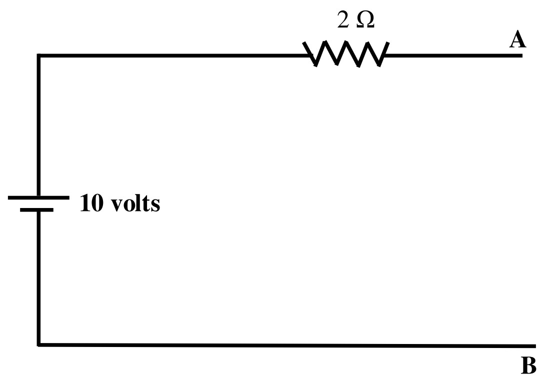


Fig. 11.5 – Fonte de tensão

É possível verificar, no circuito mostrado na Fig. 11.5, que a tensão nominal da fonte de tensão é V = 5 volts e que a resistência interna da fonte é R_v = 2 Ω. Substituindo V e R_v em (11.5) e (11.6) obtém-se I = 5 A e R_I = 2 Ω. A Fig. 11.6 mostra a fonte de corrente equivalente.

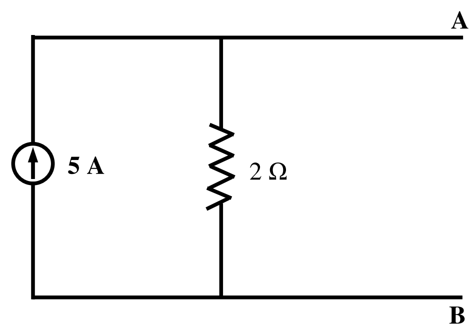


Fig. 11.6 – Fonte de corrente equivalente à fonte de tensão mostrada na Fig. 11.5

Exemplo 11.2) Utilizando as fontes mostradas nas Figs. 11.5 e 11.6 faça os itens descritos em seguida.

a) Determine a corrente e a tensão em uma resistência R = 10 Ω conectada entre os pontos A e B da fonte de tensão;
b) Determine a corrente e a tensão em uma resistência R = 10 Ω conectada entre os pontos A e B da fonte de corrente;
c) Determine a corrente e a tensão na resistência interna da fonte de tensão quando a mesma alimenta a resistência R = 10 Ω;
d) Determine a corrente e a tensão na resistência interna da fonte de corrente quando a mesma alimenta a resistência R = 10 Ω;

Item a: Conectando a resistência R = 10 Ω entre os pontos A e B da fonte de tensão verifica-se que esta resistência estará submetida a uma tensão igual a 8,333 volts e a uma corrente igual a 0,833 A.

Item B: Conectando a resistência R = 10 Ω entre os pontos A e B da fonte de corrente verifica-se que esta resistência estará submetida a uma tensão igual a 8,333 volts e a uma corrente igual a 0,833 A.

Item C: A tensão na resistência interna da fonte de tensão é 1,667 volts enquanto que a corrente na mesma é 0,833 A.

Item D: A tensão na resistência interna da fonte de corrente é 8,33 volts enquanto que a corrente na mesma é 4,167 A.

Conclui-se que as duas fontes fornecem a mesma corrente e a mesma tensão para a carga.

Observe-que o teorema da transformação de fontes *garante que a tensão e a corrente na **carga** não se alteram*. No entanto, tal teorema não pode ser aplicado na resistência interna da fonte. Verifica-se que na fonte de tensão a resistência interna fica submetida a 1,667 volts e a 0,833 A enquanto que na fonte de corrente a resistência interna fica submetida a 8,33 volts e a 4,167 A.

Exemplo 11.3) Determine a fonte de tensão equivalente à fonte de corrente mostrada na Fig. 11.7.

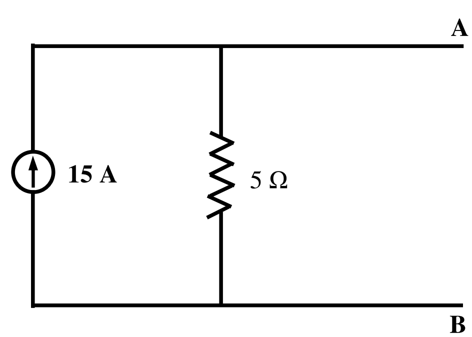


Fig. 11.7 – Fonte de corrente

É possível verificar, no circuito mostrado na Fig. 11.7, que a corrente nominal da fonte de corrente é I = 15 A e que a resistência interna da fonte é R_i = 5 Ω. Substituindo R_i em (11.6) obtém-se R_v = 5 Ω e, substituindo I e R_v em (11.6) obtém-se V = 75 V. A Fig. 11.8 mostra a fonte de tensão equivalente.

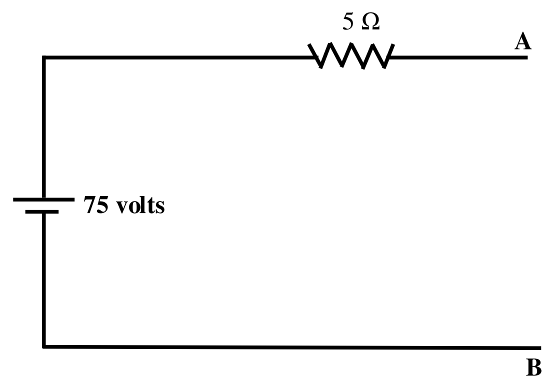


Fig. 11.8 – Fonte de tensão equivalente à fonte de corrente mostrada na Fig. 11.7

É possível comprovar que uma carga com uma dada resistência R estará submetida a uma tensão V_R e a uma corrente I_R caso seja alimentada pela fonte mostrada na Fig. 11.7. Esta carga estará submetida à mesma tensão V_R e à mesma corrente I_R caso seja alimentada pela fonte mostrada na Fig. 11.8 (esta afirmação será deixada para você comprovar).

11.5 – Circuitos alimentados por fontes de tensão e fontes de corrente

O teorema da transformação de fontes é bastante útil quando é necessário obter as correntes e tensões em um circuito alimentado por mais de uma fonte. Nestas situações, caso o circuito seja alimentado por fontes de tensões e de correntes, é possível converter as fontes e obter um circuito com somente um tipo de fonte (de tensão ou de corrente) e, em seguida, aplicar análise de malhas (caso o circuito tenha somente fontes de tensão) ou análise nodal (caso o circuito tenha somente fontes de corrente). Como exemplo considere o circuito mostrado na Fig. 11.9, que é alimentado por uma fonte ideal de tensão V e por uma fonte ideal de corrente I.

As correntes e tensões no circuito mostrado na Fig. 11.9 não podem ser obtidas com análise modal ou análise de malhas, pois estas técnicas somente podem ser aplicadas em circuitos alimentados com somente um tipo de fonte. Deste modo, as correntes e tensões no circuito devem ser obtidas partir da utilização das leis de Kirchhoff e da lei de Ohm.

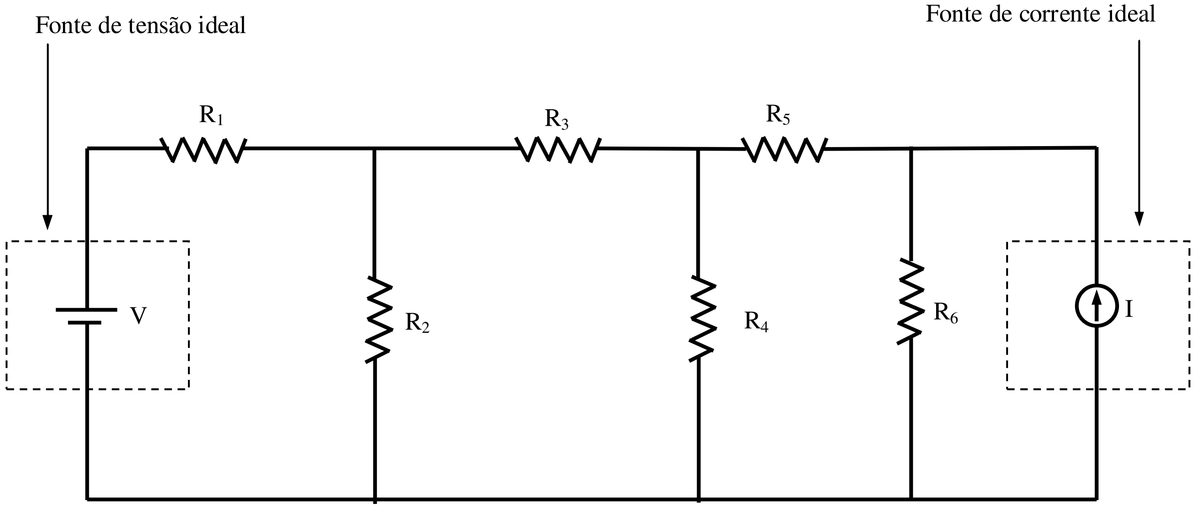


Fig. 11.9 – Circuito alimentado por fontes de tensão e de corrente

No entanto, o conjunto fonte de corrente ideal/Resistor R_6 pode ser considerado uma fonte de corrente real, conforme mostra a Fig. 11.10.

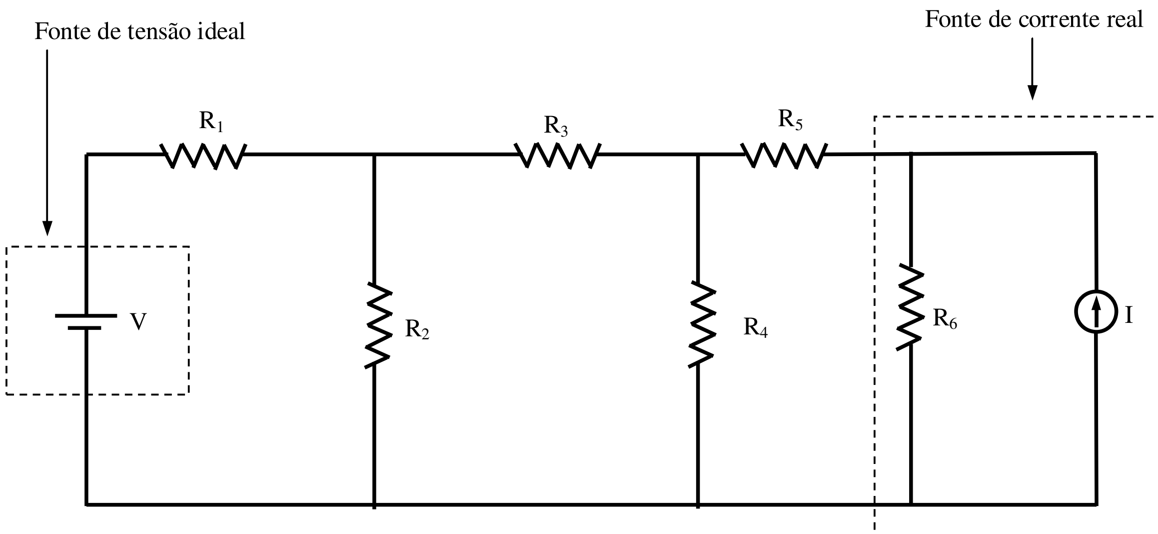


Fig. 11.10 – Circuito com fonte de corrente real

Na Fig. 11.10 a fonte de corrente real pode ser transformada em uma fonte de tensão real conforme mostra a Fig. 11.11.

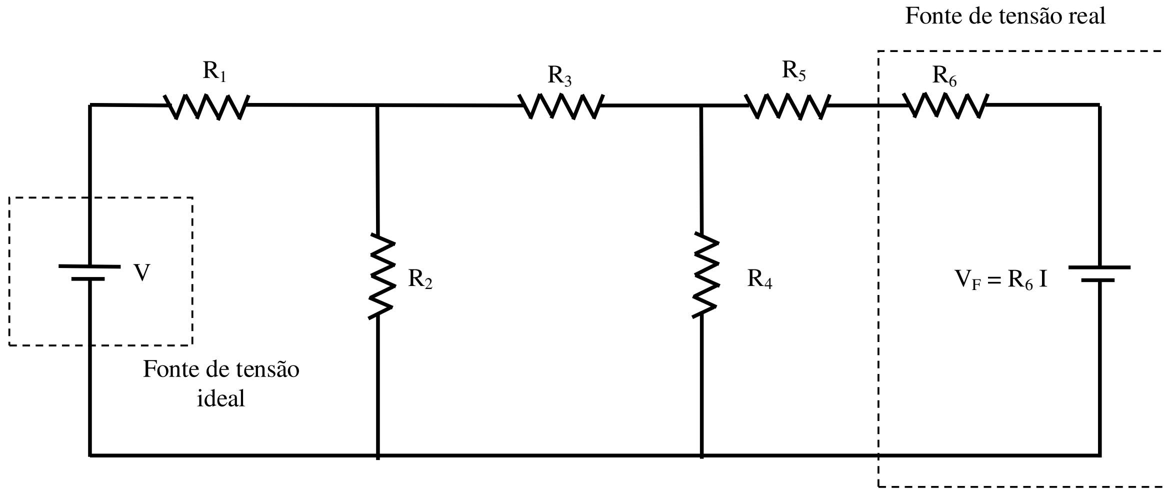


Fig. 11.11 – Circuito da Fig. 11.9 considerando que a fonte de corrente foi transformada em uma fonte de tensão

As correntes e tensões no circuito mostrado na Fig. 11.11 podem ser facilmente obtidas a partir do uso da análise de malhas. As correntes e tensões em todos os resistores (exceto no resistor R_6, que se tornou a resistência interna da fonte de tensão real) podem ser calculadas no circuito mostrado na Fig.11.11. As correntes e tensões em R_6, e nos bipolos não mencionados anteriormente, devem ser calculadas diretamente no circuito original mostrado na Fig. 11.9.

Outra opção para obter facilmente as correntes e tensões no circuito mostrado na Fig. 11.9 consiste em transformar o conjunto fonte de tensão ideal/resistor R_1 em uma fonte de corrente real, conforme mostra a Fig.11.12.

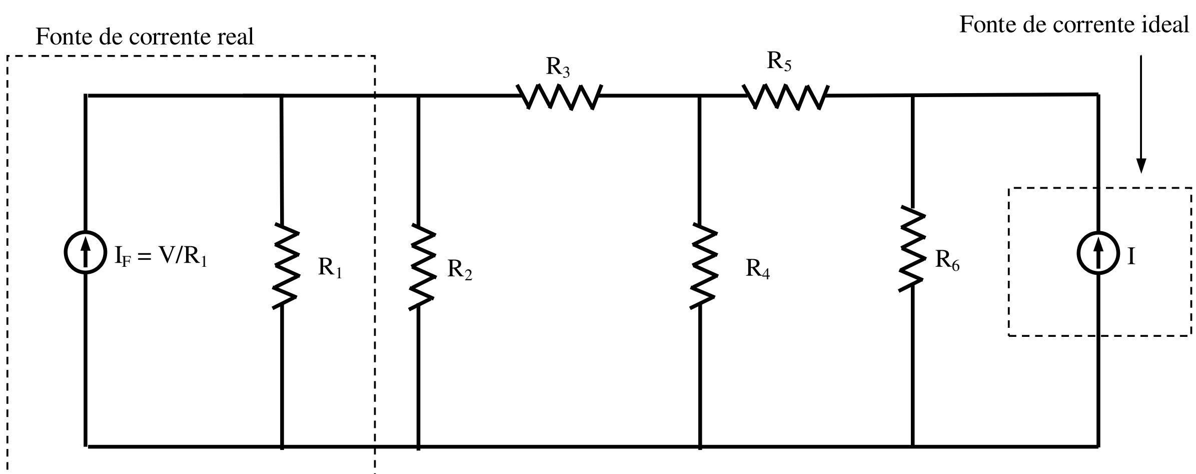


Fig. 11.12 – Circuito da Fig. 11.9 considerando que a fonte de tensão foi transformada em uma fonte de corrente

Utilizando análise modal é possível obter as correntes e tensões em todos os resistores no circuito mostrado na Fig. 11.12, exceto em R_1 que se comporta como a resistência interna da fonte de corrente real. As correntes e tensões em R_1, bem como nos demais bipolos não mencionados anteriormente, devem ser calculadas no circuito original mostrado na Fig. 11.9.

Exemplo 11.4) Determine, transformando a fonte de corrente em uma fonte de tensão, as correntes e tensões em todos os bipolos do circuito mostrado na Fig. 11.9.

Dados: V = 100 Volts; I = 10 A; R_1 = 5 Ω; R_2 = 3 Ω; R_3 = 4 Ω; R_4 = 7 Ω; R_5 = 12 Ω; R_6 = 4 Ω;

A Fig. 11.13 mostra todas as correntes e tensões no circuito.

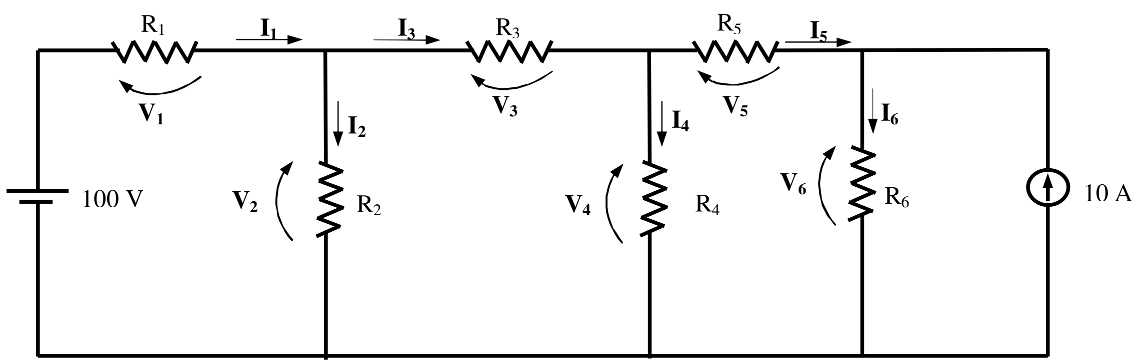


Fig. 11.13 – Indicação das correntes e tensões em todos os bipolos do circuito mostrado na Fig. 11.9

Convertendo a fonte de corrente em uma fonte de tensão, obtém-se o circuito mostrado na Fig. 11.14.

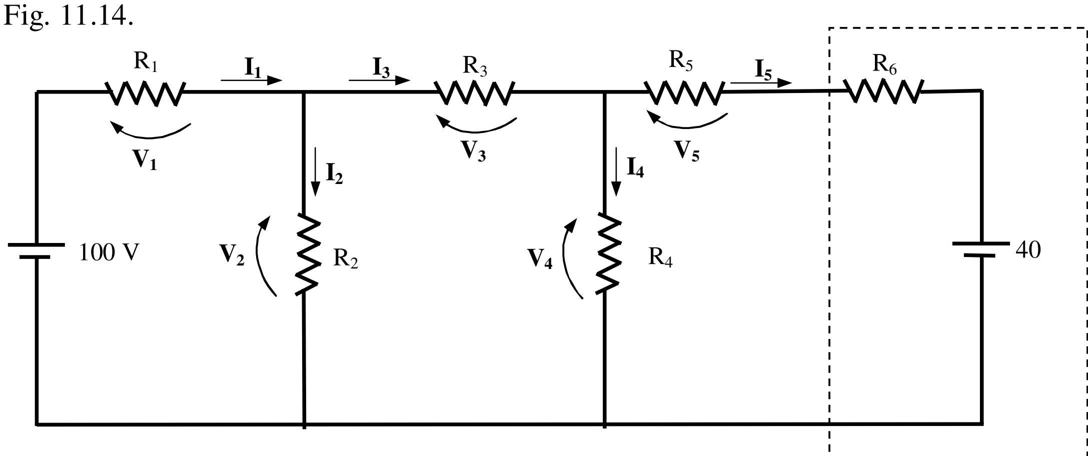


Fig. 11.14 – Circuito da Fig. 11.13 após a transformação da fonte de corrente em fonte de tensão

O circuito mostrado na Fig. 11.14 pode ser utilizado para se obter as correntes e tensões em todos os resistores, exceto no resistor R_6 e na fonte de corrente. Nestes dois bipolos, as correntes e tensões devem ser calculadas utilizando o circuito original mostrado na Fig. 11.13.

A partir do circuito mostrado na Fig. 11.14 obtém-se:

$I_1 = 13{,}384$ A	$V_1 = 66{,}920$ V
$I_2 = 11{,}027$ A	$V_2 = 33{,}081$ V
$I_3 = 2{,}357$ A	$V_3 = 9{,}428$ V
$I_4 = 3{,}379$ A	$V_4 = 23{,}653$ V
$I_5 = -1{,}022$ A	$V_5 = -12{,}264$ V

A corrente e a tensão no resistor R_6 devem ser calculadas no circuito original. Do circuito mostrado na Fig. 11.13 têm-se:

$$I_5 + 10 = I_6 \tag{11.7}$$

$$V_6 = R_6 \, I_6 \tag{11.8}$$

Substituindo $I_5 = -1{,}022$ A em (11.7) obtém-se $I_6 = 8{,}978$. Em seguida, substituindo I_6 em (11.8), obtém-se $V_6 = 35{,}912$ V.

Exemplo 11.5) Repita o exemplo 11.4, transformando a fonte de tensão em uma fonte de corrente.

As correntes e tensões no circuito já estão indicadas na Fig. 11.13. Assim, convertendo a fonte de tensão em uma fonte de corrente obtém-se o circuito mostrado na Fig. 11.15.

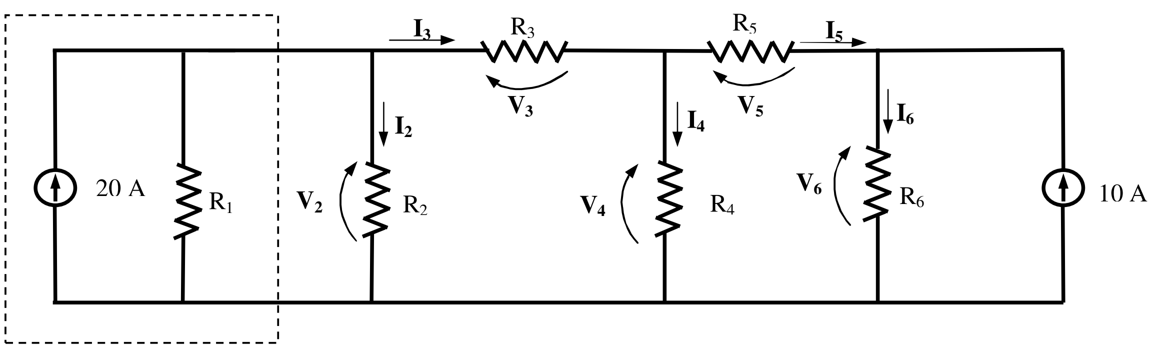


Fig. 11.15 – Circuito da Fig. 11.13 após a transformação da fonte de tensão em fonte de corrente

A partir do circuito mostrado na Figura 11.15 é possível calcular a corrente e tensão em todos os resistores, com exceção do resistor R_1. Neste resistor, e na fonte de tensão, as correntes e tensões devem ser obtidas a partir do circuito original mostrado na Figura 11.13.

A partir do circuito mostrado na Fig. 11.14 obtém-se:

$I_2 = 11,027$ A	$V_2 = 33,081$ V
$I_3 = 2,357$ A	$V_3 = 9,428$ V
$I_4 = 3,379$ A	$V_4 = 23,653$ V
$I_5 = -1,022$ A	$V_5 = -12,261$ V
$I_6 = 13,384$ A	$V_6 = 35,913$ V

A corrente e a tensão no resistor R_1 devem ser calculadas no circuito original. Do circuito mostrado na Fig. 11.13 têm-se:

$$100 - V_1 - V_2 = 0 \qquad (11.9)$$

$$I_1 = V_1/R_1 \qquad (11.10)$$

Substituindo V_2 = 33,081 V em (11.9) obtém-se V_1 = 61,920 V. Em seguida, substituindo V_1 em (11.10), obtém-se I_1 = 13,384.

Observando os exemplos 11.4 e 11.5 verifica-se que transformando a fonte de tensão em fonte de corrente ou transformando a fonte de corrente em fonte de tensão obtêm-se os mesmos resultados. Para verificar a validade do teorema da transformação de fontes, deixo a seu encargo obter as correntes e tensões no circuito mostrado na Fig. 11.13 (utilizando as leis de Kirchhoff e a lei de Ohm) e comparar o resultado com os resultados obtidos nos exemplos 11.4 e 11.5.

Referências

BOYLESTAD, R. L. *Introdução à análise de circuitos*. 10ª ed.,São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2004.

GUSSOW, M. *Eletricidade básica*. 2ª ed., São Paulo, Pearson Makron Books, 1997.

HAYT, W. H. *Análise de circuitos em engenharia*. 1ª ed., São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1975.

IRWIN, J. D. *Análise de circuitos em engenharia*. 4ª ed., São Paulo, MAKRON Books, 2000.