
ANÁLISIS PROBABILÍSTICO Y SIMULACIÓN



CARLOS J. ZAPATA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
PEREIRA
COLOMBIA
2010

GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN PLANEAMIENTO DE SISTEMAS ELÉCTRICOS



FUNDADO POR EL INGENIERO RAMÓN ALFONSO GALLEGO RENDÓN EN EL AÑO 1999, TIENE COMO MISIÓN EL DESARROLLAR, MEJORAR Y APLICAR CONOCIMIENTO EN EL ÁREA DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA PARA TRANSFERIRLO A LA COMUNIDAD ACADÉMICA Y A LAS EMPRESAS DEL SECTOR ELÉCTRICO.

SUS ÁREAS DE TRABAJO SON: PLANEAMIENTO DE SISTEMAS DE TRANSMISIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA, PLANEAMIENTO DE SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA, CONFIABILIDAD DE SISTEMAS ELÉCTRICOS, CALIDAD DE LA ENERGÍA ELÉCTRICA, INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES Y OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA, MERCADOS DE ENERGÍA.

ANÁLISIS PROBABILÍSTICO Y SIMULACIÓN

TABLA DE CONTENIDO

	Página	
1	Conceptos básicos	1
2	Modelos para distribuciones de probabilidad	38
3	Algunas operaciones con distribuciones	76
4	Estadística descriptiva	83
5	Inferencia sobre el valor esperado y la varianza	91
6	Ajuste de datos a una distribución	105
7	Cadenas de Markov	132
8	Procesos estocásticos puntuales	164
9	Simulación de Montecarlo	205
10	Anexos	226

PRESENTACIÓN

Análisis Probabilístico y Simulación corresponde a las notas de clase de los cursos de postgrado que sobre este tema el autor ha dictado en la Universidad Tecnológica de Pereira (Pereira, Colombia), en la Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia).

El principal objetivo de este documento es presentar algunos conceptos de modelamiento probabilístico y simulación de Montecarlo los cuales sirvan como base para realizar aplicaciones en las áreas de ingeniería y ciencias.

Desde el punto de vista pedagógico el autor se ha trazado dos grandes y difíciles lineamientos: Primero, que a través de este documento el estudiante logre comprender los aspectos conceptuales de la teoría de probabilidad y estadística, y segundo, que el curso sea eminentemente práctico y sirva al estudiante como herramienta para desarrollar aplicaciones reales. Ambos lineamientos están motivados en el hecho de que, aunque los cursos probabilidad y estadística hacen parte de casi todos los programas profesionales de pregrado y postgrado, de una parte, su enseñanza ha sido tradicionalmente realizada sin presentar los aspectos filosóficos de este tipo de matemáticas, que son los que sustentan la validez de su aplicación, y, por otra, en la mayoría de textos de este tema no se presentan aplicaciones reales y procedimientos completos de modelamiento que motiven al estudiante al estudio de esta materia y le den las competencias necesarias para realizar aplicaciones a problemas de su entorno laboral.

En este documento no se asume un conocimiento previo en probabilidad y estadística. Las herramientas requeridas para este curso son calculo diferencial e integral, algebra lineal, ecuaciones diferenciales ordinarias y programación de computadores.

El autor agradece al ingeniero Ramón Alfonso Gallego Rendón la invitación que le hizo en el año 2000 para dictar un curso de confiabilidad de sistemas eléctricos para el programa de maestría en ingeniería eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira, con lo cual se dio inicio a la elaboración de este documento, ya que la probabilidad y estadística constituyen la principal herramienta de trabajo en el área de confiabilidad.

El autor también hace su reconocimiento y agradecimiento a los grandes profesores que tuvo durante su vida como estudiante universitario, los cuales influenciaron positivamente su parte profesional y humana, siendo así una gran bendición para él; ellos son: Francisco Javier Escobar Gonzales, Antonio Hernando Escobar Zuluaga, Ramón Alfonso Gallego Rendón y Alvaro Torres Macías.

Carlos Julio Zapata Grisales
Cartago, Enero de 2010



CAPÍTULO 1 – CONCEPTOS BÁSICOS

1.1 LA ALETORIEDAD Y EL ANÁLISIS PROBABILÍSTICO

1.1.1 EL CONCEPTO DE INCERTIDUMBRE

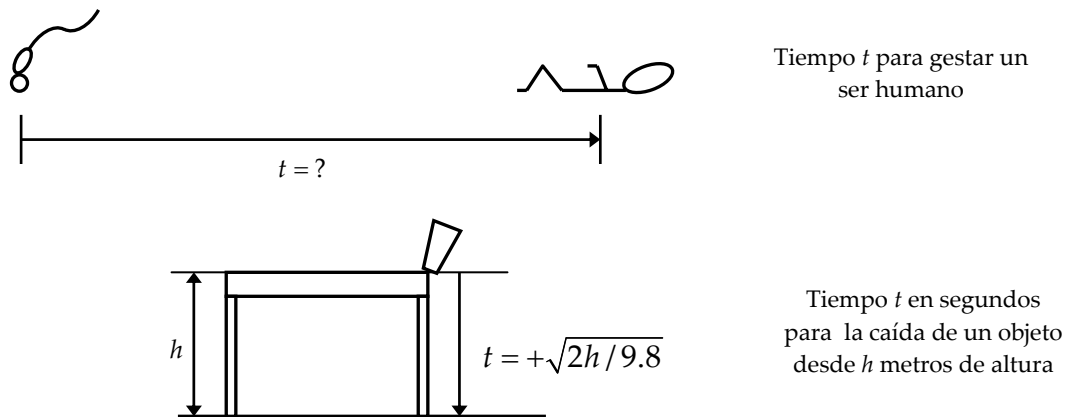


Figura 1.1 Ejemplos de procesos con y sin incertidumbre

El término incertidumbre se refiere a aquella situación en la cual no se tiene completo conocimiento sobre un proceso dado. La falta de conocimiento puede referirse a la descripción del proceso, sus causas o sus resultados.

Lo opuesto a incertidumbre se denomina certidumbre o determinismo. La Fig. 1.1 presenta dos ejemplos de procesos con y sin incertidumbre:

1	El tiempo para que se geste un ser humano: tiene incertidumbre ya que no existe una ecuación o conjunto de ecuaciones que permitan establecer en forma exacta este valor.
2	El tiempo para caída libre de un objeto: es determinístico y se obtiene de las leyes del movimiento establecidas por Isaac Newton.

La incertidumbre aparece por:

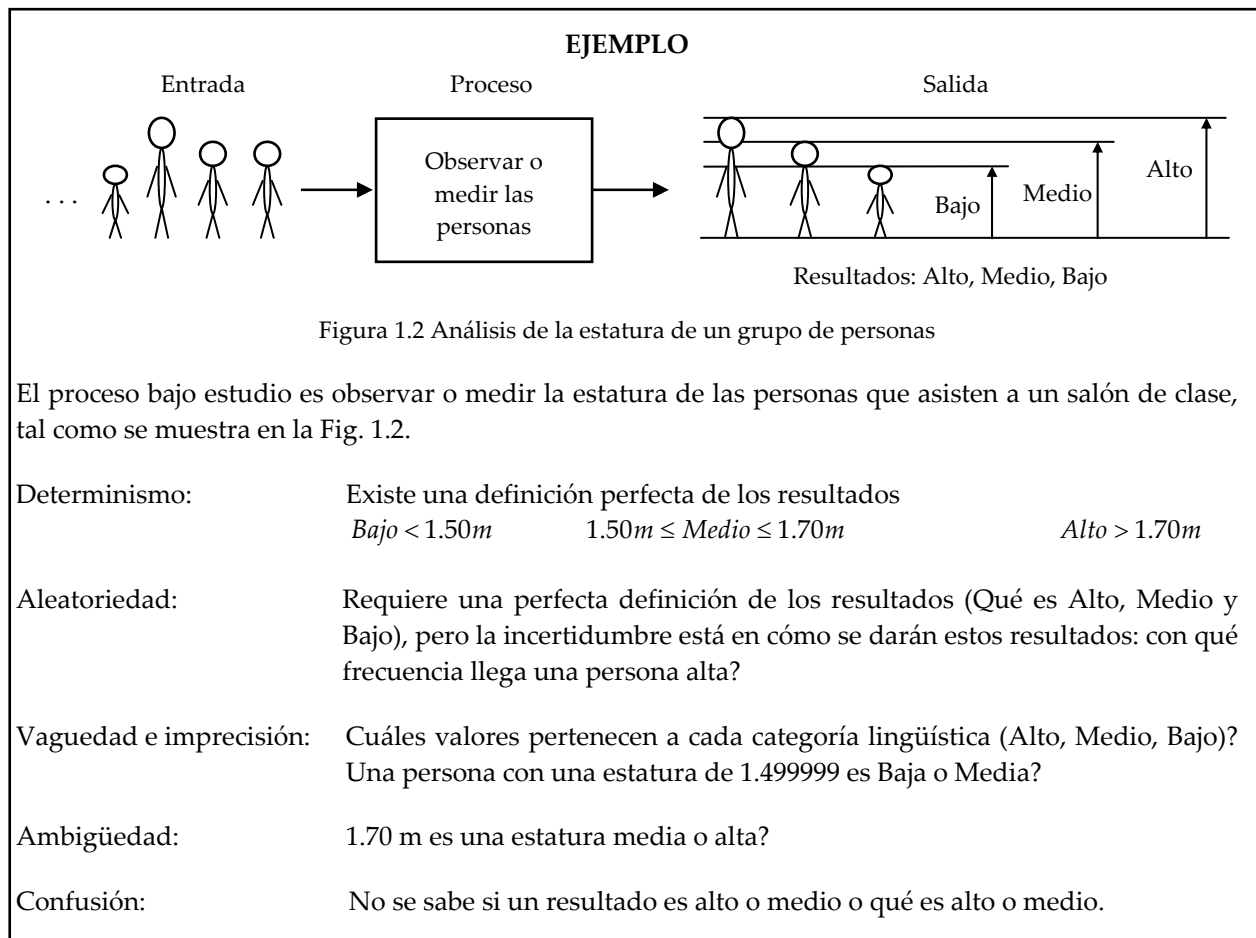
1	La incapacidad para explicar el proceso (falta de conocimiento=ignorancia)
2	La incapacidad para modelar o representar el proceso (por ignorancia, alta complejidad del proceso, limitación de las herramientas matemáticas y computacionales)
3	La incapacidad para medir u observar en forma precisa el proceso bajo estudio

Nótese que la incertidumbre se refiere al analista no al proceso.

En los problemas reales de ingeniería y ciencias se encuentra que lo más común es que no existe la suficiente información o la certidumbre como para establecer modelos determinísticos. Sin embargo, esta ha sido la forma tradicional de modelamiento enseñada en las universidades.

Taxonomía de la incertidumbre		
Nivel de complejidad	Tipo de incertidumbre	Descripción
0	Determinismo	Completo conocimiento del proceso bajo estudio
1	Aleatoriedad	Se conocen los posibles resultados del proceso bajo estudio pero no sus causas, o, aunque se conocen las causas y los resultados, no se es capaz de establecer una descripción determinística del proceso
2	Vaguedad e imprecisión	Incapacidad para definir en forma clara o precisa una clasificación de las observaciones para las causas o resultados. En términos lingüísticos se denomina vaguedad y en términos numéricos imprecisión.
3	Ambigüedad	Aunque existe una clasificación de las causas y resultados se es incapaz de asignar algunas observaciones a ellas (no especificidad)
4	Confusión	Reúne características de vaguedad y ambigüedad.

Mediante el análisis probabilístico se estudian procesos donde existe incertidumbre en forma de aleatoriedad. Las otras formas de incertidumbre se estudian mediante la lógica difusa, la teoría de las posibilidades y la teoría de la evidencia.



1.1.2 AZAR Y ALEATORIEDAD

El término azar se refiere a la ausencia de causa o explicación

Se aplica a:

1	Aquella situación en la cual no se conocen las causas que producen un evento dado
2	Aquella situación en la cual, aunque se conocen las causas que producen un evento dado, no puede explicarse porqué estas ocurren simultáneamente.

El término aleatoriedad se refiere a aquella situación en la cual la ocurrencia de un evento dado no puede explicarse mas que por intervención del azar

Otro sinónimo para aleatorio es el término “estocástico”.

El término aleatorio se refiere a algo carente de causa u orden o que es impredecible. Así, se dice que un proceso es aleatorio cuando:

1	No se conocen las causas que lo producen
2	Aunque se conocen las causas y los resultados no se es capaz de establecer una ley o relación determinística permanente entre ellos (experimento aleatorio)
3	La secuencia de resultados no puede condensarse en una ecuación o descripción
4	Existe duda sobre la veracidad de una afirmación o negación

1.1.3 ALEATORIEDAD VERSUS DETERMINISMO

Todo lo que sucede en el mundo tiene una causa o explicación y en este sentido el mundo es determinístico, por lo cual, es ilógico o no científico pensar lo contrario. Así, desde largo tiempo atrás y en diversas épocas algunos filósofos y científicos ha sido expresado que las leyes de la naturaleza son determinísticas; entonces, de donde surge la idea de aleatoriedad?

La incertidumbre se refiere a la persona que analiza el proceso no al proceso en si; entonces, es la falta de conocimiento del ser humano la que hace que algunos procesos deban considerarse aleatorios.

EJEMPLO

El proceso natural de gestación de un ser humano es determinístico: conocemos sus causas, evolución y resultado principal (el nacimiento de un bebé). Sin embargo, existe incertidumbre respecto a varios aspectos de este resultado. Por ejemplo, no existe un modelo matemático que permita determinar en forma exacta el instante t en que ha de nacer un bebé. Lo único que se conoce empíricamente respecto a este tiempo es que tiene un valor promedio de 9 meses (38 semanas), por lo cual, las observaciones pueden ser mayores o menores a este dato. Así, t se considera aleatorio.

EJEMPLO

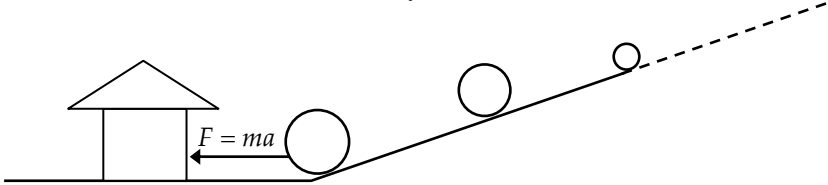


Figura 1.3 Bolas de nieve que golpean una vivienda

Considere el proceso de calcular la fuerza máxima con que golpean las bolas de nieve una vivienda, tal como se muestra en la Fig. 1.3.

Las leyes establecidas por Newton nos dicen que la fuerza F es igual a la masa m por la aceleración a y en este sentido el proceso es determinístico. Sin embargo, en este caso la masa m de cada bola de nieve que golpea la casa es diferente y no se dispone de una relación para ello; entonces, si la masa m se considera aleatoria, la fuerza F también lo es.

1.1.4 POSIBILIDAD Y PROBABILIDAD

El término posibilidad se refiere al conocimiento o creencia de que un evento dado puede existir u ocurrir.

Otro sinónimo para posible es el término “plausible”.

La posibilidad no implica total certeza sobre la existencia u ocurrencia de un evento dado, puesto que ésta se puede expresar mediante un nivel o grado de posibilidad que generalmente es una probabilidad.

El término probabilidad define matemáticamente el grado de certidumbre sobre la ocurrencia de un evento o eventos



Figura 1.4 Concepto de probabilidad

La probabilidad es un número real entre 0.0 y 1.0, el cual también es comúnmente expresado en porcentaje. La Fig. 1.4 muestra los significados de estos extremos.

La probabilidad es un concepto relacionado con la ocurrencia de uno o varios eventos; la probabilidad puede asignarse de las siguientes formas:

1	Objetiva	Basada en experimentación o análisis matemático
2	Subjetiva	Basada en la creencia del analista

La probabilidad y la posibilidad están relacionadas de la siguiente manera:

Un evento no probable o poco probable puede ser posible, pero si el evento es imposible no es probable

EJEMPLOS

1. La probabilidad de que se reporte la presencia de un OVNI en este sitio es cero, pero este evento es posible
2. No es posible convertir el agua en gasolina, por lo tanto, este evento no es probable (tiene probabilidad cero)

1.2 EXPERIMENTOS DETERMINÍSTICO Y ALEATORIO

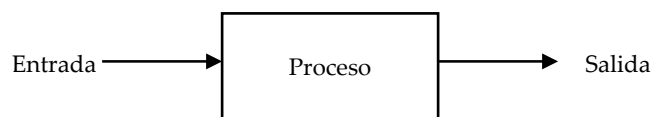


Figura 1.5 Concepto de un experimento

Un experimento es todo proceso o procedimiento que transforma una entrada en una salida, tal como se muestra en la Figura 1.5. El proceso puede ser medir, contar, observar, interrogar.

Los experimentos se pueden clasificar en determinísticos y aleatorios.

Un experimento determinístico es aquel que cuando se repite con la misma entrada e idénticas condiciones, siempre será observada la misma salida.

Ejemplo de experimento determinístico		
Entrada	Proceso	Salida
Voltaje DC 100 V	Aplicar este voltaje a una resistencia de 50 Ohmios y medir la corriente	$I=V/R=100/50=2$ Amperios

El experimento determinístico es una abstracción matemática para describir fenómenos, sistemas o procesos sin incertidumbre, es decir, con perfecto conocimiento de las causas, proceso y los resultados.

Un experimento aleatorio es aquel donde la salida no es la misma aunque se repitan la misma entrada y condiciones. Es decir, la salida no puede ser identificada en forma única del conocimiento de la entrada.

El experimento aleatorio se caracteriza porque:

1	Se repite muchas veces (varias iteraciones, ensayos).	Si un experimento se realizara una sola vez, habría una sola salida o resultado.
2	No se puede o no se desea predecir la salida o resultado exacto del experimento	Interesa la ocurrencia relativa de la salida no su resultado exacto

El experimento aleatorio es una abstracción matemática para describir fenómenos, sistemas o procesos con incertidumbre en forma de aleatoriedad.

Ejemplos		
Entrada	Proceso	Salida
Lote de resistores de 100 Ohm	Medir la resistencia de cada resistencia	100, 101, 99.5, 99.8, 100.5, 99.5, 100.2, 99.2, 98.0, ...
Lote de resistores de 100 Ohm	Probar la continuidad	Buena, buena, buena, dañada, buena, buena, dañada, ...
Número de descargas atmosféricas por año en una región	Conteo de truenos	88 en 1998, 72 en 1999, 92 en 2000, 101 en 2001, 100 en 2002, ...
Corriente de descarga de un rayo	Medida de la corriente de descarga	20.2 kA, 30.5 kA, 40 kA, 18 kA, ...
Vida de una bombilla en un sistema de iluminación público	Medida del tiempo para falla	500 horas, 1000 horas, 300 horas, 672.5 horas, ...
Tiempo para reparar un transformador de distribución	Conteo del tiempo para reparación	2 horas, 1.5 horas, 4 horas, 10 horas
Estado operativo de un grupo de luminarias de un sistema de iluminación público	Observar el estado operativo cada mañana	Buena, buena, buena, dañada, dañada,
Aire exterior en una instalación	Medir la temperatura	+20°, 0°, -15°, 45°, ...
Qué tipo de música le gusta?	Interrogar	Rock, rock, pop, balada, rock, despecho, salsa, ...
Le gusta el postre?	Interrogar	Si, si, no, no, no, si, ... No, poco, mucho, no, si, ...

1.3 ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS

1.3.1 Espacio muestral

“Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio”

El espacio muestral se designa por las letras S (Sample Space) o Ω . Los resultados pueden estar expresados en números o en términos no numéricos.

Ejemplos	
Experimento	Espacio muestral
Medida de resistencia a un lote de resistores	Los números reales positivos sin incluir el cero
Prueba de continuidad a un lote de resistores	“Buena”, “Dañada”
Conteo de truenos por año en una región	Los números enteros positivos incluyendo el cero
Corriente de descarga de un rayo	Los números reales positivos sin incluir el cero
Vida de una bombilla en un sistema de iluminación público	Los números reales positivos sin incluir el cero
Tiempo para reparar un transformador de distribución	Los números reales positivos sin incluir el cero
Estado operativo de un grupo de luminarias de un sistema de iluminación público	“Buena”, “Dañada”
Medir la temperatura ambiente exterior en una instalación dada	Los números reales positivos y negativos incluyendo el cero

El espacio muestral tiene que estar completamente determinado y no puede cambiar. Sin embargo, no siempre es fácil determinar el espacio muestral.

Ejemplo	
Experimento	Espacio muestral
Observar las salidas que afectan la disponibilidad de una línea de transmisión	Falla en estructura, cortocircuito, flameo de aislador, accidente de tránsito, . . . ?

1.3.2 Evento

“Es un subconjunto de interés del espacio muestral”

Los eventos son los resultados de un experimento aleatorio que cumplen unas determinadas condiciones.

Ejemplo	
Experimento	Eventos
Fallas propias de la línea de transmisión	Falla en estructura, cortocircuito, flameo de aislador, rotura de conductor, “otras”

En el ejemplo, se introduce el evento “otras fallas” para cubrir el desconocimiento que hay en este caso sobre el espacio muestral; es decir, no se conocen todas las posibles fallas.

1.3.3 Tipos de eventos

- **Eventos independientes**

Dos eventos son independientes si la ocurrencia de uno, no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Ejemplos
Flameo de un aislador y falla de una estructura
Falla de dos componentes que no hacen parte de un mismo aparato ni comparten funciones

A menudo, para simplificar los modelos o debido a la falta de conocimiento del proceso bajo estudio, se asume independencia en los eventos cuando esto no es estrictamente cierto. Sin embargo, esta práctica puede llevar a graves errores en el modelamiento.

- **Eventos mutuamente exclusivos**

Dos eventos son mutuamente exclusivos o “disjuntos” si ambos no pueden suceder al mismo tiempo.

Ejemplos
Falla y operación de un equipo
Embalse lleno y embalse vacío
Las posiciones de un suitche discreto: “apagado”, “bajo”, “medio”, “alto”

Los eventos disjuntos con probabilidades diferentes de cero son estrictamente dependientes aunque a veces se asuma lo contrario.

- **Eventos complementarios**

Dos eventos son complementarios si cuando uno ocurre, el otro no puede ocurrir o si uno no ocurre, el otro tiene que ocurrir. Son mutuamente exclusivos.

Ejemplos
Falla y operación de un equipo
Embalse lleno y embalse vacío

Los eventos disjuntos con probabilidades diferentes de cero son estrictamente dependientes aunque a veces se asuma lo contrario.

- **Eventos condicionales o dependientes**

Son eventos que pueden ocurrir condicionalmente sobre la ocurrencia de otros eventos.

Ejemplos
Flameo de un aislador y descarga atmosférica sobre un conductor de fase
Rotura de un cable de una fase de un conductor y falla fase-tierra
Despacho de una unidad de generación hidráulica y disponibilidad del caudal mínimo de agua requerido para generar
Despacho de una unidad de generación hidráulica y disponibilidad del equipo de generación

1.3.4 Determinismo sobre la definición del espacio muestral y los eventos

La teoría de probabilidad está basada en la teoría clásica de conjuntos donde las fronteras entre conjuntos son fijas (rígidas). Así, el espacio muestral y los eventos son conjuntos perfectamente definidos o determinísticos; es decir:

1	No puede haber vaguedad o imprecisión para definir el espacio muestral y los eventos
2	No puede haber ambigüedad o confusión para asignar resultados a los eventos

Esto es así porque la incertidumbre que existe es sobre la ocurrencia de los eventos no sobre la definición de los mismos.

Esto contrasta con el modelamiento mediante lógica difusa donde se definen “conjuntos difusos” los cuales tienen fronteras que no son fijas (blandas). Las fronteras difusas permiten representar la vaguedad e imprecisión en la definición de los eventos. Este concepto se ilustra en la figura 1.6



Figura 1.6 Ejemplo de conjuntos clásicos y difusos

1.4 DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

1.4.1 Definición axiomática (Kolmogorov)

La probabilidad de un evento dado A , es un número $P(A)$ asignado a este evento que obedece los siguientes postulados:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$ y la probabilidad de un evento falso o imposible es 0.
- Si A y B son eventos disjuntos, $P(A \cap B) = 0$, entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

La teoría resultante se desarrolla con base en las operaciones con conjuntos.

1.4.2 Definición de frecuencia relativa

Se considera que el experimento aleatorio se repite n veces. Si un evento dado A ocurre n_A veces, entonces:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} n_A / n$$

La probabilidad obtenida es objetiva a posteriori ya que se obtiene mediante la experimentación y como tal es un hecho del mundo real.

Sin embargo, en la realidad un experimento no puede repetirse un número infinito de veces, por lo cual, la existencia del límite es una hipótesis, no un resultado experimental. A pesar de esto, es la definición más utilizada.

1.4.3 Definición clásica

Si un evento A se puede descomponer en la suma de M eventos que pertenecen a un conjunto de N eventos mutuamente exclusivos e igualmente probables, entonces:

$$P(A) = M/N$$

La probabilidad obtenida es objetiva pero no requiere experimentación, solo análisis matemático.

Esta definición requiere conocer en forma exacta el número posible de resultados.

Tiene limitada aplicación debido a:

1	El requerimiento de igual probabilidad de todos los eventos del espacio muestral.
2	En algunos experimentos el número de eventos puede ser infinito

1.4.4 Definición subjetiva

Todo individuo está en capacidad de expresar sus incertidumbres en forma de juicios de probabilidad

Es una hipótesis o medida subjetiva del conocimiento sobre la posibilidad de que un evento dado ocurra. Se asignan probabilidades a eventos con base en experiencias pasadas pero no necesariamente con base en resultados experimentales. Este enfoque no es consistente con el método científico basado en la experimentación y análisis de datos tomados del mundo real.

Ejemplo
“La probabilidad de reprobar este curso es de aproximadamente el 2%”

EJERCICIO 1.1

En un sistema eléctrico se tienen registradas para un periodo de 5 años los eventos que causan daño de los aisladores de las líneas de transmisión aéreas.

E_i	Evento	Ocurrencias	Probabilidad
1	Daño debido a descarga atmosférica	152	$= 152/434 = 0.3502$
2	Daño debido a contaminación	137	$= 137/434 = 0.3157$
3	Daño debido a sobrevoltaje por maniobra	65	$= 65/434 = 0.1498$
4	Daño debido a ferresonancia	40	$= 40/434 = 0.0922$
5	Daño debido al vandalismo	25	$= 25/434 = 0.0576$
6	Daño debido a otras causas	15	$= 15/434 = 0.0346$
Total		434	1.0000

La probabilidad se halla aplicando la definición de frecuencia relativa a las estadísticas operativas del sistema. En este caso, se halla la probabilidad de daño del aislador para cada causa.

No confundir con la probabilidad de que ocurra la causa del daño; por ejemplo, la probabilidad de que un aislador se dañe debido a una descarga atmosférica es de 0.3502. Queda por determinar cuál es la probabilidad de que se produzca una descarga atmosférica con una corriente de descarga de tal magnitud que dañe el aislador.

EJERCICIO 1.2

Un sistema industrial cuenta con diez unidades de generación de las siguientes capacidades:

Cantidad	Capacidad de cada unidad
3	5 MW
3	4 MW
2	3 MW
1	6 MW
1	10 MW

Si se asume que la probabilidad de falla de todas las unidades es igual, se puede aplicar la definición clásica de probabilidad.

- Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar una de las unidades para asumirla fallada en un estudio de flujo de carga, salga la unidad de 10 MW?

Hay 1 unidad de 10 MW entre 10 unidades de generación; entonces, $M = 1$, $N = 10$ y $P=M/N=1/10=0.1$

- Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar una de las unidades para asumirla fallada en un estudio de flujo de carga, salga una unidad de 5 MW?

Hay 3 unidades de 5 MW entre 10 unidades de generación; entonces, $M = 3$, $N = 10$ y $P=M/N=3/10=0.3$

Para asumir que todas las unidades tienen igual probabilidad de falla, se requieren por lo menos que sean de la misma tecnología, edad y tamaño similar.

1.5 REGLAS PARA COMBINAR PROBABILIDADES

1.5.1 Ocurrencia simultánea de dos eventos ($A \cap B$)

Eventos independientes	Eventos dependientes
$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$	$P(A \cap B) = P(A B) * P(B) = P(B A) * P(A)$
Si hay n eventos independientes, entonces:	$P(A B)$ se lee: "La probabilidad de A dado que B ocurrió"
$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$	

Los eventos disjuntos con probabilidades diferentes de cero son estrictamente dependientes:

Si se asumen independientes, entonces: $P(A \cap B) = P(A) * P(B) > 0$

Pero $P(A \cap B) = 0$ puesto que ambos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo. Esto es contradictorio con lo anterior.

Entonces, estos eventos son estrictamente dependientes y: $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$

1.5.2 Ocurrencia de uno de dos eventos o de ambos ($A \cup B$)

Eventos independientes	Eventos dependientes
<ul style="list-style-type: none"> Eventos independientes pero no mutuamente exclusivos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B A) * P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A B) * P(B)$
<ul style="list-style-type: none"> Eventos independientes y mutuamente exclusivos¹ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Si A y B son eventos complementarios: $P(A) + P(B) = 1$ $P(A) = P(\bar{B})$
Si hay n eventos independientes, entonces: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$	

Nota: En esta formulación, que aparece en muchos textos, se omite el hecho de que los eventos disjuntos son dependientes, tal como se explicó anteriormente.

EJERCICIO 1.3

En un sistema eléctrico se tienen registradas para un periodo de 7 años los eventos que afectan las líneas de transmisión aéreas.

E_i	Evento	Ocurrencias	Probabilidad
1	Daño de aislador	175	0.175
2	Falla de cimentación	50	0.050
3	Falla de estructura	100	0.100
4	Rotura de conductor de fase	150	0.150
5	Descarga atmosférica directa	250	0.250
6	Otras	275	0.275
Total		1000	1.000

Como en el ejercicio 1.1, la probabilidad de cada evento se halla aplicando la definición de frecuencia relativa y utilizando las estadísticas operativas del sistema.

- Cuál es la probabilidad de que se produzcan simultáneamente un flameo de aislador y una falla de estructura?

Estos eventos se pueden considerar independientes, entonces:

$$P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) * P(E_3) = 0.175 * 0.10 = 0.0175$$

- Cuál es la probabilidad de que se produzcan simultáneamente una descarga atmosférica y daño de aislador?

El daño de un aislador es dependiente del evento que ocurra una descarga atmosférica, entonces:

$$P(E_1 \cap E_5) = P(E_1 | E_5) * P(E_5) = 0.3502 * 0.25 = 0.08755 \quad (P(E_1 | E_5) = 0.3502 \text{ se toma del ejercicio 1.1})$$

La ecuación $P(E_1 \cap E_5) = P(E_5 | E_1) * P(E_1)$ aunque válida matemáticamente, no tiene sentido en este problema pues el flameo de un aislador no puede producir la descarga atmosférica.

- Cuál es la probabilidad de que se produzcan un daño de aislador y una falla de estructura o ambos eventos?

Estos eventos son independientes pero no mutuamente exclusivos, pues ambos pueden suceder al mismo tiempo.

$$P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) - P(E_1) * P(E_3) = 0.175 + 0.10 - 0.175 * 0.10 = 0.2575$$

- Cuál es la probabilidad de que se produzca daño de un aislador o una descarga atmosférica directa o ambos eventos?

$$P(E_1 \cup E_5) = P(E_1) + P(E_5) - P(E_1 | E_5) * P(E_5) = 0.175 + 0.25 - 0.35 * 0.25 = 0.3375$$

1.6 EL CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

La salida de un experimento aleatorio es una variable aleatoria, concepto este para el cual existen dos definiciones.

1.6.1 Definición práctica

Una variable aleatoria es aquella para la cual sus valores no pueden predecirse en forma exacta, por lo cual, la ocurrencia de ciertos valores solo puede expresarse en términos de probabilidad

Ejemplos	
Variable determinística	Variable aleatoria
El voltaje de una fuente sinusoidal de 60 Hertz se define como: $V(t) = 150 \sin(377t)$	La velocidad del viento en este sitio es una variable aleatoria. No existe una ecuación que defina en forma exacta sus valores para cada instante del tiempo.

1.6.2 Definición matemática

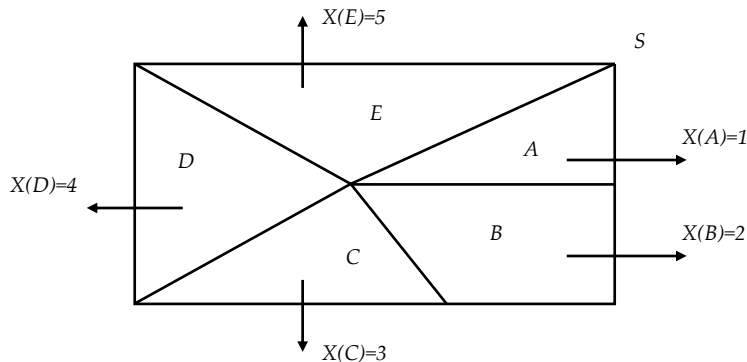


Figura 1.7 Concepto matemático de variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que le asigna un número real a cada resultado o evento de un experimento aleatorio

La Fig. 1.7 muestra un esquema de esta definición. Esta definición es necesaria para cubrir aquellos procesos aleatorios donde los eventos corresponden a definiciones lingüísticas.

Para una variable aleatoria se definen:

Dominio	Los resultados o eventos del experimento aleatorio
Rango	Es un conjunto de números a los cuales se les asigna un valor de probabilidad

Ejemplos		
Experimento		Variable aleatoria
1	Observar el tiempo para reparar un transformador	S: Los números reales >0 X=1*(resultados del experimento) Rango: Los números reales >0
2	Observar el estado operativo de un transformador ONAN/ONAF1/ONAF2	S: indisponible, ONAN, ONAF1, ONAF2 X= 0 MVA para “indisponible”, X=80 MVA para ONAN X=100 MVA para ONAF1 X=120 MVA para ONAF2 Rango: 0 MVA, 80 MVA, 100 MVA, 120 MVA
3	Medida de resistencia de un lote de resistencias de 100 Ohm	Espacio muestral: Los números reales >0 Xi=1/Ri, donde Ri son los Ohmios de la medida i Rango: Los números reales >0

1.6.3 Tipos de variables aleatorias

Discreta	Puede tener únicamente un número contable de valores o un número discreto de estados	Ejemplo: Número de fallas en un periodo de tiempo
Continua	Tiene un número no contable de valores	Ejemplo: Tiempo para falla de un componente
Mixta	Una combinación de las anteriores	

1.6.4 Distribución de probabilidad de una variable aleatoria

Asignar a cada valor posible de una variable aleatoria la probabilidad que le corresponde, es definir la distribución de probabilidad de la variable aleatoria.

EJEMPLO

Sea x la variable aleatoria discreta que representa el número de temblores que se ocurren en una zona dada durante un periodo de tiempo dado t en años. La probabilidad de que x sea igual a un valor dado k durante el periodo t esta dada por:

$$P[x(t) = k] = \frac{1}{k!} [\lambda t^\beta]^k * e^{-\lambda t^\beta}$$

Donde:

$k = 0, 1, \dots$ es un valor entero

λ, β son parámetros del modelo matemático

Entonces, $\frac{1}{k!} [\lambda t^\beta]^k * e^{-\lambda t^\beta}$ es la distribución de probabilidad de x .

EJEMPLO

Sea x la variable aleatoria que representa los eventos que producen daños generalizados en una ciudad. La probabilidad de que x esta dada por:

	x	$P[x]$
1	Terremotos	0.05
2	Lluvias fuertes	0.20
3	Tormentas eléctricas	0.10
4	Inundaciones	0.25
5	Fuertes vientos	0.15
6	Granizada	0.16
7	Protestas	0.09

Entonces, la tabla presentada es la distribución de probabilidad de x .

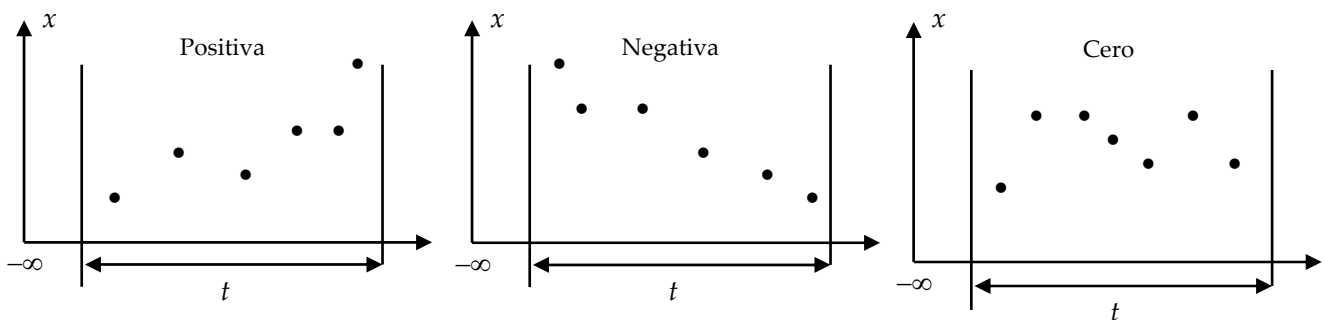
1.7 TENDENCIA EN UN PROCESO ALEATORIO

Figura 1.8 Tipos de tendencia en un proceso aleatorio

Sea t el periodo para el cual se dispone de observaciones de un proceso aleatorio dado y sea x la variable que lo representa.

La tendencia se refiere al comportamiento de los valores de x durante t de la siguiente forma (Ver la Fig. 1.8):

Tipo de tendencia	Descripción	Tipo de proceso
Positiva	Durante el periodo t , las observaciones de x presentan un patrón de continuo aumento	No estacionario
Negativa	Durante el periodo t , las observaciones de x presentan un patrón de continua disminución	No estacionario
Cero	No se observa durante el periodo t que las observaciones de x presenten un patrón de aumento o disminución	Estacionario

Un proceso estacionario puede ser estacional es decir con oscilaciones periódicas.

1.8 MODELO MATEMÁTICO DE UN PROCESO ALEATORIO

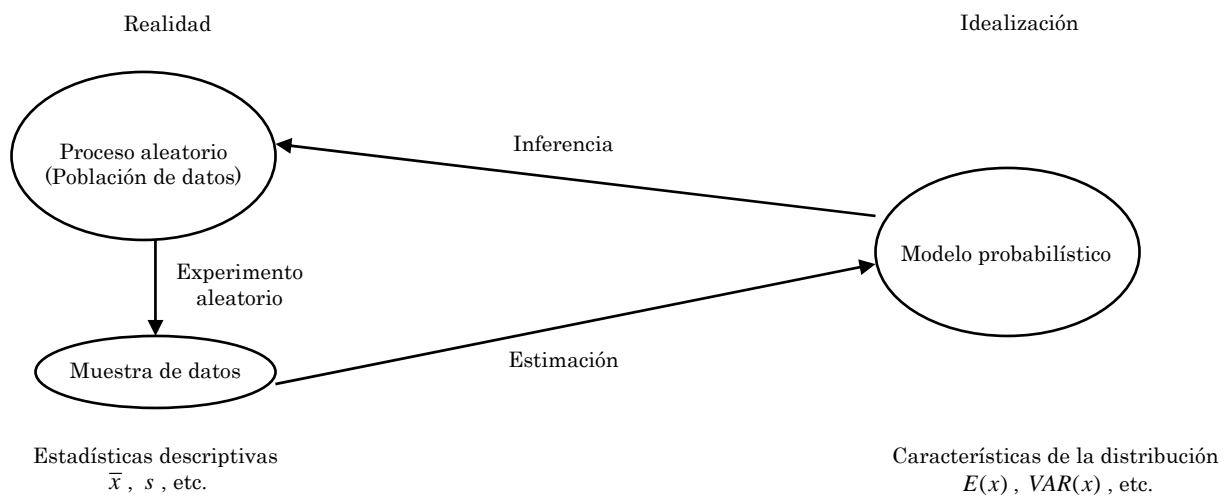


Figura 1.9 Procedimiento para el estudio de un proceso aleatorio

El modelo matemático para un proceso aleatorio está determinado por:

1	El espacio muestral
2	Los eventos de interés
3	La probabilidad que se le asigna a cada evento

La distribución de probabilidad constituye el modelo matemático del proceso aleatorio bajo estudio

Existen entonces dos mundos para el estudio de un proceso aleatorio: uno real donde se realiza el experimento aleatorio y se obtiene una muestra de datos y otro ideal donde se tiene el modelo probabilístico. La estadística es el puente entre estos dos mundos.

Como parte de la idealización algunas veces se asume que para el proceso aleatorio bajo estudio existen el modelo matemático o características tales como el valor esperado $E(x)$ aunque estos no se conozcan o no hayan podido determinarse.

Para definir el modelo probabilístico, es deseable seleccionar una de las funciones matemáticas desarrolladas para tal propósito. Esta selección se hace basándose en los siguientes criterios:

1	La naturaleza física del problema bajo estudio
2	Los datos disponibles (Los resultados del experimento)
3	La prueba estadística de que el modelo propuesta es una representación apropiada del proceso bajo estudio.
4	El conocimiento del analista

La estadística, basada en los resultados de un experimento aleatorio (datos disponibles), tiene procedimientos para seleccionar cuál función matemática puede utilizarse como modelo probabilístico para un experimento aleatorio. Sin embargo, como varios modelos pueden cumplir las pruebas estadísticas, en la selección final entran en consideración los puntos 1 y 4 mencionados anteriormente.

Los estudios de la estadística se refieren a una población de individuos (personas, equipos, cosas) en las que se desarrolla un proceso aleatorio de interés, el cual se estudia mediante un experimento aleatorio del cual se saca una muestra de datos.

Cada una de las características del modelo matemático (valor esperado $E(x)$, la varianza $VAR(x)$, etc.) tienen su par en la estadística descriptiva (promedio muestral \bar{x} , desviación muestral s , etc.).

Un asunto a determinar es en qué medida las estadísticas descriptivas sirven para estimar las características de la distribución o del modelo ya que el proceso aleatorio corresponde a una población de datos pero el experimento aleatorio solo brinda una muestra de estos.

Una vez se selecciona un modelo probabilístico, debe tenerse claro que este es solo una “idealización” para representar el proceso aleatorio bajo estudio; las conclusiones que con respecto al proceso aleatorio se sacan de este modelo se denominan inferencias, puesto que son generalizaciones a la población de algo que se observa en una muestra de datos.

Debe recalarse finalmente que ningún modelo probabilístico es perfecto en su función de representar la realidad debido a que:

1	Los experimentos aleatorios solo brindan cantidades limitadas de datos
2	No hay precisión de medida tan elevada para identificar todos los valores de una variable continua

1.9 TIPOS DE MODELOS PROBABILÍSTICOS

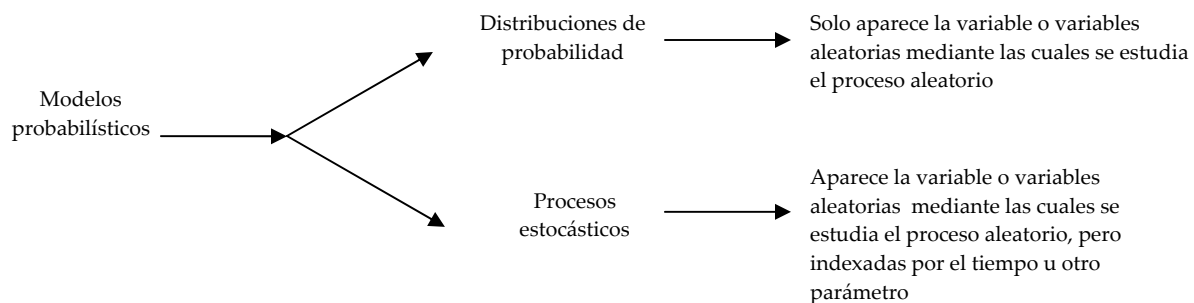


Figura 1.10 Tipos de modelos probabilísticos

Existen dos grandes tipos de modelos probabilísticos: las distribuciones de probabilidad y los procesos estocásticos. Esta clasificación se presenta en la Figura 1.10

1.9.1 Funciones de distribución de probabilidad

Se utilizan cuando:

1	El proceso aleatorio es estacionario (cero tendencia)
2	El periodo de interés para estudiar el proceso aleatorio o la evolución del tiempo dentro de este periodo no se requieren para explicar el proceso aleatorio bajo estudio

En este caso, la distribución de probabilidad se expresa únicamente en términos de la variable aleatoria x que describe el proceso aleatorio. Así, la función puede ser continua, discreta o mixta según el tipo de espacio muestral.

Nótese que x puede referirse a un instante de tiempo o a un periodo de tiempo que se observa durante un periodo de tiempo dado. Por ejemplo, x pueden ser el tiempo para reparación de un vehículo o los instantes de ocurrencia de una erupción volcánica.

1.9.2 Procesos estocásticos

Se utilizan cuando el periodo de interés para estudiar el proceso aleatorio o la evolución del tiempo dentro de este periodo se requieren para explicar el proceso aleatorio bajo estudio. El proceso aleatorio bajo estudio puede ser estacionario o no estacionario.

En este caso, la distribución de probabilidad se expresa en términos de la variable aleatoria x que describe el proceso aleatorio y de un parámetro t que es el periodo para estudio del proceso o instantes de tiempo dentro de este. Entonces, la variable aleatoria x_t que describe el proceso está indexada por el parámetro t ó índice del proceso:

$$x_t = x(t) \quad t > 0$$

Un proceso estocástico es entonces una colección de variables aleatorias: existe una variable aleatoria por cada valor del parámetro t del proceso. La colección de variables aleatorias están definidas sobre un mismo espacio muestral o “espacio de estado”.

Según como se estudien el espacio de estado y el tiempo, un proceso estocástico puede ser:

Estado	Tiempo	Ejemplos
Discreto	Discreto	cadena de Markov discreta
Discreto	Continuo	cadena de Markov continua, procesos puntuales
Continuo	Continuo	proceso Gausiano, proceso Browniano

Existen muchos procesos estocásticos que tienen aplicaciones particulares en diferentes áreas del conocimiento. En este texto solo se presentarán las cadenas de Markov y algunos procesos puntuales.

El parámetro de un proceso estocástico no siempre tiene que ser el tiempo; en algunas aplicaciones este parámetro puede asimilarse a otra cosa sobre la cual se observa una variable aleatoria. Por ejemplo, en la Fig. 1.11 se muestra un proceso estocástico donde se observa la ubicación de árboles altos a lo largo del pasillo de una línea de transmisión. Nótese que esto es análogo a estudiar los defectos en una lámina o rollo de tela, los huecos en una vía, etc.

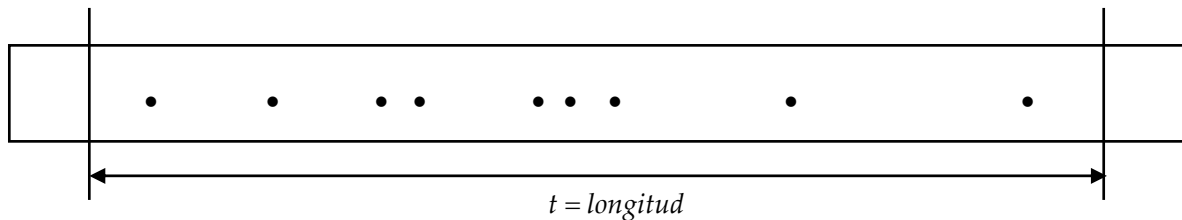


Figura 1.11 Proceso estocástico cuyo parámetro es una longitud

1.10 DEFINICIÓN MATEMÁTICA DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

1.10.1 Variables aleatorias continuas

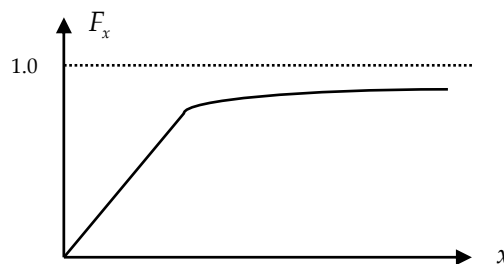


Figura 1.12 Función de distribución de probabilidad

Sea $x \leq x_0$ el evento de que la variable continua x sea menor o igual a un valor dado x_0 . Entonces:

La función de distribución de probabilidad de la variable x es $F_x(x_0) = P(x \leq x_0)$ para cualquier x entre $(-\infty, +\infty)$

Propiedades de F_x	
1	$F_x(-\infty) = 0$ y $F_x(+\infty) = 1$
2	Es una función no decreciente. Si $x_1 \leq x_2$, entonces $F_x(x_1) \leq F_x(x_2)$
3	$P(x > x_0) = 1 - P(x \leq x_0) = 1 - F_x(x_0)$

La Figura 1.12 muestra la forma típica de una función de distribución de probabilidad.

Como las variables aleatorias continuas tienen un número infinito de posibles valores, la probabilidad puntual de cada uno de sus valores es cero. Por esta razón no tiene sentido hablar de probabilidades

para valores puntuales de una variable aleatoria continua, la probabilidad se haya para intervalos de valores. Este concepto se ilustra en la Fig. 1.13

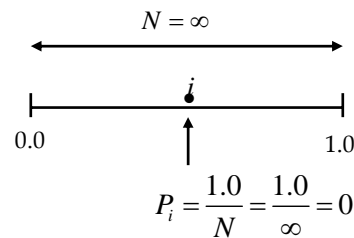


Figura 1.13 Probabilidad de valores puntuales de una variable aleatoria continua

También se define la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria como:

La función de densidad de probabilidad de la variable x es $f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$ para cualquier x
entre $(-\infty, +\infty)$

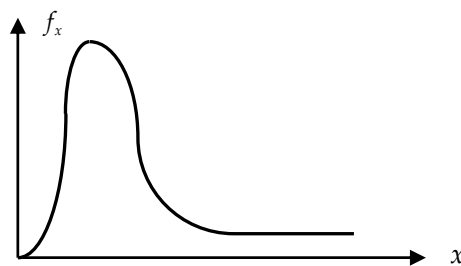


Figura 1.14 Función de densidad de probabilidad

La función de densidad de probabilidad es la razón de cambio de la probabilidad acumulada con respecto a los valores de variable aleatoria x . Además, $f_x(x) \geq 0$ para todo x .

Relaciones entre $F_x(x)$ y $f_x(x)$	
1	$F_x(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_x(x) dx$
2	$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_x(x) dx = F_x(b) - F_x(a)$
3	$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1.0$

El término “distribución” se utiliza indistintamente para referirse tanto a la función de distribución de probabilidad como a la función de densidad de probabilidad. En la práctica solo se utiliza la notación $F_x(x)$ y $f_x(x)$ omitiendo x_0 y entendiéndose que $F_x(x)$ se refiere a la probabilidad del intervalo $[0, x]$.

Como la función de distribución de probabilidad siempre es una curva creciente asintótica al valor 1.0, en la práctica es más utilizada la función de densidad de probabilidad pues esta tiene diferente forma

en cada uno de los diferentes modelos matemáticos utilizados (exponencial, gamma, weibull, normal, etc.).

El rango de una variable aleatoria continua no tiene que ser necesariamente $(-\infty, +\infty)$, este puede acotarse de acuerdo con el problema práctico a resolver, por ejemplo, de $(0, +\infty)$. De otra parte, solo algunos modelos matemáticos desarrollados para distribuciones de probabilidad, como por ejemplo, el gaussiano, y el uniforme, manejan el rango $(-\infty, +\infty)$. La gran mayoría solo manejan el rango $(0, +\infty)$.

Para un proceso estocástico estas funciones se definen como:

$F_x(x, t) = P[x(t) \leq x]$	$f_x(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$
------------------------------	---

Por el teorema fundamental del cálculo:

$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \leftrightarrow F_x(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_x(x) dx$

Así, se llega a que:

La función distribución de probabilidad o la función de densidad de probabilidad constituyen el modelo matemático del proceso aleatorio bajo estudio

1.10.2 Variables aleatorias discretas

$f_X(x)$	$F_X(x)$
$f_X(x_0) = P(x = x_0)$ <p><i>Se denomina función de densidad de probabilidad de masa.</i></p> $0.0 \leq P(x_i) \leq 1.0$	$F_X(x_0) = P(x \leq x_0) = \sum_{i=1}^{x_0} P(x = x_i)$ $\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1.0$

La Figura 1.15 presenta un ejemplo de la gráfica de estas dos funciones.

Para un proceso estocástico discreto en el estado estas funciones se definen como:

$F_x(x, t) = P[x(t) \leq x] = \sum_{i=1}^{x_0} P(x(t) = x_i)$	$f_x(x_0, t) = P(x(t) = x_0)$
---	-------------------------------

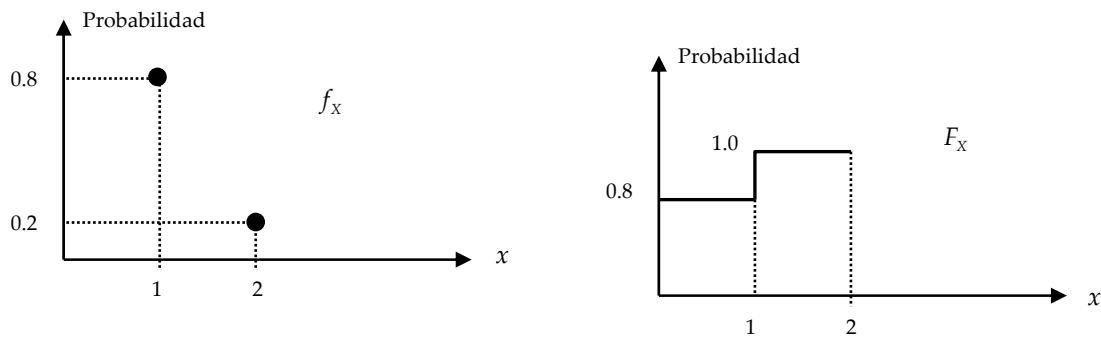


Figura 1.15 Funciones de densidad de probabilidad y de distribución de probabilidad para una variable discreta

1.10.3 Valor esperado o valor medio

Variables aleatorias continuas	Variables aleatorias discretas
$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_x(x) * dx$	$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i * P(x_i)$

Es una constante que indica lo que sería el promedio estadístico de una gran cantidad de observaciones de la variable aleatoria. Es común usar la notación μ para el valor esperado.

Características del valor esperado	
1	No es el valor con mayor probabilidad de ocurrir
2	No es el valor que se observa con más frecuencia (moda)
3	Puede ser imposible de obtener físicamente

Por lo tanto, se debe tener mucho cuidado al hacer inferencias a partir de valores esperados. No se debe confundir con el promedio estadístico \bar{x} de las observaciones de la variable.

Propiedades del valor esperado	
1	$E(x + c) = E(x) + c$, para c un número real
2	$E(c * x) = c * E(x)$, para c un número real
3	$E[x - E(x)] = 0$, La expectativa de desviación con respecto al valor medio es cero

La ecuación del valor esperado para una variable discreta lleva a la siguiente relación que se puede aplicar para una variable discreta o continua:

*Si se multiplica un valor C de una variable aleatorias x por la probabilidad de este valor se obtiene el valor esperado de C: $E(C) = C * P[C]$*

Este concepto se generaliza diciendo que al multiplicar una cantidad por una probabilidad se obtiene un valor esperado.

1.10.4 Varianza y desviación estándar

Variables aleatorias continuas	Variables aleatorias discretas
$VAR(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^2 * f_x(x) * dx$	$VAR(x) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x)]^2 * p(x_i)$

La varianza $VAR(x)$ es un número real positivo que mide la dispersión de la función con respecto a su valor esperado. Es común usar la notación σ^2 para la varianza.

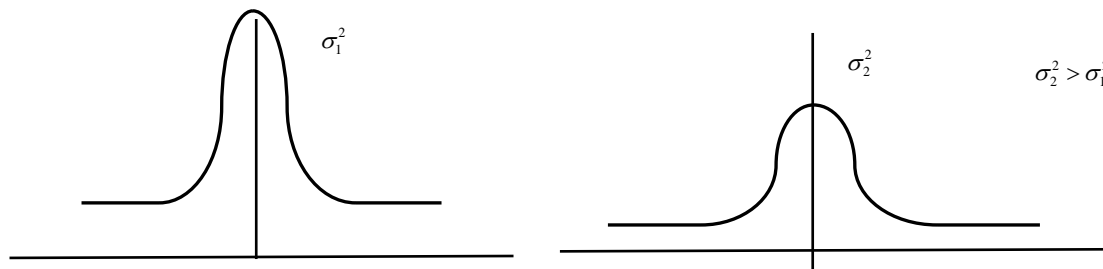


Figura 1.16 Concepto de varianza

Propiedades de la varianza	
1	$VAR(x + c) = VAR(x)$, para c un número real
2	$VAR(c * x) = c^2 * VAR(x)$, para c un número real

La desviación estándar $STD(x)$ mide la desviación con respecto al valor esperado en las mismas unidades de la variable.

$STD(x) = +\sqrt{VAR(x)}$

Es común usar la notación σ para la desviación estándar.

La varianza y la desviación estándar miden la “pobreza” del pronóstico del valor esperado con respecto a la tendencia central de la distribución.

El valor esperado y la varianza constituyen las principales características que describen las distribuciones de probabilidad. Otras medidas se presentan en el Capítulo 2.

Para un proceso estocástico se definen:

$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x, t) dx$	$VAR[x(t)] = \sigma_{x(t)}^2 = E[x^2(t)] - E^2[x(t)]$
---	---

EJEMPLO

La variable x con función de densidad de probabilidad $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ es una variable aleatoria con distribución Gaussiana.

La variable x_t con función de densidad de probabilidad $f_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2 t}}$ es un proceso Gaussiano; existe una variable aleatoria con distribución Gaussiana por cada valor del parámetro t , que en este caso es un número real mayor a cero.

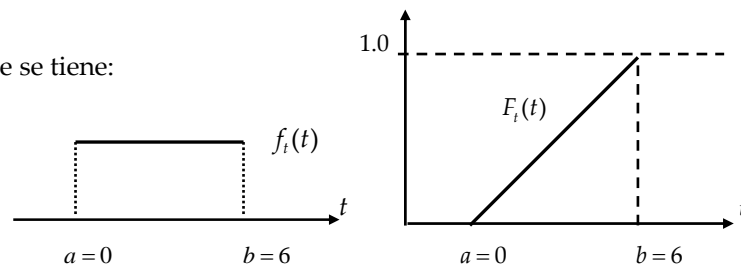
EJERCICIO 1.4

El tiempo t para que un operario realice la inspección de un equipo eléctrico es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 6 horas.Cuál es la probabilidad de que la inspección se realice en un tiempo menor o igual a 3 horas?

Para el caso de la distribución uniforme se tiene:

$$E(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+6}{2} = 3 \text{ Horas}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{b-a} \rightarrow f_i(t) = \frac{1}{6}$$



$$F_i(t) = P[t \leq t] = \frac{t-a}{b-a} \rightarrow F_i(t) = P[t \leq t] = \frac{t}{6} \rightarrow F_i(3) = \frac{3}{6} = 0.5 \rightarrow F_i(3) = 50\%$$

EJERCICIO 1.5

En un taller hay $n=4$ operarios. La probabilidad de que cualquiera de ellos realice la inspección de un equipo eléctrico en un tiempo menor o igual a 3 horas es $p=0.5$.

Si al inicio de la jornada se tienen 4 equipos para revisar, cual es la probabilidad de que a media mañana la mitad de los operarios estén desocupados?

En este caso, la variable aleatoria x representa el evento de encontrar $k=0, 1, 2, 3, \text{ o } 4$ operarios desocupados a media mañana.

$$E(x) = np = 4 * 0.5 = 2 \text{ operarios}$$

$$F_x(x) = P(x=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow F_x(2) = P(x=2) = \binom{4}{2} 0.5^2 (1-0.5)^{4-2} = 0.375 \rightarrow F_x(2) = 37.5\%$$

→ Se espera encontrar 2 operarios desocupados. La probabilidad de que este evento ocurra es del 37.5%

EJERCICIO 1.6

Para un transformador de distribución se ha verificado que el proceso de llegadas de las fallas es un proceso estocástico Poisson homogéneo con una tasa de ocurrencia de eventos $\lambda = 0.2$ fallas/año.

Para $N(t)$, el número de fallas que ocurren en un periodo de vida t que se mide en años, se definen:

- La probabilidad de que ocurran $k = 0, 1, 2, \dots$ fallas: $P[N(t) = k] = \frac{1}{k!} [\lambda t]^k * e^{-\lambda t}$
- El valor esperado de fallas: $E[N(t)] = \lambda t$
- La varianza: $VAR[N(t)] = \lambda t$

Nótese que t describe un periodo no un instante de tiempo. Así para cada valor de t existe una variable $N(t)$ con su distribución, valor esperado y varianza.

Este proceso es estacionario porque para cada periodo t el valor esperado y la varianza son una constante.

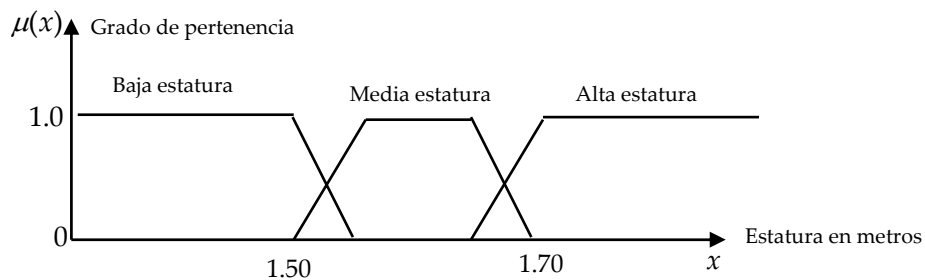
1.11 COMPARACIÓN ENTRE MODELAMIENTO DIFUSO Y PROBABILÍSTICO

Figura 1.17 Modelo difuso para la estatura de las personas

En la teoría de lógica difusa, la vaguedad e imprecisión se representan mediante conjuntos difusos, aquellos cuyas fronteras son blandas. Así mismo, se define una función de pertenencia $\mu(x)$ para la variable x bajo estudio, la cual da el grado de pertenencia de los valores de x con respecto a una definición lingüística. Un ejemplo de función de pertenencia se presenta en la Figura 1.

El grado de pertenencia es un número real entre 0 y 1 el cual mide la incertidumbre con respecto a la posibilidad de que un valor dado de x pertenezca a una clasificación lingüística dada. Así, el grado de pertenencia NO es una probabilidad ya que no se refiere a la posibilidad de ocurrencia de los valores de x .

Las funciones de pertenencia se construyen en forma empírica del conocimiento del analista o utilizando procedimientos basados en redes neuronales.

En resumen:

	Tipo de modelamiento	
	Probabilístico	Difuso
Tipo de incertidumbre que maneja	Aleatoriedad	Vaguedad, imprecisión, ambigüedad
Medida	Probabilidad Número real entre [0.0 1.0]	Grado de pertenencia Número real entre [0.0 1.0]
Significado de la medida	Se mide la posibilidad de ocurrencia de un evento o valor dado	Se mide la posibilidad de que un evento o valor dado pertenezca a una clasificación dada
Modelo matemático	Función de distribución de probabilidad	Función de pertenencia
Base matemática	Teoría clásica de conjuntos	Teoría de conjuntos difusos

Un fenómeno o situación del mundo real puede presentar varios tipos de incertidumbre para un mismo analista.

EJEMPLO

Un pintor lleva 50 cuadros a una exposición donde serán evaluados por tres críticos. Los críticos catalogaran cada una de las pinturas en las siguientes categorías: horrible, fea, bonita, hermosa.

Entonces, en este problema existen dos tipos de incertidumbre:

1. Primero, de vaguedad en cuanto a cómo serán catalogadas las obras por los críticos
2. Segundo, de aleatoriedad en cuanto a cuantas obras serán clasificadas en cada categoría

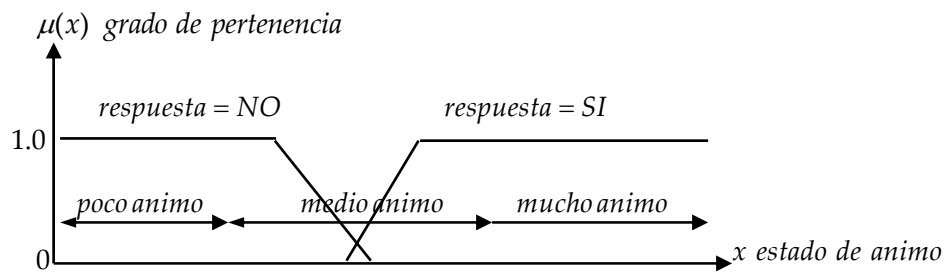
Obviamente, una vez los críticos dan su veredicto, la incertidumbre desaparece.

Así mismo, dos analistas podrían manejar un fenómeno o situación del mundo real mediante teoría de probabilidad o con teoría de lógica difusa, siendo ambas alternativas válidas.

EJEMPLO

Un hombre tiene 4 amigas con las que sale en algunas ocasiones. Un sábado en la tarde este hombre llama a cada una de las 4 y las invita a salir. Cada una de ellas le responde “voy a mirar si puedo cuadrar los asuntos que tengo pendientes y te respondo en una hora”. Mientras espera la respuesta, este hombre dice: La probabilidad de que cualquiera de ellas en forma independiente acepte a salir conmigo es del 80%, entonces la probabilidad de que una de las cuatro acepte hoy a salir conmigo, la puedo hallar aplicando la distribución binominal

Mientras este hombre espera que sus amigas le respondan, un compañero de estudio le dice: No seas bobo, este asunto no es de probabilidades sino de lógica difusa pues la respuesta de ellas depende es de su estado de ánimo; así del estado de ánimo que detectaste al hablar con cada una de ellas, estima con la siguiente función de pertenencia cuál puede ser su respuesta:



Ambos tipos de modelamiento son en este caso válidos para hacer la predicción.

1.12 TIPOS DE PROCESOS ALEATORIOS

- **Proceso sin memoria o Markoviano**

Si en un proceso aleatorio la transición a un estado siguiente solo depende del estado presente en que se encuentre el proceso, es decir, no importa el recorrido que hizo para llegar al estado presente, se dice que este proceso no tiene memoria o es Markoviano.

- **Proceso estacionario**

Un proceso aleatorio es estacionario si su valor esperado y varianza son constantes durante t

- **Proceso homogéneo**

Un proceso aleatorio es homogéneo si durante t este puede ser representador mediante una función de distribución de probabilidad

Todo proceso estacionario es homogéneo; así, los términos estacionario y homogéneo son intercambiables.

1.13 PROCEDIMIENTO PARA OBTENER UN MODELO PROBABILÍSTICO

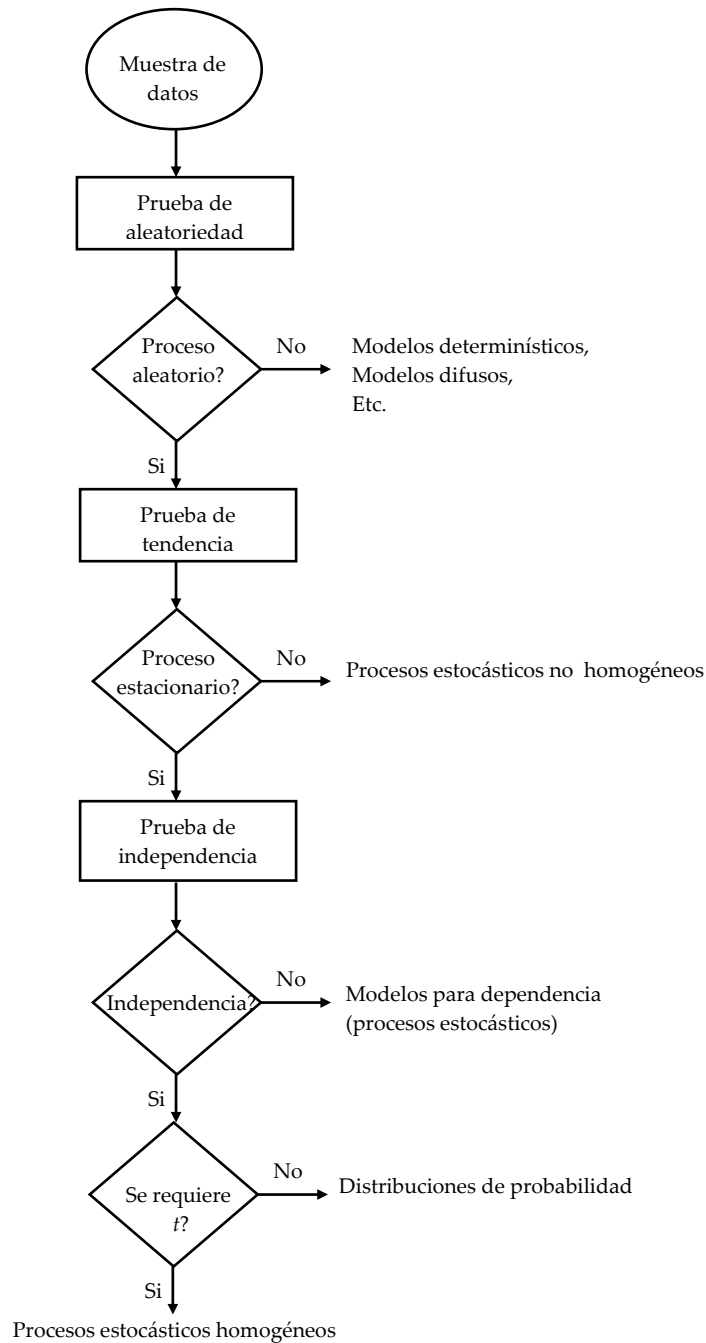


Figura 1.18 Procedimiento para obtener un modelo probabilístico

En la Fig. 1.18 se muestra el procedimiento básico para obtener un modelo probabilístico para un proceso aleatorio. La omisión de cualquiera de los modelos presentados puede llevar a un modelamiento erróneo.

Este procedimiento consta de tres pruebas básicas:

1	Aleatoriedad	<p>En muchos casos el analista determina según su razonamiento si un proceso bajo estudio es o no aleatorio.</p> <p>Sin embargo, cuando se trata de secuencias de números esto no es tan sencillo determinar la presencia de aleatoriedad y para tal propósito se han desarrollado pruebas.</p> <p>Por ejemplo, cuando se crea un generador de números aleatorios es necesario verificar si las secuencias de números generados son o no aleatorios.</p>
2	Tendencia	<p>Consiste en determinar si el proceso observado es o no estacionario.</p> <p>Ejemplo de estas pruebas son el test de Laplace o métodos gráficos tan sencillos como la grafica de barras de las magnitudes de una secuencia numérica.</p>
3	Independencia	<p>Consiste en determinar si las observaciones de la muestra son independientes entre si o no. Esta prueba es muy importante porque no siempre el analista puede determinar según su razonamiento si los resultados de un experimento aleatorio son o no independientes.</p>

Como ejemplos de modelos probabilísticos se tienen:

1	Procesos estocásticos homogéneos	<p>Proceso de Poisson Homogéneo</p> <p>Cadenas de Markov continuas homogéneas</p> <p>Proceso Gaussiano</p>
2	Procesos estocásticos no homogéneos	<p>Procesos de Poisson no homogéneos</p> <p>Cadenas de Markov no homogéneas</p>
3	Modelos para dependencia	<p>Series de tiempo</p> <p>Branching process</p>
4	Distribuciones de probabilidad	<p>Uniforme, uniforme discreta, normal, exponencial, gamma, Weibull, etc.</p>

1.14 RELACIÓN ENTRE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Los términos “probabilidad” y “estadística” son utilizados extensivamente por el común de las personas y por los profesionales sin que en la mayoría de los casos se conozca la diferencia entre estas dos áreas.

Aunque fuertemente relacionadas entre sí, estas dos áreas no son la misma cosa, por lo cual, es necesario conocer su diferencia.

Probabilidad	Estadística
Es una teoría matemática que se encarga del planteamiento de modelos para estudiar fenómenos aleatorios.	Se encarga de la aplicación de la teoría de probabilidad a problemas reales.
Sus conclusiones son <u>deducciones</u> basadas en los axiomas de probabilidad.	Sus conclusiones son <u>inferencias</u> o generalizaciones basadas en las observaciones disponibles del fenómeno aleatorio bajo estudio.
Su origen se remonta al estudio de los juegos de azar.	Su origen se remonta al estudio de las poblaciones por parte de los gobernantes, también llamados “estadistas”.

Es común usar como sinónimos los términos probabilístico y estadístico. Por ejemplo, “modelo probabilístico” y “modelo estadístico”. Otros términos relacionados:

Término	Significado	Ejemplo
Estadista	Persona que gobierna	Para referirse a un presidente de una nación se utiliza el término “estadista”
Estadística	Es un dato o información	“El IPC en el año anterior fue del 6%”
Estadístico	Una variable aleatoria que se utiliza para pruebas estadísticas	El estadístico de la prueba de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov se denomina D
Variable estadística	La variable de salida de un experimento aleatorio. Se refiere a algo de interés de una población lo cual es un proceso aleatorio.	La velocidad del viento en un sitio dado

Como se mencionó anteriormente, las distribuciones de probabilidad o procesos estocásticos constituyen el modelo matemático de un experimento aleatorio y son una “idealización” con la cual se quiere representar o modelar la realidad. Generalmente se asume que un fenómeno aleatorio tiene asociado una distribución de probabilidad o un proceso estocástico pero no se conoce cuál es; este modelo se determina por medio de los procedimientos de la estadística a partir de una muestra limitada de datos.

En la investigación estadística existen dos problemas:

Estimación	Predicción
Consiste en determinar un modelo matemático con sus parámetros o sus características más importantes de tal manera que representen o den información acerca de una variable estadística. Esto se hace a partir de la muestra de datos tomados en un experimento aleatorio.	Una vez se conoce el modelo matemático que representa a la variable de interés, se pueden hacer predicciones sobre las observaciones futuras.
Estimar es “inferir” el valor de los parámetros de un modelo probabilístico o de sus características	Como se está estudiando una variable aleatoria, no puede hacerse una predicción exacta de la observación futura por lo cual este procedimiento se denomina “inferencia”.

1.15 PARTES DE LA ESTADÍSTICA

1.15.1 Estadística descriptiva

“Es conjunto de técnicas para organizar, sumarizar y comunicar información en forma efectiva”

Cuando una persona en la calle habla de “estadística” generalmente se refiere a información que ha sido organizada utilizando los métodos de la estadística descriptiva.

EJEMPLO

El estudio en un periodo de tres años de las fallas que los usuarios del sistema de distribución de la ciudad de Pereira reportan a la línea telefónica 115 muestra que:

1	En promedio se emiten 10,000 órdenes de reparación por año.
2	En el 74% de las órdenes efectivamente se encuentran problemas de calidad del servicio, en el 8% no se encontró ningún problema y el restante porcentaje corresponde a otras solicitudes de los usuarios y ordenes que no pudieron procesarse por tener información incompleta.
3	De los problemas de calidad del servicio, el 83% son de continuidad del servicio, el 8% de calidad de la potencia y el 9% de seguridad.
4	El tiempo promedio para solucionarle a un usuario un problema de calidad del servicio es de 3.2 horas en la zona urbana y 4.8 horas en la zona rural.

1.15.2 Estadística inferencial

“Es un conjunto de técnicas para sacar conclusiones que se extienden más allá de la información disponible”

Ejemplo

Si para calcular el tiempo medio de fallas de una población infinita de bombillas se disponía de 100 datos, cual es el intervalo de confianza del 95% donde está el valor esperado verdadero?

En este texto nos ocuparemos de dos tipos de estimación (inferencia):

1	La estimación a partir de una muestra de datos del valor esperado $E(x)$ y la varianza σ_x^2 de una variable estadística x .
2	La estimación a partir de una muestra de datos de los parámetros que definen la distribución de probabilidad $f_x(x)$ ó $F_x(x)$ que representa a la variable estadística x .

En general, se habla del parámetro a estimar, sea $E(x), \sigma_x^2$, o los parámetros de forma, escala o localización de la distribución de probabilidad de la variable estadística.

Tipos de estimación	
Clásica	Bayesina
Se hacen estimaciones utilizando únicamente los datos disponibles	Además de los datos disponibles, se incorpora el conocimiento previo que se tenga sobre los parámetros a estimar. Por ejemplo, se conoce la distribución de probabilidad del parámetro que se desea estimar.

Definición de estimador
Es una variable aleatoria definida sobre una muestra de datos que sirve para representar en forma aproximada a un parámetro de la variable estadística de interés.

Un estimador se denota con el símbolo $\hat{\cdot}$.

Ejemplos	
1	El promedio estadístico \bar{x} es un estimador del valor esperado $E(x)$, entonces $\bar{x} = \hat{E}(x)$
2	La desviación muestral s es un estimador de la desviación estándar σ , entonces $s = \hat{\sigma}$

Tipos de Estimadores	
Puntuales	Por intervalos
Se estima un solo valor para el parámetro	Se estima un intervalo de valores dentro del cual se infiere con un nivel de confianza dado que debe estar el valor verdadero del parámetro. El intervalo puede ser unilateral o bilateral.

Ejemplos	
1	Estimador puntual: $\bar{x} = \hat{E}(x)$
2	Estimador por intervalo: $\bar{x} - 0.54 \leq E(x) \leq \bar{x} + 0.54$

Si θ es un parámetro de la distribución de probabilidad de la variable estadística de interés, el cual se quiere estimar por medio de $\hat{\theta}$. Para que $\hat{\theta}$ sea un buen estimador, es deseable que tenga las siguientes propiedades:

Propiedades de un estimador		
Propiedad	Descripción	Observaciones
Insesgado (unbiased)	Un estimador es insesgado si: $E(\hat{\theta}) = \theta$	Si se hacen muchas observaciones del estimador, este será igual al parámetro que se desea estimar. Esta propiedad no depende del tamaño de la muestra El promedio estadístico y la desviación muestral son estimadores insesgados.
Consistente	Un estimador es consistente si: $P(\hat{\theta} - \theta < \varepsilon) \rightarrow 1.0 \text{ si } n \rightarrow \infty$ ε es un número real positivo y n es el tamaño de la muestra	La diferencia entre el estimador y el valor a estimar tiende a ser finita conforme se aumenta el tamaño de la muestra. Es una propiedad asintótica que depende del tamaño de la muestra. El promedio estadístico y la desviación muestral son estimadores consistentes.
Eficiencia relativa	Si existen dos estimadores insesgados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ de un mismo parámetro y $\frac{\sigma_{\hat{\theta}_1}}{\sigma_{\hat{\theta}_2}} > 1.0$ Entonces el estimador 2 es más eficiente que el 1	El estimador más eficiente tiene la menor desviación estándar, entonces la razón calculada será mayor a 1 cuando el estimador más eficiente aparece en el denominador. Para una distribución unimodal (un solo pico en la función de densidad de probabilidad), el valor promedio es más eficiente como estimador que la mediana.
Suficiencia	Se dice que un estimador es suficiente si contiene toda la información disponible en los datos acerca del parámetro a estimar.	No siempre existen los estimadores suficientes

El asunto es entonces desarrollar métodos que permitan obtener buenos estimadores.

1.15.3 Teoría de decisión estadística

“Es un conjunto de técnicas para elegir entre un conjunto de alternativas de decisión basados en la información disponible”

Ejemplo	
La probabilidad de que exista un apagón en las noches es de 0.1 y la probabilidad de que no ocurra es de 0.9. Si no dispongo del servicio de electricidad puedo perder \$1,000,000 en producción por cada noche. Entonces, basado en el riesgo y el nivel de confianza del modelo, debo decidir entre:	
<ul style="list-style-type: none"> • Comprar una planta de generación diesel de \$25,000,000 y consume \$10,000 por noche • No comprar la planta de generación diesel 	

Existen problemas en los cuales se debe decidir si una afirmación relativa a un parámetro o parámetros de una distribución es verdadera o falsa y tomar una decisión; Se debe probar la hipótesis y esto se denomina “prueba de hipótesis”.

Hipótesis estadística
<i>Una hipótesis estadística es una afirmación acerca de uno o varios parámetros de la distribución de una variable estadística. Se dice que la afirmación es una hipótesis porque se refiere a una situación que <u>podría</u> ser cierta</i>

La hipótesis siempre se refiere a la población, no a la muestra. Tipos de hipótesis:

1	Hipótesis nula H_0	Es cualquier hipótesis que se plantea para ver si puede ser rechazada. En estadística, por lo general, plantea la ausencia de relación o diferencia en los resultados. Cualquier relación o diferencia es debida al azar o error del muestreo.
2	Hipótesis alterna H_1	Es la alternativa a la hipótesis nula. Si no se puede soportar la hipótesis nula, entonces por implicación, se soporta la hipótesis alterna.

Decisiones con respecto a una hipótesis nula		
Decisión	La hipótesis nula es:	
	Verdadera	Falsa
Aceptar H_0	Decisión correcta	Error tipo II
Rechazar H_0	Error tipo I	Decisión correcta

Como la decisión se hace basada en una muestra de datos, no siempre se puede hacer una decisión correcta. Para minimizar la probabilidad de que ocurra un error de tipo I o II se debe aumentar la muestra de datos. La probabilidad de que ocurra un error tipo I se denomina “probabilidad crítica o de rechazo” y se designa por α . La probabilidad de ocurra un error de tipo II se designa por β .

Procedimiento	
1	Plantear la hipótesis nula y una hipótesis alterna que se debe aceptar si la hipótesis nula se rechaza. La hipótesis alterna puede ser unilateral o bilateral. Ejemplo: $H_0 : \mu = 4$ $H_1 : \sigma > 4$ (unilateral) ó $\mu \neq 4$ (bilateral).
2	Se especifica el nivel de significancia del análisis: α , la probabilidad de cometer un error de tipo I o β la probabilidad de cometer un error de tipo II. Generalmente se trabaja con α .

3	Con la distribución del estadístico de prueba, se construye el criterio de prueba de hipótesis
4	Calcular el valor del estadístico sobre el cual se basa la decisión
5	Tomar la decisión, basados en el valor del estadístico de prueba.

1.16 ACLARACIÓN RESPECTO A LA TERMINOLOGÍA

En el área de probabilidad algunos términos pueden tener varios significados, por lo cual, para precisar a qué se refieren toca analizar el contexto de su uso. Por ejemplo:

Término	Significados
Proceso estocástico	Se refiere a un fenómeno aleatorio
	Se refiere a un fenómeno aleatorio para el cual el tiempo es variable explicativa
	Se refiere a un tipo de modelo matemático donde las variables aleatorias están indexadas por el tiempo u otro parámetro
Distribución	Se refiere a la función de distribución de probabilidad
	Se refiere a la función de densidad de probabilidad
	Se refiere a un tipo de modelo matemático que solo puede aplicarse para fenómenos aleatorios estacionarios con observaciones independientes y en el cual el tiempo no aparece como variable explicativa

1.17 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Papoulis Athanasios, "Probability, random variables and stochastic processes", Mc-Graw Hill, 1991.
- [2] Viniotis Yannis, "Probability and random processes for electrical engineers", Mc-Graw Hill, 1998.
- [3] Torres A, "Probabilidad, procesos estocásticos y confiabilidad en ingeniería eléctrica", Universidad de los Andes, 2005.
- [4] Miller I, Freund J, Johnson R, "Probabilidad y Estadística para Ingenieros", Prentice Hall, 1992.
- [5] Anders G, "Probability concepts in electric power systems", Wiley and Sons, 1990.
- [6] Hays W. L, Winkler R. L, "Statistics, probability, inference and decision", Volume 1, Holt Rinehart and Wiston Inc, 1970.
- [7] Lawyer G. F, "Introduction to Stochastic Processes", Chapman and Hall, 1995.
- [8] Ross T. J, "Fuzzy logic with engineering applications", McGraw Hill, 1995.
- [9] Torres A, Tranchita C, "Inferencia y razonamiento probabilístico y difuso", Revista de Ingeniería, Universidad de los Andes, 2003.
- [10] Torres A, "Modelamiento y metamodelamiento de la incertidumbre", Revista de Ingeniería, Universidad de los Andes, 1995.
- [11] Mosleh A, Bier V M, "Uncertainty about probability: A reconciliation with the subjectivist viewpoint", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics- PArt A: Systems and Humans, No. 3, 1996.
- [12] Ferrero A, Salicone S, "The random-fuzzy variables: a new approach for the expression of uncertainty in measurement", IEEE Conference on Instrumentation and measurement technology, 2003.
- [13] Zadeh L. A, "Possibility theory vs probability theory in decision analysis", IEEE.
- [14] Torres A, "Fundamentos de computación soft", Universidad de los Andes, 2003.

CAPÍTULO 2 – MODELOS PARA DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Una distribución de probabilidad es un modelo matemático que se utiliza para representar fenómenos aleatorios estacionarios, con realizaciones independientes y en el cual, la(s) variable(s) aleatoria(s) que sirve(n) para representar el fenómeno aleatorio bajo estudio no aparece(n) como función del tiempo. El tiempo, puede ser una de las variables que explican el fenómeno aleatorio bajo estudio, pero no indexa a otras variables aleatorias. Tampoco aparece en este tipo de modelo una variable que indexe a otras.

A continuación se presentan algunos de los modelos más populares para distribuciones de probabilidad de una variable. En los ejemplos de aplicación de estos modelos se asume que la distribución utilizada es una representación válida del fenómeno aleatorio bajo estudio; el procedimiento a seguir para saber si una distribución de probabilidad es una representación válida de un proceso aleatorio dado se presenta en los capítulos 5 y 6.

Una diferencia importante entre los modelos para variables continuas y los modelos para variables discretas es que la mayoría de éstos últimos se desarrollan para fenómenos aleatorios donde se cumplen unas condiciones específicas, por lo cual, su aplicación no puede hacerse simplemente siguiendo el proceso de ajuste de una muestra de datos a una distribución de probabilidad, como si es el caso, de los modelos para variables continuas. Por esta razón, en algunas aplicaciones, la muestra de datos de una variable aleatoria discreta se ajusta a un modelo para variable aleatoria continua.

2.1 TIPOS DE PARÁMETROS

Según su función, los parámetros de las funciones matemáticas que se utilizan como modelos para distribuciones de probabilidad se clasifican en:

2.1.1 Parámetro de localización

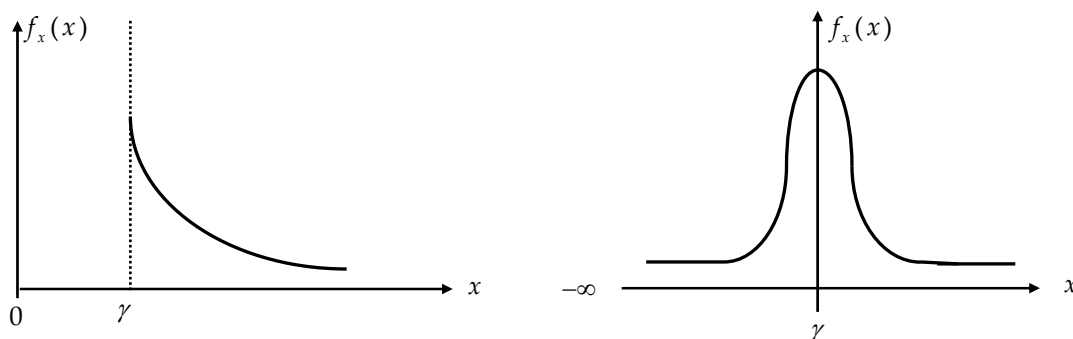


Figura 2.1 Parámetro de localización de un modelo para distribución de probabilidad

Tal como se muestra en la Figura 2.1, este parámetro especifica el punto en el eje horizontal a partir de donde comienza el rango de valores del modelo o donde se localiza su centro de masa.

Un cambio en este parámetro desplaza la distribución hacia la derecha o la izquierda.

Este parámetro tiene las mismas unidades de medida de la variable aleatoria x .

2.1.2 Parámetro de escala

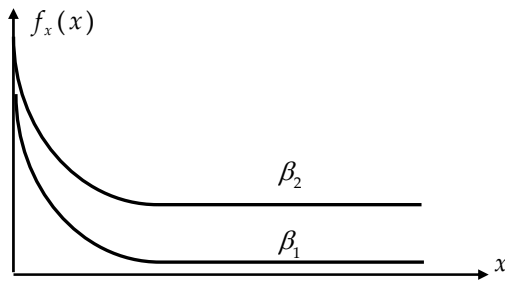


Figura 2.2 Parámetro de escala de un modelo para distribución de probabilidad

Este parámetro determina la escala o unidades de medida de la variable aleatoria x . Tal como se muestra en la Figura 2.2, un cambio en este parámetro expande o comprime la distribución sin cambiar su forma.

2.1.3 Parámetro de forma

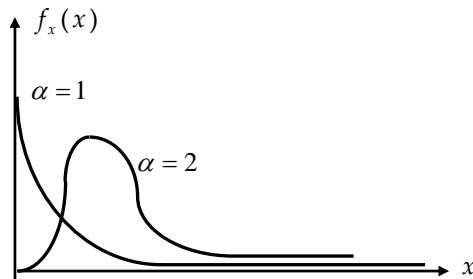


Figura 2.3 Parámetro de forma de un modelo para distribución de probabilidad

Tal como se muestra en la Figura 2.3, este parámetro determina la forma de la distribución. Este parámetro se identifica porque siempre aparece como exponente en la función matemática que define el modelo de distribución de probabilidad.

Algunos modelos como el exponencial o el uniforme no tienen este parámetro ya que su forma es fija. Otros modelos como el Beta pueden tener 2 parámetros de forma.

2.1.3 Parámetro de desplazamiento

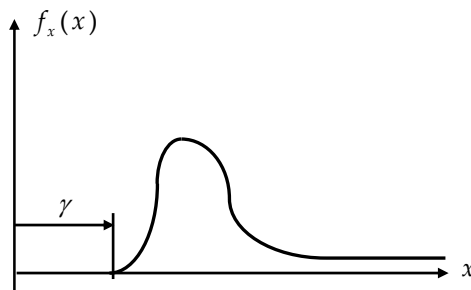


Figura 2.4 Parámetro de desplazamiento de un modelo para distribución de probabilidad

Se utiliza en distribuciones con rango $[0, +\infty]$. Tal como se muestra en la Figura 2.4, este parámetro desplaza toda la distribución a la derecha.

El desplazamiento es conveniente cuando el rango de valores de la variable no empieza en cero sino en un valor positivo muy grande, lo cual, puede hacer que la prueba de bondad de ajuste falle. Así, en estos casos se puede restar a todos los datos de la muestra un valor γ y hacer la prueba de bondad de ajuste. El modelo hallado $F(x)$ se aplica haciendo $F(x+\gamma)$, tiene valor esperado $E(x)+\gamma$ y varianza $VAR(x)$ (La varianza no cambia con el desplazamiento).

2.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS

Además del valor medio y la varianza existen otras medidas para caracterizar los modelos para distribuciones de probabilidad. Entre estas se incluyen la mediana, la moda y los coeficientes de variación, asimetría y afilamiento.

El valor esperado, la mediana y la moda se denominan medidas de “tendencia central” pues dan un pronóstico de la localización en el eje x de la distribución como un todo.

La varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación son medidas de la dispersión con respecto al valor esperado.

Los coeficientes de asimetría y de afilamiento indican la forma de la función.

2.2.1 La mediana

Tal como se muestra en la Figura 2.5, la mediana es el valor a para el cual hay una probabilidad acumulada del 50%. Una distribución discreta puede tener más de un punto que satisfaga la definición de mediana.

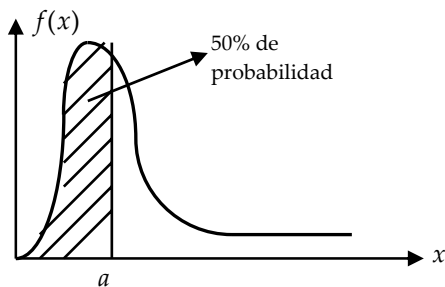


Figura 2.5 Concepto de mediana

2.2.2 La moda

Tal como se muestra en la Figura 2.6, la moda es el valor a para el cual la función de densidad de probabilidad o la función de probabilidad de masa alcanzan su mayor altura.

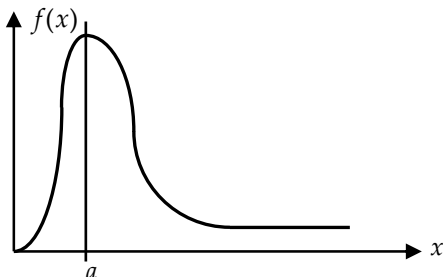


Figura 2.6 Concepto de moda

Para algunas distribuciones de probabilidad puede ser que no exista la moda o que existan varias. Ver la Figura 2.7

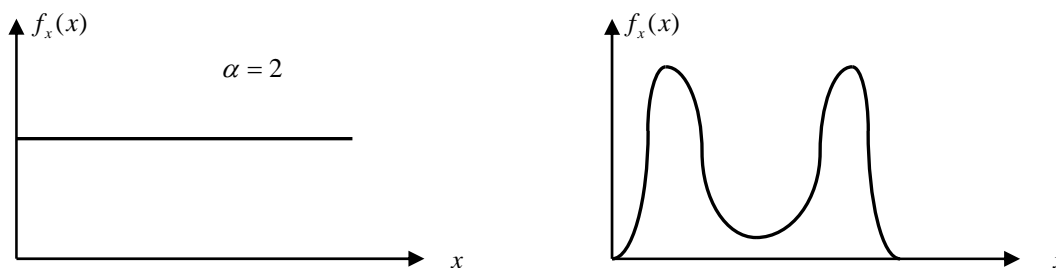


Figura 2.7 Ejemplos de distribuciones de probabilidad sin moda o con varias modas

2.2.3 Momentos centrales

Se define el momento central (con respecto al valor esperado) de orden r como:

$$m_r = E[(X - E(x))^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^r * f_x(x) * dx \text{ para variables aleatorias continuas}$$

$$m_r = E[(X - E(x))^r] = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^r * p(x_i) \text{ para variables aleatorias discretas}$$

r	Descripción
0	$m_0 = 1.0$ La probabilidad total, área bajo la curva de $f_x(x)$ o sumatoria de las probabilidades puntuales
1	$m_1 = 0.0$ pues $E[X - E(x)] = 0$
2	$m_2 = VAR(x)$ se denomina varianza
3	m_3 se denomina Skewness
4	m_4 se denomina Kurtosis

2.2.4 Coeficiente de variación

$$cv = \frac{STD(x)}{E(x)} * 100\% \text{ si } E(x) \neq 0$$

Mide la dispersión central de la distribución. Permite comparar varias distribuciones, aunque las unidades de las variables aleatorias no sean las mismas.

2.2.5 Coeficiente de asimetría

$$ca = \frac{m_3}{[STD(x)]^3}$$

Generalmente está entre -1 y +1. Si una distribución es simétrica entonces el coeficiente de asimetría es cero.

Si la “cola” de la distribución está hacia la derecha, entonces el coeficiente de asimetría es positivo; si la “cola” de la distribución está hacia la izquierda, entonces el coeficiente de asimetría es negativo.

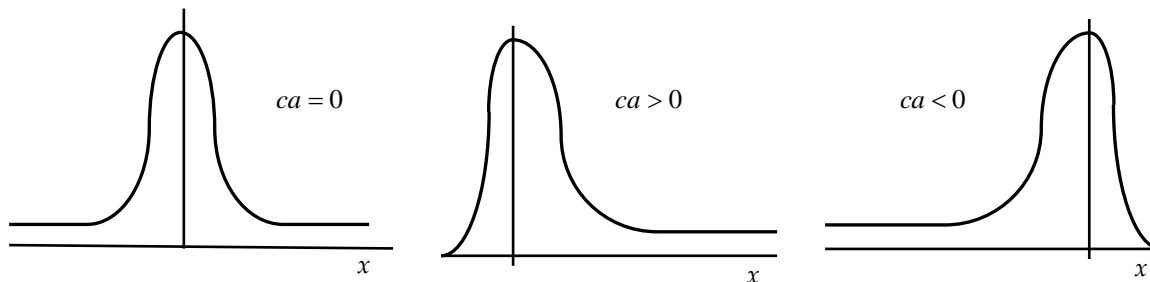


Figura 2.8 Coeficiente de asimetría para varias distribuciones

2.2.6 Coeficiente de afilamiento

$$cp = \frac{m_4}{[STD(x)]^4}$$

Mide el afilamiento o cantidad de “pico” (peakness) de la distribución.

Se toma como referencia la distribución Gaussiana estándar (valor medio cero y varianza 1) la cual tiene un $cp = 3$. Distribuciones con un cp mayor a 3 tendrán más pico que esta distribución; si el cp es menor que 3, la distribución será más aplastada que la distribución Gaussiana estándar.

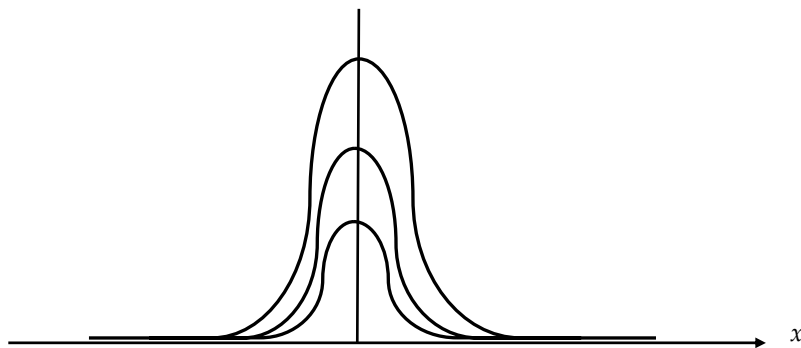


Figura 2.9 Coeficiente de afilamiento

2.4 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

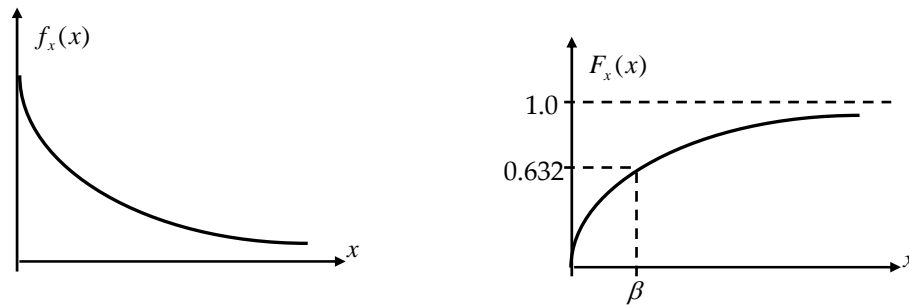


Figura 2.9 Distribución exponencial

Se define por medio de un parámetro de escala β [unidades de x] o una tasa de eventos h [eventos/unidad de x] que es el inverso del parámetro de escala.

$f_x(x)$	$\frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$ ó $h * e^{-h*x}$
$F_x(x)$	$1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$ ó $1 - e^{-h*x}$
$E(x)$	β ó $\frac{1}{h}$
$VAR(X)$	β^2 ó $\frac{1}{h^2}$
<i>Rango</i>	$x \in [0, +\infty)$

Es la distribución de probabilidad más utilizada en confiabilidad.

La desviación estándar es igual al valor esperado, por lo cual el coeficiente de variación es del 100%; lo cual indica que existe una gran dispersión de los valores de la variable con respecto al valor esperado.

Es un caso de las distribuciones Weibull y Gamma. También aparece en los procesos estocásticos homogéneos de Markov y Poisson.

Algunas aplicaciones
Confiabilidad: Modelo de vida de componentes en periodo de vida útil
Teoría de colas: Tiempo entre llegada de llamadas a un conmutador o clientes a un banco, tiempo para servicio

EJERCICIO 2.1

Una cuadrilla que realiza mantenimiento preventivo a los circuitos primarios de distribución aéreos debe localizar los puntos donde hay “acercamientos” entre los árboles y las fases de los circuitos primarios para hacer poda.

Sea x la distancia que hay que recorrer desde la subestación hasta el punto donde se encuentra un acercamiento o la distancia entre el punto donde se encontró un acercamiento y se empieza a hacer el recorrido para encontrar otro acercamiento.

De estadísticas se conoce que, en promedio, por cada 10 km de red recorridos se encuentra un acercamiento.

Si la distancia X es una variable aleatoria exponencialmente distribuida hallar:

- Cual es la tasa de eventos?

$$h = \frac{1 \text{ acercamiento}}{10 \text{ km}} = 0.1 \text{ acercamientos/km}$$

Aquí el parámetro de la distribución se define a partir de una estadística. Faltaría verificar si realmente la tasa de eventos es constante; esto podría evaluarse gráficamente o por medio de la varianza.

- Qué distancia se espera recorrer para encontrar un acercamiento?

$$E(x) = \frac{1}{h} = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ km/acercamiento}$$

Este valor esperado corresponde a la cifra estadística operativa.

- Cuál es la probabilidad de encontrar un acercamiento en un recorrido de 10 km?

$$F(10\text{km}) = 1 - e^{-0.1 \cdot 10} = 0.6321$$

Es decir, apenas hay una probabilidad del 63.21% de encontrar un acercamiento en 10 km que a su vez es la distancia “esperada” para encontrarlo. Esto ilustra el cuidado que hay que tener al hacer inferencias a partir de valores medios o esperados.

- Cuántos km hay que recorrer para tener una probabilidad del 90% para encontrar un acercamiento?

$$F(x) = 1 - e^{-0.1x} = 0.9 \quad -e^{-0.1x} = 0.9 - 1.0 \quad -e^{-0.1x} = -0.1$$

$$x = -\ln(0.1)/0.1 = 23.026 \text{ km}$$

La probabilidad de encontrar 0, 1 o n acercamientos se halla con el proceso de Poisson.

2.5 DISTRIBUCIÓN UNIFORME

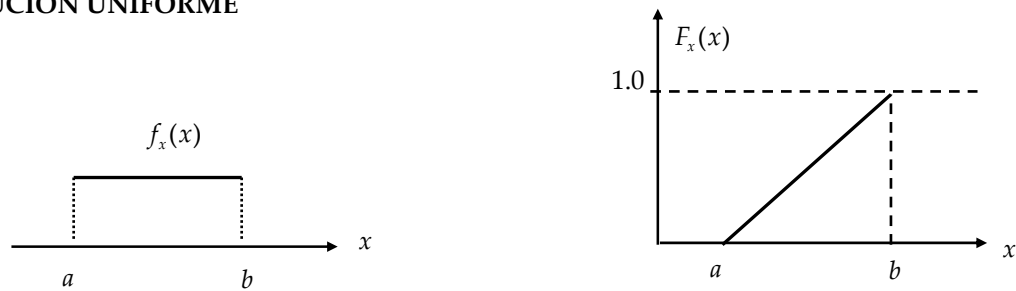


Figura 2.10 Distribución uniforme

Se define por medio de dos valores a y b , con $a < b$. El parámetro de localización es a y el parámetro de escala $(b - a)$.

$f_x(x)$	$\frac{1}{b-a}$
$F_x(x)$	$\frac{x-a}{b-a}$
$E(x)$	$\frac{a+b}{2}$
$VAR(X)$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
<i>Rango</i>	$x \in [a, b]$

Es la distribución de probabilidad más simple.

El factor más importante de esta distribución es que todos los valores del rango de la variable aleatoria tienen igual probabilidad.

Algunas aplicaciones
Generación de números aleatorios uniformes
Tiempo para llegada de eventos en un proceso de Poisson homogéneo
Teoría de colas: Tiempo para llegada de llamadas a un conmutador o clientes a un banco
Fugas en una tubería

EJERCICIO 2.2

Para una línea de transmisión en particular, las fallas tienen igual probabilidad de ocurrir en cualquier parte de su recorrido de 50 km.

Sea x la distancia en km medida de la subestación a un punto de falla dado. Entonces, x es una variable aleatoria uniformemente distribuida.

- Cuál es la probabilidad de que ocurra una falla en los primeros 10 km de la línea?

$$F(10km) = \frac{x}{50km} = \frac{10km}{50km} = 0.2$$

- Cuál es el valor esperado para la distancia en que ocurren las fallas?

$$E(x) = \frac{(50km + 0km)}{2} = 25km$$

- Cuál es la probabilidad de que ocurra una falla en los primeros 25 km de la línea?

$$F(25km) = \frac{x}{50km} = \frac{25km}{50km} = 0.5$$

Es decir, apenas hay una probabilidad del 50% de encontrar una falla en los primeros 25 km que a su vez es la distancia “esperada” para encontrarlo. De nuevo, esto ilustra la debilidad de los análisis de decisión que se basen en valores medios o esperados.

Es de aclarar que, para asumir este modelo uniformemente distribuido para la distancia de falla x , es necesario que todo el recorrido de la línea esté en una zona con iguales condiciones climáticas (viento, lluvia, descargas atmosféricas, etc.), vegetación, resistividad del terreno, etc. Además, el tipo constructivo de la línea y sus materiales deben ser los mismos para los 50 km .

2.6 DISTRIBUCIÓN NORMAL O GAUSIANA

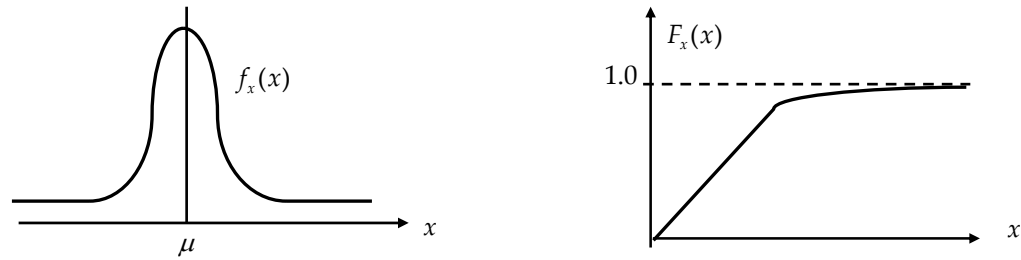


Figura 2.11 Distribución normal o Gaussiana

Se define por medio un parámetro de localización, usualmente llamado μ , y un parámetro de escala, usualmente llamado $\sigma > 0$.

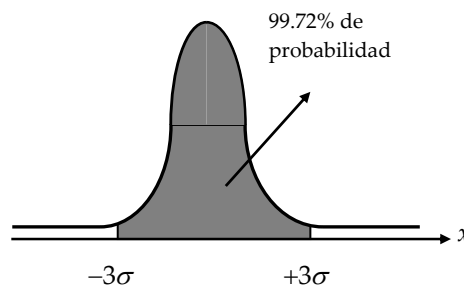
$f_x(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
$F_x(x)$	No tiene forma analítica
$E(x)$	μ
$VAR(X)$	σ^2
Rango	$x \in (-\infty, +\infty)$

Es la distribución de probabilidad más importante y más utilizada en probabilidad y estadística.

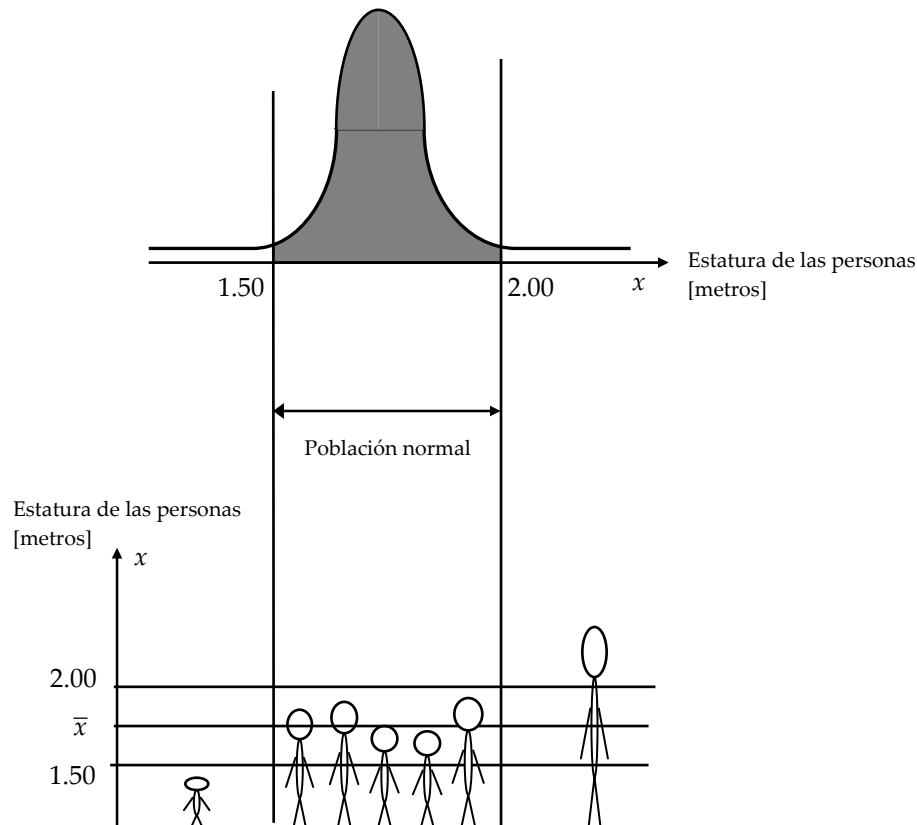
Algunas aplicaciones
Estudio de errores de varios tipos
Variables que resultan de la suma de grandes cantidades de otras cosas
Sobrevoltajes, voltajes de aguante de aislamientos
Altura de las personas, inflación, tasas de reproducción

Es usual, presentar el eje x en forma de desviaciones estándar y expresar σ como un porcentaje con respecto a μ : $\sigma\% = \sigma / \mu * 100\%$.

El área encerrada entre $\pm 3\sigma$ es de 0.9972, por lo cual, se asume que estos valores encierran todos los valores posibles de la variable.



El nombre “normal” se aplica a esta distribución ya que en las poblaciones consideradas “normales”, las características de los individuos, por ejemplo, su estatura, coeficiente de inteligencia, etc. se concentran alrededor del valor medio y muy pocos individuos tienen valores muy por fuera de dicho valor. Es decir, existe muy poca probabilidad de encontrar individuos con características que estén por fuera de $\pm 3\sigma$. En la Figura 2.12 se ilustra este concepto, tomando como ejemplo la estatura de los seres humanos.



Como los valores de la función de distribución de probabilidad deben hallarse numéricamente, para esto se utiliza la distribución normal estándar Φ que se define con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Ver la Figura 2.11.

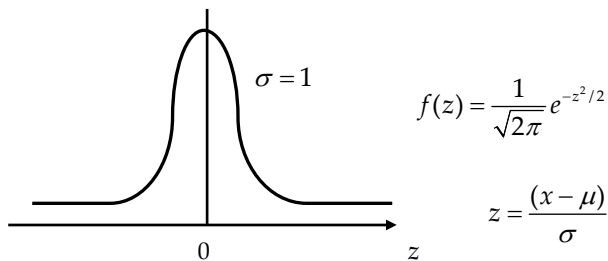


Figura 2.11 Distribución normal estándar

EJERCICIO 2.3

Un aislador tipo poste de un equipo que opera a 34.5 kV tiene un BIL de 170 kV.

El voltaje de aguante del aislador a los voltajes ocasionados por descargas atmosféricas sigue una distribución Gausiana con un valor medio llamado CFO (Critical Flashover) y una desviación del 5%.

El BIL es el voltaje de aguante para sobrevoltajes producidos por descarga atmosférica y es el valor que se ubica a 3 desviaciones estándar por debajo del valor medio de la distribución Gausiana.

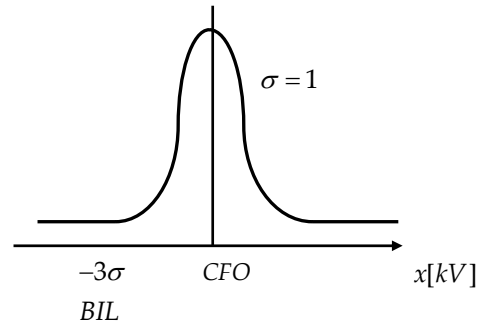
- Cuál es el CFO del aislador?

$$CFO = BIL + 3 * \sigma$$

$$CFO = BIL + 3 * \frac{5}{100} * CFO$$

$$CFO * (1 - 3 * 0.05) = BIL$$

$$CFO = \frac{170kV}{1 - 3 * 0.05} = 200kV$$



- Qué probabilidad de dañar el aislamiento tiene una descarga atmosférica que produzca un voltaje de 183.3 kV?

$$z = \frac{x - 200kV}{0.05 * 200} = -1.67$$

$\Phi(z = -1.67) = 0.0475 \rightarrow 4.75\%$ De tablas de la distribución normal estándar.

- Qué valor de voltaje producido por descarga atmosférica tiene un 90% de probabilidad de dañar el aislamiento?

Se busca en las tablas de la distribución normal estándar los valores cercanos a 0.9

$$\Phi(z = 1.28) = 0.8997$$

$$\Phi(z = 1.29) = 0.9015$$

Interpolando entre estos dos valores, se obtiene $z=1.282$ para 0.9

Entonces, $x = \mu + z * \sigma = 200kV + 1.282 * 0.05 * 200kV = 212.8kV$

2.7 DISTRIBUCIÓN WEIBULL

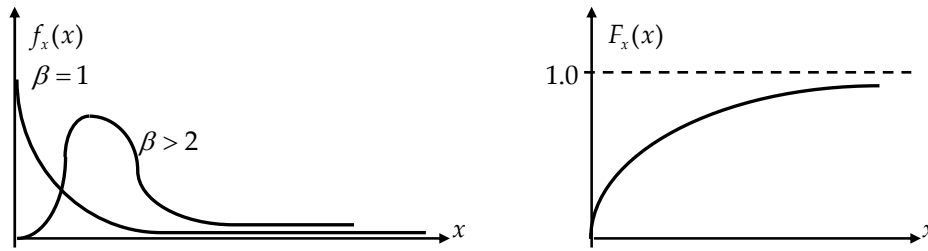


Figura 2.12 Distribución Weibull

Se define con un parámetro de escala $\alpha > 0$ y un parámetro de forma $\beta > 0$.

$f_x(x)$	$\alpha * \beta * x^{\beta-1} * e^{-\alpha * x^\beta}$
$F_x(x)$	$1 - e^{-\alpha * x^\beta}$
$E(x)$	$\alpha^{-1/\beta} * \Gamma(1 + \beta^{-1})$
$VAR(X)$	$\alpha^{-(2/\beta)} * [\Gamma(1 + 2 * \beta^{-1}) - (\Gamma(1 + \beta^{-1}))^2]$
Rango	$x \in [0, +\infty)$

El símbolo Γ denota la función Gamma. Hay otras formas matemáticas para definir esta distribución.

Esta distribución no tiene una forma definida. Según el valor de su parámetro de forma puede tomar diversas formas. Es muy utilizada en confiabilidad, pues puede ajustarse para modelar procesos de deterioro y mejora de la vida del componente.

Algunas aplicaciones
Tiempos para falla
Tiempo para completar algún trabajo
Estudio de fatiga de materiales
Modelamiento de componentes en confiabilidad

La función Gamma $\Gamma(x)$

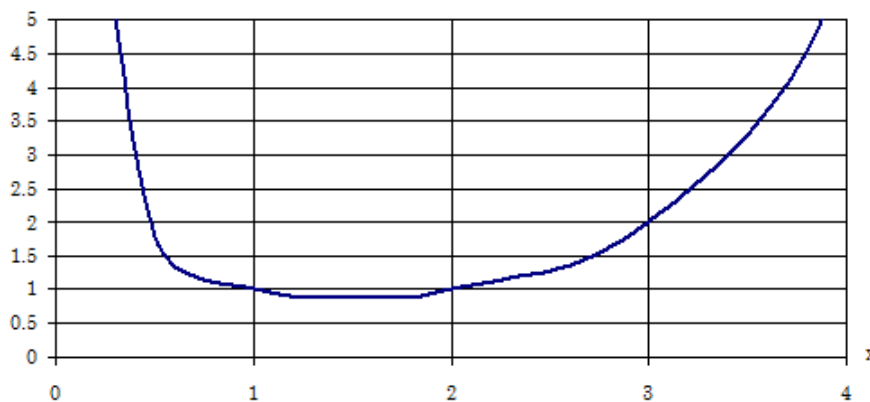


Figura 2.13 Gráfica de la función Gamma

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ para } x > 0$$

x	$\Gamma(x)$
0.1	9.5135
0.5	1.77245
1	1
1.5	0.8862
2	1
3	2
4	6
5	24

EJERCICIO 2.4

La energía radiante del sol en una zona dada es una variable aleatoria con distribución Weibull de parámetros $\alpha = 3$ [W/m²] y $\beta = 2$.

- Cuál es el valor medio, la varianza, desviación estándar y el coeficiente de variación de la energía radiante por día?

$$E(x) = \alpha^{-(1/\beta)} * \Gamma(1 + \beta^{-1}) = 3^{-0.5} * \Gamma(1 + 0.5) = 3^{-0.5} * 0.8862 = 0.5117 \text{ W/m}^2$$

$$VAR(x) = \alpha^{-(2/\beta)} * [\Gamma(1 + 2 * \beta^{-1}) - (\Gamma(1 + \beta^{-1}))^2] = 3^{-(2/2)} * [\Gamma(1 + 2 * 2^{-1}) - (\Gamma(1 + 2^{-1}))^2] = 0.0715 \text{ (W/m}^2)^2$$

$$STD(x) = \sqrt{VAR(x)} = \sqrt{0.0715} = 0.2675 \text{ W/m}^2$$

$$CV = \frac{STD(x)}{E(X)} * 100\% = \frac{0.2675}{0.5117} * 100\% = 52.27\%$$

- Cuál es la probabilidad de que la energía radiante sea menor o igual al valor esperado?

$$F(x = 0.5117) = P(x \leq 0.5117) = 1 - e^{-\alpha * x^\beta} = 1 - e^{-3 * (0.5117)^2} = 0.54$$

- Si un equipo que funciona con energía solar requiere más de 0.2 W/m² para operar, cuál es la probabilidad de que no funcione?

$$F(x = 0.2) = P(x \leq 0.2) = 1 - e^{-\alpha * x^\beta} = 1 - e^{-3 * (0.2)^2} = 0.11308$$

- Cuál es el valor esperado de horas al día que no operará el equipo?

$$t_{down} = 0.11308 * 12 = 1.35696$$

2.8 DISTRIBUCIÓN GAMMA

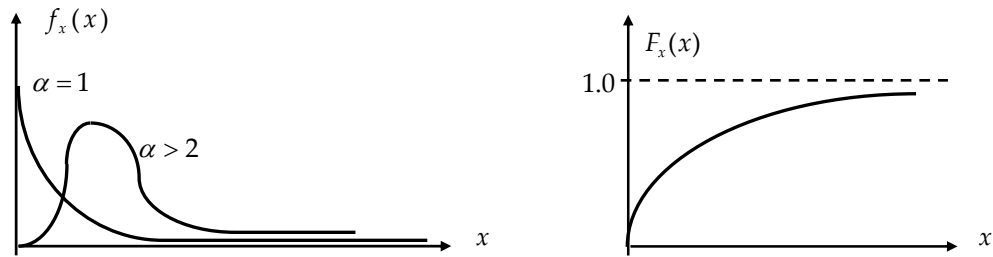


Figura 2.13 Distribución Gamma

Se define con un parámetro de escala $\beta > 0$ y un parámetro de forma $\alpha > 0$.

$f_x(x)$	$\frac{\beta^{-\alpha} * x^{\alpha-1} * e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)}$ para $x > 0$ Si $\alpha = 2 \rightarrow x * e^{-\frac{x}{\beta}} / \beta^2$
$F_x(x)$	α no es un entero: No tiene forma analítica α es un entero positivo: $1 - e^{-x/\beta} * \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{(x/\beta)^j}{j!}$ para $x > 0$ Si $\alpha = 2$: $1 - e^{-x/\beta} - \frac{x}{\beta} e^{-x/\beta}$
$E(x)$	$\alpha * \beta$
$VAR(X)$	$\alpha * \beta^2$
Rango	$x \in [0, +\infty)$

El símbolo Γ denota la función Gamma. Al igual que la distribución Weibull, no tiene una forma definida. Según el valor de su parámetro de forma puede tomar diversas formas.

Algunas aplicaciones	
Tiempos para falla	
Tiempo para completar algún trabajo: reparación, atención de clientes	
Fenómenos metereológicos	

Esta distribución es muy importante pues genera las dos siguientes distribuciones:

Distribución	Condiciones	Aplicación
Chi-cuadrado	$\alpha = v/2$ y $\beta = 2$, $v =$ grados de libertad	Estadística: bondad de ajuste, inferencia
Erlang	Si α es un entero positivo	Proceso de Poisson, teoría de colas

EJERCICIO 2.5

La resistividad del terreno en una zona dada es una variable aleatoria con distribución Gamma de parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 120$ [$\Omega - m$].

- Cuál es el valor medio o esperado de la resistividad del terreno?

$$E(x) = \alpha * \beta = 3 * 120 = 360 \text{ } \Omega - m$$

- Cuál es la desviación estándar?

$$V(x) = \alpha * \beta^2 = 3 * 120^2 = 43200$$

$$\sigma = +\sqrt{43200} = 207.8461 \text{ } [\Omega - m]$$

- Cuál es la probabilidad de que la resistividad del terreno sea mayor que el valor medio?

$$F(x > 360) = 1 - P(x \leq 360) = 1 - 0.5768 = 0.4232$$

La probabilidad de que x sea menor a $360 \text{ } \Omega - m$ se obtuvo numéricamente.

Como se observa, la probabilidad de que la resistividad del terreno sea mayor al valor esperado, es muy alta.

2.9 DISTRIBUCIÓN PARETO

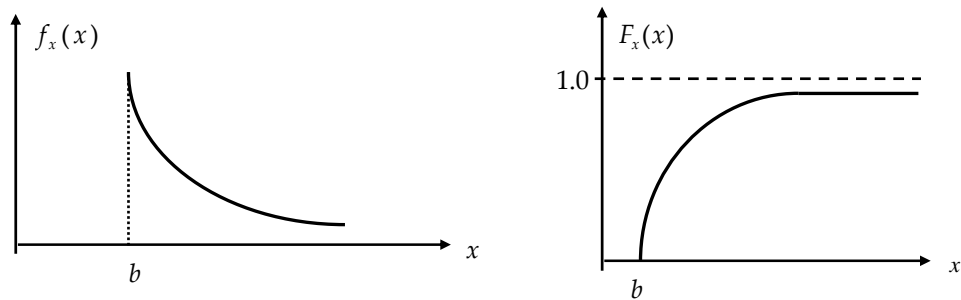


Figura 2.14 Distribución Pareto

Se define con un parámetro de localización $b > 0$ y un parámetro de forma $a > 0$.

$f_x(x)$	$\frac{a}{b} * \left(\frac{b}{x}\right)^{a+1}$
$F_x(x)$	$1 - \frac{1}{b} * x * e^{[(a+1)*Ln(b/x)]}$
$E(x)$	$\frac{b * a}{a - 1}$ si $a > 1$
$VAR(X)$	$\frac{a * b^2}{(a - 1)^2 * (a - 2)}$ si $a > 2$
<i>Rango</i>	$x \in [b, +\infty)$

Algunas aplicaciones	
Economía:	tamaño de compañías, precio de acciones
Demografía:	Tamaño de poblaciones de ciudades
Confiabilidad	

EJERCICIO 2.6

Un programa de computador (software) presenta errores o “bugs” una vez este es entregado al usuario.

Si el tiempo para que el usuario detecte el primer error es una variable aleatoria con distribución Pareto de parámetros $a = 3$ y $b = 0.0833$ años (1 mes), hallar:

- Cuál es el valor tiempo esperado para que el usuario llame al fabricante para que corrijan un error?

$$E(x) = \frac{b * a}{a - 1} = \frac{0.0833 * 3}{3 - 1} = 0.1250 \text{ años (1.5 meses)}$$

- Cuál es la probabilidad de que se encuentre un error en el primer mes de uso del software?

$$F(x \leq 0.0833) = 1 - \frac{1}{0.0833} * 0.0833 * e^{[(3+1) * \ln(0.0833/0.0833)]} = 0$$

Este resultado es obvio, pues la distribución se define a partir de $b=1$ mes.

- Cuál es la probabilidad de que se encuentre un error al mes y medio de uso del software?

$$F(x \leq 0.1250) = 1 - \frac{1}{0.0192} * 0.1250 * e^{[(3+1) * \ln(0.0192/0.1250)]} = 0.7037$$

Como se observa, la probabilidad de encontrar un error entre un mes y mes y medio de entregado el programa se incrementa dramáticamente.

2.10 DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR

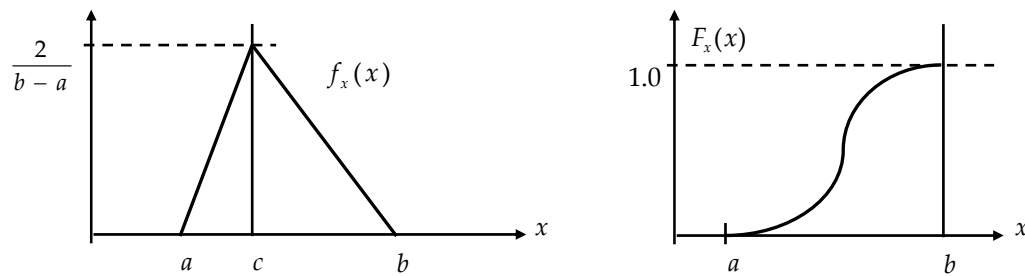


Figura 2.15 Distribución triangular

Se define con tres parámetros a , b , c que son números reales tal que: $a < c < b$, a es el parámetro de localización, $(b - a)$ es el parámetro de escala y c es el parámetro de forma. a y b son el intervalo en el cual se conoce está el rango de valores de la variable aleatoria y c es el valor que se estima más probable.

$f_x(x)$	$\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} \text{ si } a \leq x \leq c$ $\frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} \text{ si } c < x \leq b$
$F_x(x)$	$\frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} \text{ si } a \leq x \leq c$ $1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} \text{ si } c < x \leq b$
$E(x)$	$\frac{a+b+c}{3}$
$VAR(X)$	$\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$
<i>Rango</i>	$x \in [a, b]$

Esta distribución se utiliza cuando no existe mayor información para construir el modelo probabilístico, pero se conocen los límites de la variable y el valor más probable entre estos límites.

Algunas aplicaciones
Modelos aproximados en ausencia de datos

EJERCICIO 2.7

Un sistema de potencia de una región dada A se interconectará a otro sistema B por medio de una línea de transmisión cuya capacidad es de 200 MW.

El propósito de la interconexión es que el sistema B de soporte al sistema A, cuando tenga excedentes de generación.

La generación instalada en el sistema B es predominantemente hidráulica y no tiene capacidad de regulación anual o multianual (no tiene grandes embalses).

El operador del sistema B considera que puede garantizar un soporte de generación de 124 MW al sistema A. Pero dependiendo de las condiciones de hidrología y de demanda podría dar un soporte mayor.

- Cuál es el modelo probabilístico de los MW que puede importar el sistema A desde el sistema B?

Sea x la variable aleatoria de los MW que se pueden importar desde el sistema B

- a: Es el valor mínimo de importación y corresponde a 0 MW, evento que sucede cuando el sistema B no tiene excedentes
- b: Es el valor máximo de importación es 200 MW que es la capacidad de transmisión de la línea de interconexión.
- c: Es el valor más probable de soporte de generación y corresponde a 124 MW.

Entonces, el modelo es una distribución triangular con parámetros $a=0$ MW, $c=124$ MW y $b=200$ MW

- Cuál es el valor esperado de MW de soporte que puede brindar el sistema B?

$$E(x) = \frac{a + b + c}{3} = \frac{0 + 200 + 124}{3} = 108 \text{ MW}$$

- Cuál es la probabilidad de que el sistema B pueda suministrar más de los 108 MW esperados?

$$F(x > 108) = 1 - P[x \leq 108] = 1 - \frac{(x - a)^2}{(b - a)(c - a)} = 1 - \frac{(108 - 0)^2}{(200 - 0)(124 - 0)} = 1 - 0.4703 = 0.5297$$

2.11 DISTRIBUCIÓN BETA

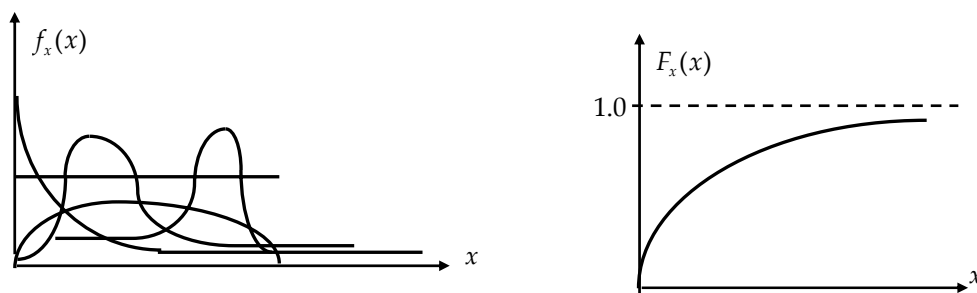


Figura 2.16 Distribución Beta

Se define con dos parámetros de escala $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$.

$f_x(x)$	$\frac{x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}}{B(\alpha_1, \alpha_2)}$
$F_x(x)$	No tiene forma analítica
$E(x)$	$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$
$VAR(X)$	$\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}$
Rango	$x \in (0, 1)$

El símbolo B denota la función Beta:

$B(\alpha_1, \alpha_2)$	$\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$
-------------------------	--

Esta distribución no tiene una forma definida. Según el valor de sus parámetros de forma puede tomar muy diversas formas. La tasa de eventos siempre es creciente.

Muchas variables aleatorias pueden normalizarse y modelarse mediante esta distribución.

Algunas aplicaciones
Para modelar proporciones
Modelos en ausencia de datos

La distribución Beta con ambos parámetros iguales a 1 es la distribución uniforme para valores de x entre 0 y 1.

EJERCICIO 2.8

Un sistema de potencia de una región dada es deficitario en cuanto a generación. Este déficit se atiende con importación de potencia desde los sistemas vecinos. Definiendo:

$$Deficit = \frac{(D_{\max} - G_{disponible})}{D_{\max}}$$

Entonces, el déficit es una variable aleatoria cuyo rango son los números reales entre 0 y 1.

Si la variable aleatoria que representa el déficit tiene distribución Beta con ambos parámetros de forma iguales a 2, hallar:

- Cuál es el valor esperado de déficit?

$$E(x) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{2}{2+2} = 0.5$$

- Cuál es la desviación estándar?

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}} = \sqrt{\frac{2 * 2}{(2+2)^2 (2+2+1)}} = 0.2236$$

- Cuál es la probabilidad de que el déficit sea mayor al 50%?

$$P(x > 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.5 = 0.5$$

F(0.5) se halló numéricamente

- Cuál es la probabilidad de que el déficit sea menor o igual al 25%?

$$P(x \leq 0.25) = 0.1562 \text{ Valor hallado numéricamente}$$

2.16 DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

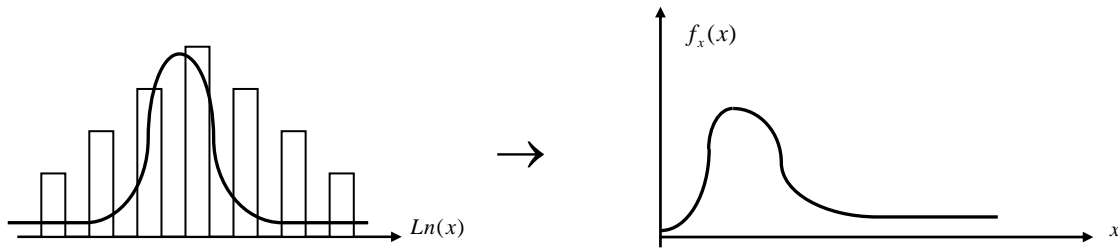


Figura 2.17 Distribución lognormal

Si a los datos de una muestra se les toma el logaritmo natural y la distribución de estos datos transformados es normal, entonces los datos tienen distribución lognormal.

La condición de normalidad de los datos transformados puede deducirse del histograma, si este tiene forma de campana.

Se define mediante el parámetro de forma $\sigma > 0$ y el parámetro de escala $\mu \in (-\infty, \infty)$ los cuales no se deben confundir con los parámetros de la distribución normal.

$f_x(x)$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln[x]-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
$F_x(x)$	No tiene forma analítica
$E(x)$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
$VAR(X)$	$e^{2\mu + 2\sigma^2} [e^{\sigma^2} - 1]$
Rango	$x \in [0, +\infty)$

Algunas aplicaciones	
Tiempos para ejecutar una tarea	
Tiempos para reparación	
Tiempos para prestar un servicio	

EJERCICIO 2.15

El tiempo esperado de servicio de una cuadrilla en una zona rural es 6 horas con una desviación estandar de 20%. Si la distribución del tiempo de servicio es lognormal, cuales son los parámetros de la distribución?

1. Las ecuaciones son $E(x) = 6 = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ y $VAR(X) = (6 * 0.2)^2 = 1.44 = e^{2\mu + \sigma^2} [e^{\sigma^2} - 1]$
2. Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\sigma = \sqrt{\ln(\text{VAR}[x] + e^{2\ln(E[x])}) - 2\ln(E[x])} = 0.1980$$

$$\mu = \ln(E[x]) - \frac{\sigma^2}{2} = 1.7721$$

3. Si ahora el valor esperado y la desviación se expresan en días:

$$E(x) = \frac{6}{24} = 0.25$$

$$VAR(X) = \left(\frac{6}{24} * 0.2\right)^2 = 0.0025$$

Reemplazando en el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\sigma = 0.1980$$

$$\mu = -1.4059$$

Quiere este resultado decir que en esta distribución el cambio de unidades no se logra únicamente escalando el parámetro de escala. Nótese que no puede decir que los nuevos parámetros son: $\sigma = 0.1980/24$ y $\mu = 1.7721/24$.

2.17 DISTRIBUCIÓN LOGISTIC

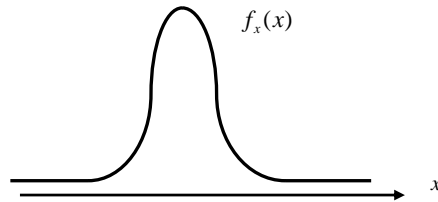


Figura 2.18 Distribución logístic

Recibe este nombre por el hecho de que su función de distribución de probabilidad pertenece a la familia de funciones matemática llamada “logísticas”.

Se define mediante un parámetro de localización $\mu \in (-\infty, \infty)$ y un parámetro de escala $s > 0$.

$f_x(x)$	$\frac{e^{-\frac{(x-\mu)}{s}}}{s(1+e^{-\frac{(x-\mu)}{s}})^2}$
$F_x(x)$	$\frac{1}{1+e^{-\frac{(x-\mu)}{s}}}$
$E(x)$	μ
$VAR(X)$	$\frac{\pi^2}{3}s^2$
<i>Rango</i>	$x \in (-\infty, \infty)$

Algunas aplicaciones	
Tiempos para aprendizaje	
Crecimiento de poblaciones	
Propagación de epidemias	
Difusión de las ventas de un nuevo producto	
Difusión de nuevas tecnologías en el mercado	

2.18 DISTRIBUCIÓN LOG-LOGISTIC

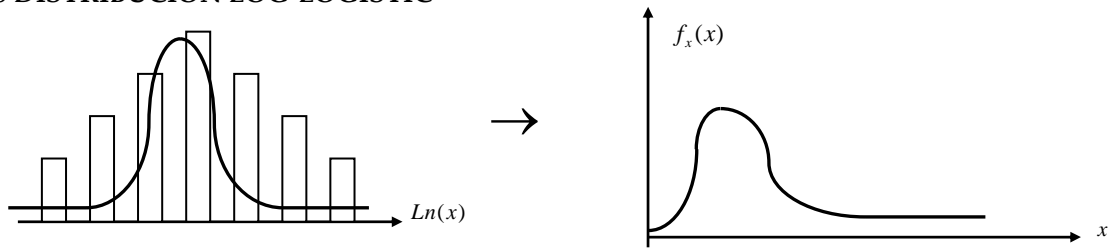


Figura 2.19 Distribución log-logistic

Si a los datos de una muestra se les toma el logaritmo natural y la distribución de estos datos transformados es logistic, entonces los datos tienen distribución log-logistic.

Se define mediante un parámetro de forma $\alpha > 0$ y un parámetro de escala $\beta > 0$.

$f_x(x)$	$\frac{\alpha(\frac{x}{\beta})^{\alpha-1}}{\beta[1+(\frac{x}{\beta})^\alpha]^2}$
$F_x(x)$	$\frac{1}{[1+(\frac{x}{\beta})^{-\alpha}]}$
$E(x)$	$\beta\theta \operatorname{cosec}(\theta) \text{ Para } \alpha > 1, \theta = \frac{\pi}{\alpha}$
$VAR(X)$	$\beta^2\theta[2 \operatorname{cosec}(2\theta) - \theta[\operatorname{cosec}(\theta)]^2]$
Rango	$x \in [0, \infty)$

Algunas aplicaciones
Tiempos para realizar una tarea

2.19 DISTRIBUCIÓN FISHER-TIPPETT

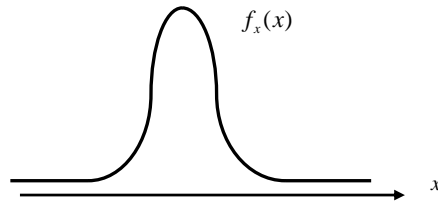


Figura 2.20 Distribución Fisher - Tippett

Recibe su nombre en honor a Ronald A. Fisher y Leonard C. Tippett.

Se define mediante un parámetro de localización $\mu \in (-\infty, \infty)$ y un parámetro de escala $\beta > 0$.

$f_x(x)$	$\frac{x e^{-z}}{\beta}$ donde $z = e^{\frac{-(x-\mu)}{\beta}}$
$F_x(x)$	$e^{e^{\frac{-(x-\mu)}{\beta}}}$
$E(x)$	$\mu + \beta\gamma$ donde $\gamma = 0.57721$ es la constante Euler-Mascheroni
$VAR(X)$	$\frac{\pi^2}{6}\beta^2$
<i>Rango</i>	$x \in (-\infty, \infty)$

Algunas aplicaciones
Análisis de valores extremos

2.20 DISTRIBUCIÓN PEARSON V

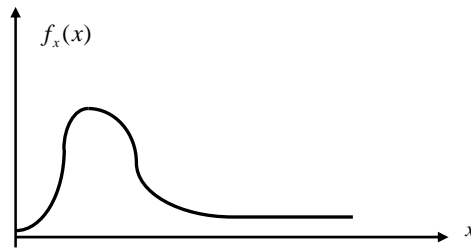


Figura 2.21 Distribución Pearson V

Se define mediante un parámetro de forma $\alpha > 0$ y un parámetro de escala $\beta > 0$.

Si el inverso de los datos de la muestra se ajustan a una distribución Gamma con parámetros α_G y β_G , entonces, los datos tienen distribución Pearson V con parámetros $\alpha = \alpha_G$ y $\beta = \frac{1}{\beta_G}$.

$f_x(x)$	$\frac{x^{(\alpha-1)} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$
$F_x(x)$	$1 - F_{\text{GAMMA}}\left(\frac{1}{x}\right)$ donde F_{GAMMA} es la función de distribución de probabilidad Gamma
$E(x)$	$\frac{\beta}{\alpha - 1}$ Para $\alpha > 1$
$VAR(X)$	$\frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}$ Para $\alpha > 2$
Rango	$x \in [0, \infty)$

Algunas aplicaciones	
Tiempos para realizar una tarea	

2.21 DISTRIBUCIÓN PEARSON VI

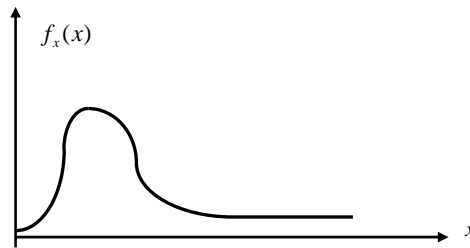


Figura 2.22 Distribución Pearson VI

Se define mediante dos parámetros de forma $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$.

Si para cada dato x_i una muestra x_1, x_2, \dots, x_n se obtiene $\frac{x_i}{x_i + 1}$ y estos datos transformados se ajustan a una distribución Beta con parámetros α_{1B} y α_{2B} , entonces, los datos tienen distribución Pearson VI con parámetros $\alpha_1 = \alpha_{1G}$ y $\alpha_2 = \alpha_{2G}$.

$f_x(x)$	$\frac{x^{(\alpha_1-1)}}{B(\alpha_1, \alpha_2)[1+x]^{(\alpha_1+\alpha_2)}}$ donde $B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$ es la función matemática Beta
$F_x(x)$	$F_{BETA}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ donde F_{BETA} es la función de distribución de probabilidad Beta
$E(x)$	$\frac{\alpha_1}{\alpha_2 - 1}$ Para $\alpha_2 > 1$
$VAR(X)$	$\frac{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)}{(\alpha_2 - 1)^2(\alpha_2 - 2)}$ Para $\alpha_2 > 2$
<i>Rango</i>	$x \in [0, \infty)$

Algunas aplicaciones	
Tiempos para realizar una tarea	

2.12 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

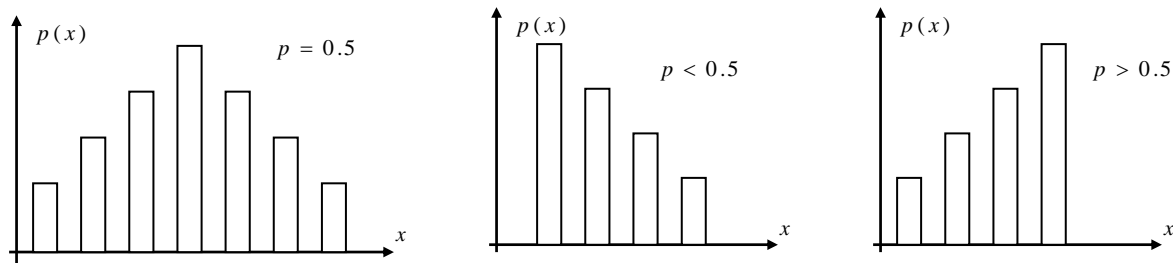


Figura 2.18 Distribución Binomial

Si un experimento aleatorio cumple las condiciones de Bernoulli:

1	Existen únicamente dos posibles resultados para cada ensayo: ocurrencia y no ocurrencia de un evento
2	La probabilidad de ocurrencia de cada evento es la misma para cada ensayo
3	Los ensayos sucesivos de un mismo tipo son independientes

Si la probabilidad de ocurrencia de un evento es p y la probabilidad de no ocurrir es q , entonces, la probabilidad de exactamente k ocurrencias en n ensayos es una secuencia de Bernoulli y está dada por la distribución Binomial

$p(x)$	$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$F_x(x)$	$P(x \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$
$E(x)$	np
$VAR(X)$	npq
Rango	$x \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Algunas aplicaciones	
Confiabilidad	
Número de ítems con una característica dada en un grupo	

Coeficientes Binomiales

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n \qquad 0! = 1$$

EJERCICIO 2.9

La disponibilidad de un componente continuamente operado es del 90%. Existen 4 componentes de este tipo trabajando en un proceso.

Sea x la variable aleatoria que representa el número de componentes indisponibles.

Definiendo:

Experimento	Observar el estado de los componentes
Eventos	“componente indisponible”, “componente disponible”
$n = 4$	Es el número de ensayos
$p = 0.1$	Es la probabilidad del evento “componente indisponible”
$q = 0.9$	Es la probabilidad del evento “componente disponible”

- Cuál es el valor esperado de equipos indisponibles?

$$E(x) = np = 4 * 0.1 = 0.4$$

Obsérvese que el valor esperado no es un número entero. Este valor es imposible de obtener físicamente.

Tampoco se puede hallar la probabilidad de ocurrencia de este valor!

- Cuál es la desviación estándar?

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4 * 0.1 * 0.9} = 0.6$$

- Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 0, 1, 2, 3, 4 componentes en el estado indisponible?

k	P(x=k)
0	0.6561
1	0.2916
2	0.0486
3	0.0036
4	0.0001
	1.0000

- Cuál es la probabilidad de encontrar 2 o menos componentes indisponibles?

$$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 0.9963$$

EJERCICIO 2.10

Se requiere que el control del mecanismo de disparo de un interruptor de potencia opere exitosamente el 99.99% de las veces.

Si la probabilidad de falla de una bobina de disparo es de 0.006, cuál es el número requerido de bobinas de disparo que se deben colocar en paralelo?

- Sea x la variable aleatoria que representa el número de bobinas de disparo funcionando.
- Definiendo:

Experimento	Observar el estado de los las bobinas de disparo
Eventos	"fallada", "funcionando"
$n = ?$	Es la incógnita del problema
$p = 0.994$	Es la probabilidad de que una bobina de disparo funcione
$q = 0.006$	Es la probabilidad de que una bobina de disparo falle

- La probabilidad de encontrar más de 0 bobinas funcionando debe ser mayor a 0.9999.

$$P(x > 0) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + \dots = 1 - P(x = 0) \geq 0.9999$$

$$1 - \binom{n}{0} (0.994)^0 (0.006)^{n-0} \geq 0.9999$$

$$-\binom{n}{0} (0.994)^0 (0.006)^n \geq 0.9999 - 1$$

$$\binom{n}{0} (0.994)^0 (0.006)^n \leq 0.0001$$

$$\frac{n!}{0!(n-0)!} * 1 * (0.006)^n \leq 0.0001$$

$$n \geq 1.8003 \rightarrow n = 2$$

Se requieren por lo menos dos bobinas en paralelo.

- La probabilidad de hallar 0 de dos bobinas funcionando es:

$$P(x = 0) = \binom{2}{0} (0.994)^0 (0.006)^{2-0} = 0.000036 < 0.0001$$

Lo cual es igual a $0.006 * 0.006$

EJERCICIO 2.11

La probabilidad p de que ocurra un evento en el ensayo de Bernoulli a partir del cual se define la distribución binomial, generalmente procede de otro modelo probabilístico, como se muestra a continuación:

En una subestación eléctrica existen 4 transformadores de potencia. Para atender la carga, se requiere que al menos dos de los cuatro transformadores estén operando continuamente.

La tasa de fallas de los transformadores es de 0.1 fallas/año.

- Cuál es la probabilidad que un transformador falle en los primeros cinco años?

En este caso, se asume o conoce que la tasa de fallas de los transformadores es constante; entonces, la distribución de los tiempos para falla es exponencial y se define como:

$$F_{t_{falla}}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$P[t_{falla} \leq 5 \text{ años}] = 1 - e^{-0.1 \cdot 5} = 0.39347$$

- Cuál es la confiabilidad de uno de estos transformadores en un periodo de 5 años?

En este caso, la confiabilidad es la probabilidad de que el transformador NO falle en los primeros 5 años.

$$R_{trafo}(5 \text{ años}) = 1 - F(5 \text{ años}) = 1 - 0.39347 = 0.60653$$

- Cuál es la confiabilidad de la subestación en un periodo de 5 años?

En este caso, la confiabilidad de la subestación es la probabilidad de encontrar más de dos transformadores funcionando, es decir, la probabilidad de encontrar 2, 3 ó 4 transformadores funcionando.

Sea X la variable aleatoria que corresponde al número de trafos que se encuentran operando

$$p = 0.60653 \quad q = 0.39347$$

$$R_{subestacion} = P(x \geq 2) = \sum_{i=2}^4 \binom{4}{i} 0.60653^i 0.39347^{4-i} = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = 0.82824$$

2.13 DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL

Es una generalización de la distribución binomial para el caso de k eventos mutuamente exclusivos.

Sea X la variable aleatoria que corresponde a observar el número de ocurrencias de cada uno de los k eventos en n ensayos.

Si existen k eventos mutuamente exclusivos con probabilidades p_1, p_2, \dots, p_k , entonces, la probabilidad de n_1 ocurrencias del evento 1, n_2 ocurrencias del evento 2, \dots y n_k ocurrencias del evento k en n ensayos, con $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, está dada por la distribución Multinomial.

$p(x)$	$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$
--------	---

Algunas aplicaciones
Número de ítems con una característica dada en un grupo

EJERCICIO 2.12

El operador del sistema de distribución de energía de una ciudad dada tiene dividida su área geográfica en 4 zonas. La probabilidad de que se registren fallas en cada una de las zonas está dada por:

Zona		P_i
1	Oriental	0.40
2	Central	0.30
3	Sur	0.20
4	Occidental	0.10
		1.00

Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se produzcan simultáneamente 2 fallas en la zona 1, 3 en la zona central, 5 en la sur y 0 en la occidental?

- En este caso los eventos mutuamente exclusivos son las ocurrencias de las fallas en las zonas 1, 2, 3 y 4. Una falla solo puede pertenecer a una de las zonas.
- $n_1 = 2$
- $n_2 = 3$
- $n_3 = 5$
- $n_4 = 0$
- $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k = 10$

$$P(n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5, n_4 = 0) = \frac{10!}{2! * 3! * 5! * 0!} * 0.4^2 * 0.3^3 * 0.2^5 * 0.1^0 = 0.087$$

2.15 DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

En este caso se considera un espacio muestral que contiene un número finito de T elementos, los cuales se dividen en K categorías mutuamente exclusivas, con T_1 en la clase 1, T_2 en la clase 2, etc.

Entonces, $T_1 + T_2 + \dots + T_k = T$

La probabilidad de n_1 ocurrencias de la evento 1, n_2 ocurrencias del evento 2, \dots y n_k ocurrencias del evento k en N ensayos sin reemplazo, con $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$, está dada por la distribución Hipergeométrica.

$p(x)$	$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{\binom{T_1}{n_1} \binom{T_2}{n_2} \dots \binom{T_k}{n_k}}{\binom{T}{N}}$
--------	---

Algunas aplicaciones
Número de ítems con una característica dada en un grupo

La distribución Hipergeométrica puede aproximarse a la distribución Multinomial cuando T , el número total de elementos en el espacio muestral sea muy grande.

EJERCICIO 2.14

En un sistema eléctrico hay 30 generadores de los siguientes tipos:

Tipo de generador		T_i
1	Hidráulico	12
2	Gas natural	9
3	Diesel	6
4	Eólico	3
		30

Cuál es la probabilidad de que si se seleccionen 10 generadores al azar para hacerles una inspección de seguridad, resulten 2 hidráulicos, 3 de gas natural, 5 diesel y ninguno eólico?

$$P(n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5, n_4 = 0) = \frac{\binom{12}{2} \binom{9}{3} \binom{6}{5} \binom{3}{0}}{\binom{30}{10}} = 0.0011$$

Si este problema se resuelve por la distribución Multinomial el resultado será de 0.087.

2.14 DISTRIBUCIONES PASCAL Y GEOMÉTRICA

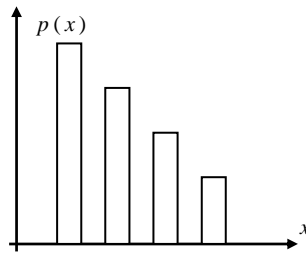


Figura 2.19 Distribución Pascal

En este caso se observan los resultados de una secuencia de Bernoulli hasta que se obtiene un número dado de ocurrencias de un evento. Obtener este número dado de ocurrencias del evento de interés puede requerir N ensayos. El número de ensayos N es aleatorio.

Si la probabilidad de ocurrencia de un evento es p y la probabilidad de no ocurrir es q , entonces, la probabilidad de que tomará exactamente N ensayos para observar R ocurrencias en una secuencia de Bernoulli está dada por la distribución Pascal

$p(x)$	$P(x = N) = \binom{N-1}{R-1} p^R q^{N-R}$ con $0 < R \leq N$
$E(x)$	$\frac{R}{p}$
$VAR(X)$	$\frac{R(1-p)}{p^2}$
<i>Rango</i>	$x \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Esta distribución es sesgada a la derecha o, en otras palabras, tiene coeficiente de asimetría positivo.

Algunas aplicaciones
Número de ensayos para obtener un evento dado

Cuando $R=1$, la distribución Pascal se conoce como “Distribución Geométrica” donde $P(x = N) = p q^{N-1}$

EJERCICIO 2.13

El operador de un sistema de distribución cree que en un sector donde hay 30 viviendas se generan problemas de calidad de la potencia que afectan a los otros usuarios del sistema. La probabilidad de que exista un problema de calidad del servicio en una vivienda es de 0.20.

- Cuál es valor esperado de ensayos para encontrar un problema de calidad del servicio?

$$E(x) = \frac{R}{p} = \frac{1}{0.20} = 5 \quad \text{Se espera que se tenga que inspeccionar 5 viviendas para encontrar un problema de calidad del servicio}$$

- Cuál es la probabilidad de que se tenga que inspeccionar 5 viviendas para encontrar un problema de calidad del servicio?

$$P(x=5) = \binom{N-1}{R-1} p^R q^{N-R} = \binom{5-1}{1-1} 0.20^1 * 0.8^{5-1} = \binom{4}{0} 0.20^1 * 0.8^4 = 0.08192$$

- Cuál es la probabilidad de que se tenga que inspeccionar las 30 viviendas para encontrar un problema de calidad del servicio?

$$P(x=30) = \binom{N-1}{R-1} p^R q^{N-R} = \binom{30-1}{1-1} 0.20^1 * 0.8^{30-1} = \binom{29}{0} 0.20^1 * 0.8^{29} = 0.00031$$

2.22 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Torres A, “Probabilidad, variables aleatorias, confiabilidad y procesos estocásticos en ingeniería eléctrica”, Universidad de los Andes, 1996.
- [2] Anders G, “Probability concepts in electric power systems”, Wiley and Sons, 1990.
- [3] Hays W. L, Winkler R. L, “Statistics, probability, inference and decision”, Volume 1, Holt Rinehart and Wiston Inc, 1970.
- [4] Viniotis Yannis, “Probability and Random Processes for Electrical Engineers”, Mc-Graw Hill, 1998.
- [5] Papoulis Athanasios, “Probability, Random Variables and Stochastic Processes”, tercera edición, Mc-Graw Hill, 1991.
- [6] Miller I, Freund J, Johnson R, “Probabilidad y Estadística para Ingenieros”, cuarta edición, Prentice Hall, 1992.
- [7] Law Averill M, Kelton W. David, “Simulation Modeling and Analysis”, Tercera edición, Mc-Graw Hill, 2000.
- [8] Decisioneering Inc, “Crystal Ball 2000 – User Manual”, Decisioneering Inc, 2001.
- [9] Garcés L. P, Gómez O, C. J. Zapata, “Análisis de confiabilidad del sistema compuesto generación-transmisión de la ciudad de Pereira”, II Congreso Internacional IEEE de la Región Andina Andescon 2004, Agosto de 2004.
- [10] Karaki S. H, Chedid R. B, Ramadán R, “Probabilistic performance assessment of wind energy conversión systems”, IEEE Transactions on Energy Conversión, Vol. 14, No. 2, June 1999.
- [11] Wikipedia- The free encyclopedia. www.wikipedia.org

CAPÍTULO 3 – ALGUNAS OPERACIONES CON DISTRIBUCIONES

3.1 APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL A LA NORMAL

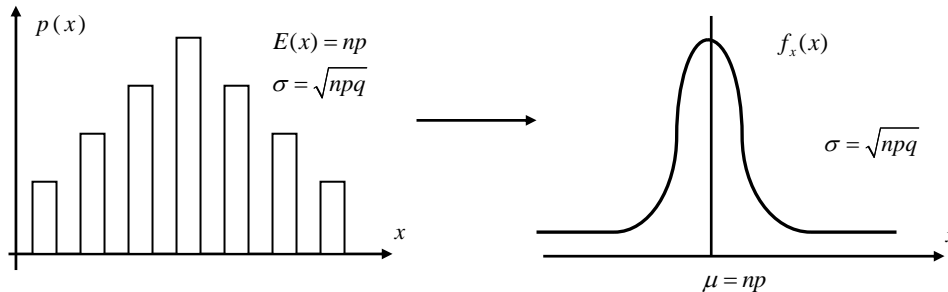


Figura 3.1 Aproximación de la distribución binomial a la normal

Cuando el número de ensayos n en un experimento de Bernoulli es muy grande, al aplicar la distribución Binomial, la probabilidad de obtener k ocurrencias del evento bajo estudio tiende a infinito.

Este problema puede resolverse utilizando la aproximación de la distribución normal a la Binomial.

Sea x la una variable aleatoria que tiene distribución Binomial con parámetros n y p . Si n es grande, la expresión límite de la función de distribución de esta variable es la distribución normal con parámetros:

$$\mu = np \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

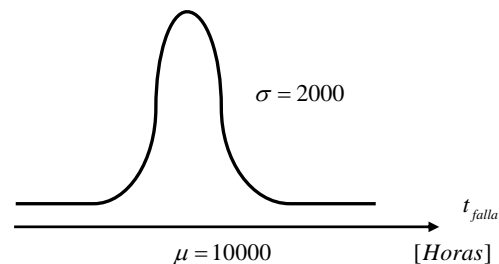
Esta aproximación aplica sí:

1	n es grande y p cercano a 0.5 (Distribución simétrica o casi simétrica)
2	np y nq son a la vez mayores a 5

EJERCICIO 3.1

La compañía de iluminación pública de una ciudad ha instalado 20000 bombillas nuevas las cuales son del mismo tipo y proceden del mismo fabricante.

El modelo de vida de las bombillas es la distribución Gausiana con un valor esperado de 10000 horas y desviación estándar de 2000 horas.



- Cuál es la probabilidad de que una bombilla de éstas falle en las primeras 10000 horas?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{10000 - 10000}{2000} = 0$$

$$\Phi(z = 0) = 0.5$$

$$P(t_{falla} \leq 10000 \text{ horas}) = 50\%$$

- Sea x la variable aleatoria del número de bombillas que fallan en las primeras 10000 horas.Cuál es su valor esperado?

$$E(x) = 0.5 * 20000 = 10000 \text{ bombillas}$$

- Cuál es la probabilidad de encontrar 10000 bombillas dañadas en las primeras 10000 horas de haberse puesto en servicio?

$$P(x = 10000) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{20000}{10000} 0.5^{10000} * 0.5^{20000-10000} = \infty$$

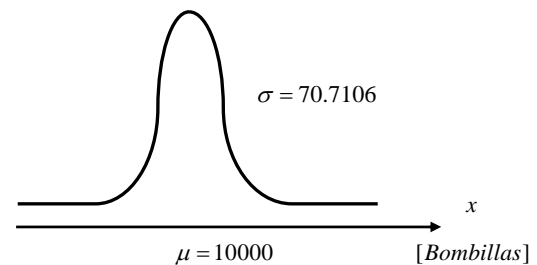
En este caso $np = 20000 * 0.5 > 5$ y $nq = 20000 * 0.5 > 5$ por lo cual puede aplicarse la aproximación de la distribución Normal a la Binomial.

La distribución de x es normal con parámetros:

$$\mu = n * p = 20000 * 0.5 = 10000 \text{ bombillas}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20000 * 0.5 * 0.5}$$

$$\sigma = 70.7106 \text{ bombillas}$$



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{10000 - 10000}{70.7106} = 0$$

$$\Phi(z = 0) = 0.5$$

$$P(x \leq 10000 \text{ bombillas}) = 50\%$$

Nótese que al definir x como una variable continua, solo se puede hallar su probabilidad por rangos de valores.

3.2 FUNCIONES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Sea x una variable aleatoria y $g(x)$ una función real de esta variable aleatoria.

Si se define la función $y = g(x)$. Entonces, y también es una variable aleatoria, y se obtiene evaluando la función g para cada valor de la variable aleatoria x .

Ejemplos
$P = 0.598 * q$ donde P es la potencia de salida de un generador hidroeléctrico y q es el caudal de un río
$P = 0.12 + 0.59 * v^2$ donde P es la potencia de un generador eólico y v la velocidad del viento

$F_y(y)$ y $f_y(y)$ se obtienen a partir de $F_x(x)$ y $f_x(x)$

$F_y(y)$
$F_y(y) = P[Y \leq y] = P[g(x) \leq y]$ <p><i>Se debe obtener el conjunto de valores de x que hacen que $y \leq y$. La probabilidad de este conjunto de valores es la probabilidad asociada a Y.</i></p> $g(X) \leq y \rightarrow X \leq g^{-1}(y)$ $F_y(y) = P[Y \leq y] = P[X \leq g^{-1}(y)]$ $F_y(y) = F_x(g^{-1}(y))$ <p><i>El operador $^{-1}$ indica función inversa</i></p>

$f_y(y)$
<p><i>Se obtienen las raíces reales x_1, x_2, \dots, x_n de la ecuación $y = g(x)$</i></p> <p><i>Se obtiene $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx}$</i></p> $f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{ g'(x_1) } + \frac{f_x(x_2)}{ g'(x_2) } + \dots + \frac{f_x(x_n)}{ g'(x_n) }$ <p><i>Si para cierto y, la ecuación $y = g(x)$ no tiene raíces reales, entonces $f_y(y) = 0$</i></p>

Hallar $F_y(y)$ y $f_y(y)$ puede llegar a ser muy complicado, por lo cual, generalmente se aplica simulación de Montecarlo y se ajusta una distribución teórica a los resultados de la simulación.

EJERCICIO 3.2

Un generador hidráulico de 5.0 MW está instalado en una central a filo de agua llamada “Libaré”.

La función que relaciona la potencia generada p en [kW] con respecto al caudal de agua q en [m^3/s] es:

$$p = kq = 736.372q$$

k es una constante que tiene unidades [$kW*s/ m^3$] y se define como:

$$k = \eta\gamma Hg$$

Donde:

η : Eficiencia de la turbina, un número menor o igual a uno [adimensional]. Depende del tipo de turbina. En este caso, $\eta = 0.85$.

γ : Peso específico del agua = 1000 [kg/m^3]

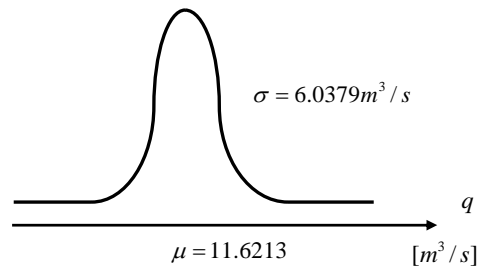
H : Altura efectiva o neta en [m]. También se denomina “cabeza”. Es la diferencia de altura entre el sitio donde se toma el agua y el sitio de instalación de la turbina. En este caso, $H = 88.4m$.

g : Gravedad [$9.8 m/s^2$]

El caudal q es una variable normalmente distribuida con valor medio 11.6213 m^3/s y desviación del 6.0370 m^3/s . (Río Otún).

En este caso:

$$X = q \text{ y } Y = p$$



1. Hallar la función de distribución de probabilidad de la potencia generada

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)) \quad g^{-1}(x) = \frac{p}{k} \quad F_P(p) = F_q\left(\frac{p}{736.372}\right)$$

2.Cuál es la probabilidad de generar continuamente 5 MW?

$$P[p > 5000kW] = 1 - P[p \leq 5000kW] = 1 - F_q\left(\frac{5000}{736.372}\right) = 1 - F_q(6.79m^3/s) = 1 - 0.2119 = 0.7881$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{6.79 - 11.6213}{6.0370} = -0.80 \quad \Phi(z = -0.80) = 0.2119$$

3.Cuál es la función de densidad de probabilidad de la potencia que se puede generar?

- Solo existe una raíz en la ecuación $p = g(q) : q_1 = p/736.372$

$$g'(q) = \frac{dg(x)}{dq} = \frac{d(736.372 * q)}{dq} = 736.372$$

- La función de densidad de probabilidad del caudal es:

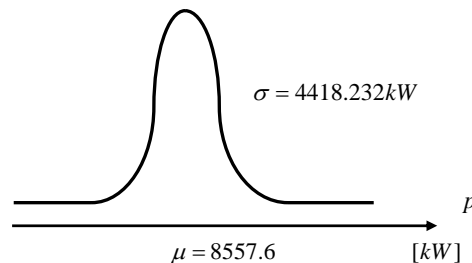
$$f_q(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 6.0379} * e^{-\frac{(q-11.6213)^2}{2*(6.0379)^2}}$$

- La función de densidad de probabilidad de la potencia generada es:

$$f_p(p) = \frac{f_q(q_1)}{|g'(q_1)|} = \frac{f_q(p/736.372)}{|736.372|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 6.0379 * 736.372} * e^{-\frac{(\frac{p}{736.372} - 11.6213)^2}{2*(6.0379)^2}}$$

$$f_p(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 6.0379 * 736.372} * e^{-\frac{(\frac{p-736.372*11.6213}{736.372})^2}{2*(6.0379)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 6.0379 * 736.372} * e^{-\frac{(p-736.372*11.6213)^2}{2*(6.0379*736.372)^2}}$$

$$f_p(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 4418.232} * e^{-\frac{(p-8557.6)^2}{2*(4418.232)^2}}$$



La función de distribución de la potencia que se puede generar es Gaussiana con valor medio 8557.6 [kW] y desviación 4418.232 [kW]. Esta distribución no tiene en cuenta la restricción de que el generador es de 5000 kW, sencillamente dice para un caudal dado cuánto se podría generar.

Falta incorporar en este modelo la restricción de la capacidad máxima de caudal de agua que puede tomar la unidad (intake limit) para generar 5 MW.

3.3 EL TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL PARA SUMA DE VARIABLES

Dadas n variables aleatorias independientes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ con valores esperados $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots, \sigma_n^2$, respectivamente, si se define la siguiente variable aleatoria:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Entonces, cuando n es grande, la distribución de x es Gaussiana con valor medio y varianza dadas por:

$$E(x) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n$$

$$\text{VAR}(x) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_n^2$$

La importancia de este teorema radica en que no existe restricción con respecto a las distribuciones de las variables aleatorias que conforman la suma. Es decir, pueden ser de diferente tipo, diferentes parámetros, continuas o discretas o mixtas.

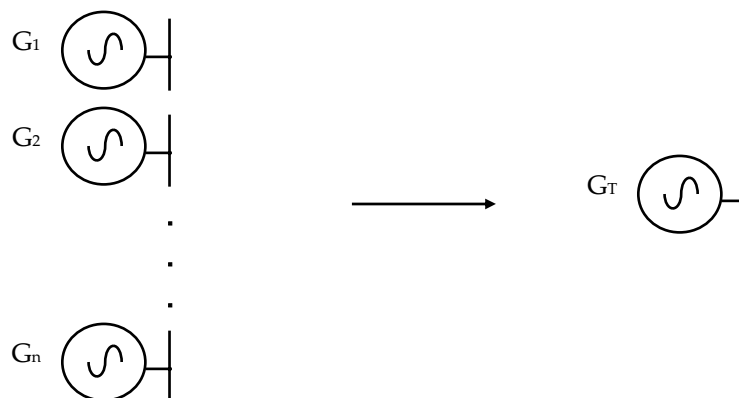
El valor límite a partir del cual se considera válido el teorema es $n=30$. Sin embargo, si las distribuciones de las variables son funciones suaves, con valores tan bajos como $n=5$ se cumple el teorema.

El teorema es válido cuando las variables aleatorias individuales sólo hacen una contribución relativamente “pequeña” respecto a la suma total.

Otro hecho conocido, es que el teorema no funciona bien para valores en las “colas” de la función.

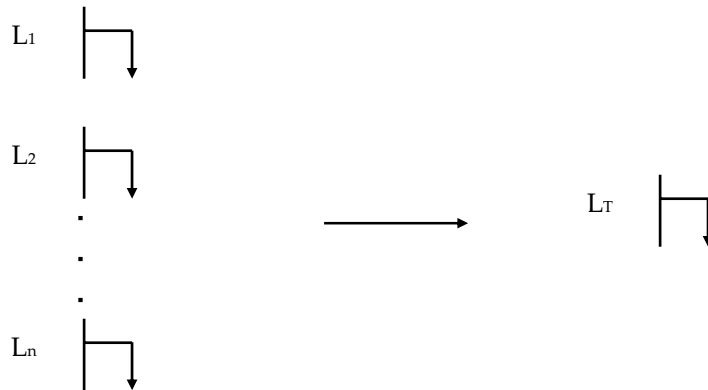
Ejemplo

En un sistema de generación con n unidades para las cuales hay incertidumbre sobre la disponibilidad del recurso primario de generación, la generación total disponible es la suma de la generación de las unidades. Si el número de unidades es grande puede asumirse que la distribución de probabilidad de G_T es Gaussiana, esto sin conocer las distribuciones de cada una de las unidades. Solo es necesario conocer el valor esperado y la varianza de la generación de cada una de las unidades.



Ejemplo

En un punto dado de un sistema eléctrico de potencia como transformador de distribución, salida de circuito primario de distribución, transformador de potencia, subestación, etc. la demanda vista es la suma de los n usuarios conectados. Si el número de usuarios es grande, puede asumirse que la distribución de la demanda total vista en el punto es Gausiana, esto sin conocer la distribución de la demanda de cada usuario. Solo es necesario conocer el valor esperado y la varianza de la demanda de cada usuario



3.4 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Torres A, "Probabilidad, variables aleatorias, confiabilidad y procesos estocásticos en ingeniería eléctrica", Universidad de los Andes, 1996.
- [2] Papoulis Athanasios, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", tercera edición, Mc-Graw Hill, 1991.
- [3] Miller I, Freund J, Johnson R, "Probabilidad y Estadística para Ingenieros", cuarta edición, Prentice Hall, 1992.

CAPÍTULO 4 – ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

4.1 INTRODUCCIÓN

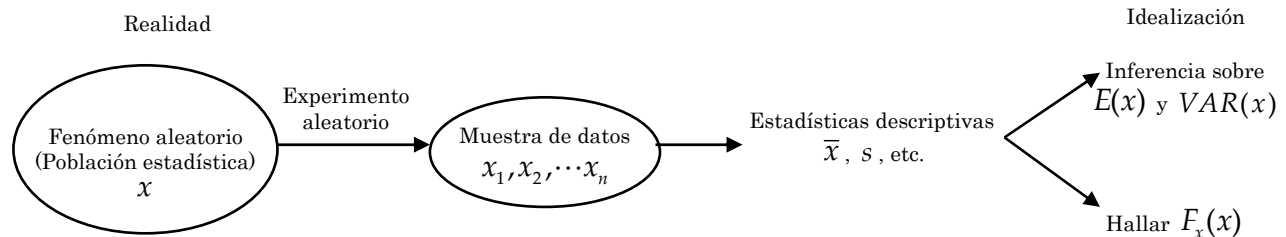


Figura 4.1 Toma de datos de un fenómeno aleatorio

El interés en este capítulo es la descripción que se puede hacer de una variable aleatoria x a partir de una muestra de datos x_1, x_2, \dots, x_n . Esta descripción se utilizará posteriormente para hacer inferencias sobre el valor esperado y la varianza y para ajustar un modelo probabilístico que represente al fenómeno aleatorio bajo estudio; este procedimiento se presenta en la Figura 4.1.

El fenómeno aleatorio bajo estudio se desarrolla en una “población estadística” la cual es la reunión de todos los individuos o unidades estadísticas que producen los datos que permiten evidenciar el fenómeno aleatorio. Estos datos también se denominan “observaciones” o “realizaciones” del fenómeno aleatorio.

Ejemplos		
	Población	x
2	Estudiantes de una universidad	Edad
3	Transformadores de distribución	Tiempo para falla
4	Rayos	Corriente de descarga
5	Caudales en un río	Caudal

En estos ejemplos se observa que:

1	En unos casos es fácil visualizar cuál es la población estadística, ya que el fenómeno aleatorio se desarrolla en individuos perfectamente identificables como personas, equipos, arboles, etc.
2	En otros casos, el concepto de población estadística es más etéreo ya que el fenómeno aleatorio es un proceso continuo en el estado y no existen en realidad individuos perfectamente identificables, este es el caso de los caudales en un río.

En la mayoría de los casos no es posible realizar un experimento aleatorio sobre todos los individuos de una población por las siguientes razones:

1	Es complicado estudiar toda la población
2	Es muy costoso estudiar toda la población
3	Tomaría mucho tiempo estudiar toda la población
4	La población es infinita
5	No se requiere o desea una precisión muy alta en los resultados

Entonces, se debe aceptar que en la mayoría de los casos se debe trabajar con una muestra limitada de datos. Esta muestra de datos debe ser “representativa” y “aleatoria”, dos características que se explicarán en el capítulo 6.

4.2 ESTADÍSTICAS DESCRIPTIVAS

4.2.1 Valor promedio \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

4.2.2 Varianza muestral s^2 y desviación muestral s

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad s = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

4.2.3 Coeficiente de variación cv

$$cv = s / \bar{x}$$

Permite comparar la variación entre diferentes conjuntos de datos, aunque las unidades del problema no sean las mismas. Es usual es expresarlo en porcentaje.

Ejemplo

Una persona quiere saber cuál de dos balanzas digitales es más precisa. Se pesa varias veces utilizando ambos equipos y obtiene los siguientes resultados:

$$\text{Balanza 1: } \bar{x}_1 = 62.8\text{kg} \quad s_1 = 3\text{kg} \quad \rightarrow cv_1 = s_1 / \bar{x}_1 = 3 / 62.8 * 100 = 4.77\%$$

$$\text{Balanza 2: } \bar{x}_2 = 63.1\text{kg} \quad s_2 = 2.53\text{kg} \quad \rightarrow cv_2 = s_2 / \bar{x}_2 = 2.53 / 63.1 * 100 = 4.01\%$$

La balanza 2 es la más precisa.

4.2.4 Mediana

Es el valor del ítem intermedio cuando el conjunto de observaciones se ordena en forma ascendente o descendente. Es el valor más cercano a la mitad una vez las observaciones se jerarquizan de acuerdo con su magnitud.

<i>Si n es impar</i>	<i>Si n es par</i>
<i>La mediana es el dato que aparece en la posición $(n+1)/2$</i>	<i>La mediana es el promedio de los datos de las posiciones $n/2$ y $(n+2)/2$</i>

Ejemplo

- Se tiene la siguiente muestra de datos: 15, 14, 2, 27, 13.
- $n = 5$
- Datos ordenados: 2, 13, 14, 15, 27
- Mediana: Dato de la posición $(n+1)/2 = (5+1)/2 = 3 : 14$

Ejemplo

- Se tiene la siguiente muestra de datos: 11, 9, 17, 19, 4, 5.
- $n = 6$
- Datos ordenados: 4, 5, 9, 11, 17, 19
- Mediana: Promedio de los datos en las posiciones $n/2 = 6/2 = 3$ y $(n+2)/2 = (6+2)/2 = 4$
 $Mediana = (9 + 11)/2 = 10$

Nótese que el valor obtenido como mediana no existe en la muestra de datos

4.2.5 Moda

Es el valor que más ocurre o el más frecuente. Una definición empírica es:

$$Moda = \bar{x} - 3(\bar{x} - mediana)$$

4.2.6 Distribuciones de frecuencia e histogramas

La distribución de frecuencias es una tabla que agrupa los datos por clases o categorías y presenta el número de datos en cada clase o sea la frecuencia de clase.

El histograma es la representación gráfica de la tabla de distribución de frecuencia. Se construye por medio de rectángulos adyacentes. Las alturas de los rectángulos representan las frecuencias de clase y sus bases se extienden entre fronteras de clase sucesivas. Como se mostrará más adelante, el histograma es una representación de la función de densidad de probabilidad.

No existe una regla fija para determinar el número de clases k en una muestra de tamaño n . Una regla empírica es:

Regla de Sturge

$$k = 1 + 3.3 \log_{10}(n)$$

El intervalo de clases se puede obtener como:

$$w = \frac{\text{rango}}{k} = \frac{(\text{dato}_{\max} - \text{dato}_{\min})}{k}$$

Algunas recomendaciones para construir las distribuciones de frecuencia son:

1	Aunque k depende del tamaño de la muestra n , tiene poca utilidad utilizar menos de 5 clases o más de 15
2	Si w es muy grande no reflejará el patrón de comportamiento de los datos. Si w es muy pequeño no se obtendrá información relevante de los datos. Para el caso de los histogramas se debe probar con varios intervalos de clase para deducir qué distribución de probabilidad podría ajustarse a los datos.
3	Deben evitarse las clases de frecuencia cero
4	Ningún dato debe quedar en los límites de clase
5	No debe existir brecha ni traslape entre los límites de clase
6	Si una distribución de frecuencias o histograma se va a comparar con otro, los intervalos de clase deben ser iguales

Si la frecuencia de clase en la tabla de distribución de frecuencias o histograma se divide entre el tamaño de la muestra, entonces se tiene la probabilidad de ocurrencia de la clase.

El valor promedio y la desviación muestral de los datos agrupados están dados por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i f_i \qquad s = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i f_i - \bar{x})^2}$$

Donde:

f_i : Es la frecuencia de la clase i

x_i : Es el valor medio del intervalo de clase i o “marca de clase”

El valor promedio y la desviación muestral de los datos agrupados son diferentes a los calculados sin agrupar los datos.

4.2.7 Distribución acumulativa de frecuencias

La distribución acumulativa de frecuencias es una tabla donde se acumulan las frecuencias de cada una de las clases; indica cuales frecuencias de los valores observados son menores o iguales al valor de la abcisa.

Si se dividen las frecuencias acumuladas entre el tamaño de la muestra, entonces se tiene una tabla o gráfica de probabilidades acumuladas que es una representación de la función de distribución de probabilidad.

4.2.8 Naturaleza aleatoria de las estadísticas descriptivas

Si, una vez se ha definido el tamaño adecuado de la muestra n , se toman varias muestras aleatorias de dicho tamaño, cada muestra contendrá diferentes observaciones a las de las otras, por lo cual, las estadísticas descriptivas de las muestras serán diferentes entre sí. Esto quiere decir que:

1	El promedio estadístico de la muestra \bar{x} es una variable aleatoria
2	La desviación muestral s es una variable aleatoria
3	Los valores que se calculen utilizando \bar{x} ó s también son variables aleatorias

Las distribuciones de probabilidad de estas estadísticas descriptivas se denominan “distribuciones muestrales”. Las preguntas que entonces surgen son:

Cuáles son estas distribuciones y cuáles son sus características más importantes?

Las respuestas a estas preguntas se darán en el siguiente capítulo.

4.3 PERCENTILES Y CUARTILES

Cada dato i de una muestra aleatoria de tamaño n tiene una probabilidad de ocurrencia $p_i = 1.0/n$.

Si los datos de la muestra aleatoria se ordenan de menor a mayor se pueden definir los percentiles de la siguiente forma:

Percentiles	
<i>El p-ésimo percentil de la muestra $P_{p\%}$ es el dato o valor para el cual al menos $100p\%$ de los datos están en o por debajo de ese valor y cuando menos $(1-p)100\%$ están en o por encima de ese valor</i>	

Esto quiere decir también, que el p -ésimo percentil es el valor para el cual hay una probabilidad de ocurrencia menor o igual a p .

Los cuartiles Q_i se definen como:

Q_1	Es el valor o dato que tiene el 25% de las observaciones o es el valor para el cual la probabilidad de ocurrencia es menor o igual al 25%. Equivale al 25-avo percentil
Q_2	Es el valor o dato que tiene el 50% de las observaciones o es el valor para el cual la probabilidad de ocurrencia es menor o igual al 50%. Equivale al 50-avo percentil. Es la misma mediana
Q_3	Es el valor o dato que tiene el 75% de las observaciones o es el valor para el cual la probabilidad de ocurrencia es menor o igual al 75%. Equivale al 75-avo percentil

Si dos datos cumplen la definición de un percentil dado, entonces se toma el promedio de los valores o una interpolación lineal entre ellos. Quiere esto decir también, que es posible que el valor de un percentil dado puede que no exista en la muestra.

Los cuartiles y percentiles son muy utilizados para expresar información en forma estadística.

EJERCICIO 4.1

En una casa se instalan cuatro “cortinas” de luces de navidad, cada una de las cuales tiene 150 bombillas.

El ciclo operativo de las bombillas es de 12 horas por día durante 30 días cada año. Cada que una bombilla se daña es reemplazada por otra y se inicia la cuenta de horas de funcionamiento para la nueva bombilla.

Al cabo del primer mes de haber instalado las cortinas (la primera navidad), se encuentra que han fallado 16 bombillas con los siguientes tiempos para falla:

Tiempos para falla [horas]			
184.1	224.4	256.1	344.5
208.3	227.5	300.2	344.7
213.3	248.5	303.8	345.6
218.0	252.1	336.3	349.4

- Dato máximo = 349.40 horas
- Dato mínimo = 184.10 horas
- Rango = 165.30 horas
- $\bar{x} = 272.30$ horas
- $s = 58.58$ horas
- $cv = s / \bar{x} * 100\% = 58.58 / 272.30 * 100\% = 21.51\%$
- $k = 1 + 3.3 \log_{10}(16) = 4.97 \approx 5.0$
- $w = rango / k = 165.30 / 5 = 33.06 \approx 33$ horas
- Distribución de frecuencia e histograma

Clase		Frecuencia	Probabilidad clase
1	184 - 217	3	0.1875
2	218 - 251	4	0.2500
3	252 - 286	2	0.1250
4	287 - 320	2	0.1250
5	321 - 354	5	0.3125
		16	1.0000

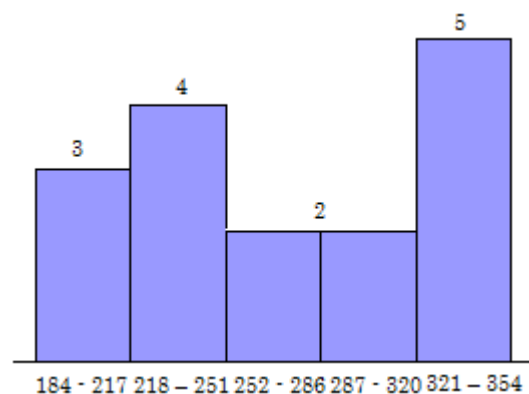


Figura 3.2 Histograma de datos del Ejercicio 4.1

- Distribución acumulada de frecuencia y gráfica de probabilidades acumuladas

	Clase	Frecuencia	Probabilidad clase
1	184 - 217	3	0.1875
2	218 – 251	7	0.4375
3	252 - 286	9	0.5625
4	287 - 320	11	0.6875
5	321 – 354	16	1.0000

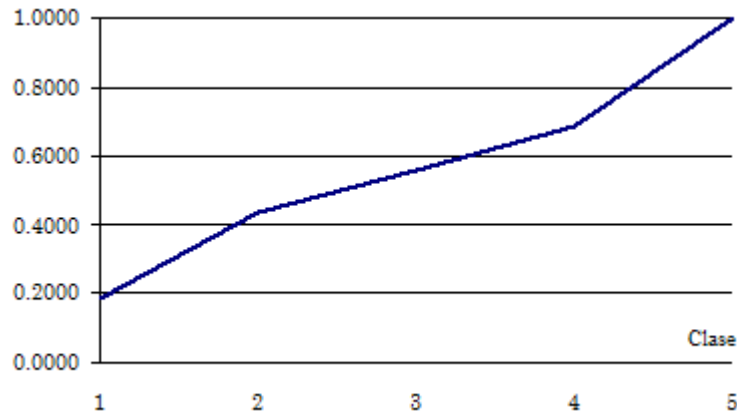


Figura 3.3 Gráfica de probabilidad acumulada del Ejercicio 4.1

- Calcular el percentil 20 y el segundo cuartil

La muestra de datos ordenada de menor a mayor magnitud es:

184.1	208.3	213.3	218.0	224.4	227.5	248.5	252.1
256.1	300.2	303.8	336.3	344.5	344.7	345.6	349.4

El percentil 20 debe tener por lo menos $0.2 \cdot 16 = 3.2$ observaciones por debajo y 12.8 observaciones por encima. Este criterio solo lo cumple el dato 218.0. Entonces:

$$P_{20\%} = 218.0 \text{ [Horas]}$$

El segundo cuartil corresponde al percentil 50, el cual debe tener por lo menos $0.5 \cdot 16 = 8$ observaciones por debajo y 8 observaciones por encima. Este criterio lo cumplen los datos 252.1 y 256.1. Entonces:

$$Q_2 = \frac{252.1 + 256.1}{2} = 254.1 \text{ [Horas]}$$

Nótese que ninguno de los valores obtenidos se encuentra en la muestra.

Se espera que el 20 por ciento de las bombillas falle en un tiempo menor o igual a 218.2 Horas. Y se espera que el 50% de las bombillas durará más de 254.1 Horas.

4.4 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Hays W. L, Winkler R. L, “Statistics, probability, inference and decision”, Volume 1, Holt Rinehart and Wiston Inc, 1970.
- [2] Torres A, “Probabilidad, procesos estocásticos y confiabilidad en ingeniería eléctrica”, Universidad de los Andes, 2005.
- [3] Viniotis Yannis, “Probability and Random Processes for Electrical Engineers”, Mc-Graw Hill, 1998.
- [4] Miller I, Freund J, Johnson R, “Probabilidad y Estadística para Ingenieros”, Prentice Hall, 1992.
- [5] Law Averill M, Kelton W. David, “Simulation Modeling and Analysis”, Mc-Graw Hill, 2000.
- [6] Hermon P, “Statistics: A component of research”, 1990.

CAPÍTULO 5 – INFERENCIA SOBRE EL VALOR ESPERADO Y LA VARIANZA

5.1 INTRODUCCIÓN

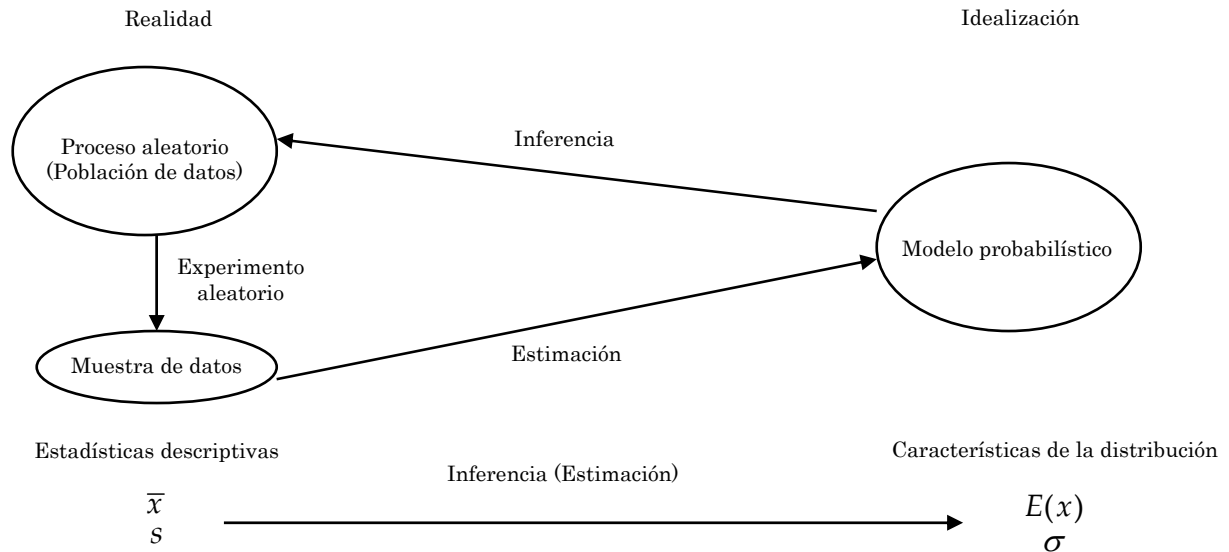


Figura 5.1 Concepto de inferencia acerca del valor esperado y la varianza

El procedimiento de inferencia con respecto al valor esperado y a la varianza consiste en hacer una estimación a partir de el valor promedio y la desviación de una muestra de datos del valor de estas características. Es decir, se idealiza que el proceso aleatorio bajo estudio tiene un modelo probabilístico y se desea conocer cuáles pueden ser su valor esperado y su varianza. Como la muestra de datos es limitada, solo se puede hacer estimación.

En este proceso de inferencia existen dos procedimientos:

1	La estimación puntual y por intervalos del valor esperado y la varianza
2	Las pruebas de hipótesis con respecto a la validez de un valor asignado al valor esperado o a la varianza

La respuesta a una prueba de hipótesis con respecto al valor medio y a la varianza también se puede hallar de los intervalos de confianza.

Para este procedimiento de inferencia es necesario conocer las distribuciones muestrales del valor promedio y de la desviación muestral.

Nótese que el interés es sobre el valor del valor esperado y la varianza no sobre el modelo probabilístico del proceso aleatorio bajo estudio.

5.2 INFERENCIA SOBRE EL VALOR ESPERADO

5.2.1 Estimación Puntual

$$\hat{E}(x) = \bar{x}$$

El valor promedio es un estimador puntual del valor esperado. La calidad de este estimador depende del tamaño de la muestra. Cómo se prueba entonces, que el valor promedio de la muestra puede llegar a ser igual al valor esperado?

5.2.2 La Ley Fuerte de los Grandes Números

Considere una secuencia de variables aleatorias IID con valor esperado $E(x)$ y varianza finita. Entonces:

$$P[\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = E(x)] = 1.0$$

La ley fuerte de los grandes números dice que con toda certeza si el número de observaciones de una variable aleatoria x es muy grande, el promedio estadístico de estas observaciones será igual al valor esperado. Esta ley es la justificación de los métodos iterativos como la simulación de Montecarlo, pues se tiene certidumbre que si se hacen muchas iteraciones (se obtienen muchas observaciones), los valores estimados serán iguales a los esperados.

5.2.3 Distribución muestral del valor promedio

Teorema 1

Si una muestra aleatoria de tamaño n se toma de una población que tiene valor esperado $E(x) = \mu$ y varianza $VAR(x) = \sigma^2$, entonces \bar{x} es una variable aleatoria cuya distribución tiene las siguientes características:

$$E(\bar{x}) = E(x) = \mu \quad y \quad VAR(\bar{x}) = \frac{VAR(x)}{n * k} = \frac{\sigma^2}{n * k}$$

Donde:

$k = 1$ para poblaciones infinitas

$k = \frac{N-n}{n-1}$ para poblaciones finitas (suele omitirse pues es cercano a 1.0)

Este teorema no dice qué forma tiene la distribución de \bar{x} . Nótese también, que los valores de μ y σ no se conocen, pues es precisamente lo que se desea estimar. Entonces, cuál es la distribución de probabilidad de \bar{x} ?

Teorema 2
Teorema del límite central para promedios
<p>Sea \bar{x} el promedio estadístico de una muestra aleatoria de tamaño n extraída de una población que tiene valor esperado $E(x)=\mu$ y varianza finita $VAR(x)=\sigma^2$. Cuando n tiende a infinito, la distribución de \bar{x} se aproxima a una distribución Gaussiana estándar con:</p> $z = \frac{\bar{x} - E(x)}{\sqrt{VAR(x)/n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

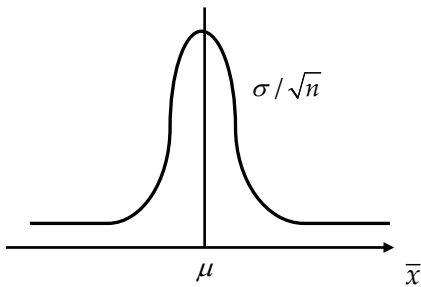


Figura 5.2 Distribución de probabilidad del promedio estadístico

El Teorema 2 implica:

1	Si n es muy grande, la distribución de probabilidad del promedio estadístico \bar{x} es Gaussiana con valor medio μ y desviación σ/\sqrt{n} . Ver la Figura 5.2
2	No importa cuál es la distribución de probabilidad de cada una de las observaciones que conforman la muestra, si n es muy grande la distribución del promedio estadístico de la muestra será Gaussiana. El teorema no fija ninguna restricción sobre la distribución de las variables aleatorias que conforman la muestra, pueden ser continuas o discretas, iguales o diferentes. Esto se denomina propiedad de las convoluciones. Ver la Figura 5.3.
3	Para hacer inferencias con respecto al valor esperado μ utilizando la distribución de \bar{x} es necesario conocer la varianza σ^2 de la población.

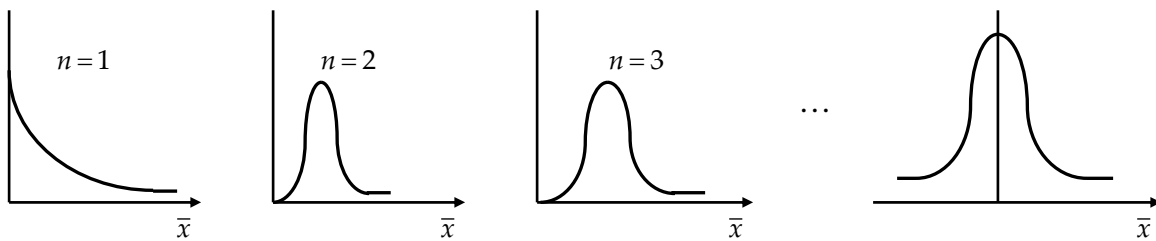


Figura 5.3 Ejemplo de la propiedad de las convoluciones en el Teorema del Límite Central

Ahora viene una pregunta muy importante: Cuál es el valor mínimo de n que hace que se cumpla el Teorema del Límite Central?

Recomendaciones para aplicar el Teorema del Límite Central	
1	$n = 30$ es el valor de referencia a partir del cual se considera que se cumple el Teorema del Límite Central.
2	Si las observaciones tienen igual distribución y dicha distribución es una función suave, con tamaños de muestra tan pequeños como $n = 5$ se cumple el Teorema del Límite Central. Esto implica conocer que todas las observaciones tienen igual distribución y que dicha distribución es una función suave.
3	Si $n \geq 30$ y no se conoce la desviación estándar de la población σ , esta se puede estimar por medio de la desviación muestral s . Entonces: $z \approx (\bar{x} - \mu) / (s / \sqrt{n})$

Qué se hace si el tamaño de la muestra es menor a 30?

Teorema 3	
La distribución t-student	
<p>Sea \bar{x} el promedio estadístico de una muestra aleatoria de tamaño n extraída de una población <u>normal</u> que tiene valor esperado $E(x) = \mu$ y varianza finita $VAR(x) = \sigma^2$. Entonces la variable aleatoria t tiene distribución t-student con parámetro $v = n - 1$</p> $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$ <p>Donde v se denomina el número de grados de libertad.</p>	

Este teorema no requiere que se conozca la varianza de la población σ^2 pero para aplicarlo se requiere conocer que la población es normal.

Recomendaciones para aplicar el Teorema 3	
1	Se aplica el Teorema 3 si la distribución de la muestra es Gausiana y $n < 30$
2	Para conocer si la muestra tiene distribución Gausiana, se puede hacer un histograma y verificar si tiene forma de campana con poca asimetría. También se puede aplicar una prueba de normalidad, que se explica en el siguiente capítulo.

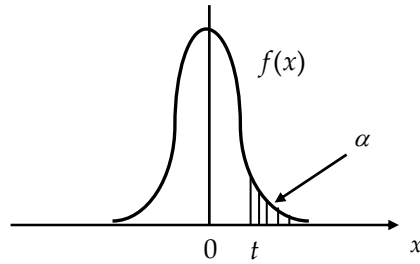


Figura 5.3 Valores críticos en la distribución t-student

Las tablas de la distribución t-student generalmente presentan el valor máximo del parámetro t para el cual existe una probabilidad $(1-\alpha)$, con un número dado de grados de libertad v . Alfa es una probabilidad crítica. El número de grados de libertad es un número entero positivo. Ver la Figura 5.3.

La función de densidad de probabilidad de esta distribución es:

$$f_x(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{2\pi} * \Gamma(v/2) * (1 + \frac{x^2}{v})^{(v+1)/2}} \quad \text{con } x \in (-\infty, +\infty)$$

$$E(x) = 0 \quad \text{VAR}(x) = \frac{v}{v-2} \text{ si } v > 2$$

La distribución t-student tiene forma parecida a la Gaussiana; cuando el parámetro $v=30$ esta distribución se aproxima a la Gaussiana.

5.2.4 Estimación de la media por intervalos

Definiendo el error de estimación ε como la diferencia entre el valor esperado de una población y el promedio estadístico de la muestra tomada de dicha población:

$$\varepsilon = |\bar{x} - E(x)|$$

Se debe determinar ahora la región o “zona de aceptación” en la cual se considera que podría estar el valor esperado de la población $E(x)$.

Definiendo:

1	El nivel de confianza γ o probabilidad de aceptación
2	La probabilidad crítica o de rechazo $\alpha = 1 - \gamma$

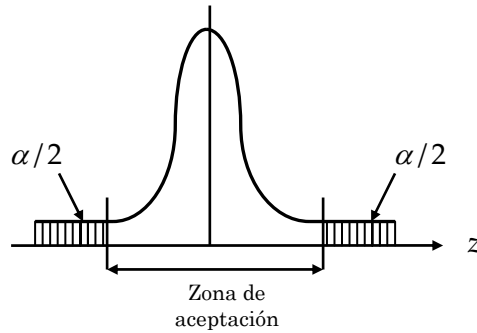


Figura 5.4 Zonas de aceptación y de rechazo para estimar el valor esperado a partir de muestras grandes

Para una muestra grande ($n \geq 30$) se tiene:

$$\bar{x} - E(x) = \pm z * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

En la distribución Gaussiana estándar, Figura 5.4, se determinan los valores de z para los cuales existe una probabilidad $\alpha/2$, pues la zona de rechazo puede estar por la derecha o por la izquierda. Entonces, el intervalo de predicción del $(1-\alpha)\%$ de confianza del valor esperado para muestras grandes está dado por:

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq E(x) \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$$

Donde $z_{\alpha/2}$ es el valor para el cual existe una probabilidad acumulada de $\alpha/2$ por la izquierda o por la derecha de la distribución Gaussiana estándar, dado que esta distribución es simétrica. Nótese que a mayor tamaño de muestra, menor es el intervalo de estimación y viceversa. Para un tamaño de muestra fijo, a menor probabilidad crítica, mayor será el intervalo de estimación y viceversa.

Los valores más utilizados de $z_{\alpha/2}$ son:

α	1%	2%	5%	10%
$z_{\alpha/2}$	2.576	2.326	1.967	1.645

El valor preferido es $\alpha = 5\%$, para el cual se hace la aproximación $z_{\alpha/2} = 1.967 \approx 2.0$.

Para muestras pequeñas ($n < 30$), se aplica un razonamiento similar al anterior, pero utilizando la distribución t-student, con lo cual se halla:

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \leq E(x) \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}$$

De nuevo, nótese que a mayor tamaño de muestra, menor es el intervalo de estimación y viceversa. Para un tamaño de muestra fijo, a menor probabilidad crítica, mayor será el intervalo de estimación y viceversa.

El intervalo de confianza es solo una predicción de la zona donde podría estar el valor esperado de la población; es decir, lo que realmente se está afirmando es:

$P\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq E(x) \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha \quad \text{Para muestras grandes}$
$P\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \leq E(x) \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha \quad \text{Para muestras pequeñas}$

EJERCICIO 5.1

Para el caso del Ejercicio 4.1 estimar el valor medio de la población de bombillas de las luces de navidad.

- $\bar{x} = 272.30$ horas, $s = 58.58$ horas, $n = 16$, población infinita (Datos del problema 4.1)
- Estimador puntual: $\hat{E}(x) = \bar{x} = 272.30$ horas
- Estimación por intervalos: Se aplica el intervalo para muestras pequeñas, la distribución t-student con $v = 16 - 1 = 15$ grados de libertad.

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \leq E(x) \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}$$

α	$t_{\alpha/2}$	Intervalo de estimación	Ancho del intervalo
1%	2.947	229.14 $\leq E(x) \leq$ 315.46	86.32
5%	2.131	241.09 $\leq E(x) \leq$ 303.51	62.42
10%	1.753	246.63 $\leq E(x) \leq$ 297.97	51.35

Nótese que a mayor nivel de confianza (Menor probabilidad crítica) mayor es el intervalo de estimación y viceversa.

En este caso se asume que la vida de las bombillas está normalmente distribuida. Sin embargo, del histograma presentado en el Ejercicio 4.1 no puede deducirse esto.

EJERCICIO 5.2

En un sistema de iluminación pública se toman los datos de tiempo para falla de 100 bombillas y se obtienen las siguientes estadísticas:

$$\bar{x} = 8187.82 \text{ Horas}, s = 8147.55 \text{ Horas}, cv = 99.508\%, n = 100, \text{ población infinita}$$

- Estimador puntual: $\hat{E}(x) = \bar{x} = 8187.82$ horas
- Se aplica el intervalo para muestras grandes, la distribución Gaussiana
- Intervalo de confianza, aproximando $\sigma \approx s$:

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq E(x) \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$$

α	$z_{\alpha/2}$	Intervalo de estimación	Ancho del intervalo
1%	2.576	6089.01 $\leq E(x) \leq$ 10286.63	4197.62
5%	1.967	6585.20 $\leq E(x) \leq$ 9790.44	3205.25
10%	1.645	6847.55 $\leq E(x) \leq$ 9528.09	2680.54

Nótese que a mayor nivel de confianza mayor es el intervalo de estimación y viceversa.

De la forma de histograma de los datos y del cv cercano al 100% se “cree” que la distribución de vida de estas bombillas es exponencial. Cuál será el parámetro estimado de esta distribución?

- En la distribución exponencial, el parámetro de escala h es el inverso del valor esperado, entonces :

$$\hat{h} = 1/\hat{E}(x)$$

- El estimador puntual es: $\hat{h} = 1/8187.82 = 0.000122$ fallas por hora
- Sin embargo, con un 95% de confianza, el intervalo donde se encuentra el valor verdadero de h es:

$$0.000102 \leq h \leq 0.000152$$

El intervalo de confianza, define una familia de distribuciones exponenciales que podrían utilizarse para representar los datos.

Una prueba de bondad de ajuste dirá si se acepta que una de estas distribuciones represente los datos.

5.3 PRUEBAS DE HIPÓTESIS CON RESPECTO AL VALOR ESPERADO

En este caso se establece la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 : E(x) = \mu_0$$

Donde μ_0 es el valor que se creé podría tomar el valor esperado real de la población.

5.3.1 Para muestras grandes ($n \geq 30$)

El estadístico de prueba es:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Los criterios de rechazo son:

H_1	Se rechaza H_0 si:
$E(x) < \mu_0$	$z < -z_\alpha$
$E(x) > \mu_0$	$z > z_\alpha$
$E(x) \neq \mu_0$	$z < -z_{\alpha/2}$ ó $z > z_{\alpha/2}$

5.3.2 Para muestras pequeñas ($n < 30$) y poblaciones normalmente distribuidas

El estadístico de prueba es:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Los criterios de rechazo son:

H_1	Se rechaza H_0 si:
$E(x) < \mu_0$	$t < -t_\alpha$
$E(x) > \mu_0$	$t > t_\alpha$
$E(x) \neq \mu_0$	$t < -t_{\alpha/2}$ ó $t > t_{\alpha/2}$

EJERCICIO 5.3

El fabricante de las bombillas de las luces de navidad de los Ejercicios 4.1 y 5.1 afirma que éstas tienen una vida media de 360 horas. Con un 95% de confianza, se puede aceptar lo que dice el fabricante?

- Hipótesis nula $H_0 : E(x) = \mu_0 = 360$ horas

Hipótesis alterna $H_1 : E(x) < \mu_0 \quad E(x) < 360$ horas

- Probabilidad crítica o de rechazo $\alpha = 5\%$
- Criterio de prueba de hipótesis: Se rechaza H_0 si $t < -t_\alpha$ ($t < -1.753$)

- Estadístico de prueba $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{272.30 - 360}{58.58/\sqrt{16}} = -5.9884$

- Como $t = -5.9884$ es menor que $-t_\alpha = 1.753$ se rechaza la hipótesis nula; entonces, la vida esperada de las bombillas es menor a 360 horas.

Nótese que el límite superior del intervalo de confianza del 5% ($241.09 \leq E(x) \leq 303.51$) es menor a 360 horas.

EJERCICIO 5.4

Un ciudadano crítica al operador del sistema de iluminación pública por utilizar las bombillas del Ejercicio 5.2, afirmando que éstas duran 4000 horas. Sin embargo, el fabricante de las bombillas dice que sus bombillas tienen una vida esperada de 7300 horas. Con un 95% de confianza, se puede aceptar lo que dice el crítico?

- Hipótesis nula $H_0 : E(x) = \mu_0 = 4000$ horas

Hipótesis alterna $H_1 : E(x) > \mu_0 \quad E(x) > 4000$ horas

- Probabilidad crítica o de rechazo $\alpha = 5\%$
- Criterio de prueba de hipótesis: Se rechaza H_0 si $z > z_\alpha$ ($z > 1.645$)

- Estadístico de prueba $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{8187.82 - 4000}{8147.55/\sqrt{100}} = 5.14$

- Como $z = 5.14$ es mayor que $z_\alpha = 1.645$ se rechaza la hipótesis nula; entonces, la vida esperada de las bombillas es mayor a 4000 horas.

Nótese que el límite inferior del intervalo de confianza del 5% ($6585.20 \leq E(x) \leq 9790.44$) es mayor a 4000 horas. Este intervalo contiene el valor de 7300 horas dicho por el fabricante.

5.4 INFERENCIA SOBRE LA VARIANZA

5.4.1 Estimación Puntual

$$\hat{\sigma}^2 = s^2$$

La varianza muestral es un estimador puntual del la varianza. La calidad de este estimador también depende del tamaño de la muestra.

5.4.2 Prueba de consistencia

Considere una secuencia de variables aleatorias IID con valor esperado y varianza finitos. Entonces:

$$P[|s^2 - \sigma^2| = k] \rightarrow 1.0 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

La propiedad de consistencia dice que conforme se aumenta el tamaño de la muestra, la varianza de la muestra tendrá una diferencia finita k muy pequeña con la varianza.

5.4.3 Distribución muestral de la varianza muestral

Teorema
<p><i>Si s^2 es la variancia de una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población normal cuya variancia es σ^2, entonces:</i></p> $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ <p><i>es un valor de una variable aleatoria que tiene distribución Chi-cuadrado con parámetro $v = n - 1$.</i></p>

Es muy importante verificar que la muestra proceda de una población normalmente distribuida. El omitir esto, puede llevar a un gran error; sin embargo, este error se reduce si la muestra es grande.

Las tablas de la distribución Chi-cuadrado generalmente presentan el valor máximo del parámetro χ^2 para el cual existe una probabilidad $(1 - \alpha)$, con un número dado de grados de libertad v . Ver la Figura 5.5.

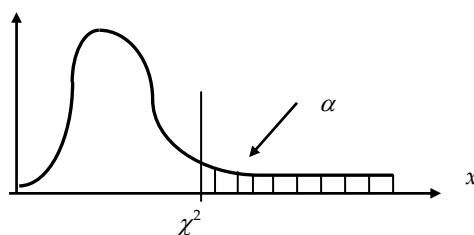


Figura 5.5 La distribución Chi-cuadrado

5.4.4 Estimación de la varianza por intervalos

El intervalo del $(1-\alpha)\%$ de confianza donde se encuentra σ^2 está dado por:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}$$

Donde α es la probabilidad crítica o de rechazo. Los valores de $\chi_{\alpha/2}^2$ y $\chi_{1-\alpha/2}^2$ se hallan en tablas.

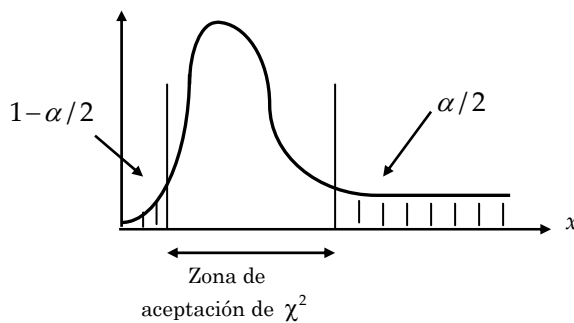


Figura 5.6 Zonas de aceptación y de rechazo para estimar la varianza

El intervalo de confianza es solo una predicción de la zona donde podría estar la varianza de la población; es decir, lo que realmente se está afirmando es:

$$P\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}\right] = 1 - \alpha$$

EJERCICIO 5.5

En una planta de generación solar se van a instalar 4 bancos de baterías conformados por 100 unidades de 150 A – hora. Un fabricante ofrece las baterías garantizando que la máxima desviación es del 2%. Para probar esto, se seleccionan 20 unidades al azar en la bodega del fabricante para hacerles una prueba de descarga; en la prueba se encuentra una desviación muestral de 3 A-hora (2%).

1. Con un nivel de confianza del 95%, determine el intervalo de confianza en el cual está la desviación estándar de la población muestreada.

- $s = 3$ A-hora es el estimador puntual de la varianza
- $n = 20$ es el tamaño de la muestra
- $v = n - 1 = 20 - 1 = 19$ es el número de grados de libertad
- $\alpha = 5\%$ es la probabilidad crítica o el complemento del nivel de confianza
- $\chi_{\alpha/2}^2 = \chi_{0.025}^2 = 32.852$
- $\chi_{1-\alpha/2}^2 = \chi_{0.975}^2 = 8.907$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}$$

$$\frac{(20-1)3^2}{32.852} \leq \sigma^2 \leq \frac{(20-1)3^2}{8.907}$$

$$\frac{19 \cdot 9}{32.852} \leq \sigma^2 \leq \frac{19 \cdot 9}{8.907}$$

$$5.2051 \leq \sigma^2 \leq 19.1983$$

$$2.2815 \leq \sigma \leq 4.3815 \text{ Medido en [A-hora]}$$

2. Se puede aceptar lo que dice el fabricante de que la máxima desviación es del 2%?

$$\frac{2.2815}{150} \cdot 100 \leq \sigma \leq \frac{4.3815}{150} \cdot 100$$

$$1.521\% \leq \sigma \leq 2.921\%$$

Con un 95% de confianza se rechaza la afirmación del fabricante pues la desviación real de la población de baterías puede ser hasta de casi 3%.

5.5 PRUEBAS DE HIPÓTESIS CON RESPECTO A LA VARIANZA

En este caso se establece la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Donde σ_0 es un valor que es el que se creó podría tomar la varianza real de la población. El estadístico de prueba es:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Los criterios de rechazo son:

H_1	Se rechaza H_0 si:
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2$
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi_{\alpha}^2$
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi_{1-\alpha/2}^2$ ó $\chi^2 > \chi_{\alpha/2}^2$

EJERCICIO 5.6

Un fabricante de condensadores de media tensión de 13.2 kV y 100 kVAR afirma que garantiza una desviación de 0.5 kVAR en su producto.

Se toman 20 de estos condensadores y se prueban para determinar sus kVAR reales a condiciones nominales, y se encuentra una desviación de 0.6 kVAR.

Con un 95% de confianza, se puede aceptar lo que dice el fabricante?

- Hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.5^2 = 0.25 \text{ (kVAR)}^2$
Hipótesis alterna $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad \sigma^2 > 0.25 \text{ (kVAR)}^2$
- Probabilidad crítica o de rechazo $\alpha = 5\%$
- Criterio de prueba de hipótesis $\chi^2 > \chi_\alpha^2 : \chi^2 > 30.144$
- Estadístico de prueba $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1) * 0.36}{0.25} = 27.36$

Como $\chi^2 = 27.36$ no es mayor que $\chi_\alpha^2 = 30.144$ se acepta la hipótesis nula; entonces, con un 95% de confianza se acepta lo que dice el fabricante.

Nota: En este problema se asume que la distribución de los valores de Amperios-hora de descarga de las baterías es normal; esto debe verificarse.

5.6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Hays W. L, Winkler R. L, "Statistics, probability, inference and decision", Volume 1, Holt Rinehart and Wiston Inc, 1970.
- [2] Torres A, "Probabilidad, procesos estocásticos y confiabilidad en ingeniería eléctrica", Universidad de los Andes, 2005.
- [3] Viniotis Yannis, "Probability and Random Processes for Electrical Engineers", Mc-Graw Hill, 1998.
- [4] Miller I, Freund J, Johnson R, "Probabilidad y Estadística para Ingenieros", Prentice Hall, 1992.
- [5] Law Averill M, Kelton W. David, "Simulation Modeling and Analysis", Mc-Graw Hill, 2000.

CAPÍTULO 6 – AJUSTE DE DATOS A UNA DISTRIBUCIÓN

6.1 INTRODUCCIÓN

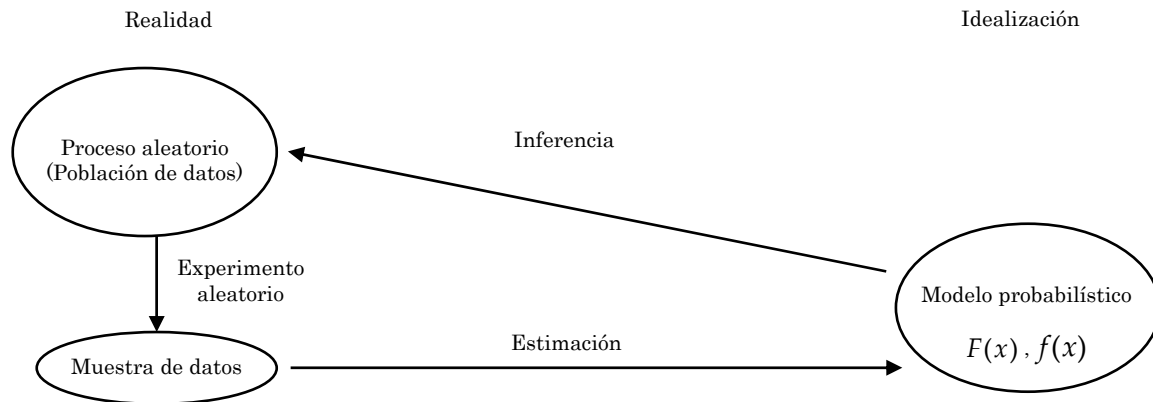


Figura 6.1 Concepto de inferencia acerca del valor esperado y la varianza

El procedimiento de inferencia (estimación) con respecto al modelo probabilístico de un proceso aleatorio consiste en determinar cuál distribución sirve para representar el modelo y cuál es el nivel de confianza o probabilidad de aceptación de este modelo. Al determinar un modelo se obtienen las características de este como el valor esperado, varianza, etc.

Como el procedimiento de ajuste se hace utilizando una muestra de datos es muy importante tener claro que:

1	La muestra aleatoria debe ser representativa del proceso aleatorio bajo estudio (Error aceptable)
2	El nivel de confianza del modelo esta referenciado a la muestra de datos sea esta o no representativa del proceso aleatorio bajo estudio.

Lo anterior quiere decir que el que una distribución se ajuste a una muestra de datos, no quiere decir necesariamente que el modelo represente al proceso aleatorio bajo estudio. Esto solo es cierto cuando la muestra es representativa.

De otra parte, aunque trivial, debe recordarse que solo debe hacerse al ajuste de datos a una distribución cuando el proceso bajo estudio es aleatorio.

A continuación se describe el procedimiento general a seguir para ajuste de datos a una distribución de probabilidad y se presentan algunos de los métodos que pueden ser utilizados en cada uno de los pasos de este procedimiento, sin que sea esta una compilación exhaustiva de métodos.

6.2 PROCEDIMIENTO GENERAL

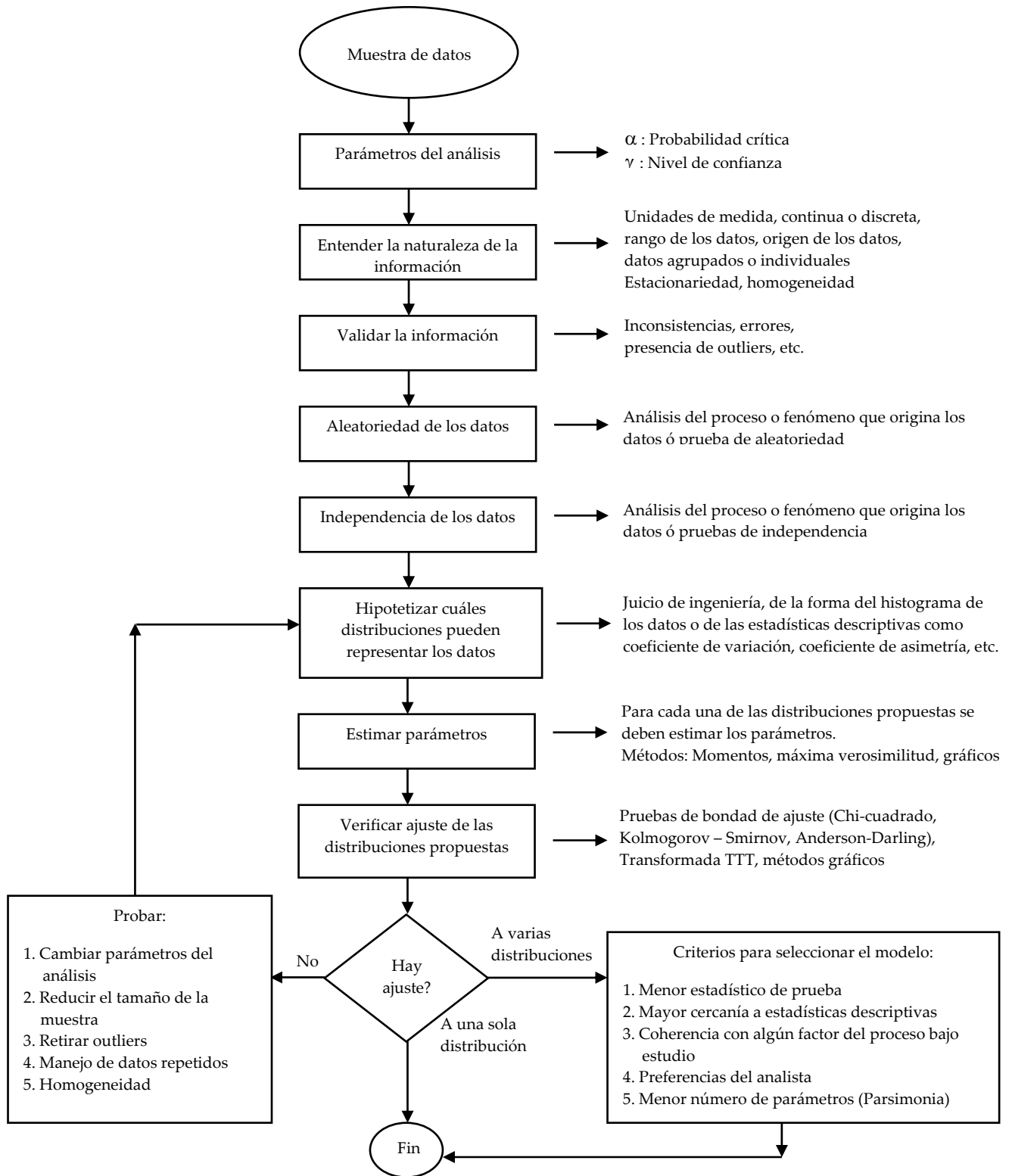


Figura 6.2 Procedimiento para ajustar una distribución a un modelo probabilístico a partir de una muestra de datos

Cuando se quiere ajustar los datos de una muestra aleatoria a una distribución de probabilidad teórica se siguen los pasos que se muestran en la Figura 6.2 los cuales se describen a continuación.

6.2.1 Definir los parámetros del análisis

El nivel de confianza es la probabilidad de aceptación del modelo o modelos que se proponen. Se designa por γ y es el complemento de α , la probabilidad crítica o de rechazo de lo propuesto.

Los valores más utilizados para el nivel de confianza son 90%, 95% y 99%, siendo 95% el valor más utilizado o preferido. Sin embargo, es necesario aclarar que hay dos niveles de confianza en el proceso de ajuste de datos a una distribución:

1	El nivel de confianza o error aceptado para definir el tamaño de la muestra, el cual define qué tan representativa es la muestra con respecto a la población.
2	El nivel de confianza con que una distribución teórica se ajusta a la muestra de datos

Nótese que una distribución teórica puede representar unos datos con un nivel de confianza dado, pero los datos no ser representativos de la población y viceversa. Es decir, son dos problemas independientes.

6.2.2 Entender la naturaleza de la información

Quien realiza el procedimiento de ajuste de datos a una distribución debe entender claramente la naturaleza de la información que utiliza, es decir:

1	Cuáles son las unidades de medida?	Escala de medida en que vienen los datos: Tiempo en: Horas, días, meses? Voltaje en: kV, mV?
2	Naturaleza de la variable: Continua o discreta	Se debe seleccionar el modelo teórico apropiado. Sin embargo, a veces se utiliza una distribución continua para una variable discreta.
3	Rango de valores de la variable bajo estudio	Permite saber cuál es el rango en el cual deben estar los datos de la muestra. Se debe proponer modelos teóricos acordes con el rango de la variable bajo estudio. Por ejemplo, en el caso de la temperatura si el rango son los reales positivos y negativos no proponer una distribución como Gamma, Weibull o la exponencial que no manejan los negativos.
4	Origen de los datos	Es importante conocer si los datos proceden de individuos con algún grado de heterogeneidad. Ejemplo: Los datos de tiempo de falla provienen de 5 compresores. Son estos equipos idénticos? Tienen la misma edad? Tienen las mismas especificaciones? Proviene del mismo fabricante?

5	Datos agrupados o individuales	Es importante conocer si los datos proceden un solo individuo o de varios Ejemplo: Los datos de caudal de un río o los datos de falla de un lote de componentes.
6	Estacionariedad y homogeneidad	Es importante estar seguro que el proceso bajo estudio es estacionario o si existe un índice que haga cambiar las estadísticas del proceso. Solo se utilizan distribuciones de probabilidad para modelar procesos aleatorios estacionarios donde el tiempo u otro parámetro no son un factor importante.

6.2.3 Validar la información

Verificar si en los datos de la muestra hay:

1	Inconsistencias, errores	Datos que no pertenecen al rango de valores posibles de la variable. Por ejemplo, hay datos negativos en la muestra de datos de una variable que solo puede tomar valores positivos.
2	Outliers	Datos que son muy diferentes o “raros” con respecto a los otros que contiene la muestra. Una regla práctica es considerar como outlier todo dato por fuera del intervalo dado por $\bar{x} \pm 3s$. No deben eliminarse los outliers sin un cuidadoso análisis de la real posibilidad de la existencia de estos valores.

6.2.4 Aleatoriedad de los datos

Los modelos probabilísticos deben ajustarse únicamente a datos que provengan de un fenómeno o proceso aleatorio. Aunque esto parezca trivial, en la práctica poco cuidado se pone a este asunto. Para saber si los datos de una muestra realmente son aleatorios se puede:

1	Analizar la naturaleza del fenómeno o proceso bajo estudio
2	Aplicar una prueba de aleatoriedad

4.2.5 Independencia de los datos

El método de estimación de parámetros de la máxima verosimilitud y las pruebas de bondad de ajuste asumen que los datos de la muestra son independientes, por lo cual, esta condición debe verificarse previo a su aplicación. La independencia en los datos de la muestra puede verificarse:

1	Analizando la naturaleza del fenómeno o proceso bajo estudio
2	Aplicando pruebas de independencia

Algunos métodos gráficos para verificar la independencia en una muestra de datos son:

1	Diagrama de dispersión (Scatter diagram)	
2	Gráfica de correlación (Correlation plot)	Consultar la Referencia [5]

6.2.6 Hacer hipótesis sobre las distribuciones que podrían representar los datos

Esta hipótesis se puede hacer considerando:

1	El conocimiento sobre el fenómeno aleatorio que se desea modelar: Tipo de variable aleatoria (discreta, continua), rango de valores de la variable, etc.
2	Del análisis de la información contenida en la muestra: La forma de su histograma, el coeficiente de variación, el coeficiente de asimetría, etc.

Siempre se trata de utilizar en primera instancia los modelos matemáticos para distribuciones creados por los matemáticos (Normal, Gamma, Weibull, etc.).

Varias distribuciones teóricas de probabilidad pueden servir para representar los datos. La deducción de cuáles pueden servir proviene del conocimiento de la forma de diversas distribuciones de probabilidad.

También puede encontrarse que del histograma puede deducirse qué distribución puede servir para representar los datos.

Otra cosa es que los analistas tienen sus modelos favoritos a utilizar y por supuesto van a querer que estos sean los que sirvan para representar el proceso aleatorio bajo estudio.

6.2.7 Estimar los parámetros que definen cada una de las distribuciones propuestas

Esta estimación se puede hacer mediante los siguientes métodos:

1	Métodos gráficos
2	El método de los momentos
3	El método de la máxima verosimilitud

El mejor método a ser aplicado es el de la máxima verosimilitud, pues los métodos gráficos son subjetivos y el de los momentos no tiene una justificación matemática.

6.2.8 Verificar el ajuste de la distribución propuesta

Esta verificación se puede hacer mediante los siguientes métodos:

1	Métodos gráficos
2	Pruebas de bondad de ajuste: Chi-cuadrado, Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, etc
3	Transformada TTT

Los métodos gráficos son subjetivos; otro problema de estos métodos es que no se pueden sacar decisiones automáticas que se incorporen en el algoritmo de un programa de computador.

Se habla de bondad de ajuste cuando se compara una distribución de frecuencia observada (real) con los correspondientes valores de una distribución esperada (ideal); entonces:

Distribución observada	Distribución esperada
Es la distribución de frecuencias construida a partir de la muestra de datos	Es la distribución de frecuencias construida a partir de la distribución teórica o ideal propuesta como modelo para representar la población estadística.

Las pruebas de bondad de ajuste tienden a fallar cuando la muestra de datos es muy grande [5].

6.2.9 Decisión final

Al finalizar este procedimiento, el analista puede encontrarse con las siguientes situaciones:

1	No hay ajuste a ninguna de las distribuciones propuestas
2	Hay ajuste a mas de las distribuciones propuestas
3	Hay ajuste solo a una de las distribuciones propuestas

En el caso donde no se encuentra ajuste a ninguna distribución, se puede probar las siguientes medidas para tratar de encontrar el ajuste:

1	Cambiar los parámetros del análisis: Cambiar el nivel de confianza
2	Reducir el tamaño de la muestra, si esta es muy grande
3	Retirar los outliers
4	Manejo de datos repetidos: Retirarlos o conservarlos en las estadísticas descriptivas para estimación de parámetros pero no tomarlos en cuenta para la prueba de bondad de ajuste.

Se debe tener cuidado al aplicar las medidas 2, 3 y 4 pues se altera la muestra de datos.

Si nada de esto funciona o no se desea aplicar este tipo de medidas, se puede trabajar con la distribución de probabilidad discreta acumulada de los datos o la gráfica de frecuencias por clases convertida a probabilidades.

En el caso donde hay ajuste a varias distribuciones se pueden aplicar los siguientes criterios para hacer la selección final entre las distribuciones que pasaron la prueba de bondad de ajuste:

1	Seleccionar la distribución que tenga el menor estadístico de prueba
2	Seleccionar la distribución cuyo valor esperado y varianza sean iguales o más cercanas a las correspondientes estadísticas descriptivas
3	Seleccionar la distribución que mejor se ajusta a las condiciones del problema bajo estudio

6.2.10 Software para ejecutar este procedimiento

Se recomienda que se utilicen los paquetes de software comerciales que tienen implementados las funciones para obtener las estadísticas descriptivas de los datos, los histogramas, parámetros estimados de máxima verosimilitud y pruebas de bondad de ajuste. A continuación, se describen algunos de los procedimientos a ser aplicados en el ajuste de datos a una distribución de probabilidad.

6.3 PRUEBA DE ALEATORIEDAD

Existen varias pruebas de aleatoriedad. A continuación se presenta una tomada de la Referencia [4].

Prueba de aleatoriedad	
<p>1. Sean:</p> <p>n_1: Cantidad de datos menores a la mediana de la muestra.</p> <p>n_2: Cantidad de datos mayores a la mediana de la muestra.</p> <p>U: Sucesión de datos continuos menores o mayores a la mediana de la muestra.</p>	
<p>2. Definiendo:</p> $\mu_U = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1$ $\sigma_U = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}$	
<p>3. El estadístico de prueba es:</p> $z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$	
<p>4. Hipótesis nula: Los datos son aleatorios</p> <p>Hipótesis alterna: Existe un patrón en los datos que se repite con frecuencia, es decir, existe tendencia en el proceso o fenómeno que produce los datos</p>	
<p>5. Criterio de decisión: Se rechaza la hipótesis nula si $z < -z_{\alpha/2}$ ó $z > z_{\alpha/2}$</p>	

Para aplicar esta prueba se debe conservar la secuencia cronológica en que se produjeron los datos. Si los datos se ordenan por orden de magnitud se altera la sucesión de datos continuos mayores y menores a la media.

EJERCICIO 6.1

Se toman 16 baterías de una línea de producción y se les mide la tensión en Voltios después de una prueba de carga y descarga.

Probar con un 95% de confianza si la muestra de datos es aleatoria o si existe un patrón que se alterna con frecuencia.

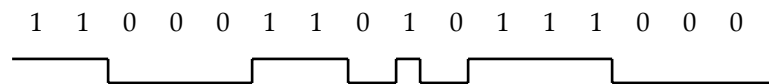
1.261
1.258
1.249
1.241
1.247
1.256
1.250
1.240
1.255
1.243
1.252
1.253
1.251
1.245
1.248
1.246

Mediana=1.2495 (Voltios)

n1=8 datos menores a la mediana

n2=8 datos mayores a la mediana

U=8 sucesión de datos continuos menores o mayores a la mediana. Se obtiene marcando los datos mayores a la mediana con un "1" y los menores con un "0" y luego se hace el siguiente diagrama para contar las transiciones:



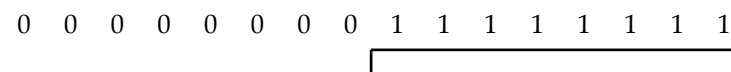
$$\mu_U = 9 \quad \sigma_U = 1.9322 \quad z = -0.5175 \quad z_{\alpha/2} = 1.96$$

Hipótesis nula H_0 : La muestra de datos es aleatoria

Hipótesis alterna H_1 : La muestra de datos no es aleatoria y existe un patrón en los datos que se repite con frecuencia

Criterio de decisión: Como z no es menor que $-z_{\alpha/2}$ se acepta la hipótesis nula, es decir, la muestra de datos si es aleatoria

Si los datos fuesen ordenados por magnitud de menor a mayor, el diagrama de sucesión de datos continuos sería:



$$U=2 \quad z=-3.6228$$

En este caso, como z es menor que $-z_{\alpha/2}$ se rechaza la hipótesis nula, es decir, la muestra de datos no es aleatoria, resultado que es contrario al anterior donde se conserva la secuencia cronológica de los datos!!

6.4 PRUEBA DE INDEPENDENCIA

Existen varias prueba de independencia. A continuación se presenta una tomada de la Referencia [4].

Diagrama de Dispersión
<p><i>Si se tiene una muestra de n datos x_1, x_2, \dots, x_n no negativos y <u>ordenados cronológicamente</u>, el diagrama de dispersión es una gráfica de las parejas (x_i, x_{i+1}) para $i = 1, 2, \dots, (n-1)$.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Si los datos son independientes los puntos están dispersos en el primer cuadrante del plano (x_i, x_{i+1})</i> • <i>Si los datos están correlacionados positivamente, los puntos tienen a formar una línea con pendiente positiva en el primer cuadrante del plano (x_i, x_{i+1})</i> • <i>Si los datos están correlacionados negativamente, los puntos tienen a formar una línea con pendiente negativa en el primer cuadrante del plano (x_i, x_{i+1})</i>

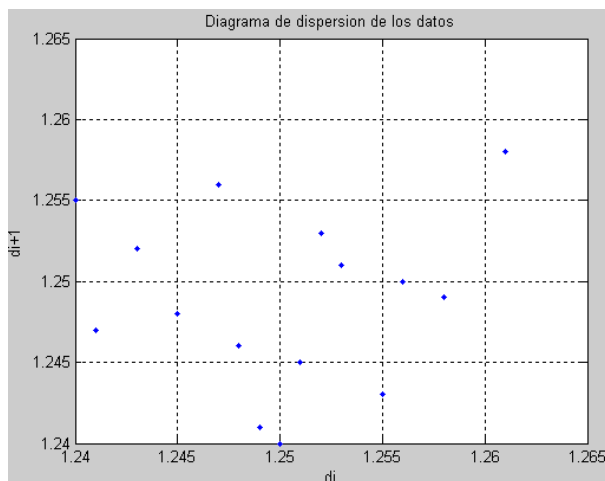


Figura 6.3 Diagrama de dispersión para una muestra de datos independiente

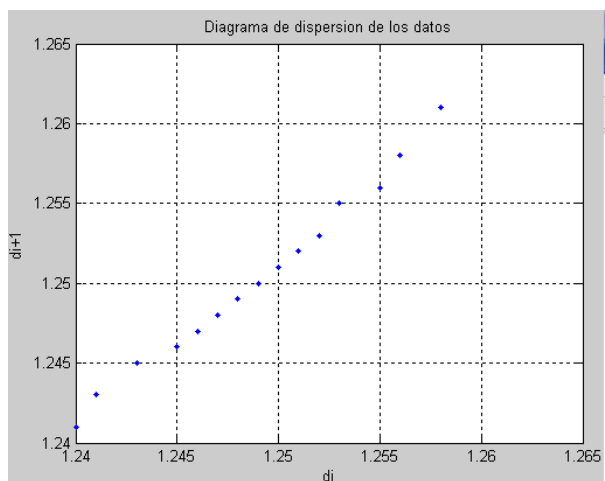


Figura 6.4 Diagrama de dispersión para una muestra de datos independiente pero los datos se ordenaron por magnitud

6.5 RELACIÓN ENTRE HISTOGRAMA Y FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

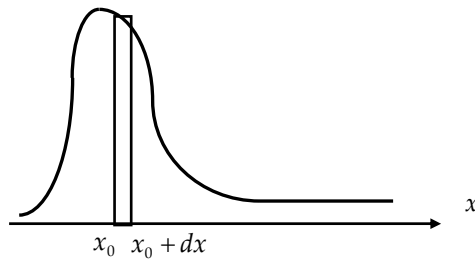


Figura 6.5 Función de densidad de probabilidad

La función de densidad de probabilidad $f_x(x)$ se define como:

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} = \frac{P[x \leq (x_0 + dx)] - P[x \leq x_0]}{dx}$$

$$f_x(x)dx \approx P[x_0 < x \leq x_0 + dx]$$

Entonces, $f_x(x)$ evaluada en un valor dado x_0 indica cuánta probabilidad de masa hay alrededor de ese punto.

A partir de un histograma se puede calcular $f_x(x)$ pues la probabilidad en un intervalo de clase se puede evaluar con la definición de frecuencia relativa: La frecuencia del intervalo de clase dividida entre el número total de datos utilizados para construir el histograma:

$$P_{clase_i} = \frac{f_i}{n}$$

Esta es la relación existente entre un histograma de los datos y la función de densidad de probabilidad, el histograma puede servir para indicar cuál es la forma de la distribución que puede utilizarse para representar los datos. Por esta razón, la función de densidad de probabilidad es más utilizada en los análisis que la función de distribución de probabilidad, pues debe recordarse que ésta última función siempre es una curva creciente entre 0 y 1 para todas las distribuciones.

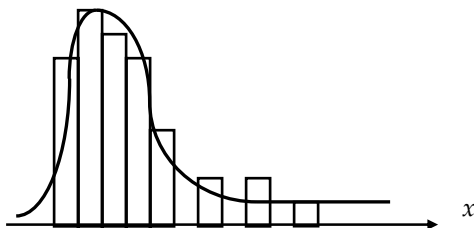


Figura 6.6 Histograma y función de densidad de probabilidad

6.6 MÉTODOS PARA ESTIMAR LOS PARÁMETROS DE UNA DISTRIBUCIÓN

6.6.1 Método de los momentos

Las características más importantes de una distribución de probabilidad son el valor esperado y la varianza. En todas las distribuciones, estas características son función de los parámetros (forma, escala, localización) que definen la función de distribución; entonces, si una distribución tiene k parámetros, su valor esperado y su varianza serán una función de estos parámetros.

Tomando en cuenta el hecho de que la mayoría de las distribuciones solo tiene como máximo dos parámetros, se tiene:

$$E(x) = f(\theta_1, \theta_2) \quad \text{VAR}(x) = f(\theta_1, \theta_2)$$

Ejemplo		
Distribución	$E(x)$	$VAR(x)$
Exponencial	$1/h$	$1/h^2$
Uniforme	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Gausiana	μ	σ^2
Weibull	$\alpha^{-1/\beta} * \Gamma(1 + \beta^{-1})$	$\alpha^{-(2/\beta)} * [\Gamma(1 + 2 * \beta^{-1}) - (\Gamma(1 + \beta^{-1}))^2]$
Gamma	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Binomial	np	npq

Entonces, si se dispone de estimadores para el valor esperado y la varianza, como \bar{x} y s , se igualan las ecuaciones del valor esperado y de la varianza a estos estimadores y se despejan los parámetros estimados de la distribución propuesta:

$$\bar{x} = \hat{E}(x) \approx f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \quad s^2 = \hat{\sigma}^2 \approx f(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$$

Estas dos ecuaciones se pueden resolver en forma simultánea para despejar los parámetros estimados. En algunos casos, como las distribuciones Gausiana y exponencial el resultado se obtiene por simple inspección. En otros casos, se debe recurrir a soluciones numéricas.

También es posible utilizar como estimadores del valor esperado y la varianza valores que a juicio del analista corresponden al problema dado su conocimiento del fenómeno bajo estudio y se despejan los parámetros estimados de las ecuaciones como en el caso anterior.

Este método es empírico, por lo cual, puede dar estimadores muy pobres que no corresponden con la realidad del fenómeno bajo estudio.

EJERCICIO 6.2

En el Ejercicio 4.1 se hallaron las siguientes estadísticas descriptivas de la muestra de tiempos para falla: $\bar{x} = 272.30$ horas y $s = 58.58$ horas.

Si del histograma de los datos se cree que la distribución de la población es uniforme, cuáles son los parámetros estimados de la distribución uniforme que podría representar los datos?

Aplicando el método de los momentos:

$$\bar{x} = (\hat{a} + \hat{b}) / 2 = 272.30$$

$$s^2 = (\hat{b} - \hat{a})^2 / 12 = 58.58^2$$

Resolviendo estas dos ecuaciones se obtiene:

$$\hat{a} = 2\bar{x} - \hat{b}$$

$$\hat{b} = \frac{\sqrt{12 * s^2} + 2\bar{x}}{2}$$

Los parámetros estimados son: $\hat{a} = 170.8364637$ horas $\hat{b} = 373.7635363$ horas

Nótese que el rango de valores de la variable definido con estos estimadores es mayor al rango de la muestra de datos.

6.6.2 Método de la máxima verosimilitud

En este método se considera que los datos x_1, x_2, \dots, x_n representan a las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n las cuales son una secuencia IID. La función de distribución de probabilidad de cada una de estas variables aleatorias es $f_x(x, \theta)$.

La función de densidad de probabilidad conjunta de la secuencia de n variables aleatorias IID es L , que se denomina “función de verosimilitud de la muestra”:

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x, \theta)$$

Se debe determinar el valor óptimo del parámetro estimado que maximiza la función de verosimilitud calculando:

$$\frac{dL(x, \theta)}{d\theta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2 L(x, \theta)}{d\theta^2} < 0$$

Tomando en cuenta el hecho de que el valor que maximiza la función de verosimilitud también maximiza su logaritmo, se puede aplicar:

$$\frac{dLN[L(x, \theta)]}{d\theta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2LN[L(x, \theta)]}{d\theta^2} < 0$$

Si la distribución de probabilidad tiene k parámetros, entonces la función de verosimilitud es:

$$L(x, \theta_1, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$$

Y el valor de los parámetros estimados óptimos se obtiene calculando:

$$\frac{\partial L(x, \theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k$$

También se pueden tomar las derivadas parciales con respecto al logaritmo de la función de verosimilitud.

Para el caso de distribuciones discretas, el método se aplica de la misma forma pero utilizando la función de probabilidad de masa.

Este método solo es eficiente para muestras grandes.

Los estimadores que se obtienen por el método de máxima verosimilitud tienen las siguientes ventajas:

1	Son únicos, para las distribuciones más comunes
2	Son insesgados
3	Son consistentes
4	Si n es grande, su distribución es normal con valor medio 0 y desviación $\delta(\theta)$. Donde $\delta(\theta) = -n / E\left(\frac{d^2L}{d\theta^2}\right)$ El valor esperado se toma con respecto a x

Entonces, si la muestra es grande, se define el intervalo de confianza del parámetro θ como:

$$\hat{\theta} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\delta(\hat{\theta})}{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\delta(\hat{\theta})}{n}}$$

Esto quiere decir que con los estimadores de máxima verosimilitud, se define realmente una familia de distribuciones que podrían servir para representar los datos.

Este método no se puede aplicar a la distribución uniforme pues las derivadas de la función de verosimilitud no producen relación alguna en función de la variable aleatoria x . Entonces, para esta distribución, los parámetros se pueden estimar de la siguiente forma:

$$\hat{a} = \min(x_i) \quad \hat{b} = \max(x_i)$$

EJERCICIO 6.3

Para una muestra de datos de tamaño n se cree que la distribución de la secuencia IID es exponencial.

Determinar el estimador del parámetro por el método de máxima verosimilitud.

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}$$

Como $\sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}n$, entonces, $L(x, \theta) = \theta^n e^{-\theta \bar{x}n}$

$$\frac{dL(x, \theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - n\bar{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta^* = 1/\bar{x} = \hat{h}$$

Este resultado es el mismo que se puede obtener por el método de los momentos, pero en este caso, se tiene un soporte analítico sobre el procedimiento. De la misma forma, se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud para otras distribuciones.

En [5] se presentan los estimadores de máxima verosimilitud para varias distribuciones; sin embargo, los paquetes comerciales de estadística tienen implementado estos procedimientos, por lo cual, no es necesario estar realizando este tipo de demostraciones cada que se va a resolver un problema.

6.7 PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE CHI-CUADRADO

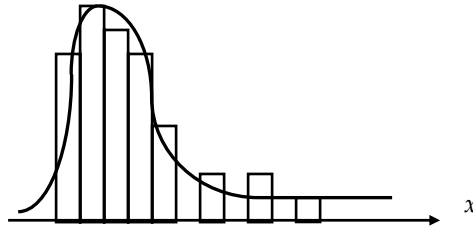


Figura 6.7 Prueba Chi-cuadrado

Esta prueba realiza comparaciones entre las desviaciones del histograma o tabla de distribución de frecuencias de los datos y la función de densidad de probabilidad propuesta para representar los datos.

Esta prueba sirve para distribuciones continuas y discretas. No se debe utilizar cuando la frecuencia de clase del histograma o tabla de distribución de frecuencias sea menor a 5. Pero es posible combinar clases para cumplir este criterio. El procedimiento es:

- **Paso 1: Calcular las desviaciones entre el histograma y la distribución propuesta**

A partir del histograma o tabla de distribución de frecuencias de los datos, se compara para cada clase i la frecuencia de clase esperada FE_i con la frecuencia de clase observada FO_i . La desviación se calcula como:

$$\varepsilon_i = (FE_i - FO_i)^2 / FE_i$$

La frecuencia de clase esperada FE_i se calcula como la probabilidad de la clase por el tamaño de datos de la muestra. Este valor debe ser redondeado a un entero.

- **Paso 2: Calcular el estadístico de prueba χ^2**

El estadístico de prueba es la sumatoria de las desviaciones entre las observaciones y los valores esperados para las k clases del histograma o tabla de distribución de frecuencias. Se calcula como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k (FE_i - FO_i)^2 / FE_i$$

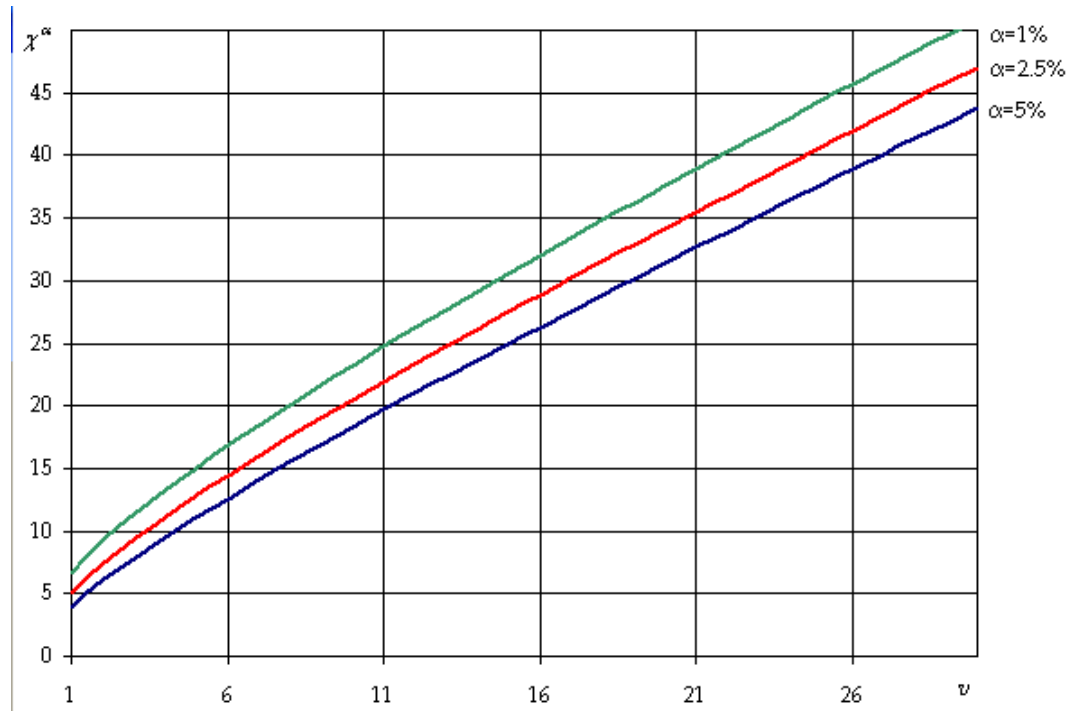
- **Paso 3: Determinar el valor crítico del estadístico de prueba χ^2**

En las tablas de la distribución Chi-cuadrado se halla el valor crítico χ^2_{α} para el estadístico de prueba con v grados de libertad. Los grados de libertad están dados por:

$$v = k - m - 1$$

Donde m es el número de parámetros de la distribución calculados a partir de los datos.

Nótese que puede presentarse que el número de grados de libertad es cero lo cual indica que no puede aplicarse la prueba. Este caso aparece cuando hay pocas clases y se estiman parámetros a partir de la muestra. Por ejemplo, si solo hay dos clases y se estima un parámetro a partir de los datos, el número de grados de libertad es cero y no puede aplicarse la prueba.



Nótese que para un número fijo de datos, el valor crítico del estadístico de prueba aumenta conforme aumenta el nivel de confianza, y, que para un mismo nivel de confianza, el valor crítico del estadístico de prueba aumenta conforme aumenta el número de datos.

- **Paso 4: Planteamiento de hipótesis**

H_0 : La distribución propuesta SI representa a los datos

H_1 : La distribución propuesta NO representa a los datos

- **Paso 5: Criterio de decisión**

Se rechaza H_0 si $\chi^2 > \chi^2_\alpha$

EJERCICIO 6.4

Probar con un nivel de confianza del 95% si los datos del Ejercicio 4.1 se pueden ajustar a una distribución uniforme con parámetros $\hat{a} = 184.1$ horas y $\hat{b} = 349.4$ horas.

- La variable aleatoria x corresponde al tiempo para falla o vida de las bombillas
- La distribución de probabilidad propuesta para x es: $F_x(x) = \frac{(x-184.1)}{165.3}$
- Como este método solo se puede aplicar para datos agrupados cuya frecuencia de clase sea 5 o más, se deben agrupar los datos en clases que permitan cumplir este criterio.
- Cálculo de las desviaciones absolutas y del estadístico de prueba

Clase	Intervalo de clase		FO_i	FE_i	$(FE_i - FO_i)^2 / FE_i$
1	184.1	225	5	4	0.25
2	226	301	5	7	0.57
3	302	349.4	6	5	0.20
				χ^2	1.02

El primer FE_i se calculó así: $FE_1 = (F_x(225) - F_x(184.1)) * 16 = (0.24743 - 0) * 16 = 3.9588 \approx 4$

- El número de grados de libertad es $v = k - m - 1 = 3 - 1 - 1 = 1$. En este caso $m = 1$ pues el parámetro de escala del modelo $1/(b-a)$ se calculó utilizando los datos de la muestra.
- El valor crítico del estadístico de prueba con $v = 1$ y $\alpha = 5\%$ es $\chi^2_{\alpha} = 3.841$
- Planteamiento de hipótesis:

H_0 : La distribución uniforme con parámetros $\hat{a} = 184.1$ horas y $\hat{b} = 349.4$ horas SI representa los datos con un 95% de confianza

H_1 : La distribución propuesta NO representa a los datos

- Prueba de hipótesis: Si $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$ se rechaza H_0

Como $\chi^2 = 1.02 < 3.841$ no se puede rechazar la hipótesis nula.

6.8 PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE KOLMOGOROV – SMIRNOV

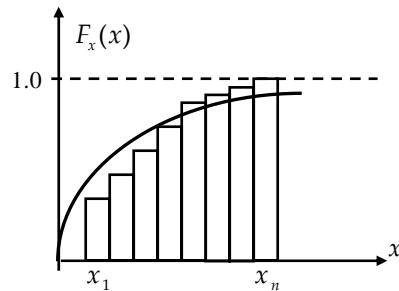


Figura 6.8 Prueba Kolmogorov - Smirnov

Esta prueba realiza comparaciones entre las desviaciones absolutas de los datos organizados de menor a mayor y la función de distribución de probabilidad propuesta para representar los datos.

Esta prueba es más eficiente para muestras pequeñas que la prueba Chi-cuadrado, pero solo sirve para distribuciones continuas.

El procedimiento es:

- **Paso 1: Ordenar los datos de menor a mayor**
- **Paso 2: Calcular las desviaciones absolutas**

Calcular para cada dato i la desviación absoluta entre la frecuencia acumulada esperada FE_i y la frecuencia acumulada observada FO_i :

$$\varepsilon_i = |FE_i - FO_i|$$

FE_i y FO_i corresponden a las probabilidades de que la variable aleatoria sea menor o igual al dato i .

La probabilidad FE_i se calcula a partir de la ecuación de la distribución de probabilidad propuesta y la probabilidad FO_i se calcula como:

$$FO_i = \frac{i}{n}$$

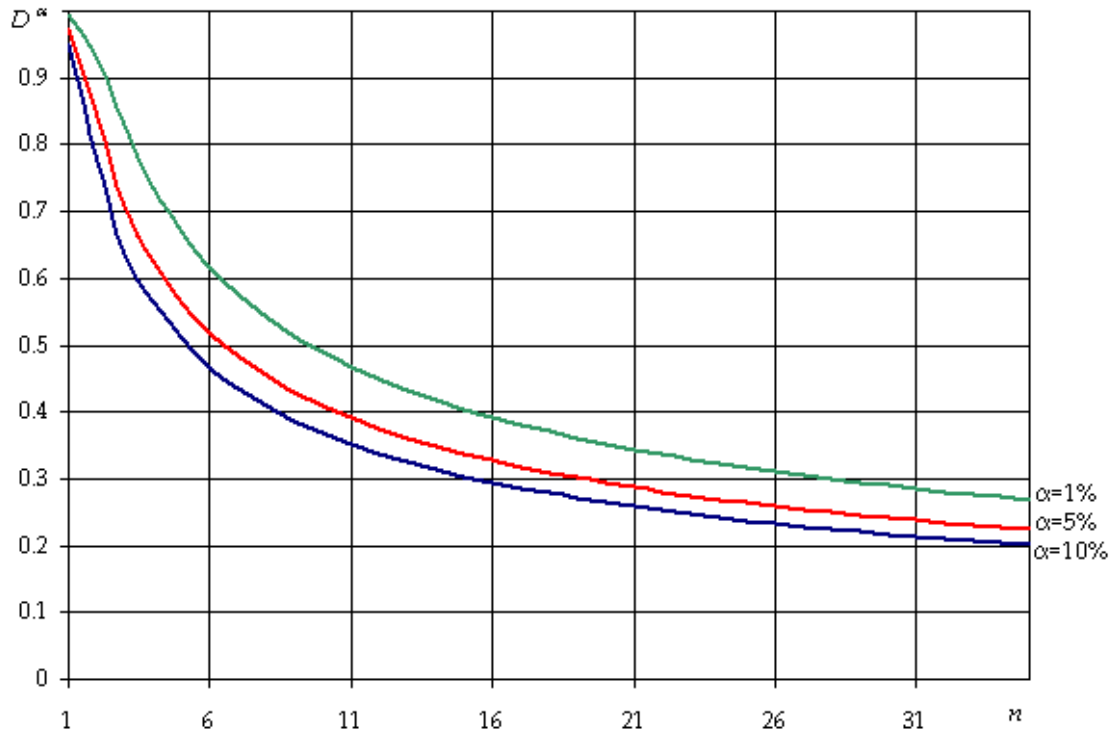
- **Paso 3: Calcular el estadístico de prueba D**

El estadístico de prueba es la mayor desviación absoluta:

$$D = \max\{|FE_i - FO_i|\}$$

- **Paso 4: Determinar el valor crítico del estadístico de prueba D^α**

En las tablas de la distribución Kolmogorov – Smirnov se halla el valor crítico D^α para el estadístico de prueba con n datos.



Nótese que para un número fijo de datos, el valor crítico del estadístico de prueba aumenta conforme aumenta el nivel de confianza, y, que para un mismo nivel de confianza, el valor crítico del estadístico de prueba disminuye conforme aumenta el número de datos.

- **Paso 5: Planteamiento de hipótesis**

H_0 : La distribución propuesta SI representa a los datos

H_1 : La distribución propuesta NO representa a los datos

- **Paso 6: Criterio de decisión**

Se rechaza H_0 si $D > D^\alpha$

EJERCICIO 6.5

Probar con un nivel de confianza del 95% si los datos del Ejercicio 4.1 se pueden ajustar a una distribución uniforme con parámetros $\hat{a} = 184.1$ horas y $\hat{b} = 349.4$ horas.

- La variable aleatoria x corresponde al tiempo para falla o vida de las bombillas
- La distribución de probabilidad propuesta para x es: $F_x(x) = \frac{(x - 184.1)}{165.3}$
- Cálculo de las desviaciones absolutas

i	x_i	FE_i	FO_i	$ FE_i - FO_i $
1	184.1	0.0000	0.0625	0.0625
2	208.3	0.1464	0.1250	0.0214
3	213.3	0.1766	0.1875	0.0109
4	218	0.2051	0.2500	0.0449
5	224.4	0.2438	0.3125	0.0687
6	227.5	0.2626	0.3750	0.1124
7	248.5	0.3896	0.4375	0.0479
8	252.1	0.4114	0.5000	0.0886
9	256.1	0.4356	0.5625	0.1269
10	300.2	0.7024	0.6250	0.0774
11	303.8	0.7241	0.6875	0.0366
12	336.3	0.9208	0.7500	0.1708
13	344.5	0.9704	0.8125	0.1579
14	344.7	0.9716	0.8750	0.0966
15	345.6	0.9770	0.9375	0.0395
16	349.4	1.0000	1.0000	0.0000

- El estadístico de prueba es: $D = \max\{|FE_i - FO_i|\} = 0.1708$
- El valor crítico del estadístico de prueba es $D^\alpha = D^{0.05} = 0.32733$ para $n = 16$ datos
- Planteamiento de hipótesis:

H_0 : La distribución uniforme con parámetros $\hat{a} = 184.1$ horas y $\hat{b} = 349.4$ horas SI representa los datos con un 95% de confianza

H_1 : La distribución propuesta NO representa a los datos

- Prueba de hipótesis: Si $D > D^\alpha$ se rechaza H_0

Como $D = 0.1708 < 0.32733$ no se puede rechazar la hipótesis nula.

6.9 GRÁFICA DE CALIFICACIONES NORMALES Y LOG-NORMALES [4]

Consiste en la elaboración de una gráfica cuyas abscisas corresponden a la calificación normal m de cada dato y sus ordenadas al valor mismo de cada dato ordenado en forma ascendente.

Calificaciones normales	
Las calificaciones m_1, m_2, \dots, m_n , son valores tales que:	
$P(x \leq m_i) = P(m_i \leq x \leq m_{i+1}) = P(m_n \leq x) = \frac{i}{n+1} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$	
Donde x es una variable aleatoria distribuida normalmente con media $\mu = \bar{x}$ y $\sigma = s$.	

Esta prueba se puede aplicar si no existen datos repetidos. El procedimiento consiste en:

1	Calcular $P_i = P_{i-1} + \frac{1.0}{n+1}$	Es la probabilidad que corresponde al dato i y n es el tamaño de la muestra. Para $i = 1$, $P_{i-1} = 0$.
2	Calcular m_i	Es el valor para el cual en la distribución normal estandar existe una probabilidad acumulada P_i , se halla de tablas o por integración numérica.
3	Criterio de decisión	Si la gráfica se ajusta a una línea recta, entonces la muestra esta distribuida normalmente. Ver el ejemplo de la Fig.

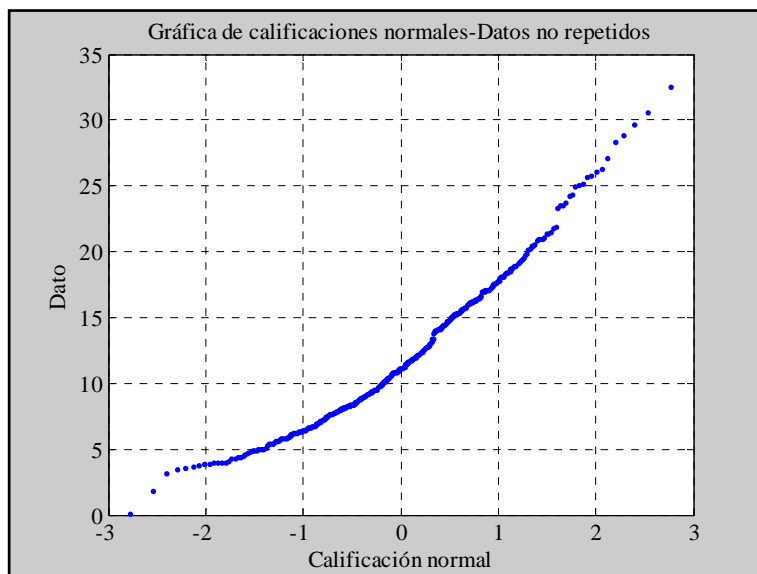


Figura 6.9 Gráfica de calificaciones normales

Si la muestra de datos no contiene datos negativos se puede aplicar esta prueba al logaritmo natural de los datos. Si se cumple la prueba, entonces la muestra tiene una distribución log-normal.

EJERCICIO 6.6

Aplicar las pruebas de normalidad y lognormalidad a los datos del Ejercicio 6.1

Dato	$\ln(\text{dato}_i)$	P_i	m_i
1.261	0.2151	0.0588	-1.5647
1.258	0.2159	0.1176	-1.1868
1.249	0.2175	0.1765	-0.928
1.241	0.2191	0.2353	-0.7215
1.247	0.2199	0.2941	-0.5414
1.256	0.2207	0.3529	-0.3774
1.250	0.2215	0.4118	-0.2230
1.240	0.2223	0.4706	-0.0738
1.255	0.2231	0.5294	0.0738
1.243	0.2239	0.5882	0.223
1.252	0.2247	0.6471	0.3774
1.253	0.2255	0.7059	0.5414
1.251	0.2271	0.7647	0.7215
1.245	0.2279	0.7215	0.9289
1.248	0.2295	0.8824	1.1868
1.246	0.2319	0.9412	1.5647

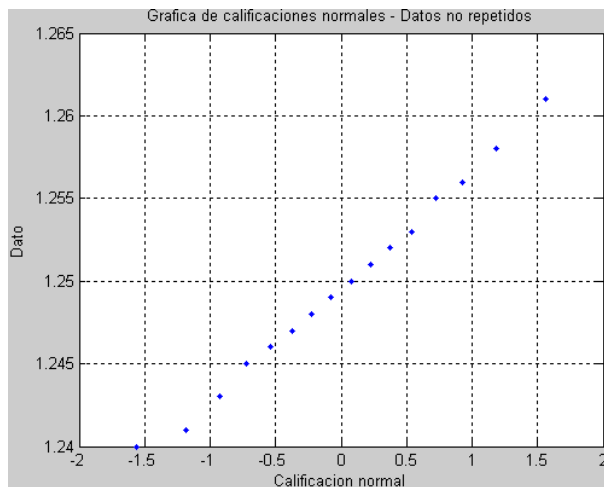


Figura 6.10 Gráfica de calificaciones normales de los datos del ejercicio 6.6

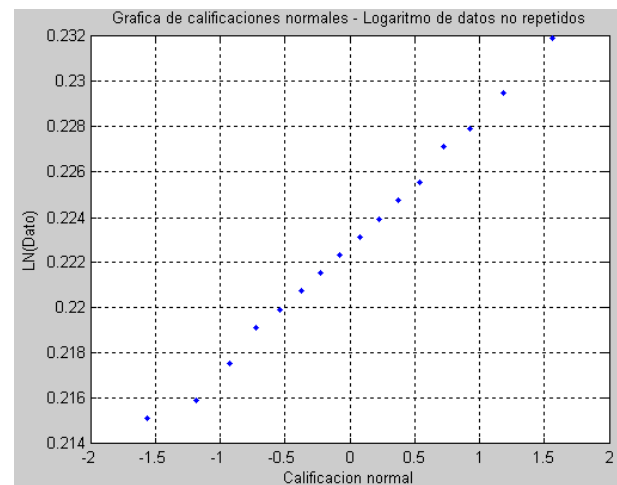


Figura 6.11 Gráfica de calificaciones lognormales de los datos del ejercicio 6.6

En este caso se observa en las figuras 6.10 y 6.11 que la muestra de datos se ajusta tanto a la distribución normal como a la lognormal.

6.10 TRANSFORMADA Y GRÁFICA TTT

La transformada TTT (Barlow y Campo 1975)

La función de transformada TTT de una distribución de probabilidad $F_x(x)$ se define como:

$$\phi(u) = \frac{1}{E(x)} \int_0^{F^{-1}(u)} \bar{F}(t) dt \quad \text{con } 0 \leq u \leq 1$$

Donde:

\bar{F} : Es el complemento de la función de distribución de probabilidad

F^{-1} : Función inversa de la función de distribución de probabilidad

La función $\phi(u)$ define una gráfica de referencia para comparar la muestra de datos y determinar si existe ajuste a la distribución propuesta.

$\phi(u)$ es independiente del parámetro de escala de la distribución; esto se cumple para cualquier distribución pues es una propiedad de cualquier transformación.

Nótese que:

1	Este método solo puede aplicarse para distribuciones con solución analítica para la función de distribución de probabilidad y el valor esperado
2	para aplicar este método no es necesario primero estimar los parámetros de la distribución que hipotética que se propone para representar los datos

Esta prueba proviene del área de confiabilidad, donde los datos de la muestra son los tiempos entre fallas de un componente o sistema reparable. Por lo tanto, se aplica para el caso en el que los datos de la muestra conforman una sucesión de valores observados en el tiempo que a la vez constituyen una nueva variable aleatoria (tiempo total de operación u observación) o a los tiempos interarribo que cualquier proceso de llegada de eventos (accidentes, incendios, enfermedades no fatales en un ser vivo, terremotos, etc.). De ahí, el nombre TTT: Total Time on Test.

EJERCICIO 6.7

Hallar la transformada TTT para la distribución exponencial.

- $F_x(x) = 1 - e^{-hx}$ $E(x) = 1/h$
- $\bar{F}_x(x) = 1 - F_x(x) = 1 - [1 - e^{-hx}] = e^{-hx}$
- $u = F_x(x) = 1 - e^{-hx} \rightarrow e^{-hx} = 1 - u \rightarrow -hx = \text{LN}(1 - u) \rightarrow x = \frac{-1}{h} \text{LN}(1 - u) \rightarrow F^{-1}(u) = \frac{-1}{h} \text{LN}(1 - u)$
- $\phi(u) = \frac{1}{E(x)} \int_0^{F^{-1}(u)} \bar{F}(t) dt = \frac{1}{1/h} \int_0^{F^{-1}(u)} e^{-ht} dt = h * \frac{-1}{h} [e^{-ht}]_0^{F^{-1}(u)} = -[e^{-h \frac{-1}{h} \text{LN}(1-u)} - e^{-h*0}]$
 $\phi(u) = -[e^{\text{LN}(1-u)} - e^{-h*0}] = -[(1-u) - 1] = -[-u] = u$
 $\phi(u) = u$

La gráfica de $\phi(u)$ es una línea diagonal entre 0 y 1 pues u toma estos mismos valores.

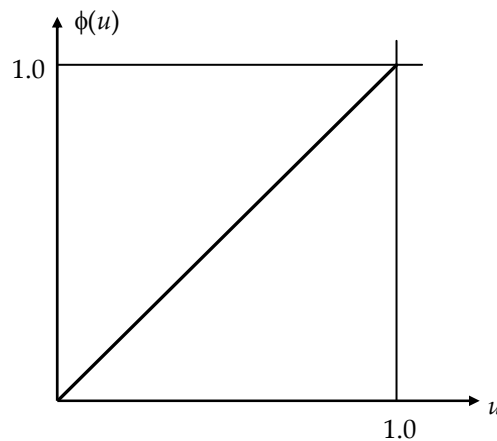


Figura 6.12 Gráfica de la transformada TTT para la distribución exponencial

La gráfica TTT

Dada una muestra de n tiempos entre llegada de eventos x_1, x_2, \dots, x_n la gráfica TTT se obtiene mediante el siguiente procedimiento:

1. Reordene los datos en forma creciente por orden de magnitud: X_1, X_2, \dots, X_n

2. $X_0 = 0$

3. Calcular los valores TTT como: $R_i = \sum_{j=1}^i (n - j + 1) * [X_j - X_{j-1}]$ con $i = 1, 2, \dots, n$

4. Normalice los valores TTT: $S_i = R_i / R_n$

5. Grafique $(u = \frac{i}{n}, \phi(u) = S_i)$ y únalos mediante segmentos de recta

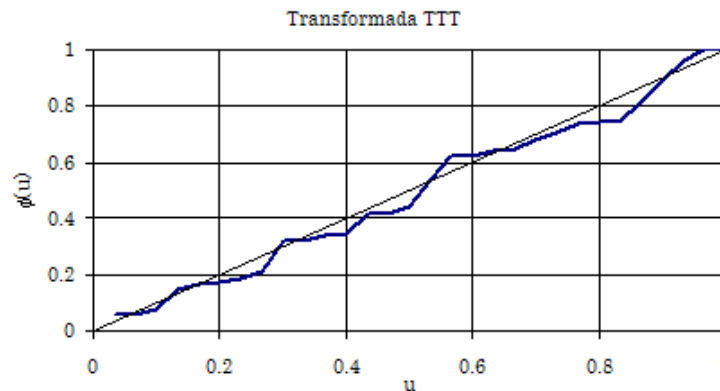
6. Si los puntos están distribuidos alrededor de la transformada TTT de la distribución con la que se quiere probar el ajuste, entonces SI hay ajuste; los datos pertenecen a la distribución propuesta.

El nombre TTT proviene del hecho de que los R_i se normalizan con respecto a R_n que corresponde al tiempo total de las observaciones.

EJERCICIO 6.8

Para la muestra de tiempos entre llegada de eventos de un proceso estocástico puntual probar si estos datos están distribuidos exponencialmente, asumiendo que son independientes.

X [años]	R [años]	$u = i/n$	$\phi(u) = S_i$
0.0171	0.5130	0.0333	0.0548
0.0183	0.5478	0.0667	0.0586
0.0248	0.7298	0.1000	0.0780
0.0493	1.3913	0.1333	0.1487
0.0561	1.5681	0.1667	0.1676
0.0589	1.6381	0.2000	0.1751
0.0626	1.7269	0.2333	0.1846
0.0732	1.9707	0.2667	0.2106
0.1189	2.9761	0.3000	0.3181
0.1192	2.9824	0.3333	0.3188
0.1267	3.1324	0.3667	0.3348
0.1323	3.2388	0.4000	0.3462
0.1685	3.8904	0.4333	0.4158
0.1718	3.9465	0.4667	0.4218
0.1849	4.1561	0.5000	0.4442
0.2449	5.0561	0.5333	0.5404
0.3001	5.8289	0.5667	0.6230
0.3020	5.8536	0.6000	0.6257
0.3143	6.0012	0.6333	0.6414
0.3195	6.0584	0.6667	0.6476
0.3505	6.3684	0.7000	0.6807
0.3750	6.5889	0.7333	0.7043
0.4149	6.9081	0.7667	0.7384
0.4231	6.9655	0.8000	0.7445
0.4257	6.9811	0.8333	0.7462
0.5501	7.6031	0.8667	0.8127
0.7410	8.3667	0.9000	0.8943
0.9456	8.9805	0.9333	0.9599
1.1288	9.3469	0.9667	0.9991
1.1376	9.3557	1.0000	1.0000



Como se observa en esta gráfica, SI existe ajuste a una distribución exponencial, pues la gráfica de los datos está alrededor de la transformada TTT de la distribución exponencial (la línea diagonal).

6.11 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Hays W. L, Winkler R. L, “Statistics, probability, inference and decision”, Volume 1, Holt Rinehart and Wiston Inc, 1970.
- [2] Torres A, “Probabilidad, variables aleatorias, confiabilidad y procesos estocásticos en ingeniería eléctrica”, Universidad de los Andes, 1996.
- [3] Viniotis Yannis, “Probability and Random Processes for Electrical Engineers”, Mc-Graw Hill, 1998.
- [4] Miller I, Freund J, Johnson R, “Probabilidad y Estadística para Ingenieros”, cuarta edición, Prentice Hall, 1992.
- [5] Law Averill M, Kelton W. David, “Simulation Modeling and Analysis”, Tercera edición, Mc-Graw Hill, 2000.
- [6] Klefsjo B, Kumar U, “Goodness-of-fit tests for the power law process based on the TTT plot”, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 41, No. 4, December 1992.
- [7] Ascher H, Feingold H, “Repairable systems reliability: Modeling, inference, misconceptions and their causes”, Marcel Dekker, 1984.
- [8] Ascher H. E, Hansen Christian K, “Spurious exponentially observed when incorrectly fitting a distribution to nonstationary data”, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 47, No. 4, December 1998.

CAPÍTULO 7 – CADENAS DE MARKOV

7.1 INTRODUCCIÓN

7.1.1 Motivación

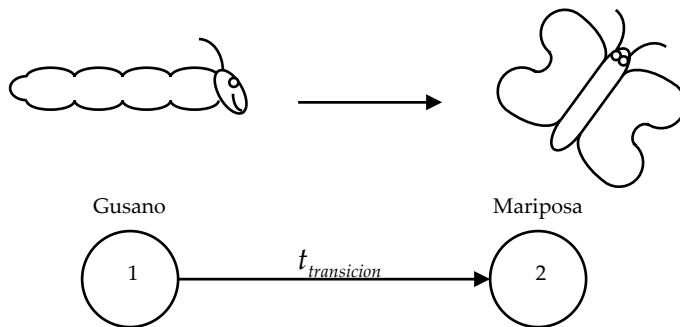


Figura 7.1 Representación de un fenómeno aleatorio por diagramas de transición entre estados

Existen fenómenos aleatorios para los cuales se desea estudiar la evolución del estado (condiciones físicas u operativas) en forma discreta ó en saltos con respecto al tiempo. Es posible que el espacio de estado del fenómeno aleatorio bajo estudio sea continuo pero solo es práctico o de interés el considerar algunos estados particulares. Un ejemplo de este tipo de fenómenos se presenta en la Figura 7.1.

Como ayuda para este tipo de modelamiento, el fenómeno aleatorio se representa mediante un diagrama de transición de estados, el cual es una gráfica de los estados discretos de interés y flechas que indican las transiciones que son posibles entre éstos. En la Figura 7.2 se presentan algunos ejemplos de diagramas de transición entre estados.

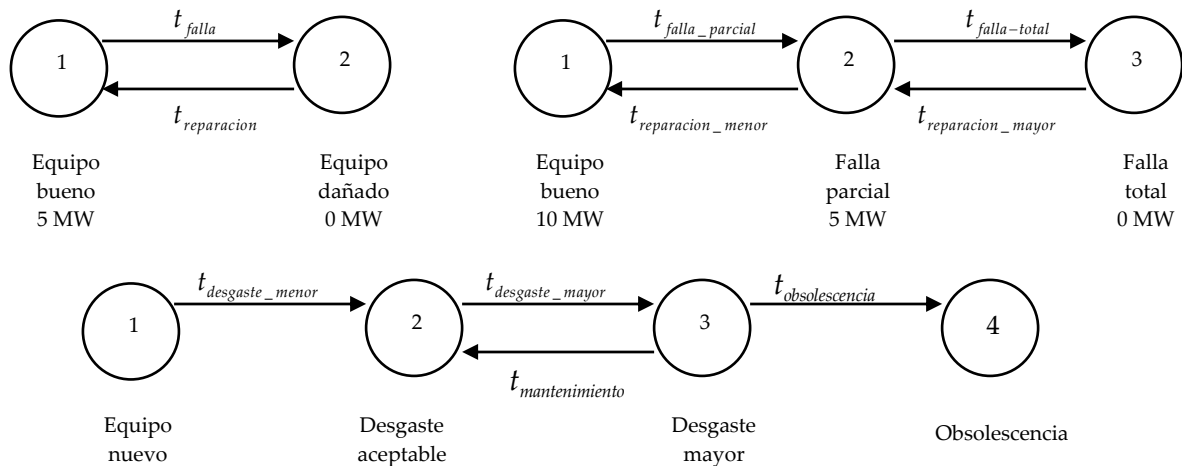


Figura 7.2 Ejemplos de diagramas de transición de estados

El modelo matemático para este tipo de representación se denomina cadena de Markov. Este modelo entrega como salida o solución las probabilidades de ocurrencia de cada uno de los estados como funciones del tiempo, por lo cual, corresponde a un proceso estocástico.

En cualquier instante de tiempo, la suma de las probabilidades de todos los estados debe ser 1.0.

7.1.2 Estado absorbente

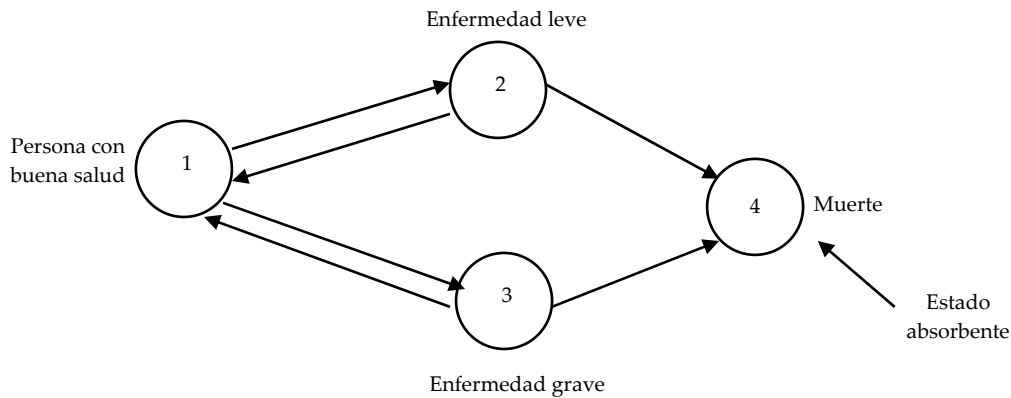


Figura 7.3 Diagrama de transición de estados con un estado absorbente

En los diagramas de transición no siempre existe conexión entre todos los estados. Algunos estados pueden ser “absorbentes” ya que una vez se llega a ellos, el fenómeno termina o permanece allí para siempre. En la Figura 7.3 se presenta un ejemplo donde el diagrama de transición tiene un estado absorbente (el estado 4).

7.1.3 Acumulación de estados

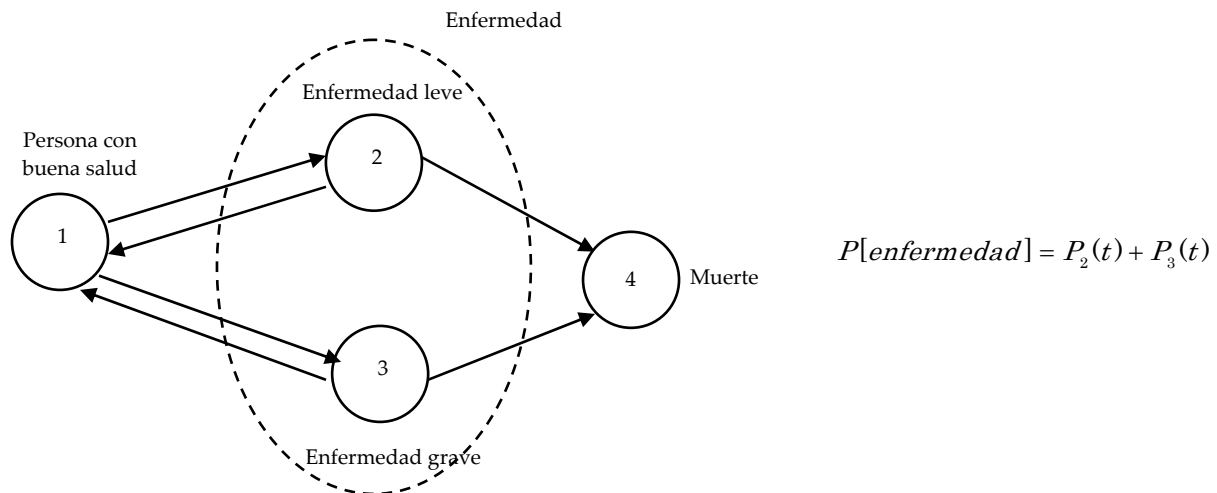


Figura 7.4 Diagrama de transición de estados con un estado absorbente

Si varios estados corresponden a una misma situación física u operativa, estos se pueden acumular. La probabilidad de ocurrencia del nuevo estado acumulado es igual a la suma de las probabilidades de ocurrencia de los estados que se toman en cuenta en la acumulación. La Figura 7.4 presenta un ejemplo de este concepto.

7.2 CADENAS DE MARKOV DISCRETAS EN EL ESTADO Y EN EL TIEMPO

7.2.1 Descripción

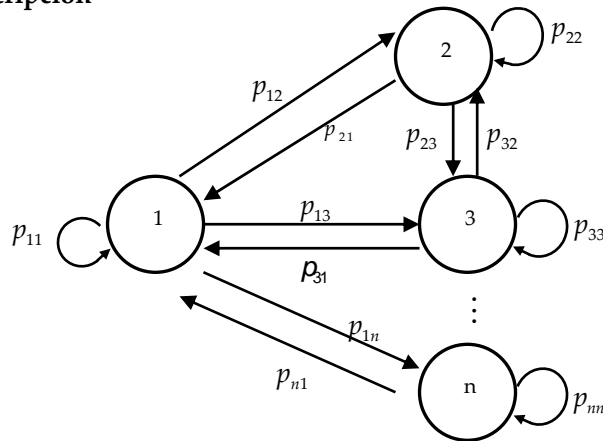


Figura 7.5 Cadena de Markov discreta

En este modelo, que también se conoce como “cadena de Markov discreta”, para un periodo de tiempo fijo Δt , se conocen las probabilidades de transición entre los estados del sistema. El periodo de tiempo Δt también se denomina “etapa” o “transición” del proceso y puede ser una hora, un día, una semana, un mes, año, etc.

Los diagramas de transición de estados muestran las probabilidades de permanecer en un estado dado y las probabilidades de transición entre estados, tal como se muestra en la Figura 7.5.

En $t = 0$, se conoce el estado en que el sistema inicia el proceso. Estas condiciones iniciales se describen mediante un vector de probabilidades $\bar{P}(0)$.

Una vez el sistema inicia su operación, puede tomar cualquiera de los estados discretos definidos. Las probabilidades de encontrar cada uno de los estados van cambiando conforme el proceso evoluciona con el tiempo. Los instantes de tiempo futuros están definidos por “saltos” discretos de dimensión igual a Δt , tal como se muestra en la Figura 7.6. En cada uno de estos instantes, se determinan las probabilidades de encontrar cada uno de los estados, que es un vector $\bar{P}(t)$.

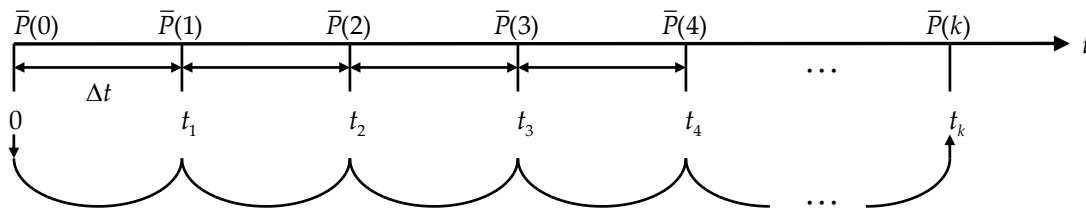


Figura 7.6 Evolución en el tiempo de una cadena de Markov discreta

Este proceso es estacionario, lo cual se evidencia en el hecho de que al pasar el tiempo las probabilidades de los estados se estabilizan en un valor. Esto resulta de asumir que dentro del periodo Δt la probabilidad es constante.

Las unidades del paso de tiempo discreto Δt resultan de que:

1	La observación del proceso solo se hace cada Δt	Por ejemplo: cada hora, día, semana, etc.
2	Las transiciones ocurren solo ocurren cada Δt .	Por ejemplo: las transferencias entre programas académicos de pregrado solo se hacen cada semestre.

7.2.2 Planteamiento matemático

Para un sistema o proceso que tiene n estados, la probabilidad de encontrar cada uno de los estados luego de k transiciones (periodos de tiempo) está dada por:

$$\overline{P(k)} = \overline{P(0)} P^k$$

Donde:

$\overline{P(k)}$: Es el vector fila con las probabilidades de encontrar cada uno de los estados después de un tiempo k . Se utiliza la letra k para designar el tiempo pues el utilizar la letra t puede llevar a confundir la operación P^t con la matriz transpuesta de P .

$\overline{P(0)}$: Es el vector fila con las condiciones iniciales expresadas en términos de probabilidades. La suma de sus términos es 1.0.

P : Es la matriz estocástica de probabilidades de transición entre estados y es el generador de la cadena. Sus términos se definen como:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

p_{ii} : Es la probabilidad de permanecer en el estado i .

p_{ij} : Es la probabilidad de hacer una transición del estado i al j después de un periodo de tiempo t , dado que se estaba en el estado i al iniciar el periodo de tiempo t .

Las filas de la matriz P deben sumar 1.0. Además, P no es necesariamente simétrica ya que p_{ij} no tiene que ser igual a p_{ji} .

La matriz P^k también es una matriz estocástica.

7.2.3 Análisis de estabilidad

$$\text{Si } k \text{ es grande } \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} P^k = L$$

Si el límite existe, entonces P es una matriz ergódica.

Condiciones para la ergodicidad [7]:

Matriz Ergódica

Una matriz estocástica es ergódica si y solo si el único valor propio de magnitud 1.0 es $(1.0 + 0.0i)$ y si este valor propio tiene multiplicidad j , existen j vectores propios linealmente independientes asociados con este valor propio.

Toda matriz P tiene a $(1.0 + 0.0i)$ como valor propio y ninguno de los valores propios tiene magnitud mayor a 1.0 en valor absoluto.

Una matriz estocástica es “regular” si una de sus potencias contiene solo elementos positivos y esta matriz regular es ergódica. Las probabilidades de estado estable del sistema están dadas por:

$$\overline{P(\infty)} = \overline{P(0)} L$$

Las probabilidades de estado estable son independientes de las condiciones iniciales, por lo cual, no es necesario hallar la matriz L , pues estas probabilidades se pueden hallar mediante el siguiente procedimiento [3], [6]:

Algoritmo para hallar $P(\infty)$

1. Se calcula la matriz $A = [P^t - I]$ donde I es una matriz idéntica de dimensión $n * n$
2. Se reemplaza cada término de la última fila de la matriz A por 1.0
3. Se obtienen la probabilidades de estado estable resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales de coeficientes constantes:

$$\overline{P(\infty)} = A^{-1} \bar{b}$$

Donde \bar{b} es un vector fila de dimensión n cuyos términos son cero excepto el de la última fila que es igual a 1.0

La Referencia [7] presenta un método para hallar la matriz L a partir de los valores propios y vectores propios de la matriz P .

7.2.4 Cómo aplicar este modelo a un problema real

Para aplicar este modelo a un problema real se requiere:

1	Definir los estados discretos con los cuales se pueden representar las características de interés del sistema bajo estudio.
2	Definir el paso discreto de tiempo Δt
3	Determinar las probabilidades de transición entre estados. Los p_{ij} se pueden determinar a partir de estadísticas, aplicando la definición de frecuencia relativa. Debe verificarse que las frecuencias (probabilidades) de transición entre estados sean constantes dentro del periodo de tiempo que se defina para el estudio.

EJEMPLO 7.1

Los registros operativos semanales de una planta térmica que funciona con carbón muestran que:

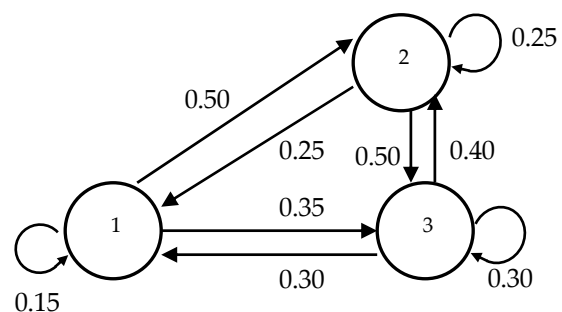
1	Si la planta está apagada por problemas técnicos, la probabilidad de que permanezca en este estado es del 15%, la probabilidad de que sea reparada parcialmente y genere 60 MW es del 50% y la probabilidad de que se repare totalmente y genere 120 MW es del 35%
2	Cuando la planta está operativa parcialmente con 60 MW, la probabilidad de que se dañe de nuevo totalmente y tenga que ser apagada es del 25%. La probabilidad de que se repare y pase a generar 120 MW es del 50%
3	Cuando la planta está operativa al 100% de capacidad, la probabilidad de que se dañe totalmente y tenga que ser apagada es del 30%, la probabilidad de que sufra una falla parcial y solo pueda generar 60 MW es del 40%

- El periodo de tiempo del estudio es $t = 1$ semana
- Existen 3 estados numerados así:

Estado	MW	Descripción
1	0	Falla total
2	60	Falla parcial
3	120	No fallas

- La matriz estocástica de transiciones es:

$$P = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.50 & 0.35 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \\ 0.30 & 0.40 & 0.30 \end{pmatrix}$$



- Las probabilidades de cada estado luego de k periodos de tiempo, si la planta inicio el ciclo del estudio en el estado uno están dadas por:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0.15 & 0.50 & 0.35 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \\ 0.30 & 0.40 & 0.30 \end{pmatrix}^k$$

Semana (k)	0 MW (p_1)	60 MW (p_2)	100 MW (p_3)
1	0.1500	0.5000	0.3500
2	0.2525	0.3400	0.4075
3	0.2451	0.3742	0.3806
4	0.2445	0.3684	0.3871
5	0.2449	0.3692	0.3859
6	0.2448	0.3691	0.3861
7	0.2448	0.3691	0.3861
8	0.2448	0.3691	0.3861

Como se observa, el sistema alcanza el estado estable en 6 transiciones. Entonces, P es una matriz ergódica.

- Las probabilidades después de 8 transiciones cambiando las condiciones iniciales:

$P(0)$	Descripción	0 MW	60 MW	100 MW
[1 0 0]	Empieza con falla total	0.2448	0.3691	0.3861
[0 1 0]	Empieza con falla parcial	0.2448	0.3691	0.3861
[0 0 1]	Empieza sin falla	0.2448	0.3691	0.3861

Como se observa, las probabilidades de estado estable son las mismas sin importar en que estado empezó el sistema bajo estudio el proceso.

- Valores propios y vectores propios de la matriz P

i	λ_i	$ \lambda_i $
1	1.0000	1.0000
2	-0.1500 + 0.0707i	0.1658
3	-0.1500 - 0.0707i	0.1658

- Las probabilidades de estado estable también se pueden hallar haciendo:

$$\text{Paso 1: } A = P^t - I = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.50 & 0.35 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \\ 0.30 & 0.40 & 0.30 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.85 & 0.25 & 0.30 \\ 0.50 & -0.75 & 0.40 \\ 0.35 & 0.50 & -0.70 \end{pmatrix}$$

$$\text{Paso 2: } A = \begin{pmatrix} -0.85 & 0.25 & 0.30 \\ 0.50 & -0.75 & 0.40 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

$$\text{Paso 3: } P(\infty) = \begin{pmatrix} -0.85 & 0.25 & 0.30 \\ 0.50 & -0.75 & 0.40 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2448 \\ 0.3691 \\ 0.3861 \end{pmatrix}$$

El mismo resultado obtenido mediante multiplicación sucesiva de P . La siguiente gráfica presenta un esquema de la evolución del proceso:

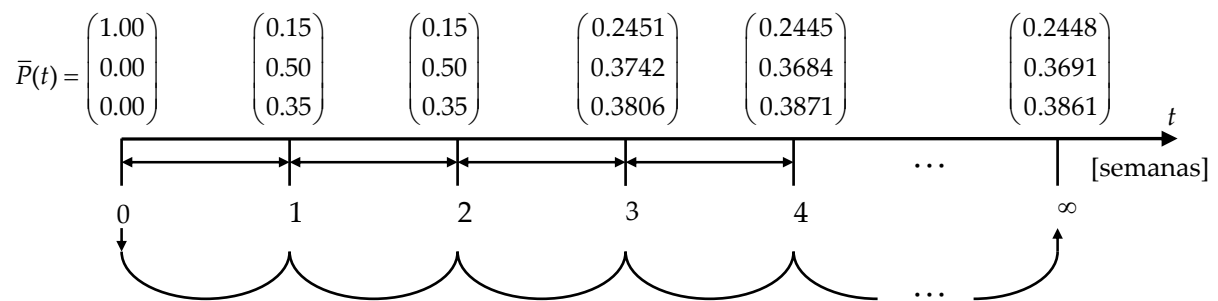


Figura 7.7 Evolución del proceso estocástico del ejercicio 7.1

7.3 CADENAS DE MARKOV DISCRETAS EN EL ESTADO Y CONTINUAS EN EL TIEMPO

7.3.1 Descripción

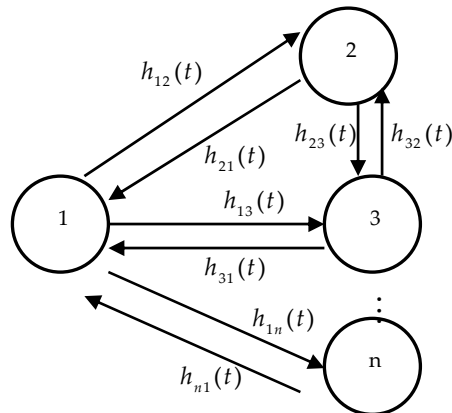


Figura 7.8 Cadena de Markov continua en el tiempo

En este modelo los tiempos de transición entre estados t_{ij} son variables aleatorias continuas. Del valor esperado de cada tiempo de transición entre estados se define la tasa de transición entre estados:

$$h_{ij}(t) = 1 / E(t_{ij}) = \frac{dE[N(t)]}{dt}$$

La tasa de transición entre estados corresponde a una velocidad o razón de cambio del valor esperado de eventos $N(t)$ de transición con respecto al tiempo; por ejemplo, fallas/año, reparaciones/año, inundaciones/año, etc. Esta tasa de eventos de se presenta en el diagrama de transición de estados, tal como se muestra en la Figura 7.8.

Tres casos aparecen en el estudio de este proceso estocástico:

	Condiciones	Nombre	Características	Método de solución
1	Todos los h_{ij} son constantes y todos los t_{ij} están exponencialmente distribuidos	Cadena de Markov homogénea exponencial	Proceso estacionario homogéneo	Análítica y numérica por métodos numéricos de ecuaciones diferenciales y simulación de Montecarlo
2	Todos los h_{ij} son constantes, pero no todos los t_{ij} están exponencialmente distribuidos	Cadena de Markov homogénea general	Proceso estacionario homogéneo	Simulación de Montecarlo, mecanismo de las etapas (device of stages) y adición de variables
2	Algunos h_{ij} varían con el tiempo	Cadena de Markov no homogénea	Proceso no estacionario no homogéneo	Métodos numéricos de ecuaciones diferenciales y simulación de Montecarlo

7.3.2 Desarrollo del modelo matemático

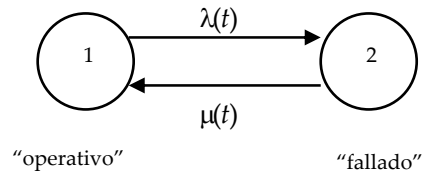


Figura 7.9 Cadena de Markov continua en el tiempo

Para desarrollar las ecuaciones de una cadena de Markov continua en el tiempo, considere como ejemplo el componente de dos estados operativos mostrado en la figura 7.9

$h_{12}(t) = \lambda(t)$	Se denomina tasa de fallas
$h_{21}(t) = \mu(t)$	Se denomina tasa de reparaciones.

Considere un intervalo de tiempo dt el cual es muy pequeño de tal manera que la probabilidad de que ocurran más de una falla o más de una reparación sea muy pequeña y por lo tanto pueda despreciarse la ocurrencia de estos eventos. Así:

Probabilidad de una falla en t = Probabilidad de una falla en $(t + dt) = \lambda(t)dt$

Probabilidad de una reparación en t = Probabilidad de una reparación en $(t + dt) = \mu(t)dt$

La probabilidad de estar en el estado operativo después de un intervalo de tiempo dt es igual a la probabilidad de estar operativo en t y no haber fallado en dt + probabilidad de estar fallado en t y haber sido reparado en dt :

$$P_1(t + dt) = P_1(t)[1 - \lambda(t)dt] + P_2(t)[\mu(t)dt]$$

La probabilidad de estar en el estado de reparación (fallado) después de un intervalo de tiempo dt es igual a la probabilidad de estar fallado en t y no haber sido reparado en dt + probabilidad de estar no fallado en t y haber fallado en dt :

$$P_2(t + dt) = P_2(t)[1 - \mu(t)dt] + P_1(t)[\lambda(t)dt]$$

Así, reorganizando términos en ambas ecuaciones:

$P_1(t + dt) = P_1(t)[1 - \lambda(t)dt] + P_2(t)[u(t)dt]$	$P_2(t + dt) = P_2(t)[1 - \mu(t)dt] + P_1(t)[\lambda(t)dt]$
$P_1(t + dt) = P_1(t) - \lambda(t)dtP_1(t) + u(t)dtP_2(t)$	$P_2(t + dt) = P_2(t) - \mu(t)dtP_2(t) + \lambda(t)dtP_1(t)$
$P_1(t + dt) - P_1(t) = [-\lambda(t)P_1(t) + u(t)P_2(t)]dt$	$P_2(t + dt) - P_2(t) = [\lambda(t)P_1(t) - \mu(t)P_2(t)]dt$
$\frac{P_1(t + dt) - P_1(t)}{dt} = -\lambda(t)P_1(t) + u(t)P_2(t)$	$\frac{P_2(t + dt) - P_2(t)}{dt} = \lambda(t)P_1(t) - \mu(t)P_2(t)$
$\left. \frac{P_1(t + dt) - P_1(t)}{dt} \right _{dt \rightarrow 0} = -\lambda(t)P_1(t) + u(t)P_2(t)$	$\left. \frac{P_2(t + dt) - P_2(t)}{dt} \right _{dt \rightarrow 0} = \lambda(t)P_1(t) - \mu(t)P_2(t)$
$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda(t)P_1(t) + u(t)P_2(t)$	$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda(t)P_1(t) - \mu(t)P_2(t)$

Lo cual resulta en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda(t)P_1(t) + u(t)P_2(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda(t)P_1(t) - \mu(t)P_2(t)$$

El cual se puede expresar en alguna de las siguientes formas:

$\begin{pmatrix} \frac{dP_1(t)}{dt} \\ \frac{dP_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & u(t) \\ \lambda(t) & -\mu(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{dP_1(t)}{dt} & \frac{dP_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) & P_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda(t) & \lambda(t) \\ u(t) & -\mu(t) \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & u(t) \\ \lambda(t) & -\mu(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) & \dot{P}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) & P_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda(t) & \lambda(t) \\ u(t) & -\mu(t) \end{pmatrix}$
$\overline{\dot{P}(t)} = T^t \overline{P(t)}$	$\overline{\dot{P}(t)} = \overline{P(t)} T$

T es la matriz estocástica de tasas de transición entre estados.

Generalizando para n estados:

$$\overline{\dot{P}(t)} = \overline{P(t)} T \quad \text{ó} \quad \overline{\dot{P}(t)}^t = T^t \overline{P(t)}^t$$

Donde:

$\overline{P(t)}$: Es el vector fila de las probabilidades de cada uno de los estados como función del tiempo

$\overline{\dot{P}(t)}$: Es el vector fila de las derivadas con respecto al tiempo de las probabilidades de cada uno de los estados como función del tiempo

T : Es la matriz estocástica de tasas de transición entre estados. Es el generador infinitesimal de la cadena. Sus términos se definen como:

$$T = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1n}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1}(t) & h_{n2}(t) & \cdots & h_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$h_{ii}(t)$: Es el negativo de la sumatoria de todas las tasas de transición que salen del estado i

$h_{ij}(t)$: Es la tasa de transición que sale del estado i al estado j

Las filas de la matriz T deben sumar 0.0.

T no necesariamente es simétrica ya que $h_{ij}(t)$ no tiene que ser igual a $h_{ji}(t)$.

La solución del sistema de este sistema de ecuaciones diferenciales entrega las probabilidades de cada estado en función del tiempo. Para los casos en que existe solución al sistema de ecuaciones diferenciales (existe estabilidad), la solución tiene las siguientes partes:

1	Parte transitoria	Se utiliza en estudios de de corto plazo. Por ejemplo despacho de generación hora a hora.
2	Parte de estado estable	Se utiliza en estudios de de mediano y largo plazo.

Cuando se utiliza simulación de Montecarlo para resolver este tipo de procesos, solo se obtienen las probabilidades de encontrar cada uno de los estados discretos del proceso en el estado estable, es decir, se pierde el periodo transitorio.

7.3.3 Cómo aplicar este modelo a un problema real

1	Definir los estados discretos con los cuales se pueden representar las características de interés del fenómeno aleatorio bajo estudio
2	<p>Para cada uno de los tiempos de transición entre estados analizar la tendencia. Dos casos pueden aparecer:</p> <ul style="list-style-type: none"> • No hay tendencia: En este caso la tasa de transición es constante. Se procede a obtener la distribución de probabilidad de los tiempos de transición. • Si hay tendencia: En este caso la tasa de transición es variable con el tiempo. Se procede a obtener la función que representa la tasa de transición, por ejemplo, aplicando el método de mínimos cuadrados.

Una práctica muy difundida en el modelamiento con cadenas de Markov continuas en el tiempo ha sido el analizar primero si la tasa de transición entre dos estados es constante y si esto se cumple, asumir que el tiempo de transición entre estados está distribuido exponencialmente lo cual no es necesariamente cierto porque si el tiempo de transición entre estados es estacionario, la tasa de transición será constante independientemente de la distribución que modela al tiempo de transición entre estados. Así:

El que la tasa de transición entre dos estados sea constante no es suficiente argumento para afirmar que el tiempo de transición entre estos dos estados está distribuido exponencialmente.

La distribución del tiempo de transición entre estados se obtiene mediante el procedimiento de ajuste de datos a una distribución no de la tasa de transición entre estados!

Si el tiempo de transición entre dos estados está exponencialmente distribuido, la tasa de transición entre estos estados es constante, lo contrario no es necesariamente cierto!

7.3.4 Cómo calcular la tasa de transición entre estados

A partir de una muestra de datos tomada durante un periodo de tiempo T , la tasa de transición entre estados o “tasa de eventos” se define en forma estadística como:

Tasa de transición entre estados	
<p>La tasa de transición h_{ij} es el número de transiciones n_t del estado i al estado j en un periodo de tiempo T, por unidad de tiempo en que el sistema estuvo en el estado i</p>	
$h_{ij} = n_t / \sum_{k=1}^{n_t} (t_{ij})_k$	
<p>Donde $\sum_{k=1}^{n_t} (t_{ij})_k$ es igual a la sumatoria de los tiempos de salida desde el estado i.</p>	

Para verificar si la tasa de eventos es constante durante el periodo de tiempo T de los registros se hace una gráfica dividiendo el periodo de tiempo de los registros en sub-periodos para los cuales se determina el número de eventos. Ver los ejemplos de la Figura 7.10.

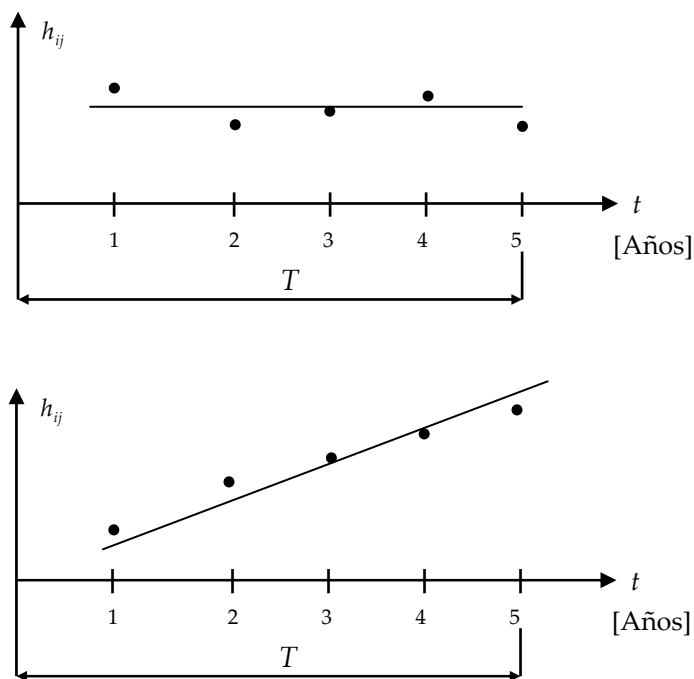


Figura 7.10 Gráficas de la tasa de eventos con respecto al tiempo

7.4 CADENA DE MARKOV HOMOGENEA EXPONENCIAL

7.4.1 Planteamiento matemático de la cadena homogénea exponencial

En este modelo todos los tiempos de transición entre estados están distribuidos exponencialmente, por lo cual, todas las tasas de transición entre estados son constantes ya que los tiempos de transición entre estados son estacionarios e independientes. Así, T es una matriz de coeficientes constantes:

$$T = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

El modelo matemático $\dot{\overline{P}}(t) = \overline{P}(t) T$ corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales de coeficientes constantes cuya solución es independiente de las condiciones iniciales.

7.4.2 Solución de una cadena de Markov homogénea exponencial

Dos métodos de solución analítica para el sistema de ecuaciones diferenciales del proceso de Markov continuo en el tiempo son:

1	$\overline{P}(t)^t = e^{T^t * t} \overline{P}(0)^t$
---	---

Donde $P(0)$ es el vector columna de las condiciones iniciales, expresadas en términos de probabilidades.

2	$\overline{P}(t)^t = \sum_{i=1}^n c_i * \overline{v}_i * e^{\lambda_i * t}$
---	---

Donde:

λ_i : Es el valor propio i de la matriz T . Recordar que T^t tiene los mismos valores propios de T .

\overline{v}_i : Es el vector propio columna asociado con el valor propio i que es calculado a partir de T^t .
Recordar que los vectores propios no son únicos.

c_i : Es una constante a ser determinada por medio de las condiciones iniciales

Otros métodos de solución de este sistema de ecuaciones diferenciales se pueden consultar en textos de ecuaciones diferenciales, teoría de control y métodos numéricos.

7.4.3 Análisis de estabilidad

Algo muy importante a determinar antes de intentar solucionar un sistema de ecuaciones diferenciales, es si el sistema descrito es “estable”, es decir, presenta respuesta amortiguada. Esto se puede conocer del análisis de los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales, T en el caso del proceso de Markov continuo [9]:

1	El sistema es <u>asintóticamente</u> estable si y solo si todos los valores propios de T están ubicados en el lado izquierdo del plano complejo.
2	El sistema es <u>marginalmente</u> estable si algunos de los valores propios de T ocurren como un solo valor en el origen del plano complejo o como parejas de valores simples en el eje imaginario y el resto de valores propios están ubicados en el lado izquierdo del plano complejo.
3	El sistema es <u>inestable</u> si uno o más valores propios de T ocurren en el lado derecho del plano complejo o si valores múltiples o pares de los valores ocurren en un punto del eje imaginario.

Para una cadena de Markov homogénea exponencial se tiene que [1]:

Uno de los valores propios de la matriz T es cero y todos los otros valores propios tienen parte real negativa.

Es decir, este proceso es marginalmente estable.

Otros criterios de estabilidad se pueden consultar en textos de ecuaciones diferenciales o de teoría de control. En términos generales, la estabilidad está dada, antes de todo, por una correcta representación del fenómeno aleatorio bajo estudio en términos de un correcto diagrama de transición de estados.

7.4.4 Analogía con la representación en variables de estado

La descripción matemática de la cadena de Markov homogénea exponencial es análoga a la representación matemática de un sistema dinámico determinístico por variables de estado:

$$\overline{\dot{P}(t)} = T^t \overline{P(t)} \quad \rightarrow \quad \overline{\dot{x}(t)} = A \overline{x(t)}$$

Donde:

$\overline{x(t)}$: En teoría de control, es el vector de las variables de estado

A : En teoría de control, se denomina matriz de estado

En la teoría de control se definen para un sistema dinámico determinístico [10]:

Estado	Es el conjunto más pequeño de variables, denominadas variables de estado, tales que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$ determinan completamente el comportamiento del sistema para $t \geq t_0$
Variante de estado	Son las variables que constituyen el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema. Este conjunto no es único. Las variables de estado no tienen que ser necesariamente cantidades físicas medibles u observables.

Entonces, las probabilidades de ocurrencia de cada estado discreto de un proceso de Markov continuo en el tiempo se pueden considerar las “variables de estado” que permiten predecir el comportamiento futuro del sistema, dado que se conoce su estado inicial.

Lo anterior contrasta con el hecho de que para un sistema dinámico determinístico, las variables de estado determinan completamente el comportamiento futuro del sistema, dado que se conoce su estado inicial.

EJEMPLO 7.2

Para un transformador de potencia 220/115 kV, 80/100 MVA, ONAN/ONAF se definen los siguientes estados operativos:

Estado	Descripción	Capacidad en MVA
1	Equipo sin falla	100
2	Falla del sistema de aire forzado (ventiladores)	80
3	Fallas que implican la desconexión del equipo	0

Se tiene la siguiente información operativa:

1	El tiempo promedio para que se produzca una falla del sistema de aire forzado es 3 meses.
2	El tiempo promedio para reparar una falla del sistema de aire forzado es 5 días
3	El tiempo promedio para que se produzca una falla que implique la salida total del equipo es 6 meses.
4	El tiempo promedio para reparar una falla que implica la salida total del equipo es de 20 días.

- Convertir los tiempos promedios para transición de estados a las mismas unidades

$\bar{t}_{12} = 3 / 12 = 0.25$	[años]
$\bar{t}_{13} = 6 / 12 = 0.50$	[años]
$\bar{t}_{21} = 5 / 365 = 0.0137$	[años]
$\bar{t}_{31} = 20 / 365 = 0.0548$	[años]

- Diagrama de transición de estados

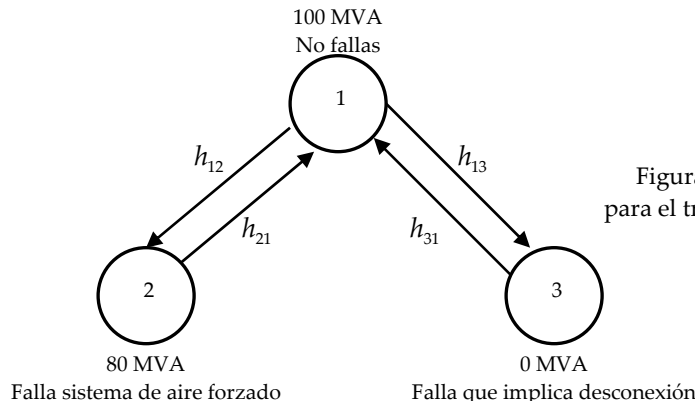


Figura 7.11 Diagrama de transición de estados para el transformador de potencia del Ejemplo 7.2

- Tasas de transición entre estados: En la distribución exponencial, la tasa de fallas es el inverso del valor esperado del tiempo para falla:

$$E(t_{ij}) = 1/h_{ij} \rightarrow \hat{h}_{ij} = 1/\bar{t}_{ij}$$

Es decir, las tasas de transición entre estados se van a estimar a partir del promedio estadístico del tiempo de transición entre estados.

Tasa de transición	Descripción	Valor
h_{12}	Es la tasa de fallas del sistema de aire forzado	$\lambda_{12} = 4$ [fallas/año]
h_{21}	Es la tasa de reparación del sistema de aire forzado	$\mu_{21} = 73$ [reparaciones/año]
h_{13}	Es la tasa de fallas que implican desconexión del equipo	$\lambda_{13} = 2$ [fallas/año]
h_{31}	Es la tasa de reparación del las fallas que implican desconexión del equipo	$\mu_{31} = 18.25$ [reparaciones/año]

- Matriz de tasas de transición entre estados

$$T = \begin{pmatrix} -6.00 & +4.00 & +2.00 \\ +73.00 & -73.00 & 0.00 \\ +18.25 & 0.00 & -18.25 \end{pmatrix}$$

- Valores propios y vectores propios de T^t

$$\lambda_1 = -77.1406$$

$$\lambda_2 = 0.0$$

$$\lambda_3 = -20.1094$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} +0.7190 \\ -0.6946 \\ -0.0244 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -0.9926 \\ -0.0544 \\ -0.1088 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -0.6800 \\ -0.0514 \\ +0.7314 \end{pmatrix}$$

Como se observa, uno de los valores propios es cero y los otros dos tienen parte real negativa. El proceso estocástico que describe la confiabilidad del transformador de potencia es marginalmente estable.

- Asumiendo que el sistema comienza la operación en el estado 1 (sin fallas):

$$P(0) = (1.0 \quad 0.0 \quad 0.0)$$

La solución es del sistema de ecuaciones diferenciales se obtiene mediante el siguiente procedimiento:

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = c_1 * \begin{pmatrix} +0.7190 \\ -0.6946 \\ -0.0244 \end{pmatrix} * e^{-77.1406*t} + c_2 * \begin{pmatrix} -0.9926 \\ -0.0544 \\ -0.1088 \end{pmatrix} * e^{-0.0*t} + c_3 * \begin{pmatrix} -0.6800 \\ -0.0514 \\ +0.7314 \end{pmatrix} * e^{-20.1094*t}$$

Evaluando en $t=0$ y reemplazando las condiciones iniciales, se hallan el sistema de ecuaciones algebraicas para determinar los c_i :

$$\begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = c_1 * \begin{pmatrix} +0.7190 \\ -0.6946 \\ -0.0244 \end{pmatrix} + c_2 * \begin{pmatrix} -0.9926 \\ -0.0544 \\ -0.1088 \end{pmatrix} + c_3 * \begin{pmatrix} -0.6800 \\ -0.0514 \\ +0.7314 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +0.7190 & -0.9926 & -0.6800 \\ -0.6946 & -0.0544 & -0.0514 \\ -0.0244 & -0.1088 & +0.7314 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Los c_i se hallan de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.7190 & -0.9926 & -0.6800 \\ -0.6946 & -0.0544 & -0.0514 \\ -0.0244 & -0.1088 & +0.7314 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.0771 \\ -0.8652 \\ -0.1261 \end{pmatrix}$$

Reemplazando los valores de c_i en las ecuaciones de $P(t)$:

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = 0.0771 * \begin{pmatrix} +0.7190 \\ -0.6946 \\ -0.0244 \end{pmatrix} * e^{-77.1406*t} - 0.8652 * \begin{pmatrix} -0.9926 \\ -0.0544 \\ -0.1088 \end{pmatrix} * e^{-0.0*t} - 0.1261 * \begin{pmatrix} -0.6800 \\ -0.0514 \\ +0.7314 \end{pmatrix} * e^{-20.1094*t}$$

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.0554 \\ -0.0535 \\ -0.0019 \end{pmatrix} * e^{-77.1406*t} + \begin{pmatrix} 0.8588 \\ 0.0471 \\ 0.0941 \end{pmatrix} * e^{-0.0*t} + \begin{pmatrix} +0.0858 \\ +0.0065 \\ -0.0922 \end{pmatrix} * e^{-20.1094*t}$$

$$\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.0554 & +0.8588 & +0.0858 \\ -0.0535 & +0.0471 & +0.0065 \\ -0.0019 & +0.0941 & -0.0922 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-77.1406*t} \\ e^{-0.0*t} \\ e^{-20.1094*t} \end{pmatrix}$$

$$P_1(t) = +0.0554e^{-77.1406*t} + 0.8588e^{-0.0*t} + 0.0858e^{-20.1094*t} = 0.8588 + 0.0554e^{-77.1406*t} + 0.0858e^{-20.1094*t}$$

$$P_2(t) = -0.0535e^{-77.1406*t} + 0.0471e^{-0.0*t} + 0.0065e^{-20.1094*t} = 0.0471 - 0.0535e^{-77.1406*t} + 0.0065e^{-20.1094*t}$$

$$P_3(t) = -0.0019e^{-77.1406*t} + 0.0941e^{-0.0*t} - 0.0922e^{-20.1094*t} = 0.0941 - 0.0019e^{-77.1406*t} - 0.0922e^{-20.1094*t}$$

En estas ecuaciones se observa que:

- En cualquier instante de tiempo la suma de las tres probabilidades es 1.0.
- Las tres ecuaciones constan de un término constante y un término transitorio que decrece con el tiempo. Los términos constantes son las probabilidades de estado estable.

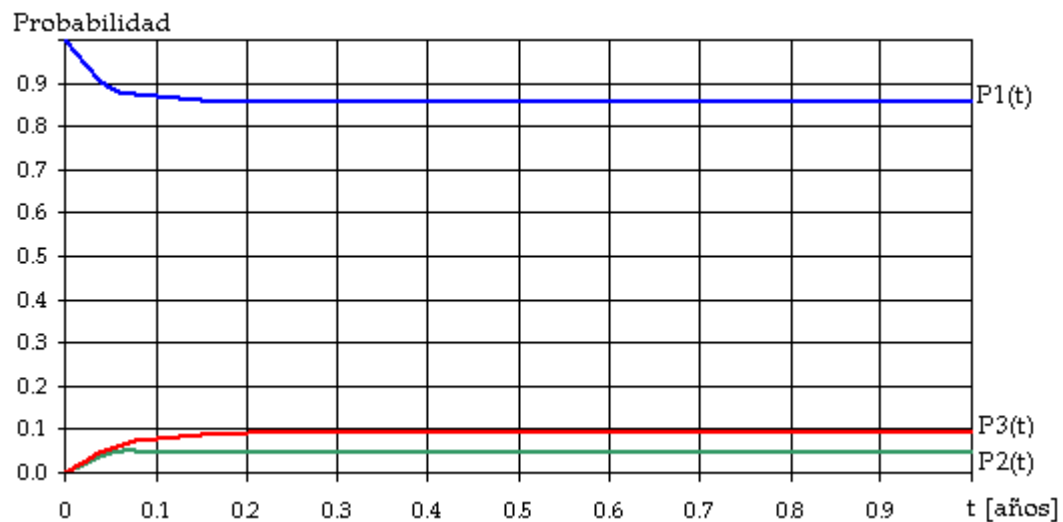


Figura 7.11 Solución del Ejemplo 7.2

- $P_1(\infty) = 0.8588$. El primer estado (Transformador sin fallas) es el que tiene mayor probabilidad de ser encontrado en cualquier instante de tiempo. Esto corresponde a lo deseado para cualquier equipo.
- La indisponibilidad del transformador es igual a $P_3(\infty) = 0.0941$

7.5 FRECUENCIA Y DURACION

En el estado estable de una cadena de Markov homogénea se pueden obtener:

La frecuencia de ocurrencia de un estado i	<p>Es la probabilidad de ocurrencia del estado i por la sumatoria de las tasas de salida desde ese estado.</p> $f_i = P_i(\infty) * \sum_{j \neq i}^n h_{ij}$ <p>También se puede calcular como la probabilidad de NO encontrar el estado i por la sumatoria de las tasas de entrada a ese estado.</p>
La duración media en un estado i (sojourning time)	<p>El tiempo medio gastado en un estado i o duración media en este estado es el inverso de sumatoria de las tasas de salida desde ese estado.</p> $m_i = 1 / \sum_{j \neq i}^n h_{ij}$

Además, se cumple que $\sum_{i=1}^n f_i * m_i = \Delta t$

Donde Δt es el tiempo de referencia del estudio o la unidad que se mide el tiempo.

Para hallar la frecuencia de ocurrencia de un estado acumulado o la duración media en este estado acumulado, solo se toman en cuenta los estados que se comunican a través de la frontera de acumulación.

EJEMPLO 7.3

Para el transformador de potencia del Ejemplo 7.2 hallar la frecuencia y duración de cada estado.

Estado i	$P_i(\infty)$	f_i [Veces/año]	m_i [Días]
1	0.8588	$f_1 = 0.8588 * (4 + 2) = 5.1529$	$m_1 = 1 / (4 + 2) * 365 = 60.8333$
2	0.0471	$f_2 = 0.0471 * 73 = 3.4353$	$m_2 = 1 / 73 * 365 = 5.0$
3	0.0941	$f_3 = 0.0941 * 18.25 = 1.7176$	$m_3 = 1 / 18.25 * 365 = 20.0$

La probabilidad de que el transformador se encuentre disponible para operar a su máxima capacidad nominal (100 MVA) es de 85.88%. Esta condición operativa se da 5.1529 veces por año y tiene una duración media de 60.8333 días.

La probabilidad de que el transformador solo se encuentre disponible para operar a una capacidad máxima de 80 MVA es de 4.71%. Esta condición operativa se da 3.4353 veces por año y tiene una duración media de 5 días (El mismo tiempo promedio para reparación de daños del sistema de enfriamiento).

La probabilidad de que el transformador no se encuentre disponible para operar es de 9.41%. Esta condición operativa se da 1.7176 veces por año y tiene una duración media de 20 días (El mismo tiempo promedio para reparación de daños que implican la desconexión del equipo).
Obsérvese que:

$$m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3 = 5.1529 * 60.8333 + 3.4353 * 5 + 1.7176 * 20 = 365 \text{ [días]}$$

Es decir, un año que corresponde al tiempo de referencia del estudio ó a la referencia para la medida de las unidades de tiempo.

7.6 TIEMPO MEDIO PARA ENTRAR EN UN ESTADO ABSORBENTE

Para procesos aleatorios que tienen estados absorbentes, se puede determinar el tiempo medio o esperado para entrar en dicho estado absorbente.

El procedimiento es [6]:

Cómo hallar el tiempo medio para entrar en un estado
1. Se calcula la matriz $A = [T + I]$. I es una matriz idéntica de dimensión $n * n$
2. Hallar Q , la matriz que resulta de eliminar en A la fila y la columna que corresponden al estado absorbente.
3. Hallar $N = [I - Q]^{-1}$. Las fila de N corresponden al estado en que se inició el proceso. I es en este caso, una matriz idéntica de dimensión $(n-1) * (n-1)$
4. El tiempo medio para entrar en el estado absorbente MTTAS (Mean Time to Absorbing Time) dado que el proceso comenzó en el estado i es la suma de los términos de la fila i de la matriz N .

Este procedimiento sirve para encontrar el tiempo medio para entrar a un estado dado, si el estado de interés se asume como un estado absorbente.

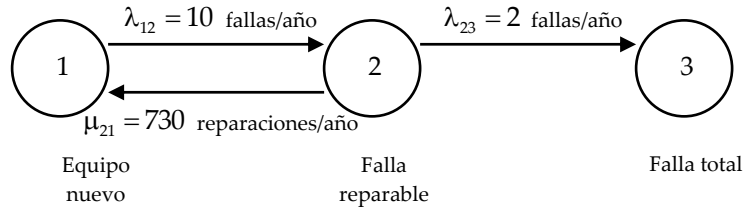
EJEMPLO 7.4

Figura 7.12 Diagrama de estados de un componente con un estado absorbente

- Matriz de tasas de transición entre estados

$$T = \begin{pmatrix} -10.0 & +10.0 & 0.0 \\ +730 & -732 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

- Procedimiento para hallar el tiempo medio para entrar en el estado absorbente dado que el componente inicia el proceso en el estado 1:

$$\text{Paso 1: } A = T + I = \begin{pmatrix} -10.0 & +10.0 & 0.0 \\ +730 & -732 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 10 & 0.0 \\ 730 & -731 & 2 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Paso 2: } Q = \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ 730 & -731 \end{pmatrix}$$

$$\text{Paso 3: } [I - Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ 730 & -731 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -730 & 732 \end{pmatrix}$$

$$N = [I - Q]^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -730 & 732 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 36.6 & 0.5 \\ 36.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Paso 4: } MTTAS = N_{11} + N_{12} = 36.6 + 0.5 = 37.10 \text{ años}$$

- Nótese que en este ejemplo $m_3 = 1/0 = \infty$, la duración media en este estado, una vez se entra en él es infinita.

7.7 CADENA DE MARKOV HOMOGENEA GENERAL

7.7.1 Descripción

En este caso, todos los tiempos de transición entre estados son estacionarios pero no todos están exponencialmente distribuidos.

Esta condición hace que, aunque todas las tasas de transición entre estados sean constantes, no se pueda aplicar como modelo el sistema de ecuaciones $\overline{\dot{P}}(t) = \overline{P}(t) T$, lo cual surge del hecho de que la distribución exponencial es la única para la cual se cumple para cualquier intervalo dt (no necesariamente infinitesimal):

$$\text{Probabilidad de ocurrencia de un evento en } t = \text{Probabilidad de ocurrencia de un evento en } (t + dt)$$

Que es la propiedad de no memoria de la distribución exponencial.

Así, para resolver el modelo homogéneo general se pueden aplicar las siguientes técnicas:

1	El mecanismo de la etapas (Device of stages)
2	Adición de variables
3	Simulación de Montecarlo secuencial

El mecanismo de las etapas consiste en convertir una cadena donde todos los tiempos de transición entre estados no están distribuidos exponencialmente en una cadena que si cumple esta condición pero que tiene más estados que la cadena original. Para diversas combinaciones de distribuciones de probabilidad, los investigadores han desarrollado las cadenas exponenciales equivalentes. Ver el ejemplo mostrado en la figura 7.13 donde los términos ρ y ω son constantes que se calculan de acuerdo con las características de las distribuciones de la cadena original

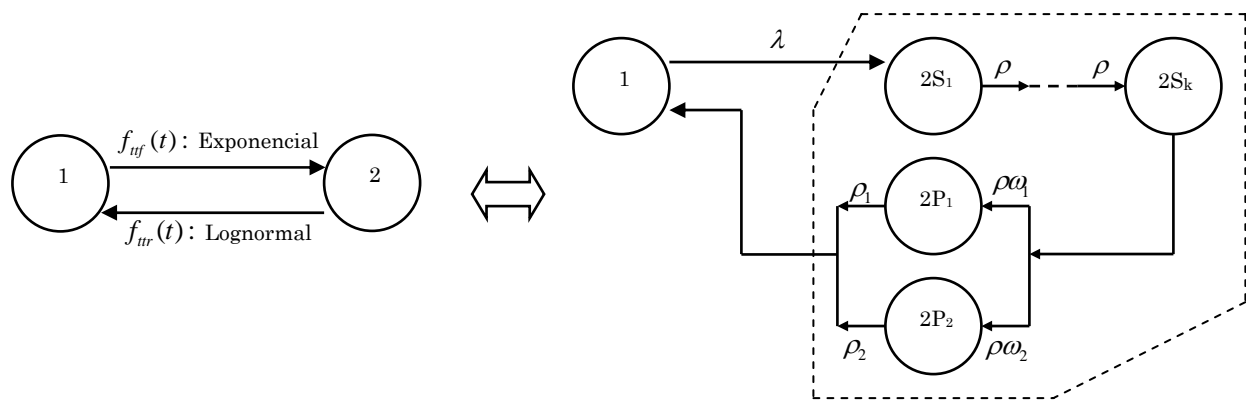


Figura 7.13 Cadena de Markov no exponencial y su equivalente exponencial

El método de mecanismo de las etapas tiene la ventaja de que permite hallar la solución transitoria y de estado estable de las probabilidades de los estados. Pero como desventaja se tiene que el sistema de ecuaciones diferenciales resultante es de dimensión mayor que el del modelo original, lo cual puede ser una limitante en aplicaciones reales donde hay una gran cantidad de estados.

El método de simulación de Montecarlo tiene como ventaja el que permite obtener las probabilidades de estado estable para cadenas homogéneas con cualquier tipo de distribución de probabilidad. Como desventaja tiene que no permite resolver el estado transitorio lo cual se requiere para algunas aplicaciones y el largo tiempo computacional requerido en aquellas aplicaciones donde las magnitudes de las tasas de transición entre estados son muy bajas.

7.7.2 Algoritmo de simulación de Montecarlo secuencial

Definiendo:

t : Tiempo de la simulación que corresponde al tiempo operativo del proceso

t_i : Tiempo en que el proceso está en el estado i

n_i : Número de veces que el proceso entra al estado i

Al iniciar la simulación:

$$t = 0$$

$$t_i = 0 \quad \forall i$$

$$n_i = 0 \quad \forall i$$

Los pasos de la simulación son:

1. Ubíquese en el estado k donde inicia el proceso y súmele 1 al contador n_k (súmele 1)
2. Para los estados a los cuales hay conexión desde el estado actual genere un tiempo de transición entre estados utilizando las correspondientes distribuciones de probabilidad.
3. Seleccione el menor tiempo de transición del estado actual a los estados a los cuales existe conexión.

El proceso pasa al estado j para el cual hay el menor tiempo de transición t_{kj} . Súmele 1 al contador n_j

Cuente una transición entre estados; esta transición corresponde a una iteración de la simulación.

4. Súmele t_{kj} al tiempo de la simulación (t) y al contador de tiempo del estado k (t_k)

5. Ubíquese en el estado j para el cual se hizo la transición y vuelva al paso 2

6. Repetir hasta un número pre-especificado de iteraciones u otro criterio de parada

7. Calcule las salidas de la simulación:

Probabilidad de encontrar el estado k	$P_k = t_k / t$
Tasa de salidas desde el estado k	$\lambda_k = n_k / t_k$
Frecuencia de encontrar el estado k	$f_k = \lambda_k * p_k$
Tiempo medio en el estado k	$m_k = 1 / \lambda_k$

Con este método solo se obtienen las probabilidades de estado estable del proceso.

No debe confundirse el estado transitorio de la simulación (estados en los cuales la muestra de datos no se ha estabilizado en una distribución) con el estado transitorio de la solución en el tiempo del proceso.

EJEMPLO 7.5

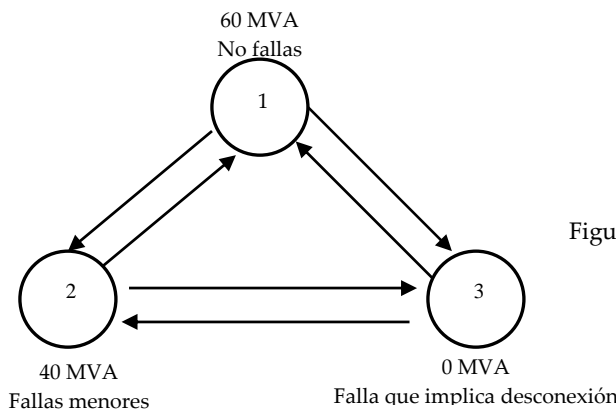


Figura 7.14 Diagrama de transición de estados para una unidad de generación

Una unidad de generación hidráulica tiene los siguientes estados operativos:

Estado	Descripción	Capacidad en MVA
1	Equipo sin falla	60
2	Fallas menores en turbina, generador e instalaciones hidráulicas	40
3	Fallas que implican la desconexión del equipo	0

Las distribuciones de probabilidad que definen el proceso estocástico son:

Distribución de Probabilidad	
t_{12}	Gamma con parámetros $\alpha = 1.5$ y $\beta = 0.0548$ años (20 días), $E(t_{12}) = 30$ días
t_{13}	Gamma con parámetros $\alpha = 2.5$ y $\beta = 0.1315$ años (48 días), $E(t_{13}) = 120$ días
t_{21}	Gamma con parámetros $\alpha = 0.8$ y $\beta = 0.0103$ años (90 horas), $E(t_{21}) = 3$ días
t_{23}	Gamma con parámetros $\alpha = 2.5$ y $\beta = 0.1315$ años (48 días), $E(t_{13}) = 120$ días
t_{31}	Gamma con parámetros $\alpha = 0.7$ y $\beta = 0.0274$ años (240 horas), $E(t_{23}) = 7$ días
t_{32}	Gamma con parámetros $\alpha = 0.8$ y $\beta = 0.0068$ años (60 horas), $E(t_{21}) = 2$ días

Hallar las probabilidades de estado estable de cada uno de los estados, las tasas de salida desde cada uno de los estados, el tiempo medio gastado en cada estado y la frecuencia esperada de encontrar cada uno de los estados.

Resultados con 1'000,000 de iteraciones				
Estado	P_k	λ_k [eventos/año]	f_k [veces/año]	m_k [años]
1	0.9017	13.0439	11.7623	0.0767
2	0.0945	121.7060	11.4963	0.0986
3	0.0038	265.1824	1.0071	0.0038

Tarea
<i>Ejecute en Matlab el programa mcs75.m para varios números de iteraciones y cambiando la instrucción de re-inicio de la generación de los números aleatorios.</i>

7.8 CADENAS DE MARKOV NO HOMOGENEAS

7.8.1 Descripción

En este modelo algunas o todas las tasas de transición entre estados son funciones del tiempo, lo cual hace que el proceso sea no estacionario y que los tiempos de transición entre estados no puedan modelarse mediante distribuciones de probabilidad. Así, en este caso T es una matriz con coeficientes variables:

$$T = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1n}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1}(t) & h_{n2}(t) & \cdots & h_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

El modelo matemático $\dot{\overline{P}}(t) = \overline{P}(t) T$ corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, el cual puede solucionarse:

1	Analíticamente
2	Numéricamente

Solo es posible hallar soluciones analíticas para ciertas formas de las funciones matemáticas utilizadas para las tasas de transición entre eventos. El método de solución a aplicar depende entonces de la forma de estas funciones. Otra limitación con este tipo de proceso es que no hay un método analítico general para analizar la estabilidad matemática de la solución. Así lo recomendado en este texto es utilizar métodos numéricos para ecuaciones diferenciales como Runge-Kutta.

7.8.2 Tiempo global y local

Otro aspecto importante a analizar al aplicar este modelamiento es si las tasas de transición entre estados varían con el tiempo global o con un tiempo local, ya que el modelo $\dot{\overline{P}}(t) = \overline{P}(t) T$ considera que es en forma global.

Para explicar este concepto, considere el componente reparable con dos estados operativos mostrado en la Figura 7.15, donde $\lambda(t)$ y $\mu(t)$ son respectivamente la tasa de fallas y la tasa de reparaciones.

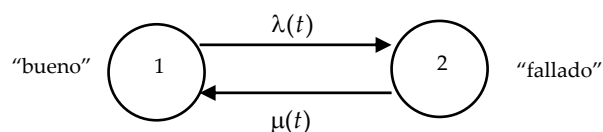


Figura 7.15 Componente reparable con dos estados operativos

Para este tipo de componente puede argumentarse lo siguiente:

1	La tasa de fallas del componente se incrementa con su uso, así, ésta es función del tiempo de operación del componente. En este caso, λ sería función de un tiempo local τ_f no del tiempo global t de observación del proceso el cual es la suma de los tiempos de falla y reparación.
2	La tasa de reparaciones del componente depende de factores propios del proceso de reparación: la carga de trabajo de los operarios, la pérdida de rendimiento de los operarios debido al envejecimiento, la falta de incentivos laborales, etc. En este caso, $\mu(t)$ sería función de un tiempo local τ_r no del tiempo global t de observación del proceso el cual es la suma de los tiempos de falla y reparación.

Así, si las tasas de transición varían con un tiempo local y no con el tiempo global, al aplicar el modelamiento $\overline{\dot{P}(t)} = \overline{P(t)} T$ se obtiene una predicción sobre-estimada de las probabilidades de ocurrencia de los estados del proceso.

EJEMPLO 7.6

El comité local de emergencias de una ciudad representa el estado de la ciudad mediante el diagrama mostrado en la Figura 7.16.

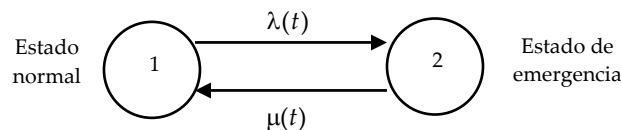


Figura 7.16 Estados operativos en una ciudad

El estado de emergencia incluye aquellas situaciones de alteración del orden público, terremotos, inundaciones, huracanes o brotes epidémicos. La tasa de llegada de estos eventos es $\lambda(t)$ la cual se denomina tasa de problemas.

La tasa de restauraciones al estado normal es $\mu(t)$ representa la actividad de los organismos de seguridad, bomberos, defensa civil, paramédicos, médicos, empresas prestadoras de servicios públicos, etc.

Ambas tasas de transición se pueden representar mediante un modelo $h(t) = \lambda \beta t^{\beta-1}$ en el cual λ es el factor de escala y β el factor de forma. La tasa de transición $h(t)$ será creciente si $\beta > 1$, decreciente si $\beta < 1$ y constante si $\beta = 1$.

1. De los registros de años anteriores, se observa que la tasa de problemas ha ido incrementándose y puede representarse con un modelo donde $\lambda_p = 6$ [problemas/año] y $\beta_p = 1.5$. Sin embargo, el gobernante de la ciudad insiste en que los recursos para restaurar se mantengan constantes.

Con los recursos actuales para restaurar, el tiempo promedio para volver la ciudad al estado normal es de 60 horas (2.5 días), por lo cual, la tasa de restauraciones se modela con $\lambda_r = 8760 / 60 = 146$ [restauraciones/año] y $\beta_r = 1.0$.

El modelo matemático del sistema es:

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & u(t) \\ \lambda(t) & -u(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\lambda(t) = \lambda_p \beta_p t^{\beta_p - 1} = 6 * 1.5 * t^{1.5-1} = 6 * 1.5 * t^{0.5} = 9t^{0.5}$$

$$\mu(t) = \lambda_r \beta_r t^{\beta_r - 1} = 146 * 1.0 * t^{1.0-1} = 146t^0 = 146$$

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9t^{0.5} & 146 \\ 9t^{0.5} & -146 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

La solución numérica (Método Runge-Kutta) para diez años es:

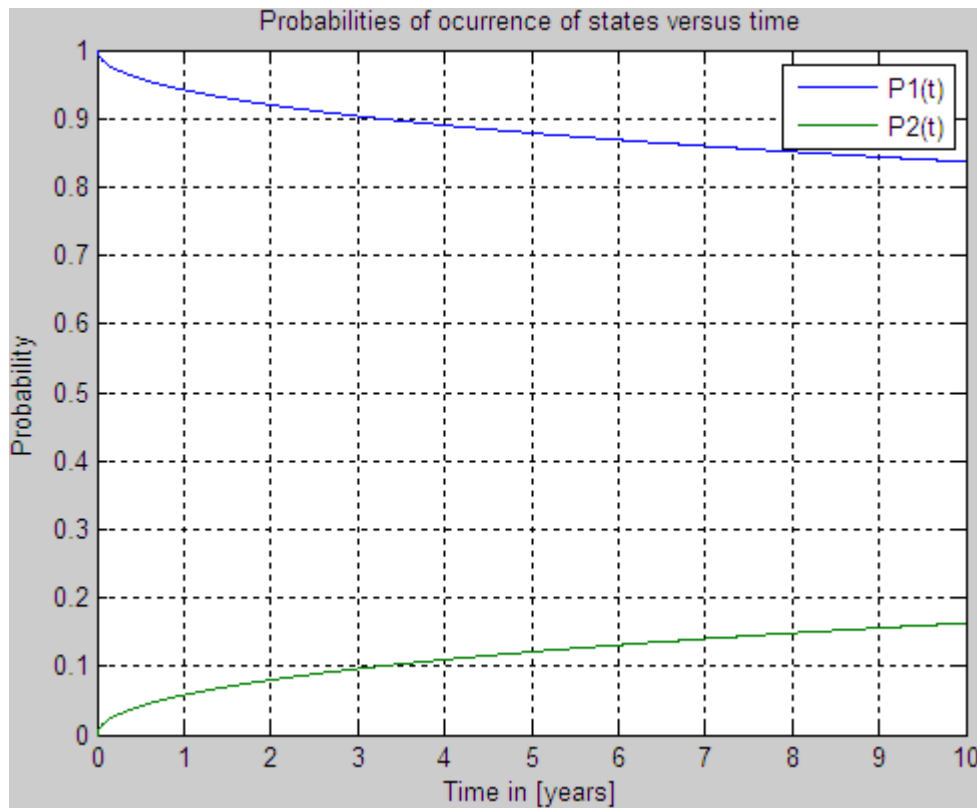


Figura 7.17 Resultados para el problema 7.6 con tasa de reparaciones constante

Como se observa en la Figura 7.17, si los problemas aumentan con el tiempo y los recursos para restaurar se mantienen constantes, la probabilidad de que la ciudad esté en el estado de emergencia crece a un valor muy alto (18%).

2. Considere ahora que los recursos para restaurar se incrementan para seguirle el paso a al proceso creciente de llegadas de problemas. La tasa de restauraciones se modela en este caso con $\lambda_r = 146$ [restauraciones/año] y $\beta_r = 1.5$.

La solución numérica (Método Runge-Kutta) para diez años es:

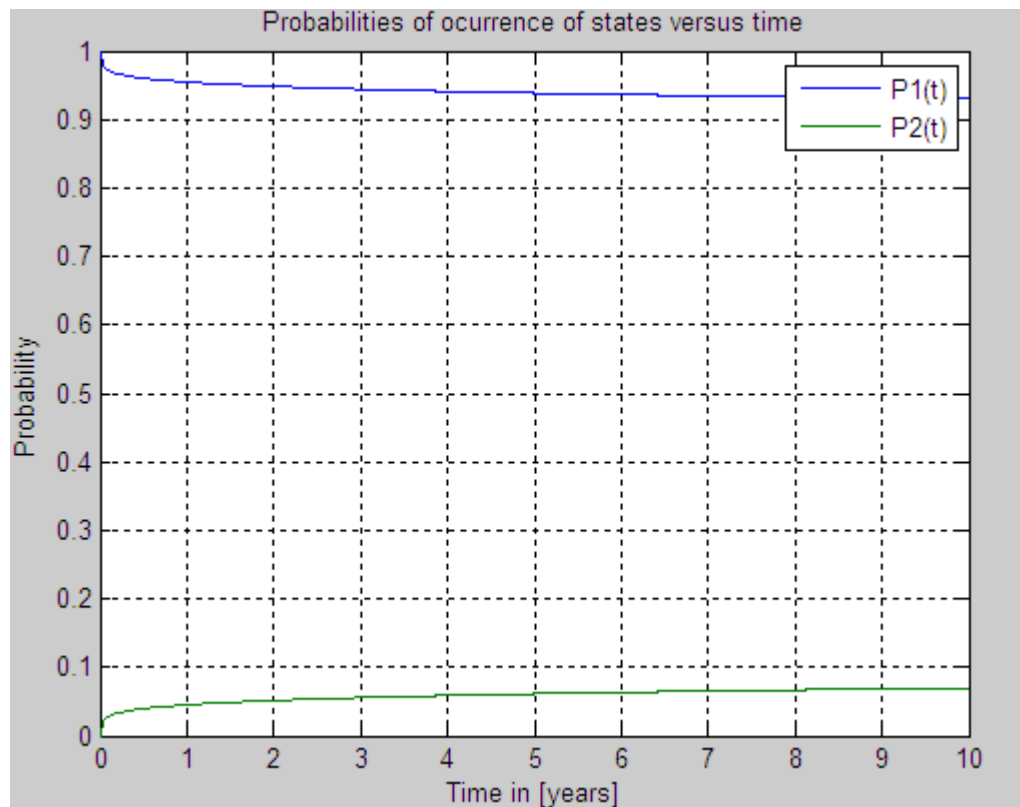


Figura 7.18 Resultados para el problema 7.6 con tasa de reparaciones creciente

Como se observa en la Figura 7.18, si los recursos para restaurar se incrementan, la probabilidad de que la ciudad esté en el estado de emergencia en 7%.

Tarea

Ejecute en Matlab el programa `nmc76.m` para varios valores de los parámetros de entrada del modelo y tiempos de observación del proceso.

7.9 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Lawyer G. F, "Introduction to Stochastic Processes", Chapman and Hall, 1995.
- [2] Papoulis Athanasios, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", tercera edición, Mc-Graw Hill, 1991.
- [3] Viniotis Yannis, "Probability and Random Processes for Electrical Engineers", Mc-Graw Hill, 1998.
- [4] Torres A, "Probabilidad, variables aleatorias, confiabilidad y procesos estocásticos en ingeniería eléctrica", Universidad de los Andes, 1996.
- [5] Law Averill M, Kelton W. David, "Simulation modeling and analysis", Tercera edición, Mc-Graw Hill, 2000.
- [6] Billinton R, Allan R. N, "Reliability evaluation of engineering systems – Concepts and Techniques", Plenum Press, 1992.
- [7] Bronson R, "Investigación de operaciones", Mc Graw Hill, 1993.
- [8] Dichirico C, Singh C, "Reliability analysis of transmission lines with common mode failures when repair times are arbitrarily distributed", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 3, No. 3, August 1988.
- [9] Rowland J. R, "Linear control systems – modeling, analysis and design", Wiley, 1986.
- [10] Ogata K, "Ingeniería de control moderna", Prentice Hall, 1993.
- [11] Singh C, Billinton R, *System Reliability Modeling and Evaluation*, Hutchinson Educational Publishers, 1977.
- [12] Hassett T. F, Dietrich D. L, Szidarovszky F, "Time-varying failure rates in the availability & reliability analysis of repairable systems", IEEE Transactions on Reliability, Vol. 44, No. 1, March, 1995.
- [13] Platis A. G, Limnios N. K, Le Du M, "Asymptotic availability of systems modeled by cyclic non-homogeneous Markov Chains", IEEE Annual Reliability and Maintainability Symposium, 1997.

CAPÍTULO 8 – PROCESOS ESTOCÁSTICOS PUNTUALES

8.1 INTRODUCCIÓN

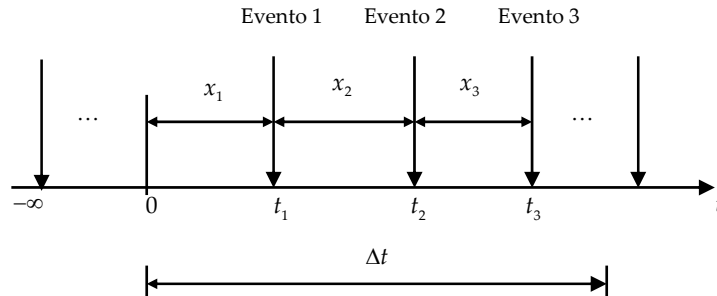


Figura 8.1 Representación de un proceso estocástico puntual

Un proceso de estocástico puntual o proceso de Poisson es un proceso aleatorio discreto en el estado y continuo en el tiempo. El espacio de estado consiste en eventos discretos que ocurren o llegan en un periodo de tiempo dado.

Como ejemplo de eventos que se representan mediante este tipo de modelo se tienen:

1	Confiabilidad	Fallas en componentes o software , reparaciones
2	Bioestadística	Eventos no fatales en un ser vivo: ataques asmáticos, epilépticos, infecciosos, etc.
3	Seguridad	Eventos catastróficos: Accidentes, atentados, incendios
4	Teoría de colas	Clientes que llegan a un sistema de atención: bancos, restaurantes, tiendas, oficinas de reclamos, counters en una terminal de pasajeros. Llamadas que llegan a un teléfono o conmutador, paquetes que llegan a una bodega para luego ser repartidos, paquetes de información que llegan o salen de un computador, etc.
5	Sismología	Terremotos, maremotos, erupciones volcánicas, tsunamis.
6	Meteorología	Llegada de tormentas, inundaciones, huracanes, granizadas, rayos

El interés en estos procesos es estudiar para un periodo dado Δt el número de eventos que llegan $N(\Delta t)$; por esta razón, estos procesos también se denominan “counting process” o “arrival process”.

Tal como se muestra en la Figura 8.1, es común asumir que el periodo de interés inicia en un tiempo cero correspondiente al instante de tiempo donde empiezan los registros operativos o datos estadísticos que documentan el proceso; en este caso $\Delta t = t - 0 = t$, y, entonces, solo aparecerá t en las ecuaciones del proceso. No debe confundirse entonces a t con un instante de tiempo.

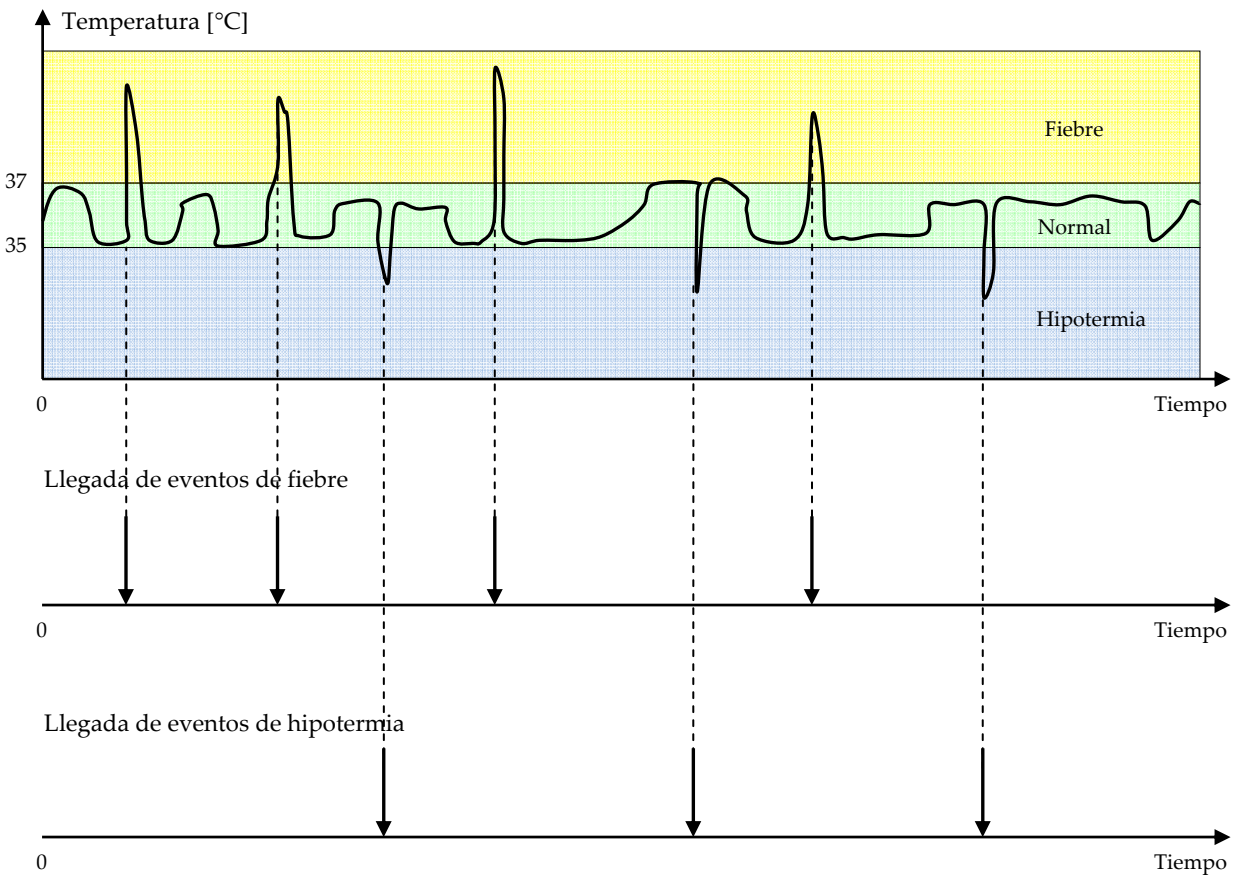


Figura 8.2 Eventos de fiebre en un ser humano y su representación como un proceso de llegada de eventos

En muchas de las aplicaciones de procesos estocásticos puntuales, el espacio de estado se refiere a la ocurrencia de un evento anormal o atípico en la magnitud de una variable aleatoria continua, tal como se muestra en el ejemplo de la Figura 8.2. En este ejemplo, lo que se modela son los eventos en que la temperatura corporal de un ser humano sube o baja de los valores que son considerados normales.

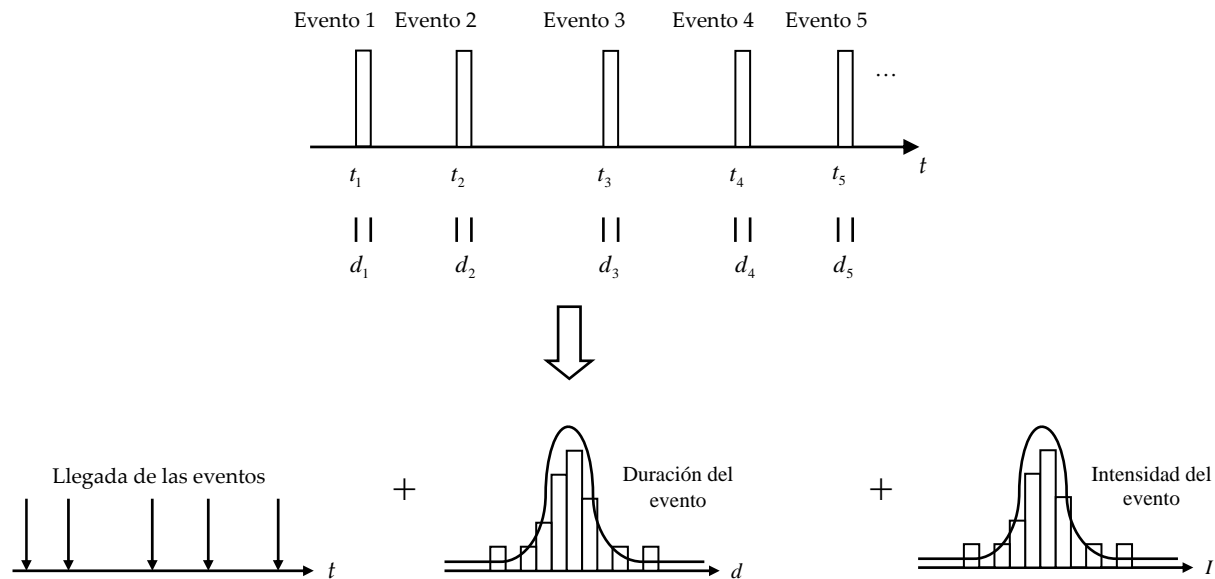


Figura 8.3. Modelamiento mediante procesos estocásticos puntuales

El modelamiento mediante procesos puntuales se puede aplicar a aquellos procesos aleatorios donde ocurren eventos en instantes (t_i) cuya duración (d_i) es muy pequeña comparada con respecto a la magnitud de los tiempos interarribo de eventos.

Cada evento puede tener asociada otra variable como magnitud o intensidad (I_i). Así, tal como se muestra en la Fig. 8.3, es usual el representar el proceso aleatorio mediante dos o más modelos matemáticos independientes: un proceso estocástico puntual para la llegada de los eventos, una distribución de probabilidad para su duración y otra(s) distribuciones para la intensidad o magnitud.

Ejemplos		
Evento que ocurre	Duración	Intensidad o magnitud asociad
Falla en un equipo	Tiempo para reparación	Valor de la reparación, usuarios afectados
Clientes que llegan a una tienda	Tiempo para compra	Valor de la compra, cantidad de artículos vendidos
Llamadas telefónicas	Duración de la llamada	Duración de la llamada
Terremotos	Duración del terremoto	Intensidad del terremoto, daños, muertos, área afectada
Inundaciones	Duración de la inundación	Área inundada, nivel de inundación, cantidad de personas afectadas, pérdidas económicas
Enfermedades	Tiempo para recuperación	Nivel de fiebre, daño producido, valor del tratamiento
Descarga atmosférica	Duración	Corriente de descarga, daño producido
Peleas con el (la) conyugue	Duración	Intensidad de la discusión, cantidad de ofensas, nivel de las ofensas
Mensajes que llegan por internet	Tiempo para almacenar	Tamaño del archivo
Dolor de cabeza	Duración	Intensidad del dolor

8.2 TENDENCIA EN PROCESOS ALEATORIOS DE LLEGADA DE EVENTOS

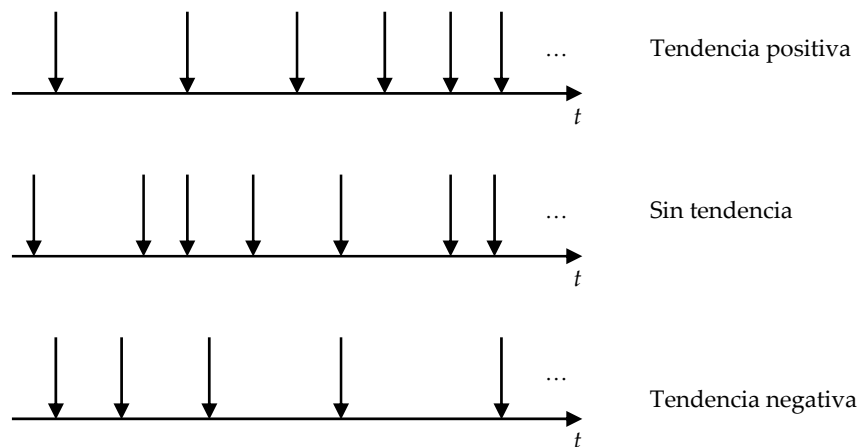


Figura 8.4 Tipos de tendencia en procesos de llegadas de eventos

La tendencia es el cambio en el tiempo del número de eventos que ocurren. Así, se define como parámetro del proceso de llegada de eventos la función de intensidad $\lambda(t)$ que corresponde a la razón de cambio en el valor esperado de eventos que ocurren. $\lambda(t)$ es la tasa de ocurrencia de eventos.

En la Figura 8.4 se muestran los tres tipos básicos de tendencia:

Positiva	El número de eventos aumenta con el tiempo, $\lambda(t)$ es creciente y los x_i disminuyen con el tiempo
Cero	El número de eventos no aumenta ni disminuye con el tiempo, $\lambda(t)$ es constante y los x_i no presentan un patrón de crecimiento o decrecimiento.
Negativa	El número de eventos disminuye con el tiempo, $\lambda(t)$ es decreciente y los x_i aumentan con el tiempo

Un proceso sin tendencia es estacionario y homogéneo; lo contrario se cumple cuando hay tendencia.

La homogeneidad se refiere a que los x_i son independientes e idénticamente distribuidos y esta distribución no cambia con el tiempo. La homogeneidad implica que los eventos que ocurren son independientes entre sí.

La tendencia permite una primera clasificación de los procesos aleatorios de llegada de eventos.

1	Procesos estacionarios: Sin tendencia, homogéneos
2	Procesos no estacionarios: Con tendencia, no homogéneos

8.3 MODELAMIENTO DE PROCESOS ALEATORIOS DE LLEGADA DE EVENTOS

8.3.1 Parámetro del modelo

El modelo matemático de estos procesos se define mediante la tasa de ocurrencia de eventos $\lambda(t)$ o función de intensidad del proceso.

$$\lambda(t) = dE[N(t)]/dt$$

8.3.2 Condiciones para aplicar este tipo de modelamiento

En un proceso estocástico puntual se cumple que:

1	Los eventos llegan uno a la vez
2	$N(t)$ es un valor entero
3	$N(0) = 0$
4	$N(t) \geq 0$
5	Si $s < t$, $N(t) - N(s)$ es igual al número de eventos que han ocurrido en el intervalo (s, t)

Cuando los eventos llegan en grupos (de personas, datos, etc.) se puede aplicar este modelamiento de simplemente definiendo que cada evento que llega corresponde a un grupo o “batch”. El tamaño del grupo (número de personas, Bytes de información, etc.) se modela mediante otra variable aleatoria independiente del proceso puntual.

8.3.3 Clasificación de los modelos para procesos estocásticos puntuales

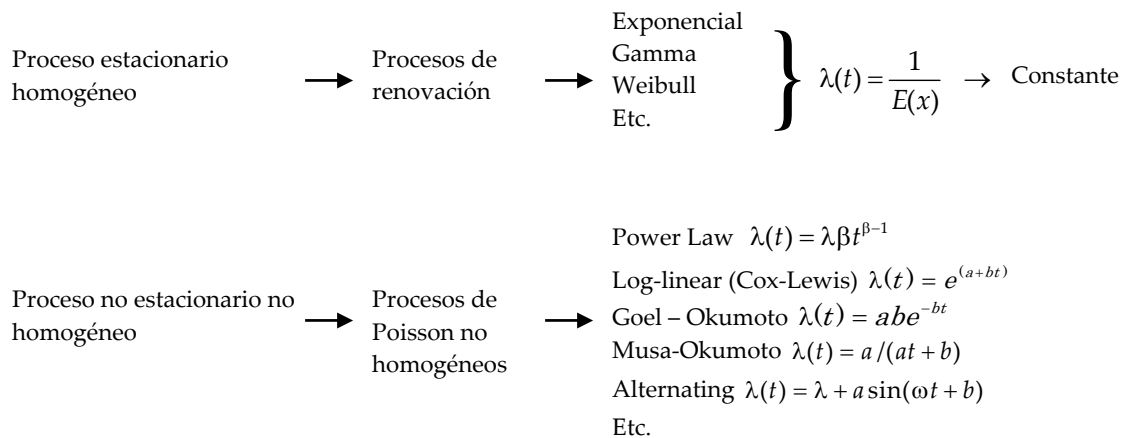


Figura 8.5 Clasificación de los procesos estocásticos puntuales ($\lambda, \beta, a, b, \omega$ son constantes)

La tendencia permite hacer una clasificación básica de los procesos estocásticos puntuales, la cual se presenta en la Figura 8.5

Los procesos homogéneos se denominan “Procesos de Renovación” (RP) seguidos del nombre de la distribución que ajusta a los x_i (Exponencial, Weibull, Gamma, etc.). El término renovación procede del área de confiabilidad donde la aplicación de este tipo de modelo implica que cada que hay una reparación (debido a una falla) el componente o sistema bajo estudio regresa al estado físico que existía antes de fallar, razón por la cual, la distribución de probabilidad de los x_i no cambia.

El proceso de renovación exponencial, conocido popularmente como Proceso de Poisson Homogéneo (HPP), es el proceso estocástico puntual más sencillo y difundido.

Para todos los procesos de renovación se cumple que la función de intensidad es igual al inverso del valor esperado de los x_i (el cual es una constante).

8.3.4 Valor esperado

$$\Lambda(t) = E[N(t)] = \int_0^t \lambda(t) dt$$

8.3.5 Varianza

$$VAR(t) = \Lambda(t)$$

8.3.6 Función de probabilidad de masa

La probabilidad de que en un periodo dado t lleguen o ocurran exactamente k eventos esta dada por:

$$P[N(t) = k] = \frac{1}{k!} [\Lambda(t)]^k * e^{-\Lambda(t)} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

8.3.7 Función de distribución de probabilidad

$$P[N(t) \leq k] = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} [\Lambda(t)]^i * e^{-\Lambda(t)}$$

8.4 AJUSTE DE DATOS A UN MODELO PUNTUAL

8.4.1 Procedimiento

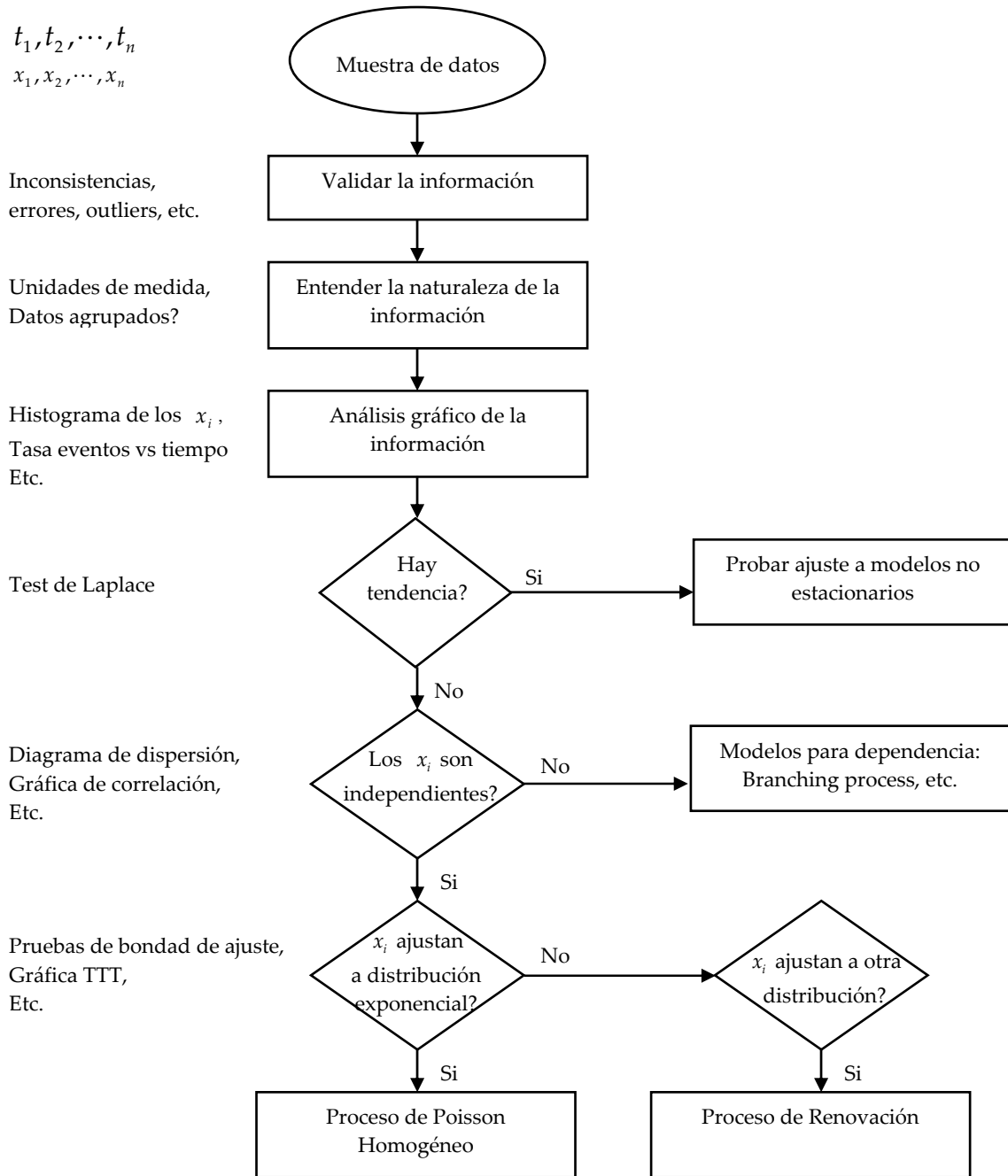


Figura 8.6 Procedimiento para seleccionar un modelo para un proceso de llegada de eventos

Para determinar si un fenómeno aleatorio puede modelarse mediante un proceso estocástico puntual se sigue el procedimiento de la Figura 8.6, adaptado de las referencias [12] y [14].

La muestra de datos consiste en el reporte en un periodo de tiempo dado T de n eventos para las cuales debe tenerse registrados los tiempos de llegada y los respectivos tiempos entre llegadas en orden cronológico.

8.4.2 Pruebas de tendencia

Las Referencias [4] y [14] enfatizan el hecho de que es incorrecto ajustar datos que no son idénticamente distribuidos a una distribución de probabilidad ó, aún, calcular estadísticas descriptivas; por lo cual, antes de aplicar los métodos clásicos de ajuste a una distribución, debe verificarse que NO exista tendencia, pues, los métodos de ajuste a una distribución son invariantes a cambios en el orden cronológico de los datos.

Para determinar si un proceso aleatorio de llegada de eventos tiene tendencia, se utilizan métodos gráficos y el test de Laplace, siendo este último el más utilizado.

Métodos gráficos para determinar tendencia	
1	Gráfica del número acumulado de eventos versus el tiempo acumulado de observación. Si esta gráfica es creciente hacia arriba (cóncava) o hacia abajo (convexa) existe tendencia. Ver la Figura 8.7
2	Gráfica del número de eventos en subperiodos del tiempo total de observación. Si la gráfica es creciente o decreciente existe tendencia.
3	Gráfica de barras de los tiempos entre arribo de eventos conservando su orden cronológico. Si la gráfica es creciente o decreciente existe tendencia.

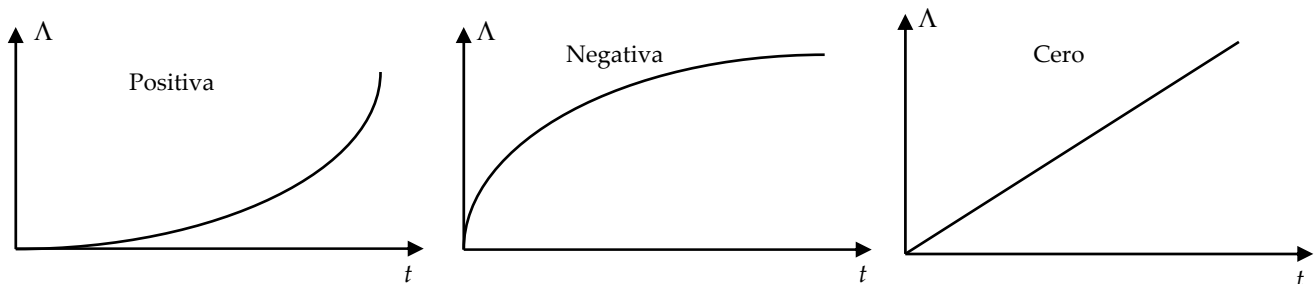


Figura 8.7 Análisis de tendencia observando la tasa acumulada de eventos

Test de Laplace (1773)

Para una muestra de n tiempos para arribo de eventos t_1, t_2, \dots, t_n se define el siguiente estadístico de la prueba de tendencia de Laplace:

$$U_L = \frac{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i\right) - \frac{1}{2} T^*}{T^* \sqrt{\frac{1}{12k}}}$$

Donde:

k : Es igual a $(n-1)$ si las observaciones terminan en el último evento, de lo contrario, es igual al número de observaciones n

T^* : Es igual a t_n si las observaciones terminan en el último evento, de lo contrario, es igual al periodo total de las observaciones T

Si:

$U_L = 0$	No existe tendencia, el proceso es estacionario
$U_L > 0$	Existe tendencia positiva o creciente, el proceso no es estacionario
$U_L < 0$	Existe tendencia negativa o decreciente, el proceso no es estacionario

El test de Laplace compara el valor medio o “centroide” de los tiempos de arribo con el punto medio del intervalo de las observaciones.

En la práctica, es difícil que se cumpla exactamente $U_L = 0$, por lo cual, lo que se hace es determinar un intervalo de confianza de los valores que implican NO tendencia:

$$-z_{\alpha/2} < U_L < z_{\alpha/2}$$

La decisión de si el proceso bajo estudio se puede representar por medio de un proceso de Poisson Homogéneo ó un proceso de renovación general se hace por medio de pruebas de hipótesis:

Prueba de hipótesis de un proceso de Poisson homogéneo

1. Hipótesis nula H_0 : El proceso de llegada de eventos es un proceso de Poisson Homogéneo
2. Hipótesis alterna H_1 : El proceso de llegada de eventos no es un proceso de Poisson Homogéneo
3. Criterio de decisión: Se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia del $\alpha\%$ si

$$U_L > z_{\alpha/2} \text{ ó } U_L < -z_{\alpha/2}$$

Prueba de Hipótesis de un proceso de renovación	
1. Hipótesis nula H_0 :	El proceso de llegada de eventos es un proceso de renovación
2. Hipótesis alterna H_1 :	El proceso de llegada de eventos NO es un proceso de renovación
3. Estadístico de prueba:	$U_{LR} = \frac{U_L}{cv_x} = \frac{U_L}{s_x / \bar{x}}$
Donde s_x y \bar{x} son la desviación muestral y el promedio estadístico de los tiempos entre llegada de eventos x_1, x_2, \dots, x_n	
4. Criterio de decisión:	Se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia del $\alpha\%$ si $U_{LR} > z_{\alpha/2}$ ó $U_{LR} < -z_{\alpha/2}$

Nótese que en caso de que se acepte la hipótesis nula, esta prueba no dice cuál proceso de renovación podría ajustar.

8.4.3 Pruebas de independencia

La Referencia [4] enfatiza el hecho de que es incorrecto el ajustar una distribución de probabilidad a datos que no son independientes entre sí, pues los métodos de ajuste tienen esta condición como requisito para su aplicación. Algunos métodos son gráficos para verificar la independencia en una muestra de datos son:

8.4.4 Ajuste de datos a un proceso estacionario

Una vez se verifica que los datos de la muestra no tienen tendencia y son independientes, puede hacerse el ajuste de los x_i a una distribución de probabilidad para definir el proceso de renovación que modelará el proceso aleatorio bajo estudio.

El primer intento es probar el ajuste a una distribución exponencial, que de cumplirse, indica que el proceso bajo estudio puede modelarse como un proceso de Poisson Homogéneo. Si no hay ajuste a la distribución exponencial, debe probarse el ajuste a otra distribución, lo cual indicará que el proceso bajo estudio es un proceso de renovación general (no exponencial).

8.4.5 Ajuste de datos a un proceso no estacionario

Una vez se verifica que los datos de la muestra tienen tendencia, se concluye entonces que debe utilizarse un modelo no estacionario para el proceso bajo estudio.

De nuevo, se recuerda que si existe tendencia en los datos, es incorrecto ajustarlos a una distribución de probabilidad, pues los métodos de ajuste ordenan los datos por magnitud sin tomar en cuenta el orden cronológico en que ocurren, es decir omitiendo el análisis de tendencia. Aunque se encuentre ajuste a una distribución, el modelo obtenido es incorrecto o “espurio” (falso, engañoso), tal como llama la Referencia [4].

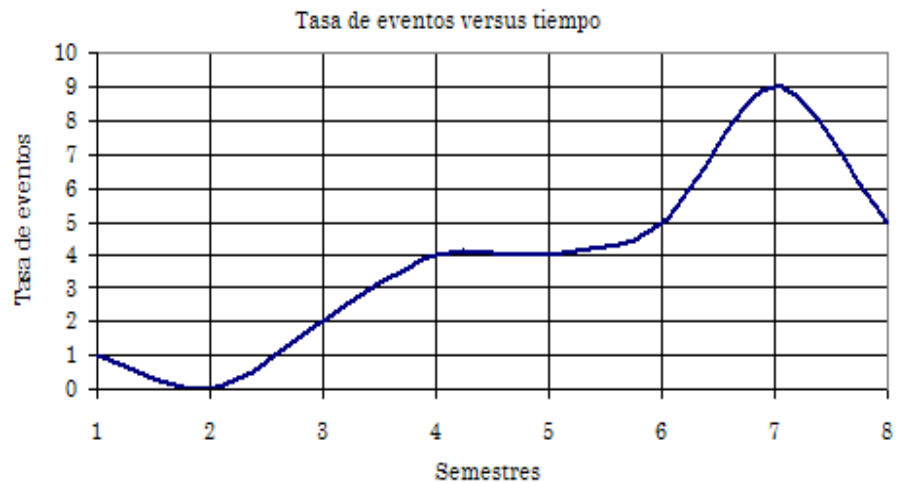
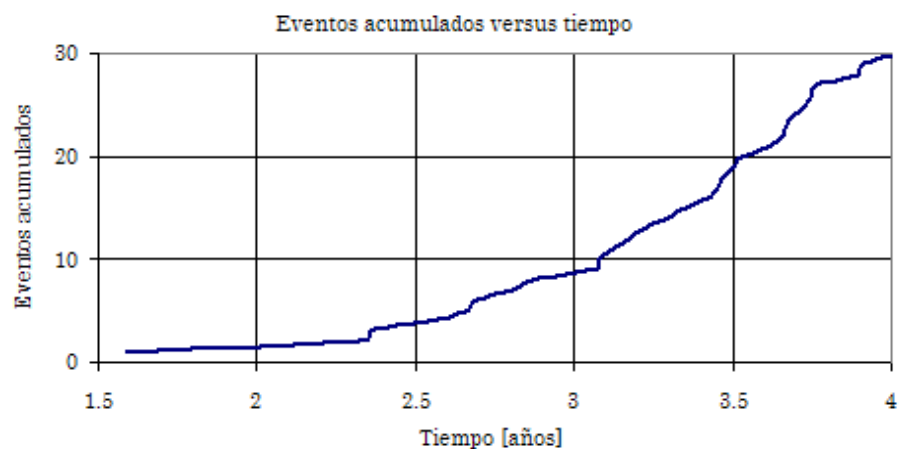
Para ajustar modelos no estacionarios (NHPP Power Law, NHPP Log-linear, etc) existen métodos específicos para estimar los parámetros y hacer las pruebas ajuste para cada tipo de modelo.

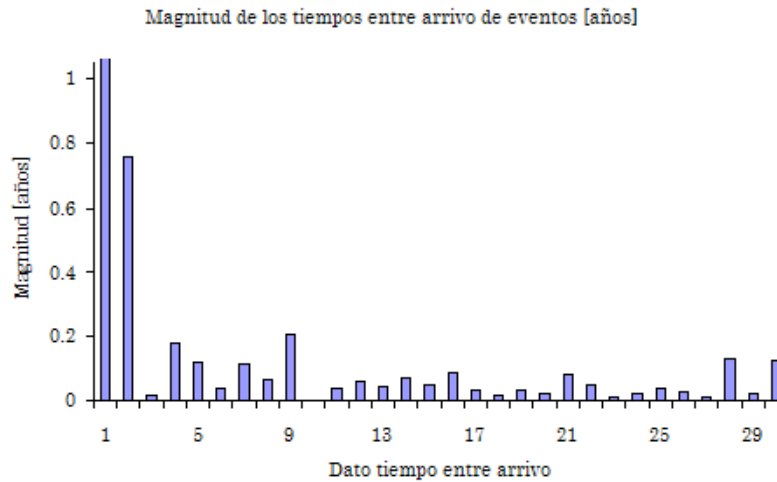
En una sección posterior de este texto se presentan los métodos de estimación de parámetros y pruebas de ajuste de datos para el proceso Power Law.

EJEMPLO 8.1

A continuación se presenta el análisis de tendencia para un proceso aleatorio del cual se tiene muestra de 30 datos:

t [años]	x [años]
1.5851	1.5851
2.3434	0.7583
2.3570	0.0136
2.5366	0.1796
2.6561	0.1195
2.6946	0.0385
2.8054	0.1108
2.8681	0.0627
3.0746	0.2065
3.0755	0.0009
3.1131	0.0376
3.1711	0.0580
3.2144	0.0433
3.2837	0.0693
3.3346	0.0509
3.4215	0.0869
3.4523	0.0308
3.4676	0.0153
3.5024	0.0348
3.5265	0.0241
3.6084	0.0819
3.6573	0.0489
3.6695	0.0122
3.6884	0.0189
3.7260	0.0376
3.7529	0.0269
3.7638	0.0109
3.8924	0.1286
3.9146	0.0222
4.0406	0.1260





Como se observa en las gráficas, existe tendencia positiva en los datos pues:

1	La gráfica de eventos acumulados versus el tiempo es creciente hacia arriba (Cóncava)
2	La tasa de eventos crece con el tiempo
3	La magnitud de los tiempos ente llegada de eventos decrece con el tiempo

El estadístico de prueba de tendencia de Laplace es $U_L = 5.5033$

Con una probabilidad crítica del 5% y $z_{\alpha/2} = 1.9657$, las pruebas de hipótesis son:

Prueba de hipótesis de un proceso de Poisson homogéneo	
1.	Hipótesis nula H_0 : El proceso de llegada de eventos es un HPP
2.	Hipótesis alterna H_1 : El proceso de llegada de eventos no es un HPP
3.	Criterio de decisión: Se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia del 5% pues $U_L > z_{\alpha/2}$

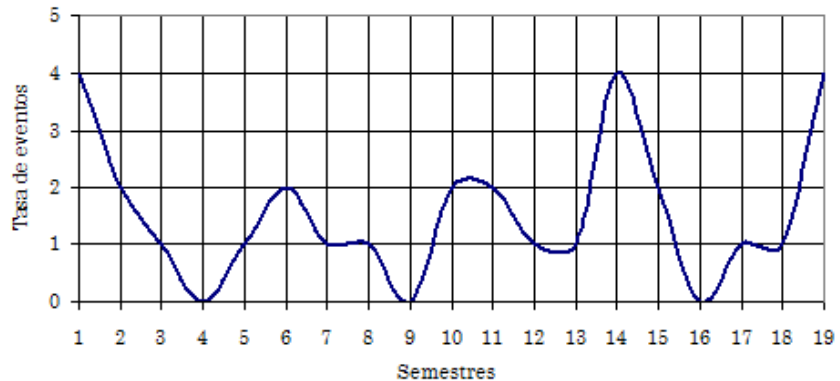
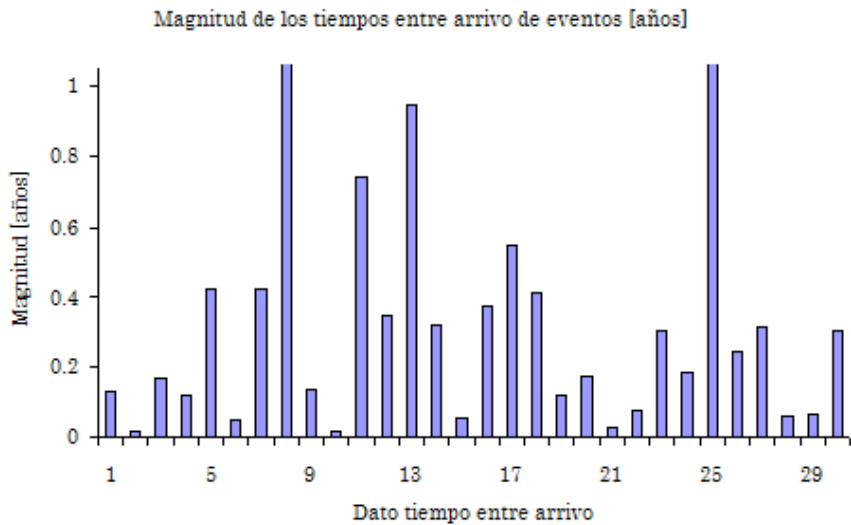
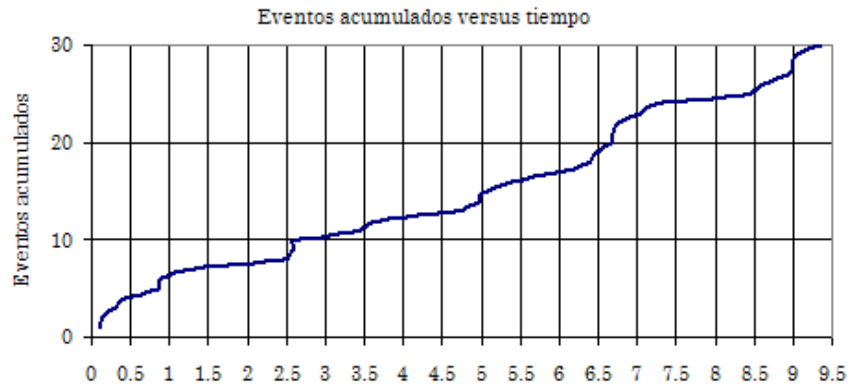
Prueba de hipótesis de un proceso de renovación	
1.	Hipótesis nula H_0 : El proceso de llegada de eventos es un RP
2.	Hipótesis alterna H_1 : El proceso de llegada de eventos NO es un RP
3.	Estadístico de prueba: $U_{LR} = \frac{U_L}{cv_x} = \frac{U_L}{s_x / \bar{x}} = \frac{5.5033}{0.3062 / 0.1347} = \frac{5.5033}{2.2737} = 2.4204$
4.	Criterio de decisión: Se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia del 5% pues si $U_{LR} > z_{\alpha/2}$

Entonces, se debe buscar un modelo no estacionario para este proceso aleatorio. En un ejercicio posterior se prueba que estos datos se ajustan a un proceso Power Law.

EJEMPLO 8.2

A continuación se presenta el análisis de tendencia para un proceso aleatorio del cual se tiene muestra de 30 datos:

t	x
[años]	[años]
0.1267	0.1267
0.1450	0.0184
0.3135	0.1684
0.4327	0.1192
0.8584	0.4257
0.9077	0.0493
1.3308	0.4231
2.4596	1.1289
2.5919	0.1323
2.6090	0.0171
3.3500	0.7410
3.7005	0.3505
4.6461	0.9456
4.9656	0.3195
5.0217	0.0561
5.3967	0.3750
5.9468	0.5501
6.3617	0.4150
6.4806	0.1188
6.6524	0.1718
6.6772	0.0248
6.7504	0.0732
7.0524	0.3020
7.2373	0.1849
8.3749	1.1376
8.6198	0.2449
8.9341	0.3143
8.9930	0.0589
9.0556	0.0626
9.3557	0.3001



Como se observa en las gráficas, NO existe tendencia en los datos pues:

1	La gráfica de eventos acumulados versus el tiempo es una diagonal (no cóncava, no convexa)
2	La tasa de eventos no tiene un patrón de crecimiento o decrecimiento con el tiempo
3	La magnitud de los tiempos ente llegada de eventos no tiene un patrón de crecimiento o decrecimiento con el tiempo

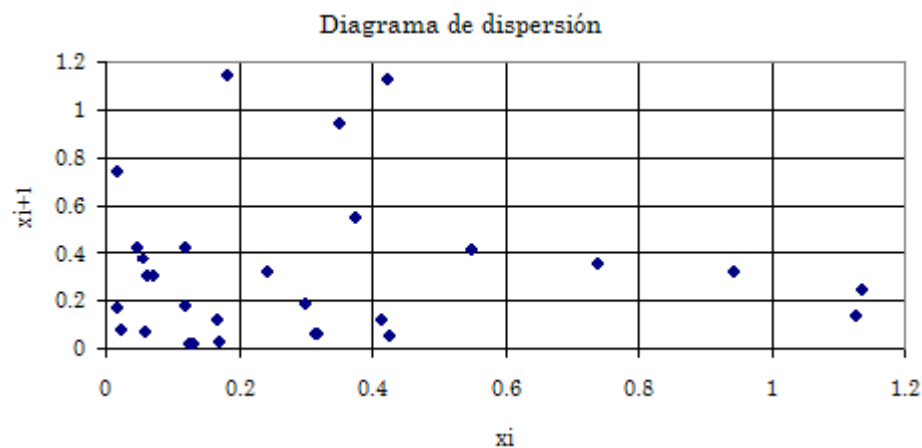
El estadístico de prueba de tendencia de Laplace es:

$$U_L = 0.0230$$

Con una probabilidad crítica del 5% y $z_{\alpha/2} = 1.9657$, las pruebas de hipótesis son:

Prueba de Hipótesis de un HPP	
1.	Hipótesis nula H_0 : El proceso de llegada de eventos es un HPP
2.	Hipótesis alterna H_1 : El proceso de llegada de eventos no es un HPP
3.	Criterio de decisión: Se acepta la hipótesis nula con un nivel de significancia del 5% pues $U_L < z_{\alpha/2}$.

Ahora se prueba la independencia en los datos:



Como se observa en la figura, la secuencia x_1, x_2, \dots, x_n es independiente, pues los datos están dispersos en el cuadrante del diagrama de dispersión (no forman una recta). Entonces, es válido el intentar ajustar estos datos a la distribución de probabilidad exponencial, lo cual se presenta en un ejercicio posterior.

8.5 EL PROCESO DE POISSON HOMOGÉNEO (HPP)

8.5.1 Descripción

En el HPP se cumple que:

1	El proceso es estacionario ó sin tendencia
2	El número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo <u>disjuntos</u> son independientes. Se dice entonces, que el proceso de conteo de eventos $N(t)$ tiene incrementos independientes.
3	El proceso es Markoviano, es decir, no tiene memoria.
4	La tasa de ocurrencia de eventos del proceso es constante, $\lambda(t) = \lambda = 1/E(x)$
5	Los tiempos para llegada de los eventos t_1, t_2, \dots, t_n son independientes y están uniformemente distribuidos dentro del periodo de tiempo $[0, t]$. Por esta razón se dice que el HPP es un proceso aleatorio puro.
6	Los tiempos entre llegadas de los eventos x_1, x_2, \dots, x_n son independientes y están exponencialmente distribuidos con parámetro λ . $f_x(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad F_x(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad E[x] = 1/\lambda \quad VAR(x) = 1/\lambda$
7	La tasa de eventos del proceso es igual a la tasa de eventos de la distribución de los tiempos entre llegadas de eventos. El HPP es el único proceso de renovación con esta propiedad.
8	El tiempo para llegada del primer evento está distribuido exponencialmente con parámetro λ $f_{t_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad F_{t_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad E[t_1] = 1/\lambda \quad VAR(t_1) = 1/\lambda$
9	El tiempo para llegada del n -ésimo evento tiene distribución Erlang, es decir, una distribución Gamma con parámetro de escala $\beta = 1/\lambda$ y parámetro de forma $\alpha = n$. Como n es un entero positivo, entonces $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$. $f_{t_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \quad F_{t_n}(t) = 1 - e^{-\lambda * t} * \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda * t)^j}{j!}$ $E[t_n] = n/\lambda \quad VAR(t_n) = n/\lambda$

8.5.2 Función de probabilidad de masa

La probabilidad de que en un periodo de tiempo dado $[0, t]$ “lleguen” u ocurran exactamente k eventos en un proceso de Poisson homogéneo esta dada por:

$$P[N(t) = k] = \frac{1}{k!} [\lambda t]^k * e^{-\lambda t} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

8.5.3 Función de distribución de probabilidad

La probabilidad de que en un periodo de tiempo dado $[0, t]$ “lleguen” o ocurran k o menos eventos en un proceso de Poisson homogéneo esta dada por:

$$P[N(t) \leq k] = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} [\lambda t]^i * e^{-\lambda t}$$

8.5.4 Valor esperado y varianza

$$E[N(t)] = \lambda t \quad \text{VAR}[N(t)] = \lambda t$$

8.5.5 Estimador del parámetro

Para estimar el parámetro de este proceso se pueden utilizar las siguientes formulas:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{n}{t_n}$$

8.5.6 Pruebas de bondad de ajuste

Los métodos para determinar el ajuste de la muestra de datos a una distribución son:

1	Pruebas de bondad de ajuste
2	Método TTT plot
3	Método “exponential scores plot”

8.5.7 Qué hacer cuando la tasa de ocurrencia de eventos es muy grande

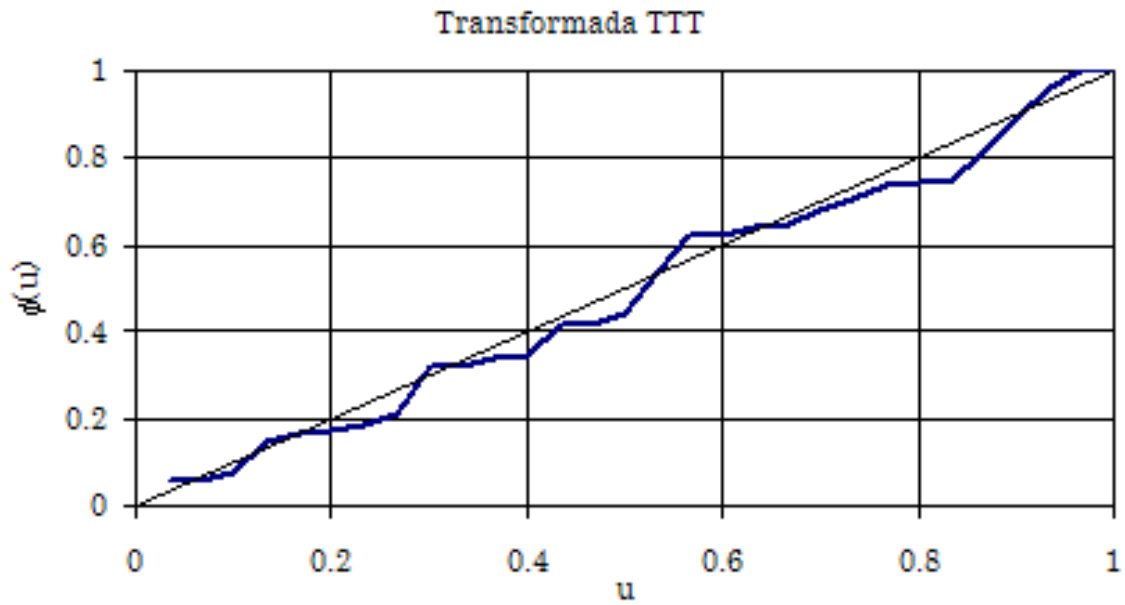
Si la tasa de ocurrencia de eventos es muy grande, siempre se tendrá una probabilidad cercana a cero para la ocurrencia de pocos eventos, lo cual no es conveniente para algunos análisis. Así, en estos casos se debe reducir la unidad de medida del tiempo, cambiando el parámetro de escala.

EJEMPLO 8.3

Verificar si los siguientes datos inter-arrivo de un proceso puntual se ajustan a un proceso de Poisson Homogéneo utilizando la transformada TTT.

X [años]	R [años]
0.0171	0.5130
0.0183	0.5478
0.0248	0.7298
0.0493	1.3913
0.0561	1.5681
0.0589	1.6381
0.0626	1.7269
0.0732	1.9707
0.1189	2.9761
0.1192	2.9824
0.1267	3.1324
0.1323	3.2388
0.1685	3.8904
0.1718	3.9465
0.1849	4.1561
0.2449	5.0561
0.3001	5.8289
0.3020	5.8536
0.3143	6.0012
0.3195	6.0584
0.3505	6.3684
0.3750	6.5889
0.4149	6.9081
0.4231	6.9655
0.4257	6.9811
0.5501	7.6031
0.7410	8.3667
0.9456	8.9805
1.1288	9.3469
1.1376	9.3557

$u = i/n$	$\phi(u) = S_i$
0.0333	0.0548
0.0667	0.0586
0.1000	0.0780
0.1333	0.1487
0.1667	0.1676
0.2000	0.1751
0.2333	0.1846
0.2667	0.2106
0.3000	0.3181
0.3333	0.3188
0.3667	0.3348
0.4000	0.3462
0.4333	0.4158
0.4667	0.4218
0.5000	0.4442
0.5333	0.5404
0.5667	0.6230
0.6000	0.6257
0.6333	0.6414
0.6667	0.6476
0.7000	0.6807
0.7333	0.7043
0.7667	0.7384
0.8000	0.7445
0.8333	0.7462
0.8667	0.8127
0.9000	0.8943
0.9333	0.9599
0.9667	0.9991
1.0000	1.0000



Como se observa en esta gráfica, SI existe ajuste a una distribución exponencial, pues la gráfica de los datos está alrededor de la transformada TTT de la distribución exponencial (la línea diagonal).

El parámetro del HPP se estima como $\hat{\lambda} = n/t_n = 30/9.3557 = 3.2066$ eventos/año.

EJEMPLO 8.4

Para un transformador de distribución se ha verificado que el proceso de llegadas de las fallas es un HPP con una tasa de ocurrencia de eventos $\lambda = 0.2$ fallas/año.

- Valores esperados de fallas: $E[N(t)] = 0.2 * t$

t [años]	$E[N(t)]$ [fallas]
1	0.2
5	1
10	2

Conforme se aumenta el periodo de tiempo en que el equipo permanece en funcionamiento, mayor número de fallas se espera que ocurran.

- Probabilidad de llegada de fallas en diferentes periodos de tiempo:

$$P[N(t) = k] = \frac{1}{k!} [0.2t]^k * e^{-0.2t}$$

k [Fallas]	t [años]		
	1	5	10
0	0,818731	0,367879	0,135335
1	0,163746	0,367879	0,270671
2	0,016375	0,183940	0,270671
3	0,001092	0,061313	0,180447
4	0,000055	0,015328	0,090224
5	0,000002	0,003066	0,036089
6	0,000000	0,000511	0,012030
7	0,000000	0,000073	0,003437
8	0,000000	0,000009	0,000859
9	0,000000	0,000001	0,000191
10	0,000000	0,000000	0,000038

Como se observa, las probabilidades de ocurrencia de un número dado de fallas cambian conforme se cambia el periodo de tiempo.

También se observa que son bajas las probabilidades de que ocurran los valores esperados de fallas calculados en el paso anterior para periodos de 5 (1 falla) y 10 años (2 fallas).

Esto último ilustra sobre el cuidado que se debe tener al tomar valores esperados para los procesos de decisión, pues en general, estos valores tienen poca probabilidad de ocurrir.

- Probabilidad de tener “al menos” una falla en diferentes periodos de tiempo:

$$P[N(t) = 1, 2, \dots] = 1 - P[N(t) = 0]$$

t [años]	$P[N(t) = 1, 2, \dots]$
1	0.181269
5	0.632121
10	0.864665

- Probabilidad de que la primera falla ocurra en un tiempo menor o igual dado t

$$F_{t_1}(t) = P[t_1 \leq t] = 1 - e^{-0.2t}$$

t [años]	$P[t_1 \leq t]$
1	0.181269
5	0.632121
10	0.864665

Como se observa, las probabilidades de que ocurra la primera falla en un tiempo menor o igual a 1, 5 y 10 años corresponden a los mismos resultados de probabilidad de que ocurra al menos una falla en estos mismos periodos de tiempo en el HPP, que se calcularon en el paso anterior.

- Probabilidad de que la tercera falla ocurra en un tiempo menor o igual dado t

$$F_{t_3}(t) = P[t_3 \leq t] = 1 - e^{-0.2 * t} * \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(0.2 * t)^j}{j!}$$

t [años]	$P[t_3 \leq t]$
1	0.0011485
5	0.0803014
10	0.3233236

Estos resultados son los mismos que se obtienen al calcular la probabilidad de que ocurran por lo menos tres fallas en periodos de tiempo de 1, 5 y 10 años en el HPP.

8.6 EL PROCESO DE POISSON NO HOMOGÉNEO POWER LAW

8.6.1 Descripción

El NHPP Power Law fue desarrollado por Larry Crow en 1974 y se define por medio de la siguiente tasa de ocurrencia de eventos:

$$\lambda(t) = \lambda * \beta * t^{\beta-1}$$

Donde:

λ : Es el parámetro de escala; debe ser mayor a cero.

β : Es el parámetro de forma. Según su valor define la tendencia en el modelo de llegada de eventos, de la siguiente forma:

$\beta > 1$	Modelo no estacionario con tendencia positiva
$\beta = 1$	El proceso de Poisson Homogéneo
$\beta < 1$	Modelo no estacionario con tendencia negativa

Este modelo se conoce también como “Crow Model” o “Crow – AMSA Model”.

De otra parte, las Referencias [7] y [14] aclaran que este proceso ha recibido nombres donde se adiciona la palabra “Weibull” (Weibull process, Weibull-Poisson process, Rasch-Weibull process), lo cual está basado en la similitud existente entre la función de intensidad del NHPP Power Law y la tasa de eventos de la distribución Weibull ($h(x) = \alpha * \beta * x^{\beta-1}$). Sin embargo, el uso de estos nombres puede llevar a que equivocadamente se crea que:

1	Los tiempos entre llegadas de eventos en el NHPP Power Law tienen distribución Weibull: Esto es falso, pues en un proceso con tendencia como el NHPP Power Law los tiempos entre llegada de eventos no son independientes ni pertenecen a una misma distribución.
2	El NHPP Power Law es un RP Weibull: Esto es falso, pues en un RP los tiempos entre llegada de eventos son una secuencia IID, lo cual, no se cumple en un proceso con tendencia.

Por lo tanto, se recomienda el uso del nombre “Power Law” para el NHPP con esta función de intensidad.

8.6.2 Función de probabilidad de masa

La probabilidad de que en un periodo de tiempo dado $[0, t]$ “lleguen” u ocurran exactamente k eventos en un NHPP Power Law esta dada por:

$$P[N(t) = k] = \frac{1}{k!} [\lambda t^\beta]^k * e^{-\lambda t^\beta} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

8.6.3 Función de distribución de probabilidad

La probabilidad de que en un periodo de tiempo dado $[0, t]$ "lleguen" u ocurran k o menos eventos en un NHPP Power Law esta dada por:

$$P[N(t) \leq k] = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} [\lambda t^\beta]^i * e^{-\lambda t^\beta}$$

8.6.4 Valor esperado y varianza

$$E[N(t)] = \lambda t^\beta \quad \text{VAR}[N(t)] = \lambda t^\beta$$

8.6.5 Estimación de parámetros

Una vez se verifica la hipótesis de que los datos del proceso bajo estudio tienen tendencia se pueden estimar los parámetros del modelo NHPP Power Law de la siguiente forma [4], [16]:

$$\hat{\beta} = (n - 2) / \sum_{i=1}^n \ln(t_n / t_i) \quad \hat{\lambda} = n / t_n^{\hat{\beta}}$$

Sin embargo, solo una prueba de bondad de ajuste determinará si la hipótesis de que el modelo NHPP Power Law representa los datos.

8.6.6 Bondad de ajuste

Algunos métodos para determinar el ajuste de una muestra de datos a un proceso de Poisson no homogéneo Power Law son:

1	Pruebas de bondad de ajuste
2	Método TTT plot

Los procedimientos son específicos para este modelo, no se deben confundir con los métodos clásicos para variables aleatorias sencillas.

Se presentan a continuación dos pruebas de bondad de ajuste para este proceso.

Prueba de Kolmogorov – Smirnov (Park y Kim 1992)
1. Sea $M = n - 1$
2. Calcule $U_i = (t_i / t_n)^{\hat{\beta}}$ para $i = 1, 2, \dots, M$
3. $D^+ = \max(i/M - U_i)$ para $i = 1, 2, \dots, M$
4. $D^- = \max(U_i - (i-1)/M)$ para $i = 1, 2, \dots, M$
5. $D = \max\{D^+, D^-\}$ Es el estadístico de prueba

Prueba de Hipótesis de un NHPP Power Law
H_0 : El NHPP Power Law con parámetros $\hat{\lambda}$ y $\hat{\beta}$ representa los datos con un $(1 - \alpha)\%$ de confianza
H_1 : El modelo propuesto NO representa a los datos
Se rechaza la hipótesis nula si $D > D^\alpha$.

La Referencia [7] presenta una tabla de valores críticos del estadístico D para diversos valores de M y de probabilidad crítica α . En la tabla 8.1 se presentan los valores del estadístico de prueba para diferentes tamaños de muestra y una probabilidad crítica del 5%.

Tabla 8.1 Valores críticos para el estadístico de la prueba Kolmogorov – Smirnov para el proceso Power Law

M	D^α
10	0.34
11	0.33
12	0.31
13	0.30
14	0.29
15	0.28
20	0.24
30	0.20
40	0.17
50	0.15
60	0.14
80	0.12
100	0.11

Notas: 1. Probabilidad crítica del 5%
2. Datos tomados de la Referencia [7]

Como se observa, no aparecen los valores críticos del estadístico de prueba para tamaños de muestras mayores a 100 datos.

Para facilitar hallar los valores no tabulados en la tabla de la Referencia [7], en este texto hacemos ajuste por el método de mínimos cuadrados de los datos de la Referencia [7] a una función de la siguiente forma:

--

$$D^\alpha = \frac{1}{c_1 + c_2 * M}$$

Lo cual lleva a los siguientes resultados:

α	c_1	c_2
1%	1.8713	0.0750
5%	2.1665	0.0879
10%	2.4183	0.0940

El Método TTT Plot (Klefsjo y Kumar 1992)

1. Sea $M = n - 1$
2. Calcule $w_i = Ln(t_{n-i} / t_n)$ para $i = 1, 2, \dots, M$
3. Aplique a los w_i el método TTT Plot
4. Si los puntos están distribuidos alrededor de la diagonal, entonces SI hay ajuste; los datos pertenecen a un modelo NHPP Power Law

En este método se transforman los tiempos para llegada de eventos de tal forma que correspondan a una distribución exponencial y se aplica el método TTT Plot.

Al igual que en el caso del HPP, NO es necesario estimar los parámetros del modelo para aplicar este método.

Sin embargo, los autores aclaran que este método tiene como desventaja el que puede mostrar ajuste a un NHPP Power Law cuando los datos proceden de un Renewal Process, por lo cual, recomiendan aplicar otra transformación, la cual, tiene otros problemas de interpretación de resultados [8]

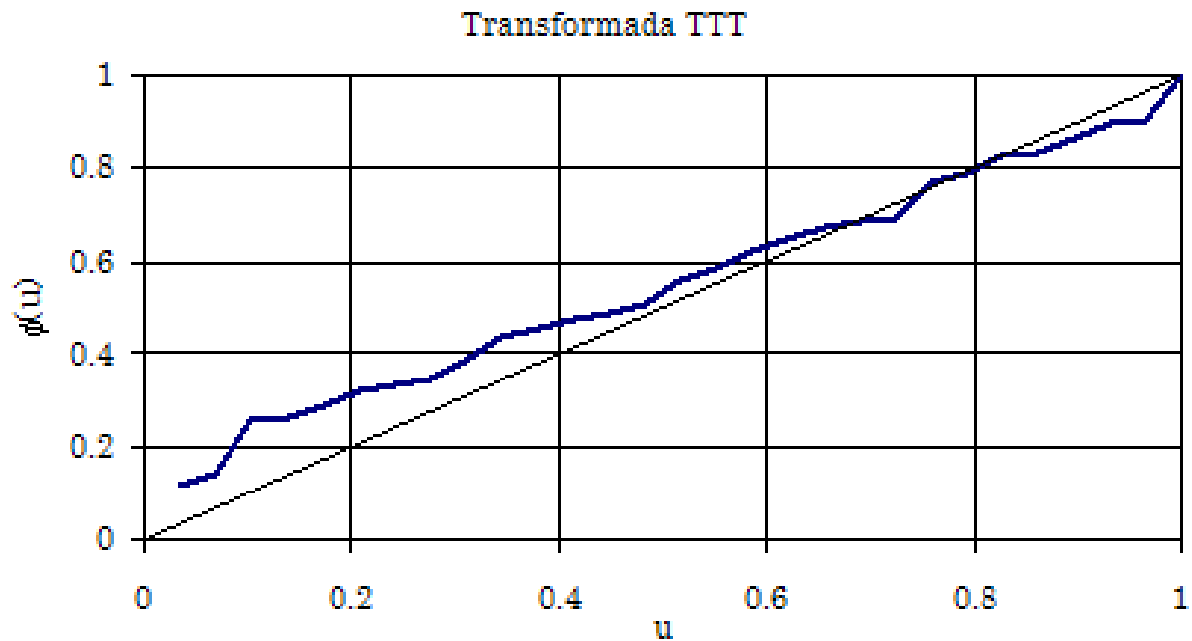
EJEMPLO 8.5

Probar si los datos del Ejemplo 8.1 se pueden modelar por medio de un NHPP Power Law.

1. Método de transformada TTT

w	R
-0.0317	-0.9504
-0.0374	-1.1153
-0.071	-2.056
-0.0739	-2.1343
-0.0811	-2.3214
-0.0912	-2.5749
-0.0963	-2.6982
-0.0997	-2.7748
-0.1131	-3.071
-0.1361	-3.5531
-0.1429	-3.6903
-0.1529	-3.88
-0.1574	-3.9596
-0.1663	-4.1119
-0.192	-4.5235
-0.2074	-4.7543
-0.2288	-5.0529
-0.2423	-5.2292
-0.2608	-5.4507
-0.2729	-5.5844
-0.2732	-5.5873
-0.3427	-6.213
-0.3648	-6.3899
-0.4051	-6.6719
-0.4195	-6.7583
-0.4656	-6.9885
-0.539	-7.2822
-0.5448	-7.2996
-0.9357	-8.0815

$u = i / M$	$\phi(u) = S_i$
0.0345	0.1176
0.0690	0.1380
0.1034	0.2544
0.1379	0.2641
0.1724	0.2872
0.2069	0.3186
0.2414	0.3339
0.2759	0.3434
0.3103	0.3800
0.3448	0.4397
0.3793	0.4566
0.4138	0.4801
0.4483	0.4900
0.4828	0.5088
0.5172	0.5597
0.5517	0.5883
0.5862	0.6252
0.6207	0.6471
0.6552	0.6745
0.6897	0.6910
0.7241	0.6914
0.7586	0.7688
0.7931	0.7907
0.8276	0.8256
0.8621	0.8363
0.8966	0.8648
0.9310	0.9011
0.9655	0.9032
1.0000	1.0000



Como se observa en esta gráfica, SI existe ajuste a un NHPP Power Law, pues la gráfica de los datos está alrededor de la transformada TTT de este proceso (la línea diagonal).

2. Estimación de parámetros

$$\hat{\beta} = 3.9184 \quad \hat{\lambda} = 0.1261 \text{ [eventos/año]}$$

3. Prueba de bondad de ajuste Kolmogorov – Smirnov

U_i	$(i/M - U_i)$	$(i/M - U_i)$
-0.0317	-0.9504	0.0345
-0.0374	-1.1153	0.0690
-0.071	-2.056	0.1034
-0.0739	-2.1343	0.1379
-0.0811	-2.3214	0.1724
-0.0912	-2.5749	0.2069
-0.0963	-2.6982	0.2414
-0.0997	-2.7748	0.2759
-0.1131	-3.071	0.3103
-0.1361	-3.5531	0.3448
-0.1429	-3.6903	0.3793
-0.1529	-3.88	0.4138
-0.1574	-3.9596	0.4483
-0.1663	-4.1119	0.4828
-0.192	-4.5235	0.5172

U_i	$(i/M - U_i)$	$(i/M - U_i)$
-0.2074	-4.7543	0.5517
-0.2288	-5.0529	0.5862
-0.2423	-5.2292	0.6207
-0.2608	-5.4507	0.6552
-0.2729	-5.5844	0.6897
-0.2732	-5.5873	0.7241
-0.3427	-6.213	0.7586
-0.3648	-6.3899	0.7931
-0.4051	-6.6719	0.8276
-0.4195	-6.7583	0.8621
-0.4656	-6.9885	0.8966
-0.539	-7.2822	0.9310
-0.5448	-7.2996	0.9655
-0.9357	-8.0815	1.0000

$$D^+ = \max(i/M - U_i) = 0.1167$$

$$D^- = \max(U_i - (i-1)/M) = -0.0823$$

$$D = \max\{D^+, D^-\} = 0.1167 \text{ Es el estadístico de prueba}$$

El valor crítico del estadístico de prueba es $D^\alpha = 0.2121$ para $M = n - 1 = 30 - 1 = 29$ y una probabilidad crítica $\alpha = 5\%$

Prueba de Hipótesis de un NHPP Power Law
H_0 : El NHPP Power Law con parámetros $\hat{\lambda} = 0.1261$ [eventos/año] y $\hat{\beta} = 3.9184$ representa los datos con un 95% de confianza
H_1 : El modelo propuesto NO representa a los datos
Se acepta la hipótesis nula pues el estadístico de prueba $D = 0.1167$ es menor que el valor crítico $D^\alpha = 0.2121$

8.7 EL PROCESO DE POISSON COMPUESTO (COMPOUND POISSON PROCESS)

8.7.1 Descripción

Sea $N(t)$ un proceso de llegada de eventos de cualquier tipo y sea Y una variable aleatoria independiente de $N(t)$, que define una característica de cada una de los eventos que llegan. Si se define:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

Entonces, $X(t)$ se denomina un proceso de Poisson compuesto.

Ejemplos			
	$N(t)$	Y	$X(t)$
1	Clientes que llegan a una tienda	Dinero que gasta cada cliente	Ingresos brutos de la tienda en el periodo t
2	Grupos de usuarios (Batches) que llegan a un sistema de atención	Cantidad de usuarios por grupo	Número total de usuarios que llegan en el periodo t
3	Paquetes de información que llegan a un computador	Cantidad de bits por paquete	Número total de bits en el periodo t
4	Horas en que una planta sale despachada en la bolsa de energía	MW despachados en cada hora	Energía despachada en el periodo t

8.7.2 Función de distribución de probabilidad

$$F_{X(t)}(N(t), Y) = P[N(t) \leq k \cap Y \leq y] = P[N(t) \leq k]P[Y \leq y] = F_{N(t)}(k, t) * F_Y(y)$$

8.7.3 Función de densidad de probabilidad

$$f_{X(t)}(N(t), Y) = f_{N(t)}(k, t) * f_Y(y)$$

8.7.4 Valor esperado

$$E[X(t)] = E[N(t)] * E[Y]$$

Este proceso también se puede componer de varias variables aleatorias independientes que definan las características o atributos de los eventos que llegan.

EJEMPLO 8.6

Para una planta de generación que participa en la bolsa de energía, se define el ingreso bruto en un periodo de tiempo t como:

$$Ingreso(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Potencia_i * Precio_i$$

Cada hora puede llegar un evento de “despacho”: se ordena a la planta despachar una potencia dada a un precio dado que se consideran aleatorios. Entonces, el proceso definido se refiere a los ingresos en un periodo de tiempo dado t (día, mes, año). El valor esperado de ingreso en un periodo de tiempo t está dado por:

$$E(ingreso) = E(N(t)) * E[Potencia] * E[Precio]$$

EJEMPLO 8.7

Una tienda recibe pagos en dólares mediante un sistema bancario on-line. El banco convierte los pagos en dólares a la moneda local según la tasa representativa del mercado (TRM) del día en que se hace efectiva la consignación. El ingreso bruto por compras en moneda extranjera en un periodo de tiempo t de un mes se define como:

$$Ingreso(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Compra_i * TRM_i$$

$$E(ingreso) = E(N(t)) * E[Compra] * E[TRM]$$

8.8 CÓMO SIMULAR EVENTOS DE UN PROCESO DE RENOVACIÓN

Para un proceso puntual de renovación se generan tiempos inter-arribo x_i y se obtienen los instantes de llegada de los eventos t_i . Esto puede hacerse para un periodo de estudio T o para un número requerido de eventos N . En términos de programación, para el primer caso esto es:

```

Let  $t_0 = 0, t = 0, i = 0$ 

While  $t < T$ 
  Let  $i = i + 1$ 
  Generate  $U_i$ 
  Obtain  $x_i = F_x^{-1}(U_i)$ 
  Calculate  $t_i = t_{i-1} + x_i$ 
  Let  $t = t_i$ 
end while

 $N = i$ 

```

Esta simulación es de tipo secuencial asincrónica pues el tiempo total de la simulación (reloj de la simulación) y los tiempos de arribo de los eventos se obtienen de la suma de los tiempos inter-arribo.

EJEMPLO 8.8

Una creciente o borrasca es un evento de aumento inusitado en el caudal de una corriente de agua durante un corto periodo de tiempo debido a lluvias intensas en la cuenca hidrográfica aguas arriba del punto de estudio.

Las borrascas afectan la operación de las plantas de generación a filo de agua, acueductos y sistemas de riego porque el elevado caudal, su velocidad y los desechos que arrastran pueden obstruir o aún destruir las instalaciones civiles e hidráulicas de toma y conducción de agua.

En [10] se recopiló datos de 140 eventos de borrascas en el Río Otún ocurridas durante los años 2004 y 2005 las cuales afectaron la producción de una planta de generación. El tiempo promedio entre estos eventos (\bar{x}) es de 19.14 días con un coeficiente de variación del 200% y su duración promedio (\bar{d}) es de 2.7 horas con un coeficiente de variación de 77%. Como la duración de las borrascas es muy pequeña comparada con el tiempo entre eventos de borrasca, se puede aplicar el modelamiento con procesos estocásticos puntuales.

Aplicando el procedimiento de ajuste de datos a un proceso estocástico puntual se obtuvo que el proceso de llegada de estos eventos se puede modelar mediante un proceso de renovación Gamma con parámetros $\alpha = 0.5600$ y $\beta = 34.1818$ [días]. Quiere esto decir, que el fenómeno natural de ocurrencia de borrascas en el Río Otún es un proceso aleatorio estacionario.

La función de intensidad de este proceso puntual es entonces $\lambda(t) = 1/(\alpha\beta) = 19.0682$ [borrascas/año].

Si los datos comienzan al inicio del año 2004, para cuando se espera que ocurrirá la última borrasca del año 2008?

PROCEDIMIENTO

Ejecute en Matlab el programa probejim2.m para varios números de iteraciones.

Este programa utiliza la función genrp.m. Abrir el código de esta función y ver como esta implementada.

8.9 CÓMO SIMULAR EVENTOS DE UN PROCESO DE POISSON NO HOMOGÉNEO

Generar observaciones a partir de procesos de Poisson no homogéneos no es tan sencillo como en el caso de los procesos de renovación, por lo cual, se utilizan algoritmos especiales; la Referencia [1] presenta tres algoritmos, uno de los cuales es:

1. Generar una secuencia de n tiempos de llegada de eventos a partir de un HPP con tasa de eventos igual a 1.0. Estos tiempos se denotan por t'_1, t'_2, \dots, t'_n
2. Hallar la función inversa del valor esperado del proceso, la cual se denota como Λ^{-1}
3. Calcular los tiempos para llegada de eventos del NHPP de la siguiente forma:

$$t_i = \Lambda^{-1}(t'_i)$$

La aplicación de este algoritmo depende de que sea fácil invertir la función de valor esperado $\Lambda(t)$ del NHPP.

Básicamente lo que se hace en este algoritmo es igualar la función de intensidad de un proceso de Poisson homogéneo con tasa de eventos 1.0 a la función de intensidad del proceso de Poisson no homogéneo que se quiere resolver:

$$\Lambda(t')_{HPP} = \Lambda(t)_{NHPP}$$

En el caso del NHPP Power Law se tiene:

$$\lambda_{HPP} * t' = \lambda * t^\beta$$

$$1.0 * t' = \lambda * t^\beta$$

$$t = \left(\frac{t'}{\lambda}\right)^{1/\beta} = \Lambda^{-1}(t')$$

EJEMPLO 8.9

Generar una realización de eventos de un NHPP Power Law con:

- Parámetro de escala $\lambda = 7.0$ [eventos/año]
- Parámetro de forma $\beta = 1.0, \beta > 1.0, \beta < 1.0$
- Tiempo de observación del proceso $T = 5$ [años]

Obtener las siguientes gráficas:

- Diagrama de barras de la magnitud de los tiempos entre llegada de eventos versus el tiempo
- Histogramas de los tiempos para llegada de eventos y los tiempos entre llegada de eventos.

PROCEDIMIENTO

*Ejecute en Matlab el programa probejesim3.m para diversos tiempos de observación del proceso
Este programa utiliza la función genplp.m. Abrir el código de esta función y ver como esta implementada*

8.10 CÓMO SIMULAR UN PROCESO DE POISSON COMPUESTO

$X(t)$ se denomina un proceso de Poisson compuesto si es una variable que se define como la suma de $N(t)$ términos o valores de una variable aleatoria Y :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

Donde $N(t)$ es un proceso estocástico puntual y Y se define con una distribución de probabilidad.

Así para obtener $X(t)$ se generan N eventos del proceso estocástico puntual los cuales cubren un periodo de estudio T . Por cada evento generado en el proceso estocástico puntual, se genera un valor de la variable aleatoria Y el cual se va sumando a la variable X . En términos de programación, esto es:

Let $t_0 = 0, t = 0, i = 0, X_0 = 0$

While $t < T$

Let $i = i + 1$

Generate U_{1i}

Obtain $x_i = F_x^{-1}(U_{1i})$

Calculate $t_i = t_{i-1} + x_i$

Let $t = t_i$

Generate U_{2i}

Obtain $Y_i = F_Y^{-1}(U_{2i})$

Let $X_i = X_{i-1} + Y_i$

end while

Obtain \bar{X}, s_X

Esta simulación es de tipo secuencial asincrónica.

EJEMPLO 8.10

Las ventas diarias que logra un comercializador de energía en la bolsa son aleatorias en cuanto a la hora en que ocurren, la cantidad de MW y el precio final obtenido. Las distribuciones de probabilidad de estas variables son:

- Ventas de energía: Proceso de Poisson homogéneo con tasa de llegada de 10 ventas/día.
- MW vendidos: Distribución Gausiana con parámetros $\mu = 100$ MW y $\sigma = 25\%$
- \$/MW-hora: Distribución Gamma con parámetros $\alpha = 0.5$ $\beta = 10$ US/MW-hora

Hallar la distribución de probabilidad de los ingresos diarios.

PROCEDIMIENTO

$N(t)$: El proceso de llegada de los eventos (lograr una venta) en el periodo de tiempo t (1 día)

P_i : Potencia vendida en el evento i

V_i : Valor de la energía en el evento i

$X(t)$: Ingreso bruto en el periodo de tiempo t (1 día). Es un proceso de Poisson compuesto

1. $t = 0$
2. Generar un tiempo x entre arribo de ventas
3. El tiempo de arribo de la venta i está dado por: $t_i = t_{i-1} + x$
4. Si $t \geq 1$ día termina esta iteración. Ir al paso 8.
5. Generar un valor de potencia vendida P_i
6. Generar un valor de precio para la energía vendida V_i
7. si $t < 1$ día volver al paso 1
8. Calcular la venta diaria: $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} P_i * V_i$
9. Repetir hasta un número dado de iteraciones u otro criterio de parada

Ejecute en Matlab el programa probejesim4.m para varios números de iteraciones y cambiando la instrucción de re-inicio de la generación de los números aleatorios

8.11 SUPERPOSICIÓN DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS PUNTALES

8.11.1 Descripción

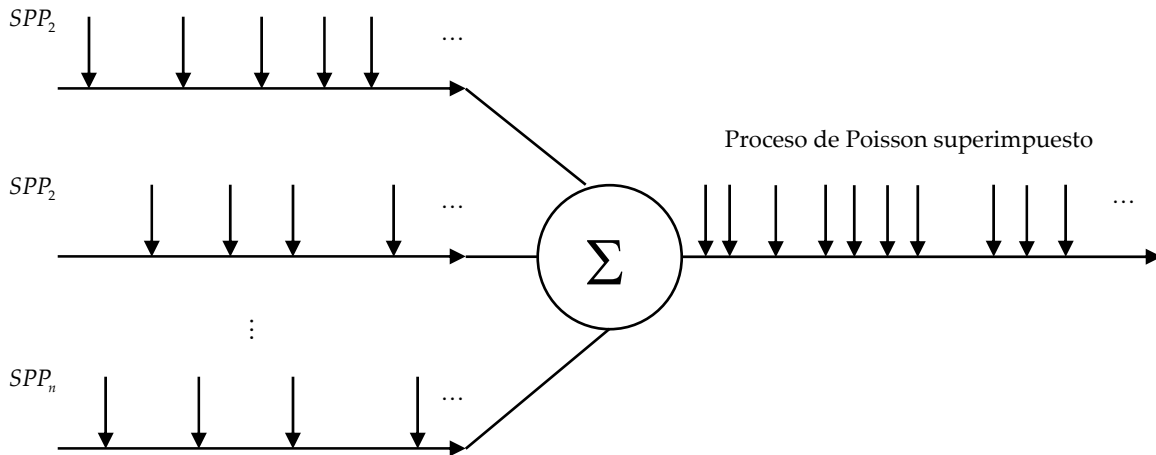


Figure 8.8 Superposición de procesos estocásticos puntuales

La operación matemática de sumar varios procesos estocásticos puntuales se denomina “superposición” y su resultante es otro proceso estocástico puntual llamado proceso de Poisson superimpuesto.

Muchos de los procesos estocásticos puntuales que aparecen en las aplicaciones prácticas son procesos de Poisson superimpuestos.

Aunque analíticamente se puede obtener fácilmente la función de intensidad y el valor esperado de un proceso superimpuesto a partir de las correspondientes funciones de los procesos puntuales que lo componen, con excepción del caso de superposición de procesos de Poisson homogéneos, nada puede decirse en los otros casos del tipo de proceso resultante de la superposición.

8.11.2 Valor esperado

Si n procesos estocásticos puntuales independientes se superponen, el número de eventos que llegan en un periodo de tiempo t es $N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \dots + N_n(t)$ y su valor esperado:

$$E[N(t)] = E[N_1(t)] + E[N_2(t)] + \dots + E[N_n(t)]$$

8.11.3 Función de intensidad

$$E[N(t)] = \int_0^t \lambda(t) dt \quad \rightarrow \quad \lambda(t) = \frac{dE[N(t)]}{dt}$$

$$\frac{dE[N(t)]}{dt} = \frac{dE[N_1(t)]}{dt} + \frac{dE[N_2(t)]}{dt} + \dots + \frac{dE[N_n(t)]}{dt}$$

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_n(t)$$

8.11.4 Superposición de procesos de Poisson homogéneos

Si se tienen n fuentes independientes de Poisson de tipo HPP, cada una con tasa de ocurrencia de eventos λ_i , el proceso resultante de la superposición de estas fuentes, también es un HPP con la siguiente tasa de ocurrencia de eventos:

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

8.11.5 Propiedad de descomposición del proceso de Poisson homogéneo

Si una fuente de Poisson homogénea con tasa de ocurrencia de eventos λ alimenta n ramas, tomando cada una de las ramas con probabilidades independientes p_1, p_2, \dots, p_n , entonces, el proceso de llegada de eventos a la rama i es un HPP con tasa $\lambda * p_i$.

Las probabilidades p_i se pueden obtener de estadísticas aplicando la definición de frecuencia relativa o de otro modelo probabilístico.

8.11.6 Como obtener el modelo de un proceso superimpuesto

Aunque analíticamente solo se conoce la solución para la superposición de procesos de Poisson homogéneos, en la práctica si se dispone de una muestra de datos de un proceso superimpuesto, lo que se hace es ajustarle un modelo matemático mediante los análisis de tendencia, estimación de parámetros y prueba de bondad de ajuste descritos en una sección anterior.

EJEMPLO 8.11

Según la referencia [21], la tasa de fallas de un transformador de distribución típico de 33 kV es de 0.0064 fallas cada año. El sistema de distribución local (SDL) que se estudió tenía 39 de estos equipos.

- Si el proceso de ocurrencia de las fallas en cada uno de los transformadores de 33 kV es un HPP, cuál es la tasa de llegada fallas que observa el operador del sistema para el grupo de 39 equipos?

$$\lambda = 39 * 0.0064 = 0.2496 \text{ [fallas/año]}$$

- Cuál es el tiempo esperado para que ocurra una falla en este grupo de transformadores?

$$E[t_1] = 1/0.2496 = 4.0064 \text{ [años]}$$

- Probabilidad de llegada de fallas al grupo de 39 equipos en diferentes periodos de tiempo:

$$P[N(t) = k] = \frac{1}{k!} [0.2496t]^k * e^{-0.2496t}$$

k [Fallas]	t [años]		
	1	5	10
0	0.7791	0.2870	0.0824
1	0.1944	0.3582	0.2057
2	0.0242	0.2235	0.2567
3	0.0020	0.0930	0.2135
4	0.0001	0.0290	0.1332

8.12 RELACIÓN ENTRE PROCESOS PUNTUALES Y CADENAS DE MARKOV CONTINUAS

La transición entre dos estados i y j de una cadena de Markov es producida por un proceso estocástico puntual de la misma función de intensidad que la tasa de transición entre estos estados.

Si la cadena de Markov es homogénea, el proceso puntual que genera la transición entre los estados i y j es un proceso de renovación donde los tiempos inter-arribo tienen la misma distribución de probabilidad de los tiempos de transición entre estos estados.

En forma general:

Un proceso de Markov continuo en el tiempo y con n estados discretos, es producido por n procesos puntuales o fuentes de eventos.

En el caso en que de un estado del proceso de Markov hay conexión a otros k estados (tasas de transición que salen), la fuente de procesos puntuales de este estado se descompone en k fuentes de procesos puntuales una para cada transición. Solo es fácil resolver esta descomposición para el caso en que todos los procesos de renovación que intervienen son exponenciales.

EJEMPLOS

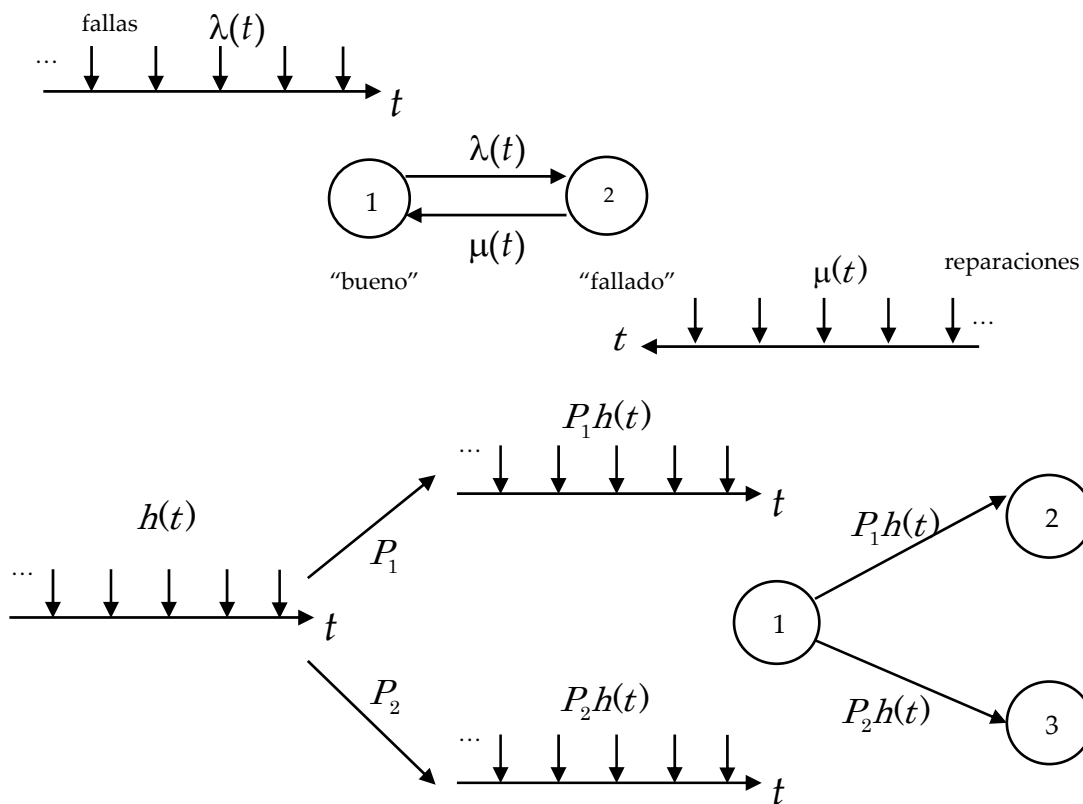


Figura 8.9 Procesos de renovación que producen procesos de Markov homogéneos

8.13 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Pazos J. J, Suárez A, Díaz R. P, “Teoría de colas y simulación de eventos discretos”, Pearson – Pentice may, 2003.
- [2] Kogan V. I, Jones T. L, “An explanation for the decline in the URD cable failures and associated nonhomogeneous Poisson process”, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 9, No. 1, January, 1994.
- [3] Kogan V. I, Gursky R. J, “Transmission towers inventory”, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 11, No. 4, October, 1996.
- [4] Ascher H. E, Hansen Christian K, “Spurious exponentiality observed when incorrectly fitting a distribution to nonstationary data”, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 47, No. 4, December 1998.
- [5] Gaudoin O, “Optimal properties of the Laplace trend test for software reliability models”, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 41, No. 4, December 1992.
- [6] Park W. J, Kim Y. G, “Goodness-of-fit tests for the power law process”, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 41, No. 1, March 1992.
- [7] Klefsjo B, Kumar U, “Goodness-of-fit tests for the power law process based on the TTT plot”, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 41, No. 4, December 1992.
- [8] Park W. J, Kim Y. G, “More goodness-of-fit tests for the power law process”, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 43, No. 2, June 1994.
- [9] Stillman R. H, “Modeling failure data of overhead distribution systems”, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 15, No. 4, October 2000.
- [10] Zapata C. J, Cataño D, Suárez H. F, “Índices de confiabilidad de transformadores de distribución”, Revista Mundo Eléctrico, No. 57, 2004.
- [11] Rao K. R. M, Prasad P. V. N, “Graphical methods for Reliability of repairable equipment and maintenance planning”, Proceedings of Annual Reliability and Maintainability Symposium, IEEE, 2001.
- [12] Choy S, English J. R, Landers T, Yan L, “Collective approach for modeling complex system failures”, Proceedings of Annual Reliability and Maintainability Symposium, IEEE, 1996.
- [13] Grall A, Dieulle L, Berenger C, Roussignol M, “Continuous-time predictive-maintenance scheduling for a deteriorating system, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 51, No. 2, June 2002.
- [14] Ascher H, Feingold H, “Repairable systems reliability: Modeling, inference, misconceptions and their causes”, Marcel Dekker, 1984.
- [15] Rigdon S. E, Basu A. P, “Statistical methods for the reliability of repairable systems”, Wiley, 2000.

- [16] International Electrotechnical Commission, “Power law model – Goodness-of-fit test and estimation methods”, Standard 61710, 2000.
- [17] C. J. Zapata, “Aplicaciones del proceso de Poisson en Confiabilidad”, Revista Scientia et Technica, No. 20, Universidad Tecnológica de Pereira, 2002.
- [18] Torres A, “Probabilidad, variables aleatorias, confiabilidad y procesos estocásticos en ingeniería eléctrica”, Universidad de los Andes, 1996.
- [19] Law Averill M, Kelton W. David, “Simulation modeling and analysis”, Tercera edición, Mc-Graw Hill, 2000.

CAPÍTULO 9 – SIMULACIÓN DE MONTECARLO

9.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE SIMULACIÓN

9.1.1 Definiciones

Se denomina simulación al proceso de evaluar en forma numérica, indirecta o artificial un modelo matemático que permite estimar el comportamiento de un sistema o proceso.

Se denomina simulación de Montecarlo al experimento de generar números aleatorios de cualquier distribución de probabilidad o proceso estocástico para evaluar en forma numérica, indirecta o artificial un modelo matemático que permite estimar el comportamiento de un sistema o proceso que involucra variables estocásticas.

El nombre “Montecarlo” proviene del principio de “suerte” o “azar” del procedimiento, similar al de los juegos de azar que hicieron famosa a la ciudad del mismo nombre.

De estas definiciones es claro que para simular primero se debe obtener el modelo matemáticos que describen el fenómeno bajo estudio.

Otra forma de simulación es aquella donde se construye un modelo físico (“iconic model”) del sistema o proceso bajo estudio.

9.1.2 Justificación

En general, se utilizan procedimientos de simulación cuando:

1	Obtener la solución analítica o directa de un modelo matemático es muy complicado o imposible.
2	No se puede o no se desea experimentar en forma directa con el sistema o proceso bajo estudio.
3	Obtener observaciones (datos) de una variable aleatoria o proceso aleatorio es complicado o imposible

9.1.3 La técnica de simulación versus la técnica analítica

Comparación de ventajas y desventajas			
Ítem		Técnica analítica	Técnica de simulación
1	Método de solución	Directo	Indirecto
2	Tiempo para solución	Generalmente corto	Generalmente muy largo
3	Resultados	Fijos	Depende del procedimiento de simulación y del número de iteraciones
4	Modelo utilizado	Generalmente simplificado	No importa el tamaño o complejidad
5	Número de salidas	Limitado	Ilimitado
6	Capacidad de solución	En algunos casos no hay solución	Ilimitado
7	Adiciones al modelo	Implica resolver de nuevo	Se incorporan fácilmente

Sin embargo, es el tipo de problema bajo estudio el que define si una técnica analítica o de simulación es el mejor método de solución.

9.1.4 Tipos de simulación

Una clasificación de los tipos de simulación es:

1	Estática o dinámica	Estática	Es una representación del sistema o proceso bajo estudio en un tiempo particular o es una representación en la cual el tiempo no desempeña ningún papel.
		Dinámica	Es una representación de un sistema o proceso que evoluciona con el tiempo. Generalmente, se expresa el modelo matemático por medio de ecuaciones diferenciales.
2	Determinística o estocástica	Determinística	El modelo no considera variables aleatorias
		Estocástica	El modelo considera variables aleatorias
3	Discreta o continua	Discreta	Las variables del modelo son de tipo discreto
		Continua	Las variables del modelo son de tipo continuo
4	Secuencial o no secuencial	Secuencial	Los números aleatorios que se generan conforman secuencias que definen otras variables
		No secuencial	Los números aleatorios que se generan no conforman secuencias para definir otras variables
5	Secuencial sincrónica	Sincrónica	El paso del reloj de la simulación es fijo, por ejemplo cada hora, cada día, cada semana, etc.
	Secuencial asincrónica	Asincrónica	El paso del reloj de la simulación es variable y se determina según un evento, por ejemplo, cada que falla un componente

Una aplicación de simulación puede involucrar varios de los tipos de simulación presentados.

Otras clasificaciones de los tipos de simulación aparecen en las referencias bibliográficas, la presentada aquí no constituye un inventario riguroso.

El tipo de simulación de Montecarlo más utilizado es el estático no secuencial.

9.2 PASOS EN UN ESTUDIO DE SIMULACIÓN

1	Definir el modelo matemático del sistema o proceso bajo estudio o los modelos matemáticos de los subcomponentes o subprocesos que lo conforman
2	Definir la secuencia operativa del sistema o proceso
3	Desarrollar el software de simulación y verificarlo
4	Definir los casos de estudio
5	Realizar las simulaciones o “corridos” de cada uno de los casos de estudio
6	Procesar las salidas de cada simulación: Estadísticas descriptivas, gráficas de los resultados, ajuste a distribuciones de probabilidad, etc.
7	Conclusiones y recomendaciones

No existe un procedimiento único para desarrollar los algoritmos de simulación pues:

1	Los diversos sistemas y procesos tienen secuencias operativas diferentes
2	Para un mismo sistema o proceso se pueden desarrollar diferentes procedimientos de simulación que lleguen a los mismos resultados
3	Los procedimientos pueden cambiar de acuerdo con los resultados que se buscan con el estudio de simulación

Por lo tanto, en este texto se presentan ejemplos típicos que ilustran cómo se desarrollan los algoritmos de simulación y como tratar los problemas bajo estudio.

9.3 GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

La base del método de simulación de Montecarlo es la generación de números aleatorios. Los números aleatorios de cualquier distribución se generan utilizando números aleatorios uniformes, designados con la letra U , que deben cumplir las siguientes propiedades:

1	Uniformidad	Pertenecen a una distribución de probabilidad uniforme definida entre 0 y 1
2	Independencia	Los números generados no tienen relación entre si

La mayoría del software aplicativo tiene rutinas para generar los números aleatorios uniformes, por lo cual, en este texto se asume que se cuenta con dicha facilidad; en caso contrario, se recomienda consultar [1], la cual presenta algoritmos para generar estos números.

Una vez se cuenta con un número aleatorio uniforme U , se puede generar una observación de la variable aleatoria de interés de la siguiente forma:

1	<p>Toda función de distribución de probabilidad o proceso estocástico evaluado en cualquier valor x es igual a un número entre 0 a 1 (la probabilidad), por lo cual:</p> $F_x(x) = U \quad F_{x,t}(x,t) = U$ <p>También se puede resolver $P[x > x_0] = 1 - F_x(x) = U$</p>
2	<p>Entonces, se puede obtener artificialmente una observación de la variable x hallando la función inversa de la distribución de probabilidad:</p> $x = F_x^{-1}(U) \quad x(t) = F_{x,t}^{-1}(U)$

El paso 2 se denomina “método de transformación inversa”. Este paso solo se puede aplicar a funciones de distribución de probabilidad que tengan solución analítica; en caso contrario se debe recurrir a otros métodos como composición, aceptación – rechazo y convolución que se presentan en [1].

En la Tabla 1 se presentan algunas transformaciones inversas.

Actualmente, la mayoría del software aplicativo tiene funciones para generar números aleatorios de las distribuciones de probabilidad más comunes, entre ellas las que no tienen solución analítica como la normal, log-normal, Gamma, Beta, etc.

En este texto se asume que se dispone de la transformación inversa para todas las distribuciones de probabilidad y sin importar el método mediante el cual se obtienen la operación de obtener el número aleatorio de la distribución se designa como $x = F_x^{-1}(U)$.

Tabla 9.1 Algunas transformaciones inversas

Distribución	Número aleatorio generado
Uniforme	$x = a + (b - a)U$
Exponencial	$x = \frac{-1}{h} \text{LN}(1-U) = \frac{-1}{h} \text{LN}(U)$
Weibull	$x = \alpha[-\text{LN}(U)]^{1/\beta}$
Normal	$z_1 = [-2\text{LN}(U_1)]^{1/2} \cos(2\pi U_2)$ $z_2 = [-2\text{LN}(U_1)]^{1/2} \sin(2\pi U_2)$ z_1 y z_2 son independientes. Los x_i se obtienen como: $x_i = z_i \sigma + \mu$

Los generadores de números aleatorios utilizan un valor inicial o “semilla” a partir se genera una secuencia de números uniformes e independientes.

Si esta semilla se conserva, siempre se generaran los mismos números en el mismo orden, por lo cual los resultados de la simulación que los utilice serán los mismos. Si se desean resultados diferentes en cada corrida de una simulación, no se debe reiniciar la generación de números aleatorios o si el generador de números aleatorios lo permite, cambiar la semilla.

El generador de números aleatorios puede consistir en una tabla de números aleatorios uniformes independientes. Algunos textos presentan este tipo de tablas.

9.4 PROCEDIMIENTO DE SIMULACIÓN

9.4.1 Iteraciones o realizaciones

Se define como una iteración cada recorrido en el procedimiento de simulación de la secuencia operativa del sistema o proceso bajo estudio.

En cada iteración se obtiene una “realización” del fenómeno aleatorio bajo estudio, por lo cual, debe realizarse otras iteraciones para obtener otras realizaciones diferentes.

Dependiendo del tipo de simulación y del sistema o proceso bajo estudio, una iteración puede llevar a la generación de otras sub-iteraciones.

9.4.2 Salidas

Se denominan como salidas de la simulación las variables de estado o variables de interés del sistema o proceso bajo estudio.

Cada que se cumple una iteración, se tiene una observación o estimado de las salidas.

Una vez se termina la simulación, se tiene una muestra de datos para cada variable de interés. A partir de esta muestra de datos se puede:

1	Calcular las estadísticas descriptivas como el valor promedio y la desviación muestral
2	Ajustar los datos a una distribución de probabilidad o un proceso estocástico

9.4.3 Tipos de simulación de acuerdo con su duración

Terminating simulation	Existe un evento natural que especifica la duración de cada corrida de la simulación. Por ejemplo, en una simulación secuencial la regla de parada puede ser el periodo de tiempo del estudio: 1 año, 8760 horas, 24 horas, etc.
Non Terminating simulation	No existe un evento natural que especifique la duración de cada corrida de la simulación. Entonces, se deben establecer reglas de parada sobre las salidas para determinar cuando se debe parar la simulación.

Una simulación puede ser de tipo “terminating” o “non terminating” dependiendo de los objetivos del estudio.

También se pueden combinar ambos tipos de simulación; ejemplo de esto son las simulaciones de tipo secuencial que se ejecutan en los sistemas de potencia.

9.4.4 Reglas de parada

Algunas reglas de parada muy utilizadas son:

Número pre-especificado de iteraciones	n	Es un criterio muy utilizado pero es ineficiente en cuanto al tiempo de computo requerido
Coefficiente de variación estadístico de una(s) variable(s) de interés	Para una variable de salida x , se calcula a partir de la segunda iteración como: $cv_x = \frac{s_x}{\bar{x}\sqrt{n}}$	Valores típicos de 5% y 6%.
Varianza de una(s) variable(s) de interés	Para una variable de salida x , se calcula a partir de la segunda iteración como: $v_x = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$	Valores típicos de 5% y 6%

Otros criterios de parada se presentan en [1]. Entre los métodos para reducir el número de iteraciones requerido o acelerar la convergencia de una simulación se encuentran:

1	Importance sampling
2	Stratified sampling
3	Antithetic variates

9.4.5 Estabilidad de la simulación

En simulaciones de tipo “non terminating” se presentan dos casos para analizar la estabilidad de la simulación:

- **Observaciones de una variable aleatoria**

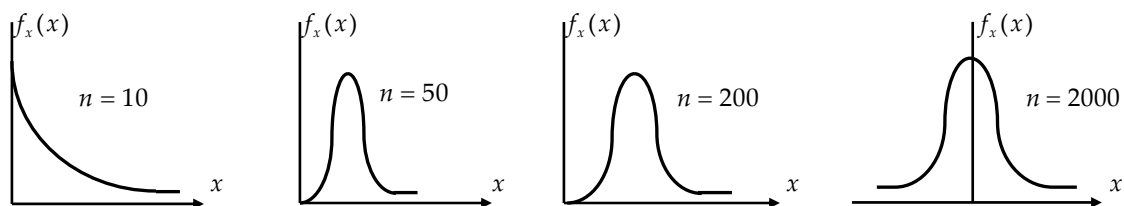


Figura 9.1 Estabilidad de una simulación de observaciones de una variable aleatoria

En este caso, la estabilidad de la simulación se refiere al hecho de que al aumentar el número de iteraciones, el conjunto de observaciones de la salida bajo estudio se estabilizará sobre una misma distribución, no necesariamente sobre un mismo valor. La Figura 9.1 ilustra estos conceptos, aclarando que la distribución de estado estable puede ser cualquier distribución, no necesariamente la Gaussiana.

Es posible que no exista una distribución de estado estable para una salida. Esto depende del sistema o proceso bajo estudio y del modelamiento. El que exista una distribución de estado estable para una salida no significa que necesariamente se pueda ajustar a una distribución teórica.

- **Observaciones de un valor esperado**

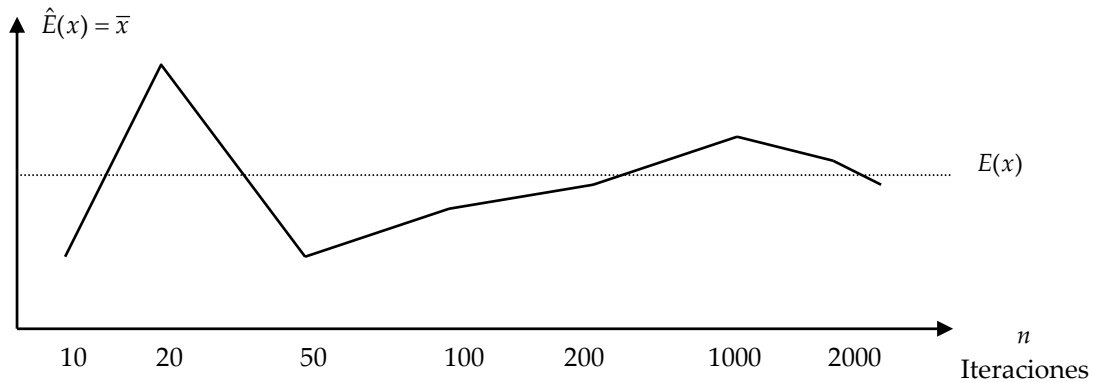


Figura 9.2 Estabilidad de una simulación para un valor esperado

En este caso la estabilidad está dada por el hecho de que al aumentar el número de iteraciones, el valor promedio de la salida bajo estudio converge al valor esperado verdadero, por la Ley Fuerte de los Grandes Números, tal como se muestra en la Fig. 9.2.

Se pueden ajustar las observaciones de la variable bajo estudio a una distribución de probabilidad. Sin embargo, si el número de iteraciones es muy alto y el coeficiente de variación muy reducido, no es posible obtener tal distribución, pues todas las observaciones convergen en un único valor.

9.5 CÓMO OBTENER FUNCIONES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Cuando analíticamente no es posible o es muy complicado obtener la distribución de una variable que es función de otras variables aleatorias, la simulación de Montecarlo es el método a aplicar.

El procedimiento consiste en generar números aleatorios de las distribuciones de cada una de las N variables independientes x_1, x_2, \dots, x_N los cuales se reemplazan en la función de la variable a evaluar $z = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Esto se repite n veces hasta que se obtenga la distribución de estado estable de la variable de interés.

En términos de programación, esto es:

```

for i=1 to n
  Generate  $U_{1i}, U_{2i}, \dots, U_{Ni}$ 
  Obtain  $x_{1i} = F_{x1}^{-1}(U_{1i})$   $x_{2i} = F_{x2}^{-1}(U_{2i})$   $\dots$   $x_{Ni} = F_{xN}^{-1}(U_{Ni})$ 
  Calculate  $z_i = f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Ni})$ 
end for

Obtain  $\bar{z}, s_z, F_Z(z)$ 

```

Esta simulación es de tipo NO secuencial porque la variable de salida no es el resultado de acumular los valores obtenidos para otras variables aleatorias.

EJEMPLO 1: POTENCIA DE SALIDA DE UNA TURBINA EÓLICA

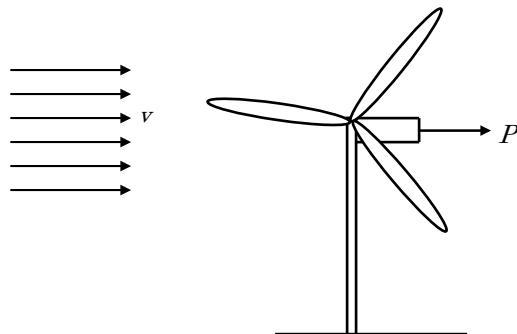


Figura 9.3
Generador eólico

Un generador eólico tiene las siguientes características:

Potencia nominal	R	15	kW
Velocidad nominal	v_r	15	m/s
Velocidad mínima operativa	v_i	9	m/s
Velocidad máxima operativa	v_o	41	m/s
Factor de la ecuación de potencia	m	2.0	

La potencia de salida P como función de la velocidad del viento v está dada por [8]:

$P(v)$ [kW]	Viento [m/s]
0	$v < v_i$
$k_1 + k_2 * v^m$	$v_i \leq v < v_r$
R	$v_r \leq v < v_o$
0	$v \geq v_o$

Donde:

$$k_1 = \frac{R * v_i^m}{v_i^m - v_r^m} \quad k_2 = \frac{R}{v_r^m - v_i^m}$$

La distribución de probabilidad de la velocidad del viento en la zona donde se piensa instalar el generador eólico es Gamma con parámetro de forma $\alpha = 2.5$ y parámetro de escala $\beta = 6$ m/s.

Cuál es la distribución de probabilidad de la potencia que se puede generar?

PROCEDIMIENTO

Este problema corresponde a una simulación no secuencial.

En la salida se va a observar una variable aleatoria.

No existe un evento que determine la finalización de la simulación. Se deben hacer iteraciones hasta que se encuentre la distribución de estado estable de la potencia de salida.

1. Generar una velocidad del viento v_i a partir de la distribución Gamma
2. Según la magnitud de v_i , calcular p_i utilizando la ecuación que corresponda:

$P(v)$ [kW]	viento
0	$v < v_i$ ó $v \geq v_o$
Ver histograma	$v_i \leq v < v_r$
R	$v_r \leq v < v_o$

Ejecute en Matlab el programa probejesim1.m para varios números de iteraciones y cambiando la instrucción de re-inicio de la generación de los números aleatorios

9.6 OBTENER LA SALIDA DE UN PROCESO ALEATORIO

En este caso, se quiere obtener artificialmente datos u observaciones de una variable que es resultado de un proceso o procedimiento donde hay involucradas variables aleatorias. El proceso aleatorio bajo estudio no se puede describir por un conjunto sencillo de ecuaciones.

El procedimiento consiste en generar números aleatorios utilizando las distribuciones de probabilidad o procesos estocásticos involucradas en el proceso aleatorio bajo estudio y estos datos se entran al procedimiento que sigue el proceso aleatorio.

EJEMPLO 2: SOBREVOLTAJE DEBIDO A DESCARGAS ATMOSFÉRICAS

Un fabricante de pararrayos desea verificar el desempeño de un nuevo equipo. El parámetro más importante a verificar es la capacidad de disipación de energía cuando el pararrayos es sometido a descargas atmosféricas sucesivas.

En esta investigación, primero se construye un modelo matemático del equipo para validar los parámetros de diseño. Con base en los resultados de este primer estudio se construirá un modelo físico al cual se le harán pruebas de laboratorio.

A continuación se presenta el modelamiento para el estudio teórico:

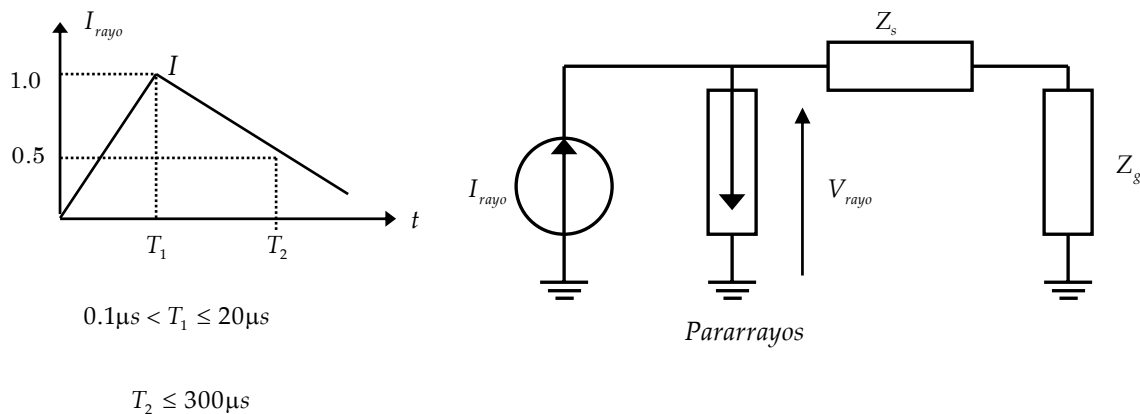


Figura 9.4 Modelo matemático para estudios de descargas atmosféricas

La corriente de descarga de los rayos se modela como una fuente de corriente cuya forma de onda se muestra a la izquierda; I es la corriente pico de descarga que corresponde a una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad es:

$$P[I > I_0] = \frac{1}{1 + \left(\frac{I_0}{I_{prom}}\right)^m}$$

donde I_{prom} y n son factores experimentales obtenidos en varias investigaciones. Por ejemplo, Anderson reporta $I_{prom} = 31$ kA y $m = 2.6$. I_0 tiene unidades de [kA].

Como pueden ocurrir varias descargas atmosféricas sucesivas, se tiene un proceso de llegada de eventos; entonces, la fuente de corriente mostrada es una fuente de Poisson. Y cada que llega una descarga atmosférica, se deben determinar su forma de onda (T_1 y T_2) y su corriente pico (I).

La línea de transmisión se modela mediante las impedancias impulso de fase (Z_f) y de tierra (Z_g). Para cada descarga atmosférica que llega, se debe determinar el sobrevoltaje que aparece (V_{rayo}). Con este voltaje en varias descargas sucesivas, se evalúa el comportamiento térmico del pararrayos.

Como se pueden obtener artificialmente observaciones de descargas atmosféricas para este estudio?

- El proceso de llegada de las descargas se puede modelar como un proceso de Poisson homogéneo cuya tasa de eventos está dada por el número de descargas por periodo de tiempo. En este caso, el periodo de tiempo tiene que definirse en una escala apropiada para un estudio de transitorios eléctricos.

Asumiendo una tasa de eventos $\lambda = 2$ [descarga/hora]. Este dato se puede hallar de estadísticas.

- La forma de onda de la fuente de corriente se puede modelar mediante dos distribuciones uniformes:

$$\text{Para } T_1 : a = 0.2\mu s \text{ y } b = 20\mu s$$

$$\text{Para } T_2 : a = T_1 \text{ y } b = 300\mu s$$

PROCEDIMIENTO

1. Generar un número aleatorio U y convertirlo en un tiempo x entre arribo de descargas atmosféricas:

$$x = \frac{-1}{\lambda} \ln(U) \quad [\text{Horas}]$$

2. El tiempo de arribo de la descarga i está dado por: $t_i = x_{i-1} + x_i$

3. Generar un número aleatorio U y convertirlo en un tiempo T_1 de la forma de onda de la corriente de descarga

$$T_1 = 0.1 + (20 - 0.1)U \quad [\mu s]$$

Si $T_1 = 0.1\mu s$ se repite este paso.

4. Generar un número aleatorio U y convertirlo en un tiempo T_2 de la forma de onda de la corriente de descarga

$$T_2 = T_1 + (300 - T_1)U \quad [\mu s]$$

Si $T_2 = T_1$ se repite este paso

5. Generar un número aleatorio U y convertirlo en una corriente pico de descarga

$$I = \left(\frac{1}{U^{1/2.6}} - 1 \right) * 31 \quad [kA]$$

En este problema no hay especificado un evento o regla de parada, pues depende de otros criterios del estudio; Aquí solo se considera el proceso para simular la fuente de descargas atmosféricas. Las salidas corresponden a observaciones de variables aleatorias

Resultados para 10 iteraciones:

i	x_i [horas]	t_i [horas]	T_1 [μs]	T_2 [μs]	I [kA]
1	0.4687	0.4687	5.1304	109.6269	3.7525
2	0.2148	0.6835	18.8019	252.9834	10.4463
3	0.2311	0.9146	1.2579	163.2321	10.9401
4	0.0736	0.9882	17.1184	150.7109	2.9928
5	0.2108	1.199	0.8360	94.3410	9.6316
6	1.6307	2.8298	4.626	101.4741	1.2894
7	0.5796	3.4094	5.1084	132.7932	2.114
8	0.8451	4.2545	10.2128	141.266	16.7308
9	0.4837	4.7381	17.741	232.6137	1.5088
10	0.3911	5.1292	16.0041	54.0815	57.5379

Las 10 iteraciones corresponden a la llegada de 10 descargas atmosféricas en un proceso de Poisson. Este tipo de simulación es estática, secuencial.

Si se repiten estas mismas 10 iteraciones generando los números aleatorios uniforme con una nueva semilla, los resultados serán diferentes.

Si se aumenta el número de iteraciones de la simulación, se tendrán mayores observaciones de las variables de salida de la simulación. Si a estas observaciones, se les aplica el procedimiento de ajuste a una distribución de probabilidad, se obtiene la misma distribución de la cual fueron generadas; sin embargo, esto no tiene sentido, lo que se desea es generar en forma aleatoria una secuencia de llegada de descargas atmosféricas para estudiar la energía que debe disipar el pararrayos.

Ejecute en Matlab el programa probejim5.m para varios números de iteraciones y cambiando la instrucción de re-inicio de la generación de números aleatorios.

9.7 SIMULACIÓN SECUENCIAL EN UN SISTEMA CONTINUAMENTE OPERADO

Se presentan dos algoritmos básicos para realizar estudios de confiabilidad en sistemas continuamente operados.

9.7.1 Método 1

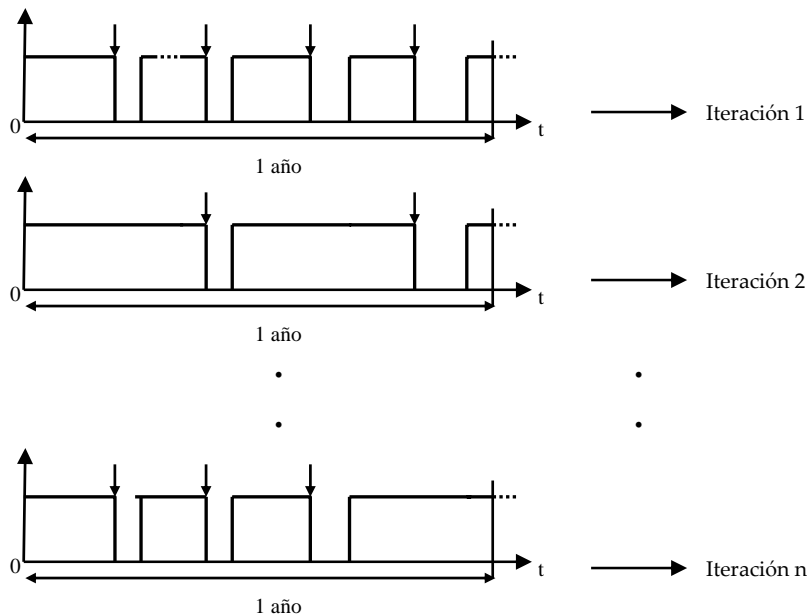


Figura 9.5 Simulación secuencial en un sistema continuamente operado

En este método se simula la operación del sistema durante un periodo de tiempo de interés T , generalmente 1 año, el cual se denomina un “escenario”. Este procedimiento se repite n veces o iteraciones con las cuales se obtiene una muestra para cada una de las salidas. Dentro de cada iteración se ejecuta un número aleatorio de sub-iteraciones.

PROCEDIMIENTO

1. $t_i = 0$
2. Generar un tiempo para falla t_{tf} para cada uno de los componentes a partir de su correspondiente distribución de probabilidad
3. Determinar el componente x con menor tiempo para falla y hacer $t = t + \min(t_{tf})$
4. Si t es mayor o igual a 1 año, no hay falla en el sistema en esta iteración. Ir al paso 8.
5. Generar un t_{tr} utilizando la correspondiente distribución de probabilidad del componente x
6. Calcular el tiempo acumulado de operación del sistema: $t_i = t_{i-1} + t_{tf} + t_{tr}$
7. Determinar el efecto de la falla sobre el sistema: Usuarios desconectados, demanda no servida (MW, MW-h), pérdida de producción, violación de las condiciones operativas (calidad de la potencia,

seguridad, sobrecargas, etc.). La valoración de este último aspecto puede requerir ejecutar otras funciones como flujo de carga, flujo de carga armónico, etc.

8. Acumular los índices de desempeño del sistema: Número de fallas en los puntos de carga, horas de indisponibilidad en los puntos de carga, pérdida de producción, demanda no servida, número de violaciones de voltaje, etc.
9. Si $t_i < 1$ año volver al paso 2
10. Si $t_i \geq 1$ año se ha simulado un año de operación del sistema. Se considera que esta es una iteración. Ajustar el último ttf o ttr para que el tiempo total t sea igual a 1 año y volver al paso 1.
11. Repetir hasta un número pre-especificado de iteraciones u otro criterio de parada
12. Procesar datos de cada salida: histograma, estadísticas descriptivas, ajuste a una distribución.

9.7.2 Método 2

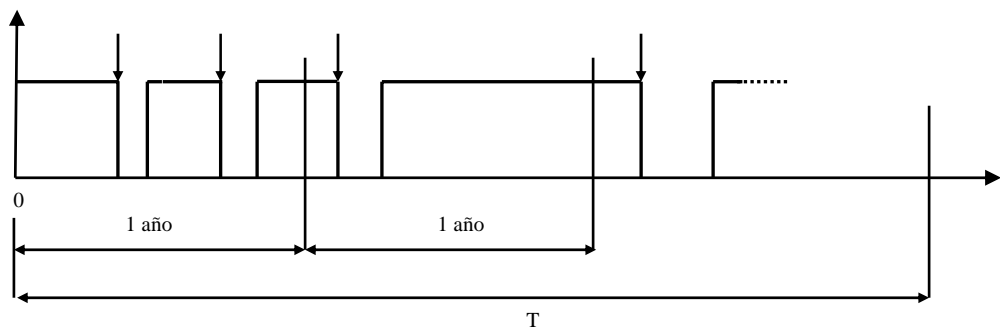


Figura 9.6 Simulación secuencial en un sistema eléctrico

En este método se simula la operación del sistema durante un periodo de tiempo T que cubre muchos años. Con este procedimiento se obtiene un solo dato para las salidas de interés.

PROCEDIMIENTO

1. $t_i = 0$
2. Generar un tiempo para falla ttf para cada uno de los componentes a partir de su correspondiente distribución de probabilidad
3. Determinar el componente x con menor tiempo para falla y hacer $t = t + \min(ttf)$
4. Si t es mayor o igual a T . Ir al paso 10.
5. Generar un ttr utilizando la correspondiente distribución de probabilidad del componente x
6. Calcular el tiempo acumulado de operación del sistema: $t_i = t_{i-1} + ttf + ttr$

7. Determinar el efecto de la falla sobre el sistema: Usuarios desconectados, demanda no servida (MW, MW-h), pérdida de producción, violación de las condiciones operativas (calidad de la potencia, seguridad, sobrecargas). La valoración de este último aspecto puede requerir ejecutar otras funciones como flujo de carga, flujo de carga armónico, etc.
8. Acumular los índices de desempeño del sistema: Número de fallas en los puntos de carga, horas de indisponibilidad en los puntos de carga, pérdida de producción, demanda no servida, número de violaciones de voltaje, etc.
- 9 Si $t_i < T$ año volver al paso 2
10. Ajustar el último ttf o ttr para que el tiempo total t sea igual a T años (Esto puede omitirse, pues las salidas pueden calcularse utilizando t)
11. Calcular las salidas: Disponibilidad, horas de indisponibilidad por año, fallas por año, pérdidas de producción por año, etc:

EJEMPLO 3: SISTEMA ELÉCTRICO DE UN CAMPO PETROLERO

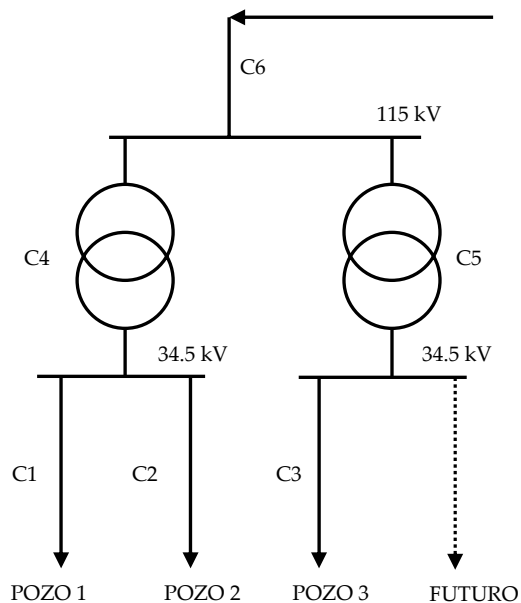


Figura 9.7 Diagrama eléctrico de un campo petrolero

Considere el sistema eléctrico de un campo petrolero que tiene tres pozos los cuales producen, cada uno, 5 barriles de petróleo por hora.

Las distribuciones de probabilidad de los equipos son:

Equipo	t_{falla}	$t_{reparacion}$
C1, C2, C3	Exponencial $h = 2$ fallas/año	Exponencial $r = 24$ horas
C4, C5	Gamma $\alpha = 2$ $\beta = 3$ años	Gamma $\alpha = 1.5$, $\beta = 108$ horas
C6	Uniforme $a = 0$ años $b = 1$ año	Exponencial $r = 48$ horas

Para un periodo de un año, estimar para cada pozo: el número de fallas del sistema eléctrico las horas de indisponibilidad anual, la cantidad de barriles que se dejan de producir.

Para el campo, estimar las pérdidas anuales si cada barril de petróleo se vende a US\$50.

- Este problema no tiene solución analítica y corresponde a una simulación secuencial.
- Existe un evento de finalización de la simulación que es cuando se alcance 1 año

Aplicar el criterio $n-1$ (Pérdida de un solo componente, no salidas simultáneas) para las salidas de los componentes.

Ejecute en Matlab el programa probejesim8.m para varios números de iteraciones y cambiando la instrucción de re-inicio de la generación de los números aleatorios.

9.8 SIMULACIÓN NO SECUENCIAL EN UN SISTEMA ELÉCTRICO

La simulación no secuencial también es útil para el estudio de sistemas eléctricos. Se utiliza básicamente en aquellos casos donde el tiempo de ocurrencia de los eventos no influye sobre las salidas bajo estudio.

Ejemplos	
1	Estudios de armónicos
2	Efecto de generación distribuida: corrientes de carga, pérdidas, corrientes de corto
3	Análisis de redes desbalanceadas
4	Flujo de carga estocástico

PROCEDIMIENTO

El procedimiento consiste en evaluar el sistema eléctrico con los métodos tradicionales (circuitos o flujo de carga) asumiendo estocástico el comportamiento de los componentes (fuentes, cargas) o los fallos (tipo y ubicación).

EJEMPLO 4: CIRCUITO DE DISTRIBUCIÓN CON CARGAS DESBALANCEADAS

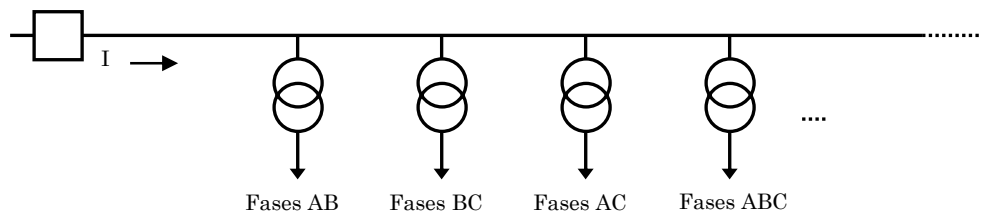


Figura 9.8 Circuito primario de distribución con cargas desbalanceadas

Un circuito primario de distribución que opera a 13.8 kV atiende cargas desbalanceadas en sus fases por medio de transformadores monofásicos (conexión fase – fase) y trifásicos. Los usuarios de este alimentador pertenecen a actividades comerciales e industriales, por lo cual no existe un patrón comportamiento similar de la demanda hora a hora.

Las distribuciones de probabilidad que describen la demanda de los usuarios son:

Carga en fases	kVA	Distribución por fases
AB	Gausiana $\mu = 1500$ $\sigma = 20\%$	Beta $\alpha_1 = 3$ $\alpha_2 = 3$
BC	Gausiana $\mu = 1500$ $\sigma = 20\%$	Beta $\alpha_1 = 3$ $\alpha_2 = 3$
AC	Gausiana $\mu = 1500$ $\sigma = 20\%$	Beta $\alpha_1 = 3$ $\alpha_2 = 3$
ABC	Gausiana $\mu = 2500$ $\sigma = 10\%$	Equiprobable

Dadas las penalizaciones por factor de potencia, puede asumirse que éste siempre es constante en 0.9. En algunos casos, la demanda puede ser negativa, pues corresponde al evento en que el usuario vende energía a la red por medio de cogeneración.

Hallar la distribución de probabilidad de la corriente I y del porcentaje de desbalance de las fases.

PROCEDIMIENTO

1. Para cada uno de los transformadores generar un valor de demanda en kVA utilizando su correspondiente distribución de probabilidad.
2. Para los transformadores monofásicos, distribuir la demanda por fase de la siguiente forma:
 - $KVA_{faseA} = KVA * B(\alpha_1, \alpha_2)$
 - $KVA_{faseA} = KVA * [1 - B(\alpha_1, \alpha_2)]$

Donde $B(\alpha_1, \alpha_2)$ es un número aleatorio generado de una distribución Beta con parámetros α_1 y α_2 .

3. Para los transformadores trifásicos distribuir la demanda por fase de la siguiente forma:
 - Generar dos números aleatorios uniformemente distribuidos U_1 y U_2
 - $KVA_{faseA} = KVA * U_1$
 - $KVA_{faseB} = KVA * (1 - U_1) * U_2$
 - $KVA_{faseC} = KVA * (1 - U_1) * (1 - U_2)$

4. Sumar la demanda en cada una de las fases

5. Calcular la corriente en cada fase del alimentador

$$I_A = \frac{\sum kVA_A}{13800/\sqrt{3}} \quad I_B = \frac{\sum kVA_B}{13800/\sqrt{3}} \quad I_C = \frac{\sum kVA_C}{13800/\sqrt{3}}$$

6. Calcular el desbalance promedio en la corriente del alimentador:

$$Desbalance = cv_I = \frac{s_I}{\bar{I}} * 100\%$$

Donde s_I e \bar{I} corresponden a la desviación estándar y el promedio estadístico de (I_A, I_B, I_C) , respectivamente. La corriente promedio \bar{I} es igual a la corriente que circularía en condiciones balanceadas (Verificar esto).

7. Repetir hasta un número dado de iteraciones

Ejecute en Matlab el programa probejesim9.m para varios números de iteraciones y cambiando la instrucción de re-inicio de la generación de los números aleatorios.

9.9 SIMULACIÓN DE EVENTOS EQUIPROBABLES

En algunos estudios se puede asumir que los eventos aleatorios que pueden ocurrir son equiprobables. Si se desea simular la ocurrencia de estos eventos, se divide la probabilidad total (1.0) entre el número de eventos. Luego se genera uno o varios números aleatorios uniformes. Dependiendo de la magnitud de estos números se selecciona el evento o eventos que ocurrieron.

EJEMPLO 5: PÉRDIDA DE COMPONENTES EN UN ESTUDIO DE SEGURIDAD

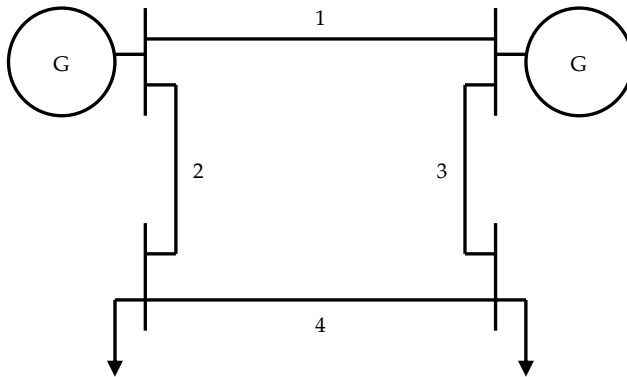


Figura 9.9 Diagrama unifilar de un sistema eléctrico de potencia

Para un análisis de seguridad del sistema eléctrico mostrado, se quiere estudiar el efecto de la salida simultánea de dos líneas de transmisión (Criterio $n-2$). El evento de salida de cualquiera de las líneas se considera igualmente probable. Cuáles líneas se deben considerar fuera de servicio?

PROCEDIMIENTO

1. Se definen los siguientes rangos de probabilidad, dividiendo la probabilidad total entre el número de eventos (componentes) que conforman el espacio muestral.

Línea	Rango de Probabilidad
L1	$0.0 \leq P \leq 0.25$
L2	$0.25 < P \leq 0.50$
L3	$0.50 < P \leq 0.75$
L4	$0.75 < P \leq 1.00$

2. Se generan dos números aleatorios uniformes independientes U_1 y U_2
3. Se determinan los dos componentes que salen. Si U_1 y U_2 caen dentro del rango de probabilidad de una misma línea de transmisión, volver al paso 2.

Ensayo	U_1	U_2	Resultado
1	0.0248	0.8193	Salen L1 y L4
2	0.9945	0.7428	Salen L3 y L4
3	0.4664	0.6496	Salen L2 y L3
4	0.5512	0.7007	Sale L3. Se descarta este ensayo.
5	0.9654	0.6290	Salen L3 y L4

9.10 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Law Averill M, Kelton W. David, "Simulation modeling and analysis", Tercera edición, Mc-Graw Hill, 2000.
- [2] Papoulis Athanasios, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", tercera edición, Mc-Graw Hill, 1991.
- [3] Viniotis Yannis, "Probability and Random Processes for Electrical Engineers", Mc-Graw Hill, 1998.
- [4] Torres A, "Probabilidad, variables aleatorias, confiabilidad y procesos estocásticos en ingeniería eléctrica", Universidad de los Andes, 1996.
- [5] Billinton R, Allan R. N, "Reliability evaluation of engineering systems – Concepts and Techniques", Segunda edición, Plenum Press, 1992.
- [6] Pazos J. J, Suárez A, Díaz R. P, "Teoría de colas y simulación de eventos discretos", Pearson – Pentice may, 2003.
- [8] Karaki S. H, Chedid R. B, Ramadan R, "Probabilistic performance assessment of wind energy conversion systems", IEEE Trans. Energy Conversion, Vol. 14, No. 2, June 1999.
- [9] CIGRE Task Force, "Sequential probabilistic methods for power system operation and planning", Electra, No. 179, 1998.
- [10] Zapata C. J, Ruíz M. Y, "Efecto de las borrascas sobre la disponibilidad de plantas de generación a filo de agua", Revista Scientia et Technica, Universidad Tecnológica de Pereira, No. 35, 2007.
- [11] IEEE, Guide for Direct Lightning Stroke Shielding of Substations, Standard 998, 1996.

CAPÍTULO 10 – ANEXOS

10.1 TABLAS DE VALORES PARA LA DISTRIBUCION GAUSIANA ESTANDAR

$$P[X \leq y] = \int_{-\infty}^y f_X(x) dx$$

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.0	.0013	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000
-2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0238	.0233
-1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0570	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

$P\{X \leq y\} = \int_{-\infty}^y f_X(x) dx$ for various y

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9430	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9648	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9874	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.	.9987	.9990	.9993	.9995	.9997	.9998	.9998	.9999	.9999	1.0000

10.2 TABLA DE VALORES PARA LA DISTRIBUCION CHI CUADRADO

Valores de χ^2_{α} *

ν	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.975$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	ν
1	0.0000393	0.000157	0.000982	0.00393	3.841	5.024	6.635	7.879	1
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548	6
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	15
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156	18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796	22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.886	10.856	12.401	13.844	36.415	39.364	42.980	45.558	24
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928	25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290	26
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645	27
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	28
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.772	49.588	52.336	29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672	30
40	20.706	22.164	24.433	26.509	55.758	59.342	63.691	66.766	40
50	27.991	29.707	32.357	34.764	67.505	71.420	76.154	79.490	50
60	35.535	37.485	40.482	43.118	79.082	83.298	88.379	91.952	60
70	43.275	45.442	48.758	51.739	90.531	95.023	100.425	104.215	70
80	51.172	53.540	57.153	60.391	101.879	106.629	112.329	116.321	80
90	59.196	61.754	65.646	69.126	113.145	118.136	124.116	128.299	90
100	67.328	70.065	74.222	77.929	124.342	129.561	135.807	140.169	100

10.3 TABLA DE VALORES PARA LA DISTRIBUCION T-STUDENT

Valores de t_{α}^*

v	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	v
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

10.4 TABLA DE VALORES CRITICOS PARA EL ESTADISTICO DE PRUEBA DE LA DISTRIBUCION KOLMOGOROV-SMIRNOV

Number of trials, n	Level of significance, α			
	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.95000	0.97500	0.99000	0.99500
2	0.77639	0.84189	0.90000	0.92929
3	0.63604	0.70760	0.78456	0.82900
4	0.56522	0.62394	0.68887	0.73424
5	0.50945	0.56328	0.62718	0.66853
6	0.46799	0.51926	0.57741	0.61661
7	0.43607	0.48342	0.53844	0.57581
8	0.40962	0.45427	0.50654	0.54179
9	0.38746	0.43001	0.47960	0.51332
10	0.36866	0.40925	0.45662	0.48893
11	0.35242	0.39122	0.43670	0.46770
12	0.33815	0.37543	0.41918	0.44905
13	0.32549	0.36143	0.40362	0.43247
14	0.31417	0.34890	0.38970	0.41762
15	0.30397	0.33760	0.37713	0.40420
16	0.29472	0.32733	0.36571	0.39201
17	0.28627	0.31796	0.35528	0.38086
18	0.27851	0.30936	0.34569	0.37062
19	0.27136	0.30143	0.33685	0.36117
20	0.26473	0.29408	0.32866	0.35241
21	0.25858	0.28724	0.32104	0.34427
22	0.25283	0.28087	0.31394	0.33666
23	0.24746	0.27490	0.30728	0.32954
24	0.24242	0.26931	0.30104	0.32286
25	0.23768	0.26404	0.29516	0.31657
26	0.23320	0.25907	0.28962	0.31064
27	0.22898	0.25438	0.28438	0.30502
28	0.22497	0.24993	0.27942	0.29971
29	0.22117	0.24571	0.27471	0.29466
30	0.21756	0.24170	0.27023	0.28987
31	0.21412	0.23788	0.26596	0.28530
32	0.21085	0.23424	0.26189	0.28094
33	0.20771	0.23076	0.25801	0.27677
34	0.20472	0.22743	0.25429	0.27279
35	0.20185	0.22425	0.26073	0.26897
36	0.19910	0.22119	0.24732	0.26532
37	0.19646	0.21826	0.24404	0.26180
38	0.19392	0.21544	0.24089	0.25843
39	0.19148	0.21273	0.23786	0.25518
40 ^b	0.18913	0.21012	0.23494	0.25205

^aValues of $d_n(n)$ such that $p(\max |F^*(x) - F(x)| > d_n(n)) = \alpha$.

^b $N > 40 = \frac{1.22}{N^{1/2}}, \frac{1.36}{N^{1/2}}, \frac{1.51}{N^{1/2}}$ and $\frac{1.63}{N^{1/2}}$ for the four levels of significance.