

Capítulo 5

A Transformada de Fourier

5.1. Introdução

A transformada de Fourier permite analisar de forma adequada funções não periódicas. A transformada de Fourier compete em algumas aplicações com a transformada de Laplace. Entretanto, a transformada de Fourier é mais útil que a transformada de Laplace em algumas aplicações relacionados com problemas de comunicações e processamento de sinais.

5.2. A forma exponencial da série de Fourier

A forma mais compacta de representar a série de Fourier assume a seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \quad (5.1)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_o t} dt \quad (5.2)$$

Provando a relação (5.1)-(5.2):

Conhecemos as seguintes relações matemáticas:

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{Cos}(n\omega_o t) + b_n \text{Sen}(n\omega_o t)] \quad (5.3)$$

com os parâmetros encontrados usando as seguintes relações:

$$a_o = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) \text{Cos}(n\omega_o t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) \text{Sen}(n\omega_o t) dt$$

Também conhecemos as seguintes relações (relacionadas com o Teorema de Euler):

$$\text{Cos}(n\omega_o t) = \frac{1}{2} [e^{jn\omega_o t} + e^{-jn\omega_o t}] \quad \text{Sen}(n\omega_o t) = \frac{1}{j2} [e^{jn\omega_o t} - e^{-jn\omega_o t}] \quad (5.4)$$

que foram obtidas da relação de Euler muito conhecida e que assume a seguinte forma:

$$e^{jn\omega_o t} = \text{Cos}(n\omega_o t) + j \text{Sen}(n\omega_o t)$$

$$e^{-jn\omega_o t} = \text{Cos}(n\omega_o t) - j \text{Sen}(n\omega_o t)$$

Substituindo (5.4) em (5.3) temos o seguinte:

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{2} [e^{jn\omega_o t} + e^{-jn\omega_o t}] + \frac{b_n}{j2} [e^{jn\omega_o t} - e^{-jn\omega_o t}] \right\}$$

Multiplicando por j o último termo da relação anterior e ordenando temos o seguinte:

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega_o t} + \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega_o t} \right] \quad (5.5)$$

Agora vamos definir c_n da seguinte forma:

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

Substituindo as relações conhecidas para a_n e b_n na relação anterior temos o seguinte:

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{T} \right) \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) \text{Cos}(n\omega_o t) dt - j \left(\frac{2}{T} \right) \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) \text{Sen}(n\omega_o t) dt \right\}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) [\text{Cos}(n\omega_o t) - j \text{Sen}(n\omega_o t)] dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) e^{-jn\omega_o t} dt \quad (5.7)$$

que é exatamente a forma matemática de (5.2).

Para encontrar a forma matemática mostrada em (5.1) devemos continuar trabalhando com a relação (5.5) e, portanto, procedemos da seguinte forma:

Inicialmente encontramos uma forma matemática para c_o e para o outro parâmetro que se encontra na relação (5.5).

De (5.7) se $n = 0$ temos o seguinte:

$$c_o = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) dt = a_o \implies a_o = c_o \quad (5.8)$$

Seja c'_n o coeficiente do segundo termo de (5.5). Assim temos o seguinte:

$$c'_n = \frac{1}{2} [a_n + jb_n]$$

$$c'_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{T} \right) \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) \text{Cos}(n\omega_o t) dt + j \left(\frac{2}{T} \right) \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) \text{Sen}(n\omega_o t) dt \right\}$$

$$c'_n = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) [\text{Cos}(n\omega_o t) + j \text{Sen}(n\omega_o t) dt] dt = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(t) e^{jn\omega_o t} dt \quad (5.9)$$

Devemos observar também que c_n e c'_n são complexos conjugados e, portanto, temos o seguinte:

$$c'_n = \frac{1}{2} [a_n + jb_n] = c_n^* \quad (5.10)$$

Substituindo (5.6), (5.8) e (5.10) em (5.5) temos o seguinte:

$$f(t) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{jn\omega_o t} + c_n^* e^{-jn\omega_o t}] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* e^{-jn\omega_o t} \quad (5.11)$$

Entretanto a seguinte relação é válida:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^* e^{-jn\omega_o t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_o t}$$

que pode ser deduzido facilmente fazendo fazendo o seguinte:

Para um n positivo, definimos como \bar{n} o simétrico negativo, isto é, $\bar{n} = -n$. Nesse contexto, fazemos o seguinte:

$$c_{\bar{n}} k_{\bar{n}} = c_n e^{j\bar{n}\omega_o t}$$

$$c_{\bar{n}} = \frac{1}{2} [a_{\bar{n}} - jb_{\bar{n}}] = \frac{1}{2} [a_n + jb_n] = c_n^*$$

$$k_{\bar{n}} = e^{j\bar{n}\omega_o t} = e^{-jn\omega_o t}$$

$$c_{\bar{n}}k_{\bar{n}} = c_n^* e^{-j n \omega_o t}$$

Assim, podemos concluir o seguinte:

$$\sum_{\bar{n}=-1}^{-\infty} c_{\bar{n}} e^{j \bar{n} \omega_o t} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* e^{-j n \omega_o t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{j n \omega_o t}$$

Também devemos observar o seguinte:

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{j n \omega_o t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{j n \omega_o t}$$

Usando as relações deduzidas a forma matemática de $f(t)$ em (5.11) assume a seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{j n \omega_o t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{j n \omega_o t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j n \omega_o t}$$

Exemplo 1: Expansão em série de Fourier na forma exponencial:

Determine a expansão em série de Fourier na forma exponencial da função periódica mostrada na figura 5.1.

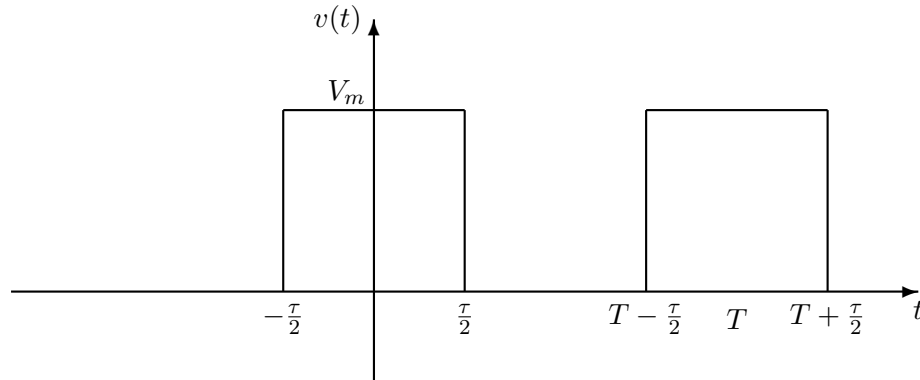


Figura 5.1: Gráfico do exemplo 5.1.

Neste exemplo simples devemos apenas calcular os coeficientes c_n usando a relação (5.2) e depois substituir o resultado na relação (5.1) para a função do exemplo 5.1 que assume a seguinte forma:

$$v(t) = V_m \quad \text{para} \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \quad \quad v(t) = v(t + T)$$

Assim, usando (5.2) encontramos os coeficientes c_n :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_m e^{-j n \omega_o t} dt = \frac{V_m}{T} \left[\frac{e^{-j n \omega_o t}}{-j n \omega_o} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{j V_m}{n \omega_o T} \left[e^{-j n \omega_o t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$c_n = \frac{jV_m}{n\omega_o T} \left[e^{-\frac{jn\omega_o\tau}{2}} - e^{\frac{jn\omega_o\tau}{2}} \right]$$

A relação anterior pode ser reduzida de forma adequada:

$$\left[e^{-\frac{jn\omega_o\tau}{2}} - e^{\frac{jn\omega_o\tau}{2}} \right] = \text{Cos} \left(\frac{n\omega_o\tau}{2} \right) - j\text{Sen} \left(\frac{n\omega_o\tau}{2} \right) - \text{Cos} \left(\frac{n\omega_o\tau}{2} \right) - j\text{Sen} \left(\frac{n\omega_o\tau}{2} \right) = -j2\text{Sen} \left(\frac{n\omega_o\tau}{2} \right)$$

$$c_n = \frac{jV_m}{n\omega_o T} \left[-j2\text{Sen} \left(\frac{n\omega_o\tau}{2} \right) \right] \implies c_n = \frac{2V_m}{n\omega_o T} \text{Sen} \left(\frac{n\omega_o\tau}{2} \right)$$

Portanto, $v(t)$ assume a seguinte forma:

$$v(t) = \frac{2V_m}{\omega_o T} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \text{Sen} \left(\frac{n\omega_o\tau}{2} \right) e^{jn\omega_o t}$$

$$v(t) = \frac{V_m\tau}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\text{Sen} \left(\frac{n\omega_o\tau}{2} \right)}{\frac{n\omega_o\tau}{2}} e^{jn\omega_o t} \right]$$

5.3. Definição da transformada de Fourier

Vamos tentar encontrar uma definição da transformada de Fourier como sendo um caso limite da série de Fourier. Lembrando que a série de Fourier na forma exponencial assume a seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \quad (5.12)$$

onde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_o t} dt \quad (5.13)$$

Para transformar uma função periódica em aperiódica podemos fazer $T \longrightarrow \infty$ o que significa que a função não se repete. Também devemos observar que quando T aumenta então a distância entre duas frequências harmônicas ($n\omega_o$ e $(n+1)\omega_o$) consecutivas se torna cada vez menor. Assim, matematicamente temos o seguinte:

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_o - n\omega_o = \omega_o = \frac{2\pi}{T} \implies \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

Da relação anterior, quando $T \longrightarrow \infty$ temos o seguinte:

$$\frac{1}{T} \longrightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$$

Portanto, quando $T \rightarrow \infty$ a frequência deixa de ser uma variável discreta e se torna uma variável contínua. Assim, temos o seguinte:

$$n\omega_o \rightarrow \omega \text{ quando } T \rightarrow \infty$$

Observando a relação (5.13) verificamos que c_n também varia inversamente com T . Assim, quando $T \rightarrow \infty$ então $c_n \rightarrow 0$. Entretanto, o valor limite do produto $c_n T$ assume a seguinte forma:

$$c_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{quando} \quad T \rightarrow \infty \quad (5.14)$$

A integral mostrada na relação (5.14) é chamada de **transformada de Fourier** de $f(t)$ e pode ser representada da seguinte forma:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.15)$$

Também podemos encontrar uma relação para a transformada inversa de Fourier analisando a forma limite da relação (5.12) quando $T \rightarrow \infty$. Assim, multiplicamos e dividimos o segundo membro por T e temos o seguinte:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} [c_n T] e^{jn\omega_o t} \left(\frac{1}{T} \right)$$

Quando $T \rightarrow \infty$ então o somatório tende a uma integral, $c_n T \rightarrow F(\omega)$, $n\omega_o \rightarrow \omega$ e $\frac{1}{T} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$. Assim, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \implies \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (5.16)$$

Assim, a relação (5.15) transforma a expressão no domínio do tempo $f(t)$ em uma relação no domínio da frequência $F(\omega)$. A relação (5.16) faz a operação inversa e transforma $F(\omega)$ em $f(t)$.

Exemplo 2: Transformada de Fourier do pulso.

Encontrar a transformada de Fourier do pulso mostrado na figura 5.2

Usando a definição de transformada de Fourier temos o seguinte:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_m e^{-j\omega t} dt = -\frac{V_m}{j\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = -\frac{V_m}{j\omega} \left[e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right]$$

Vamos tentar reduzir a relação do lado direito da expressão anterior:

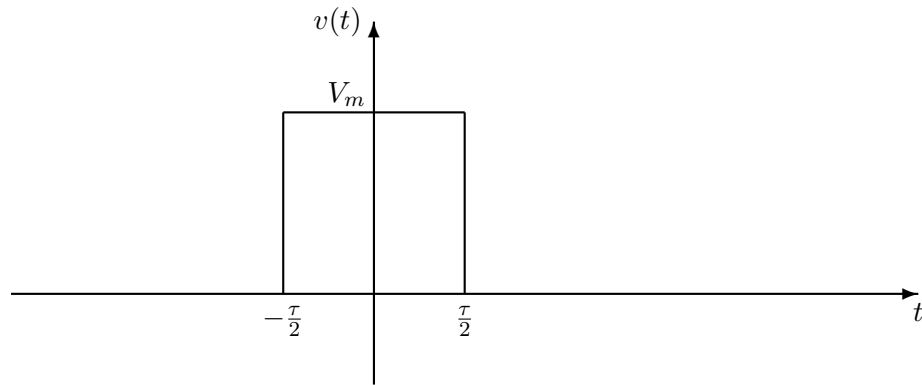


Figura 5.2: Gráfico do exemplo 5.2.

$$\left[e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right] = \text{Cos} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) - j \text{Sen} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) - \text{Cos} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) - j \text{Sen} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) = -j2 \text{Sen} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)$$

Assim temos o seguinte:

$$F(\omega) = -\frac{V_m}{j\omega} \left[-j2 \text{Sen} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \right] = \frac{2V_m}{\omega} \text{Sen} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \implies$$

$$F(\omega) = V_m\tau \left[\frac{\text{Sen} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2} \right)} \right]$$

A figura 5.3 mostra a forma de $F(\omega)$ em função de ω .

Figura 5.3: Gráfico de $F(\omega)$

Exemplo 3: Transformada de Fourier de $f(t)$.

Encontrar a transformada de Fourier da seguinte função $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} -A & \text{para } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0 \\ A & \text{para } 0 < t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{para outros intervalos} \end{cases}$$

Usando a definição de transformada de Fourier temos o seguinte:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 -A e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \frac{A}{j\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^0 - \frac{A}{j\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_0^{\frac{\tau}{2}}$$

$$F(\omega) = \frac{A}{j\omega} \left[1 - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right] - \frac{A}{j\omega} \left[e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - 1 \right]$$

$$F(\omega) = \left(\frac{A}{j\omega} \right) \left[1 - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} + 1 - e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} \right]$$

$$F(\omega) = \left(\frac{A}{j\omega} \right) \left[2 - \left(e^{\frac{j\omega\tau}{2}} + e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} \right) \right]$$

Sabemos que a seguinte relação é válida:

$$\text{Cos} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{j\omega\tau}{2}} + e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} \right]$$

Assim, finalmente temos o seguinte:

$$F(\omega) = \left(\frac{A}{j\omega} \right) \left[2 - 2\text{Cos} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \right] \implies F(\omega) = \left(\frac{2A}{j\omega} \right) \left[1 - \text{Cos} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \right]$$

Exemplo 4: Transformada de Fourier de $f(t)$.

Encontrar a transformada de Fourier da seguinte função $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ t e^{-at} & \text{para } t \geq 0 \quad a > 0 \end{cases}$$

Usando a definição de transformada de Fourier temos o seguinte:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} t e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} t e^{-(a+j\omega)t} dt$$

Integrando por partes temos o seguinte:

$$u = t \implies du = dt$$

$$dv = e^{-(a+j\omega)t} dt \implies v = -\frac{1}{(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t}$$

Assim temos o seguinte:

$$\int t e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{t}{(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} + \frac{1}{(a+j\omega)} \int e^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$\int t e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{t}{(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} - \frac{1}{(a+j\omega)^2} e^{-(a+j\omega)t}$$

Substituindo a relação anterior em $F(\omega)$ temos o seguinte:

$$F(\omega) = \left[-\frac{t}{(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} - \frac{1}{(a+j\omega)^2} e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

5.4. Funções Especiais: Função degrau e função impulso

A função degrau e a função impulso são funções especiais muito importantes na análise da transformada de Fourier e, por esse motivo, analisamos as principais características dessas funções.

5.4.1. A função degrau

Essa função é usada quando pretendemos representar funções que apresentam descontinuidades. O caso mais conhecido acontece quando abrimos ou fechamos chaves em um circuito elétrico. Nesse caso podem acontecer mudanças abruptas nas correntes e tensões nos bipolos de circuitos elétricos. Assim, essas descontinuidades são representadas matematicamente por funções degrau ou impulso.

A função degrau é definida matematicamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} K u(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ K u(t) &= K && \text{para } t > 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

A figura 5.4 mostra a gráfica da função degrau.

Quando $K = 1$ a função se transforma em uma função degrau unitário. A função degrau não é definida em $t = 0$ e quando existe necessidade de definir a transição de 0^- a 0^+ então fazemos uma aproximação linear. Assim, temos o seguinte:

$$K u(0) = \frac{1}{2}K$$

Quando a descontinuidade acontece em um ponto $t \neq 0$, isto é, o degrau começa em $t = a$ então definimos o degrau da seguinte forma:

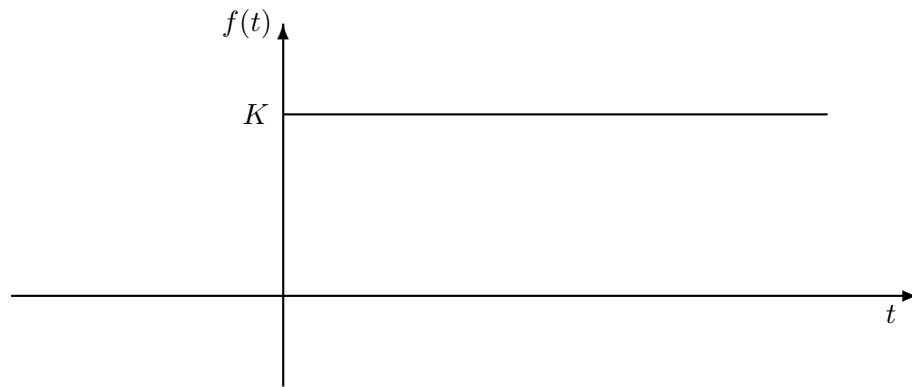


Figura 5.4: Gráfico da função degrau.

$$\begin{aligned}
 K u(t - a) &= 0 && \text{para } t < a \\
 K u(t - a) &= K && \text{para } t > a
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

Exemplo 5: Usando a função degrau.

Escreva uma expressão matemática para a função mostrada na figura 5.5 com o auxílio de funções degrau.

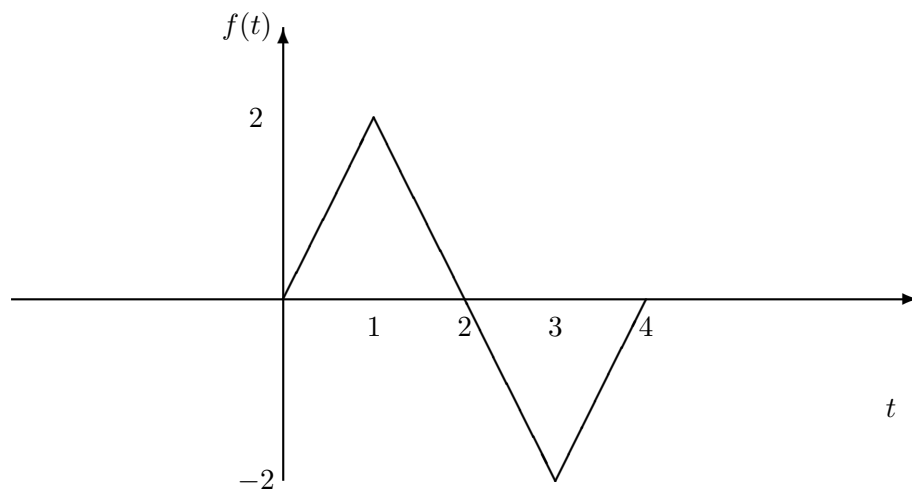


Figura 5.5: Gráfico da função do exemplo 5.

Na forma tradicional, a função $f(t)$ pode ser representada da seguinte forma:

$$f(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ -2t + 4 & 1 \leq t \leq 3 \\ 2t - 8 & 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Usando a função degrau a função $f(t)$ pode ser representada da seguinte forma:

$$f(t) = 2t[u(t) - u(t - 1)] + (-2t + 4)[u(t - 1) - u(t - 3)] + (2t - 8)[u(t - 3) - u(t - 4)]$$

5.4.2. A função impulso

Um impulso é uma função de amplitude infinita e duração igual a zero. Esse tipo de função ideal é usada para representar de forma aproximada alguns tipos de corrente e tensão em bipolos de circuitos elétricos.

A função impulso geralmente é usada também para definir a derivada de uma função que apresenta descontinuidade e no ponto de descontinuidade. Vamos supor que a descontinuidade da função mostrada pode ser aproximada através de uma relação linear no ponto de descontinuidade como se mostra na figura 5.6.

Figura 5.6: Gráfico da função $f(t)$ mostrando a descontinuidade.

Podemos verificar que quando $\epsilon \rightarrow 0$ acontece a descontinuidade.

Agora representamos a derivada de $f(t)$ aproximada no ponto de descontinuidade na seguinte forma:

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & 0t < -\epsilon \\ \frac{1}{2}\epsilon & -\epsilon < t < \epsilon \\ e^{-a(t-\epsilon)} & t > \epsilon \end{cases}$$

O gráfico de $f'(t)$ é mostrada na figura 5.7.

Figura 5.7: Gráfico da derivada de $f(t)$.

Quando $\epsilon \rightarrow 0$ então $f'(t) \rightarrow \infty$ e a duração do intervalo tende a zero. Entretanto, a área sob a curva de $f'(t)$ é constante e igual a 1 mesmo quando $\epsilon \rightarrow 0$. Quando $\epsilon \rightarrow 0$ no intervalo $-\epsilon$ a $+\epsilon$ então a função tende para um tipo de função chamada de **função impulso unitário** e representado por $\delta(t)$. Assim, a derivada de $f(t)$ na origem tende para a função impulso unitário quando $\epsilon \rightarrow 0$. Matematicamente temos o seguinte:

$$f'(0) \implies \delta(t) \text{ quando } \epsilon \implies 0$$

Quando a área sob a curva da função impulso não é unitário então a função é representada por $K \delta(t)$ onde K é a área. A constante K é chamada de **intensidade da função impulso**.

Uma função pode ser considerada como uma função impulso se cumpre as seguintes características quando o parâmetro tende a zero:

1. A amplitude da função tende a infinito.
2. A duração da função tende a zero.
3. A área sob a curva que representa a função não depende do valor do parâmetro.

Matematicamente, a função impulso é definida da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K \delta(t) dt = K$$
$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$
(5.19)

Um impulso que acontece em $t = a$ assume a seguinte forma matemática: $K \delta(t - a)$. Graficamente essa função é representada na figura 5.8.

Propriedade: Uma propriedade importante da função impulso é a propriedade de filtragem representada pela seguinte relação:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$$

Figura 5.8: Gráfico da função $\delta(t - a)$.

para $f(t)$ contínua em $t = a$. Assim, a função impulso filtra tudo menos o valor de $f(t)$ em $t = a$.

Prova da propriedade: Seja I a integral mostrada. Assim, temos o seguinte:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t) \delta(t - a) dt = f(a) \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t - a) dt = f(a)$$

já que quando $t \rightarrow a$ então $f(t) \rightarrow f(a)$.

Exemplo 6: Aplicação da propriedade da função impulso:

Encontre o valor da seguinte integral:

$$I = \int_{-2}^4 (t^3 + 4) [\delta(t) + 4\delta(t - 2)] dt$$

Assumindo que $f(t) = t^3 + 4$ então $f(0) = 4$ e $f(2) = 12$. Assim, temos o seguinte:

$$I = \int_{-2}^4 (t^3 + 4) [\delta(t) + 4\delta(t - 2)] dt = \int_{-2}^4 (t^3 + 4) \delta(t) dt + 4 \int_{-2}^4 (t^3 + 4) \delta(t - 2) dt$$

$$I = f(0) + 4f(2) = 4 + 4(12) = 52 \implies I = 52$$

5.5. Transformada de Fourier de funções especiais

Para que exista a transformada de Fourier de $f(t)$ a integral de Fourier, isto é, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ deve ser convergente. Em outras palavras, deve existir a integral o que equivale a afirmar que a integral deve ter valor finito. Se $f(t)$ é **uma função bem comportada** (contínua e limitada em todos os pontos do seu domínio) que é **diferente de zero apenas em um intervalo finito de tempo** então existe a transformada de Fourier de $f(t)$. Assim, a grande maioria dos pulsos elétricos de duração finita satisfazem as exigências de existência da transformada de Fourier.

Se $f(t)$ é diferente de zero em um intervalo de tempo infinito então a convergência da integral de Fourier depende do comportamento de $f(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim, uma função $f(t)$ que é diferente de zero em um intervalo de tempo infinito possui uma transformada de Fourier se a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

existe e se as possíveis descontinuidades de $f(t)$ são todas finitas.

Exemplo 7: Um caso simples de transformada de Fourier:

Encontrar a transformada de Fourier de $f(t) = K e^{-at} u(t)$.

O gráfico de $f(t)$ é mostrado na figura 5.9. Este exemplo é muito simples e procedemos da seguinte forma:

Figura 5.9: Gráfico da função $f(t)$.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} K e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = -\frac{K}{(a + j\omega)} \left[e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^{\infty} \implies F(\omega) = \frac{K}{(a + j\omega)}$$

Casos Especiais:

Existem várias funções de interesse prático na engenharia elétrica que a rigor não possuem transformada de Fourier. Assim, por exemplo, a integral de Fourier não converge para funções de interesse prático tais como no caso em que $f(t)$ é uma constante, uma função senoidal, uma função degrau, etc. A transformada de Fourier desse tipo de funções é encontrada de forma indireta usando uma estratégia como a seguinte: (a) criar uma função que possui transformada de Fourier, (b) essa função deve se tornar arbitrariamente próxima da função de interesse, (c) encontrar a transformada de Fourier da função escolhida e, (d) encontrar o valor limite da transformada encontrada quando a função escolhida se aproxima da função de interesse. Esse valor limite é considerada a transformada de Fourier da função de interesse.

5.5.1. Transformada de Fourier de uma Função Constante

Uma função constante assume a seguinte forma: $f(t) = A$ sendo A uma constante. Entretanto, uma função constante pode ser aproximada pela seguinte função exponencial:

$$f(t) = A e^{-\epsilon|t|} \quad \epsilon > 0$$

Figura 5.10: Aproximação de uma função constante.

A figura 5.10 mostra a aproximação indicada anteriormente. Assim, quando $\epsilon > 0 \implies f(t) \implies A$.

Inicialmente, encontramos a transformada de Fourier de $f(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 A e^{\epsilon t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} A e^{-\epsilon t} e^{-j\omega t} dt \\ F(\omega) &= \frac{A}{\epsilon - j\omega} \left[e^{(\epsilon - j\omega)t} \right]_{-\infty}^0 - \frac{A}{(\epsilon + j\omega)} \left[e^{-(\epsilon + j\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{\epsilon - j\omega} + \frac{A}{\epsilon + j\omega} \\ F(\omega) &= \frac{A(\epsilon + j\omega + \epsilon - j\omega)}{\epsilon^2 + \omega^2} \implies F(\omega) = \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

A função $F(\omega)$ encontrada é mostrada na figura 5.11 e podemos verificar que tende a uma função impulso em $\omega = 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Essa afirmação pode ser verificada observando o seguinte: (i) a amplitude de $F(\omega) \rightarrow \infty$ em $\omega = 0$ e quando $\epsilon \rightarrow 0$, (ii) a duração de $F(\omega)$ tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$ e, (iii) a área sob a curva de $F(\omega)$ é a intensidade da função impulso e não depende de ϵ .

Figura 5.11: Gráfico de $F(\omega)$.

A área sob a curva de $F(\omega)$ pode ser encontrada da seguinte forma:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2} d\omega$$

Fazemos a mudança de variável na seguinte forma:

$$\omega = \epsilon \operatorname{tg}\theta \implies d\omega = \epsilon \operatorname{sec}^2\theta d\theta$$

$$\omega^2 = \epsilon^2 \operatorname{tg}^2\theta \implies \epsilon^2 + \omega^2 = \epsilon^2(1 + \operatorname{tg}^2\theta) = \epsilon^2 \operatorname{sec}^2\theta$$

$$\text{Quando } w \longrightarrow \infty \implies \theta = \frac{\pi}{2} \quad w \longrightarrow -\infty \implies \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Assim, temos o seguinte:

$$A = 2\epsilon A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} = 2\epsilon A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\epsilon \operatorname{sec}^2\theta d\theta}{\epsilon^2 \operatorname{sec}^2\theta} = 2A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2A [\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi A$$

Portanto, no limite $f(t)$ tende a uma função constante A e $F(\omega)$ tende a uma função impulso da forma $2\pi A\delta(\omega)$. Assim, a transformada de Fourier de uma constante A assume a seguinte forma:

$$\mathcal{F}(A) = 2\pi A \delta(\omega) \tag{5.20}$$

5.5.2. Usando a Transformada de Laplace para Encontrar a Transformada de Fourier

Também podemos usar uma tabela de transformadas de Laplace para encontrar as transformadas de Fourier de funções para as quais a integral de Fourier não converge. A integral de Fourier converge quando todos os polos de $F(s)$ estão no semiplano esquerdo do plano complexo.

Podemos usar as seguintes regras para encontrar a transformada de Fourier usando uma tabela de transformadas de Laplace:

1. Quando $f(t) = 0$ para $t \leq 0^-$:

Nesse caso apenas substituímos s por $j\omega$ na transformada de Laplace. Por exemplo, seja $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0^- \\ e^{-at} \operatorname{Cos}(\omega_0 t) & t \geq 0^+ \end{cases}$$

Da tabela de transformada de Laplace apresentada na Tabela 5.1 temos o seguinte:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$$

Assim temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$$

2. Quando $f(t) = 0$ para $t \geq 0^+$:

Nesse caso temos uma função que assume valores diferente de zero para valores negativos de tempo e assume valor igual a zero para valores positivos de tempo.

Nesse caso devemos calcular a transformada de Laplace de $f(-t)$ e depois substituir s por $-j\omega$. Assim, $f(t)$ assume a seguinte forma:

$$f(t) = \begin{cases} f(t) \neq 0 & t \leq 0^- \\ 0 & t \geq 0^+ \end{cases}$$

Portanto, a transformada de Fourier assume a seguinte forma:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega}$$

Por exemplo, encontramos a transformada de Fourier da seguinte função $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} \text{Cos}(\omega_0 t) & t \leq 0^- \\ 0 & t \geq 0^+ \end{cases}$$

Da tabela de transformada de Laplace apresentada na Tabela 5.1 temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega} = \left[\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \right]_{s=-j\omega} = \frac{-j\omega + a}{(-j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$$

Assim temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{-j\omega + a}{(-j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$$

3. Quando $f(t) \neq 0$:

Quando $f(t)$ não se anula para valores de tempo negativos e positivos então $f(t)$ pode ser considerada como a soma de duas funções, uma para valores de tempo positivo e outra para valores de tempo negativo. Assim, a transformada de Fourier da função original é a soma das duas transformadas. Assim, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} f^+(t) &= f(t) & t > 0 \\ f^-(t) &= f(t) & t < 0 \end{aligned} \quad \implies f(t) = f^+(t) + f^-(t)$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{f^+(t)\} + \mathcal{F}\{f^-(t)\} = \mathcal{L}\{f^+(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f^-(t)\}_{s=-j\omega}$$

Por exemplo, encontremos a transformada de Fourier de $f(t)$ que assume a seguinte forma:

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

Assim temos o seguinte:

$$f^+(t) = e^{-at} \implies \mathcal{L}\{f^+(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

$$f^-(t) = e^{at} \implies \mathcal{L}\{f^-(-t)\} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \left[\frac{1}{s+a} \right]_{s=j\omega} + \left[\frac{1}{s+a} \right]_{s=-j\omega} = \frac{1}{j\omega+a} + \frac{1}{-j\omega+a} = \frac{2a}{\omega^2+a^2} \implies$$

$$\mathcal{F}\{f(t) = e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$$

Tabela 5.1: Transformada de Laplace de algumas funções

$f(t)$ para $(t > 0^-)$	Nome	F(s)
$\delta(t)$	Impulso	1
$u(t)$	Degrau	$\frac{1}{s}$
t	Rampa	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	Exponencial	$\frac{1}{s+a}$
$Sen(\omega t)$	Seno	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$Cos(\omega t)$	Coseno	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t e^{-at}$	Rampa amortecida	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-at} Sen(\omega t)$	Seno amortecida	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} Cos(\omega t)$	Coseno amortecido	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Observação importante:

Se $f(t)$ é uma função par então temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega} \quad (5.21)$$

Se $f(t)$ é uma função impar então temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} - \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega} \quad (5.22)$$

5.5.3. Transformada de Fourier da Função Sinal

A função sinal é mostrada na figura 5.12. Podemos verificar que a função sinal tem um valor constante e igual a -1 de $-\infty$ a zero e depois assume um valor igual a 1.

A função sinal, $sgn(t)$ assume a seguinte forma:

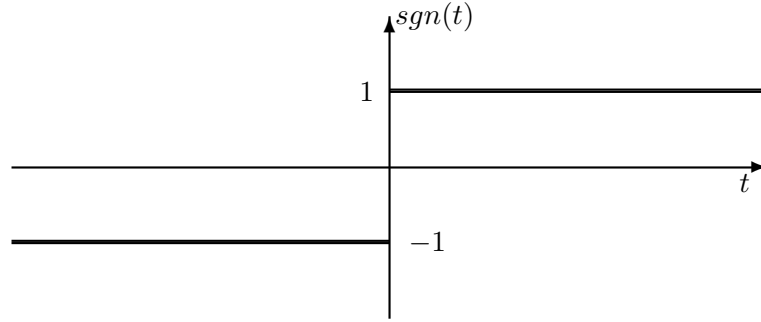


Figura 5.12: Gráfico da função sinal.

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Alternativamente, a função sinal pode ser representada da seguinte forma:

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

Para encontrar a transformada de Fourier da função $\operatorname{sgn}(t)$ definimos uma função que pode ser aproximada para a função sinal da seguinte forma:

$$\operatorname{sgn}(t) \Rightarrow f(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [e^{-\epsilon t} u(t) - e^{\epsilon t} u(-t)]$$

A figura 5.13 mostra a função $f(t)$ que pode ser aproximada para a função $\operatorname{sgn}(t)$. Devemos observar que $f(t)$ é uma função ímpar.

Para encontrar a transformada de Fourier de $\operatorname{sgn}(t)$ usamos a relação (5.22):

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \left[\frac{1}{s + \epsilon} \right]_{s=j\omega} - \left[\frac{1}{s + \epsilon} \right]_{s=-j\omega} = \frac{1}{j\omega + \epsilon} - \frac{1}{-j\omega + \epsilon} = \frac{-j\omega + \epsilon - j\omega - \epsilon}{\omega^2 + \epsilon^2}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = -\frac{j2\omega}{\omega^2 + \epsilon^2}$$

Quando $\epsilon \rightarrow 0$ então $f(t) \rightarrow \operatorname{sgn}(t)$ e $\mathcal{F}\{f(t)\} \rightarrow \mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\}$ e, portanto, temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = -\frac{j2\omega}{\omega^2} = -\frac{j2}{\omega} = \frac{2}{j\omega} \Rightarrow \mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega} \quad (5.23)$$

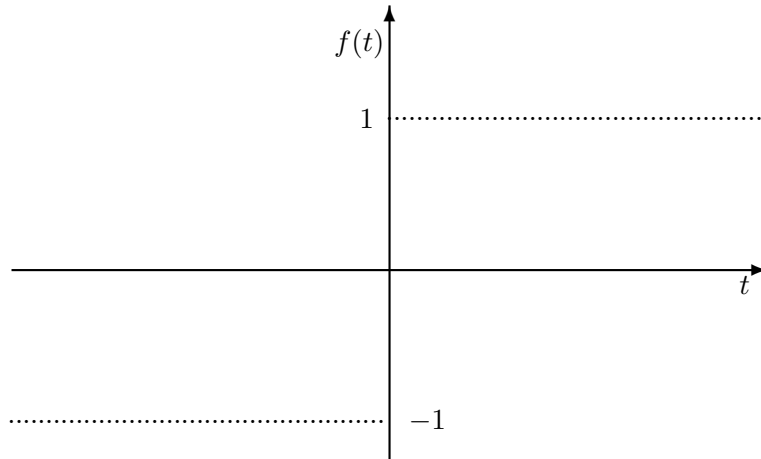


Figura 5.13: Uma aproximação de $sgn(t)$.

5.5.4. A Transformada de Fourier da Função Degrau Unitário

A função degrau unitário pode ser representada da seguinte forma:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)$$

A figura 5.14 mostra a equivalência da função anterior com a função degrau.

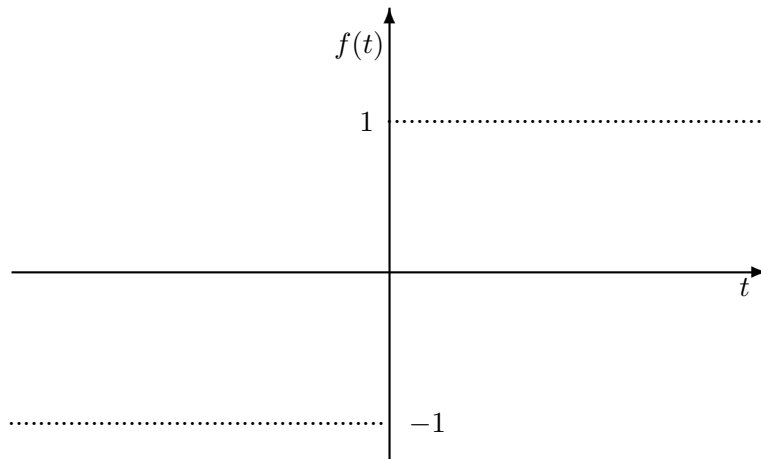


Figura 5.14: Uma forma equivalente da função degrau unitário.

Portanto, a transformada de Fourier da função degrau unitário pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}sgn(t)\right\} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

onde usamos a relação (5.20) (com $A = \frac{1}{2}$) para encontrar a transformada de Fourier de $f(t) = \frac{1}{2}$. Assim, temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (5.24)$$

5.5.5. A Transformada de Fourier da Função Coseno

Vamos supor que a transformada de Fourier de uma função $f(t)$ assume a seguinte forma:

$$F(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_o)$$

Nesse contexto temos o seguinte:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_o) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_o) e^{j\omega t} d\omega$$

Entretanto, usando a propriedade de filtragem da função impulso a relação de $f(t)$ assume a seguinte forma:

$$f(t) = e^{j\omega_o t}$$

Assim, concluímos que a transformada de Fourier de $f(t)$ é o seguinte:

$$\mathcal{F}\{f(t) = e^{j\omega_o t}\} = 2\pi \delta(\omega - \omega_o) \quad (5.25)$$

A relação (5.25) pode ser usada para encontrar a transformada de Fourier da função coseno e da função seno. Sabemos que a função $f(t) = \text{Cos}(\omega_o t)$ pode ser representada da seguinte forma:

$$\text{Cos}(\omega_o t) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}]$$

A transformada de Fourier da função anterior assume a seguinte forma:

$$\mathcal{F}\{\text{Cos}(\omega_o t)\} = \frac{1}{2} [\mathcal{F}\{e^{j\omega_o t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_o t}\}] = \frac{1}{2} [2\pi \delta(\omega - \omega_o) + 2\pi \delta(\omega + \omega_o)]$$

$$\mathcal{F}\{\text{Cos}(\omega_o t)\} = \pi \delta(\omega - \omega_o) + \pi \delta(\omega + \omega_o) \quad (5.26)$$

5.5.6. A Transformada de Fourier da Função Seno

Sabemos que a função $f(t) = \text{Sen}(\omega_o t)$ pode ser representada da seguinte forma:

$$\text{Sen}(\omega_o t) = \frac{1}{j2} [e^{j\omega_o t} - e^{-j\omega_o t}]$$

A transformada de Fourier da função anterior assume a seguinte forma:

$$\mathcal{F}\{Sen(\omega_o t)\} = \frac{1}{j2} [\mathcal{F}\{e^{j\omega_o t}\} - \mathcal{F}\{e^{-j\omega_o t}\}] = \frac{1}{j2} [2\pi \delta(\omega - \omega_o) - 2\pi \delta(\omega + \omega_o)]$$

$$\mathcal{F}\{Sen(\omega_o t)\} = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_o) - \delta(\omega + \omega_o)]$$

$$\mathcal{F}\{Sen(\omega_o t)\} = j\pi [\delta(\omega + \omega_o) - \delta(\omega - \omega_o)] \quad (5.27)$$

Na tabela 5.2 são mostradas as principais transformadas funcionais de Fourier e que são muito importantes para resolver problemas.

Tabela 5.2: Transformadas funcionais de Fourier.

$f(t)$	Nome	$F(\omega)$
$\delta(t)$	Impulso	1
A	Constante	$2\pi A\delta(\omega)$
$sgn(t)$	Sinal	$\frac{2}{j\omega}$
$u(t)$	Degrau	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$e^{-at} u(t)$	Exponencial de tempo positivo	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{at} u(-t)$	Exponencial de tempo negativo	$\frac{1}{a-j\omega}$
$e^{-a t }$	Exponencial de tempo positivo e negativo	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$e^{j\omega_o t}$	Exponencial complexa	$2\pi\delta(\omega - \omega_o)$
$Sen(\omega t)$	Seno	$j\pi[\delta(\omega + \omega_o) - \delta(\omega - \omega_o)]$
$Cos(\omega t)$	Coseno	$\pi[\delta(\omega + \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o)]$

5.6. Algumas propriedades matemáticas da transformada de Fourier

Nesta seção identificamos um conjunto de propriedades de $F(\omega)$ que são muito importantes para manipular relaciones matemáticas relacionadas com $F(\omega)$ e $f(t)$ e que simplificam de forma significativa os cálculos matemáticos.

Inicialmente transformamos $F(\omega)$ para a forma retangular da seguinte forma:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [Cos(\omega t) - j Sen(\omega t)] dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Cos}(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Sen}(\omega t) dt \quad (5.28)$$

Na relação anterior fazemos o seguinte:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Cos}(\omega t) dt \quad B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Sen}(\omega t) dt \quad (5.29)$$

Portanto, a relação (5.28) assume a seguinte forma:

$$F(\omega) = A(\omega) + j B(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (5.30)$$

Nesse contexto, a função $F(\omega)$ apresenta as seguintes propriedades:

1. A parte real de $F(\omega)$ é uma função par:

A afirmação anterior implica que $A(\omega) = A(-\omega)$ e pode ser facilmente provado da seguinte forma:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Cos}(\omega t) dt$$

$$A(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Cos}(-\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Cos}(\omega t) dt = A(\omega)$$

já que $\text{Cos}(-\omega t) = \text{Cos}(\omega t)$.

2. A parte imaginária de $F(\omega)$ é uma função ímpar:

A afirmação anterior implica que $B(\omega) = -B(-\omega)$ e pode ser facilmente provado da seguinte forma:

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Sen}(\omega t) dt$$

$$-B(-\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Sen}(-\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Sen}(\omega t) dt = B(\omega)$$

já que $\text{Sen}(-\omega t) = -\text{Sen}(\omega t)$.

3. O módulo de $F(\omega)$, isto é, $|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ é uma função par de ω :

A afirmação anterior implica que $|F(\omega)| = |F(-\omega)|$ e pode ser facilmente provado da seguinte forma:

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$$

$$|F(-\omega)| = \sqrt{[A(-\omega)]^2 + [B(-\omega)]^2} = \sqrt{[A(-\omega)][A(-\omega)] + [B(-\omega)][B(-\omega)]}$$

$$|F(-\omega)| = \sqrt{[A(\omega)][A(\omega)] + [(-1)B(\omega)][(-1)B(\omega)]} = \sqrt{[A(\omega)][A(\omega)] + [B(\omega)][B(\omega)]} = |F(\omega)|$$

4. O ângulo de fase de $F(\omega)$, isto é, $\theta(\omega) = \text{arc tg} \left[\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right]$ é uma função ímpar de ω :

A afirmação anterior implica que $\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$ e pode ser facilmente provado da seguinte forma:

$$\theta(\omega) = \text{arc tg} \left[\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right]$$

$$\theta(-\omega) = \text{arc tg} \left[\frac{B(-\omega)}{A(-\omega)} \right] = \text{arc tg} \left[\frac{-B(\omega)}{A(\omega)} \right] = -\text{arc tg} \left[\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right] = -\theta(\omega)$$

5. Para calcular o complexo conjugado de $F(\omega)$ apenas devemos substituir ω por $-\omega$, isto é, $F^*(\omega) = F(-\omega)$. A relação anterior pode ser provada da seguinte forma:

$$F(\omega) = A(\omega) + j B(\omega) \implies F^*(\omega) = A(\omega) - j B(\omega)$$

$$F(-\omega) = A(-\omega) + j B(-\omega) \implies F(-\omega) = A(\omega) - j B(\omega) = F^*(\omega)$$

6. Se $f(t)$ é uma função par então $F(\omega)$ é uma função real. Por outro lado, se $f(t)$ é uma função ímpar então $F(\omega)$ é uma função imaginária.

Se $f(t)$ é uma função par então temos o seguinte:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \text{Cos}(\omega t) dt \\ B(\omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Sen}(\omega t) dt = 0 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Também, lembremos que $\text{Cos}(\omega t)$ é uma função par e que o produto de duas funções pares é uma função par. Assim, $g(t) = f(t) \text{Cos}(\omega t)$ é uma função par. Se $g(t)$ é uma função par então a seguinte relação é verdadeira:

$$\int_{-L}^L g(t) dt = 2 \int_0^L g(t) dt$$

Também, $h(t) = f(t) \text{Sen}(\omega t)$ é uma função ímpar (o produto de uma função par com uma função ímpar é uma função ímpar) e, nesse caso, a seguinte relação é verdadeira:

$$\int_{-L}^L h(t) dt = 0$$

Portanto, as relações mostradas em (5.31) é uma consequência de funções pares e ímpares.

Por outro lado, se $f(t)$ é uma função ímpar então temos o seguinte:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 0 \\ B(\omega) &= -2 \int_0^{\infty} f(t) \text{Sen}(\omega t) dt \end{aligned} \tag{5.32}$$

A relação (5.32) também é uma consequência direta das propriedades de funções pares e ímpares. Lembremos que neste caso $g(t) = f(t) \text{Cos}(\omega t)$ é uma função ímpar e $h(t) = f(t) \text{Sen}(\omega t)$ é uma função par (o produto de duas funções ímpares é uma função par).

Em resumo, se $f(t)$ é uma função par então sua transformada de Fourier é uma função par e se $f(t)$ é uma função ímpar então sua transformada de Fourier é uma função ímpar.

5.7. Transformadas operacionais

Da mesma forma que na transformada de Laplace também podemos separar as transformadas de Fourier em transformadas funcionais e transformadas operacionais. A continuação apresentamos as transformadas operacionais de Fourier mais usadas e a prova daqueles que achamos mais importantes.

1. Multiplicação por uma constante:

Seja a relação já muito conhecida:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Então para uma constante K temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{K f(t)\} = K F(\omega)$$

Prova:

$$\mathcal{F}\{K f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} K f(t) e^{-j\omega t} dt = K \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = K F(\omega) \implies$$

$$\mathcal{F}\{K f(t)\} = K F(\omega)$$

2. Adição e subtração:

Se $\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$, $\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$ e $\mathcal{F}\{f_3(t)\} = F_3(\omega)$ então é válida a seguinte relação:

$$\mathcal{F}\{f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)\} = F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega)$$

Prova:

$$\mathcal{F}\{f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)] e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f_3(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}\{f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)\} = F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega)$$

3. Derivação:

A transformada de Fourier da primeira derivada de $f(t)$ assume a seguinte forma:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt} = f'(t)\right\} = j\omega F(\omega)$$

Prova:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt \tag{5.33}$$

Integramos a relação anterior por partes usando a seguinte estratégia:

$$u = e^{-j\omega t} \implies du = -j\omega e^{-j\omega t} dt$$

$$dv = \left[\frac{df(t)}{dt} \right] dt \implies v = f(t)$$

Substituindo na relação (5.33) temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \left[f(t) e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Na relação anterior, se realmente existe a transformada de Fourier então o primeiro termo após a igualdade só pode ser igual a zero. Assim, temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = j\omega F(\omega) \quad (5.34)$$

A relação anterior pode ser generalizada para todas as derivadas de $f(t)$. Assim, para a derivada n de $f(t)$ é válida a seguinte relação:

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = (j\omega)^n F(\omega) \quad (5.35)$$

Logicamente, as relações (5.34) e (5.35) são válidas apenas se $f(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$.

4. Integração:

Se $g(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$ então a transformada de Fourier de $g(t)$ assume a seguinte forma:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (5.36)$$

que é válida apenas se $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$.

5. Mudança de escala:

Dimensionalmente, o tempo e a frequência são grandezas recíprocas. Assim, quando a escala de tempo é dilatada então a escala de frequências é comprimida e viceversa. Assim, temos a seguinte propriedade:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a > 0 \quad (5.37)$$

Assim, se $0 < a < 1$ então o tempo é dilatado e para $a > 1$ o tempo é comprimido.

Prova:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

Na relação anterior fazemos a seguinte transformação de variáveis:

$$t' = a t \implies dt' = a dt \implies e^{-j\omega t} = e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)t'}$$

Quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow t' \rightarrow \infty$ e quando $t \rightarrow -\infty \Rightarrow t' \rightarrow -\infty$ e, portanto, os limites ficam inalterados.

Substituindo na integral temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j(\frac{\omega}{a})t'} \left(\frac{dt'}{a}\right)$$

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \left(\frac{1}{a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j(\frac{\omega}{a})t'} dt' = \left(\frac{1}{a}\right) F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

6. Deslocamento no domínio do tempo:

Quando uma função é deslocada no domínio do tempo então o espectro de fase se modifica mas o espectro de amplitude não muda. Assim, temos a seguinte propriedade:

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-j\omega a} F(\omega) \quad (5.38)$$

Se a é positivo então a função do tempo é retardada e se a é negativo a função do tempo é adiantada.

Prova:

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-j\omega t} dt$$

Na relação anterior fazemos a seguinte transformação de variáveis:

$$t' = t - a \Rightarrow dt' = dt \Rightarrow t = t' + a$$

Quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow t' \rightarrow \infty$ e quando $t \rightarrow -\infty \Rightarrow t' \rightarrow -\infty$ e, portanto, os limites ficam inalterados.

Substituindo na integral temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega(t'+a)} dt' = e^{-j\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt'$$

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-j\omega a} F(\omega)$$

7. Deslocamento no domínio da frequência:

Quando uma função é deslocada no domínio da frequência então essa mudança equivale a multiplicar a função no domínio do tempo por uma exponencial complexa. Assim, temos a seguinte propriedade:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_o t} f(t)\} = F(\omega - \omega_o) \quad (5.39)$$

Prova:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_o t} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_o t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_o)t} dt$$

Na relação anterior fazemos a transformação de variáveis: $\omega' = \omega - \omega_o$. Substituindo na integral temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_o t} f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_o)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega' t} dt = F(\omega') = F(\omega - \omega_o)$$

8. Modulação:

Modulação de amplitude é o processo de fazer variar a amplitude de uma portadora senoidal de acordo com o sinal modulador. Se $f(t)$ é o sinal modulador então a portadora modulada é dada por $f(t) \text{Cos}(\omega_o t)$. Assim, o espectro de amplitude dessa portadora modulada tem duas componentes na seguinte forma:

$$\mathcal{F}\{f(t) \text{Cos}(\omega_o t)\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_o) \quad (5.40)$$

Prova:

Sabemos que: $\text{Cos}(\omega_o t) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}]$. Assim temos o seguinte:

$$\mathcal{F}\{f(t) \text{Cos}(\omega_o t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{Cos}(\omega_o t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f(t) [e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}] e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}\{f(t) \text{Cos}(\omega_o t)\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_o)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega + \omega_o)t} dt$$

$$\mathcal{F}\{f(t) \text{Cos}(\omega_o t)\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_o)$$

9. Convolução no domínio do tempo:

A convolução no domínio do tempo corresponde a multiplicar no domínio da frequência. Assim, consideremos a seguinte relação:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

Nesse contexto, a transformada de Fourier assume a seguinte forma:

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) \quad (5.41)$$

onde $x(t)$ é a função de entrada, $y(t)$ é a função de saída e $H(t)$ é a função de transferência do sistema. Assim, a relação (5.41) é importante em aplicações da transformada de Fourier porque mostra uma relação entre a transformada da função de entrada $X(\omega)$, a transformada da função de saída (a resposta do sistema) e a transformada de Fourier da função de transferência do sistema.

10. Convolução no domínio da frequência:

Calcular uma convolução no domínio da frequência corresponde a determinar a transformada de Fourier do produto de duas funções no domínio do tempo. Assim, seja a função $f(t)$:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Nesse contexto, a transformada de Fourier assume a seguinte forma:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du \quad (5.42)$$

Na tabela 5.3 são mostradas as principais transformadas operacionais de Fourier e que são muito importantes para resolver problemas.

5.8. Resolução de circuitos elétricos especiais

Nesta seção mostramos algumas aplicações da transformada de Fourier na análise de circuitos elétricos especiais. Entretanto, inicialmente devemos fazer uma pequena revisão do conceito de função de transferência $H(\omega)$.

Tabela 5.3: Transformadas operacionais de Fourier.

$f(t)$	$F(\omega)$
$K f(t)$	$K F(\omega)$
$f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)$	$F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$\int_{-\infty}^t f(x) dx$	$\frac{F(\omega)}{j\omega}$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right); a > 0$
$f(t - a)$	$e^{-j\omega a} F(\omega)$
$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(t) \text{Cos}(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$	$X(\omega) H(\omega)$
$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$
$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

A função de transferência de um circuito é definida como a razão entre a transformada de Laplace da saída (a resposta que pretendemos encontrar) e a transformada de Laplace da entrada (a fonte). Quando o circuito elétrico tem mais de uma fonte independente então podemos determinar a função de transferência para cada fonte e usar o teorema da superposição para encontrar a resposta geral. Matematicamente a **função de transferência** é dada pela seguinte relação:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

em que $Y(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de saída $y(t)$ e $X(s)$ é a transformada do sinal de entrada $x(t)$. **Analogamente**, a função de transferência para o universo da **transformada de Fourier** pode ser definida da seguinte forma:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

em que $H(\omega)$ pode ser obtido de $H(s)$ substituindo s por $j\omega$. Devemos lembrar que na definição de $H(s)$ estamos supondo que a energia inicial armazenada no circuito é igual a zero. A figura 5.15 mostra as relações existentes entre os bipolos e as correspondentes representações em transformada de Laplace e transformada de Fourier.

Figura 5.15: Representação de transformadas de Laplace e Fourier de bipolos elétricos.

Exemplo 8: Uma fonte de corrente aperiódica em um circuito elétrico.

Use a transformada de Fourier para determinar $i_o(t)$ no circuito mostrado na figura 5.16. A corrente de entrada é a função sinal, isto é, $i_g(t) = 20\text{sgn}(t)$.

Resolvemos o problema usando a seguinte estratégia que pode ser usada para resolver todos os circuitos elétricos simples:

- Encontramos a transformada de Fourier de $i_g(t)$ (usando tabelas) da seguinte forma:

$$I_g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t) = 20\text{sgn}(t)\} = 20 \left(\frac{2}{j\omega} \right) = \frac{40}{j\omega}$$

- Encontramos a função de transferência $H(\omega)$ usando o circuito elétrico:

A função de transferência assume a seguinte forma:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{I_o(\omega)}{I_g(\omega)}$$

Figura 5.16: Circuito elétrico com uma fonte de corrente aperiódica.

A figura 5.17 mostra o circuito elétrico no universo da transformada de Laplace.

Inicialmente encontramos a transformada de Laplace $H(s)$ e usamos essa relação para encontrar a transformada de Fourier. Assim, usando as regras básicas de resolução de um circuito elétrico temos o seguinte:

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{I_g(s)}$$

$$[I_g(s) - I_o(s)](1) = (3 + s)I_o(s) \implies I_g(s) = (4 + s)I_o(s) \implies$$

$$\frac{I_o(s)}{I_g(s)} = \frac{1}{4 + s} \implies H(s) = \frac{1}{4 + s}$$

Figura 5.17: Circuito elétrico no universo da transformada de Fourier.

Portanto, na relação anterior fazendo $s = j\omega$ encontramos a função de transferência $H(\omega)$ no universo da transformada de Fourier:

$$H(s) = \frac{1}{4 + s} \implies H(\omega) = \frac{1}{4 + j\omega}$$

- Encontramos a transformada de Fourier de $i_o(t)$:

Usando a função de transferência de Fourier temos o seguinte:

$$H(\omega) = \frac{I_o(\omega)}{I_g(\omega)} \implies I_o(\omega) = H(\omega) I_g(\omega) = \left(\frac{40}{j\omega} \right) \left(\frac{1}{4 + j\omega} \right) = \frac{40}{j\omega(4 + j\omega)}$$

- Encontramos a transformada inversa de Fourier de $I_o(\omega)$:

Para encontrar a transformada inversa de Fourier de $I_o(\omega)$ expandimos $I_o(\omega)$ em frações parciais na seguinte forma:

$$I_o(\omega) = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{4 + j\omega}$$

onde pode encontrarse facilmente os valores de $A = 10$ e $B = -10$. Assim, temos o seguinte:

$$I_o(\omega) = \frac{10}{j\omega} - \frac{10}{4 + j\omega} \implies i_o(t) = \mathcal{F}^{-1}\{I_o(\omega)\}$$

Encontramos a forma matemática de $i_o(t)$ usando a relação anterior e as tabelas de transformadas de Fourier. Assim, a saída procurada assume a seguinte forma:

$$i_o(t) = 5 \operatorname{sgn}(t) - 10 e^{-4t} u(t)$$

A figura 5.18 mostra a variação de $i_o(t)$.

Figura 5.18: Variação de $i_o(t)$.

Pode-se verificar na figura 5.18 que para $t < 0$ a corrente elétrica no indutor é igual a $-5A$ e depois se aproxima exponencialmente para $5A$ após $t > 0$.

Exemplo 9: O estado estacionário para uma fonte senoidal.

Resolver o mesmo problema do exemplo 8 mas com um valor de $i_g(t) = 50 \operatorname{Cos}(3t)$ amperes.

Devemos observar que neste caso a corrente elétrica é senoidal e, portanto, esperamos que a resposta encontrada seja equivalente ao encontrado usando a transformada fasorial ao analisar o comportamento de estado estacionário de circuitos elétricos ativados com fontes de tensão e/ou corrente senoidais. Resolvemos o problema usando a mesma sequência usada ao resolver o exemplo anterior.

- Encontramos a transformada de Fourier de $i_g(t)$ (usando tabelas) da seguinte forma:

$$I_g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t) = 50 \text{Cos}(3t)\} = 50\pi [\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$$

- Encontramos a função de transferência $H(\omega)$ usando o circuito elétrico:
A função de transferência é a mesma do exemplo anterior e assume a seguinte forma:

$$H(\omega) = \frac{1}{4 + j\omega}$$

- Encontramos a transformada de Fourier de $i_o(t)$:
Usando a função de transferência de Fourier temos o seguinte:

$$H(\omega) = \frac{I_o(\omega)}{I_g(\omega)} \implies I_o(\omega) = H(\omega) I_g(\omega) = \left(\frac{1}{4 + j\omega}\right) (50\pi) [\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$$

- Encontramos a transformada inversa de Fourier de $I_o(\omega)$:

$$i_o(t) = \mathcal{F}^{-1}\{I_o(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{50\pi}{4 + j\omega} [\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)] e^{j\omega t} d\omega$$

$$i_o(t) = 25 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} [\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]}{4 + j\omega} d\omega$$

Usando a propriedade de filtragem da função impulso temos o seguinte:

$$i_o(t) = 25 \left[\frac{e^{j3t}}{4 + j3} + \frac{e^{-j3t}}{4 - j3} \right]$$

Para representar essa solução de uma forma mais familiar usamos a relação:

$$4 + j3 = 5[36, 87^\circ] = 5e^{j36,87}$$

onde estamos representando a forma polar na seguinte forma: $5[36, 87^\circ]$. Usando essa relação a forma matemática de $i_o(t)$ assume a seguinte forma:

$$i_o(t) = 25 \left\{ \frac{e^{j3t}}{5e^{j36,87}} + \frac{e^{-j3t}}{5e^{-j36,87}} \right\} = 5 \left[e^{j(3t-36,87)} + e^{-j(3t-36,87)} \right]$$

$$i_o(t) = 25 [\text{Cos}(3t - 36,87) + j\text{Sen}(3t - 36,87) + \text{Cos}(3t - 36,87) - j\text{Sen}(3t - 36,87)]$$

$$i_o(t) = 10 \text{Cos}(3t - 36,87)$$

Observação:

O resultado encontrado é o mesmo que seria obtido encontrando o estado estacionário de $i_o(t)$ para o circuito analisado. Entretanto, conceitualmente, os problemas não são os mesmos. No nosso caso temos uma fonte senoidal para qualquer valor de t (embora seja um problema ideal) e no caso de circuitos elétricos resolvidos usando a transformada fasorial geralmente a fonte senoidal vale zero para $t < 0$ e tem uma forma senoidal para $t > 0$. Nesse contexto, usamos a transformada fasorial para encontrar apenas a solução de estado estacionário do problema (e não analisamos o comportamento transitório imediatamente após $t > 0$).

A maneira de ilustração resolvemos o problema equivalente usando a transformada fasorial para o circuito mostrado na figura 5.19 em que a fonte de corrente assume a seguinte forma:

$$i_g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 50 \cos(3t) & t > 0 \end{cases}$$

Encontramos apenas a resposta de estado estacionário usando a transformada fasorial.

Figura 5.19: Resolução do circuito usando a transformada fasorial.

$$i_g = 50 \cos(3t) \implies I_g = 50[0^\circ]$$

$$(I_g - I_o)(1) = (3 + j3)I_o \implies I_o = \frac{1}{4 + j3} I_g = \frac{50[0^\circ]}{5[36,87^\circ]} = 10[-36,87^\circ] \implies$$

$$i_g(t) = 10 \cos(3t - 36,87)$$

Exemplo 10: Resolvendo um circuito elétrico simples.

No circuito mostrado na figura 5.20 a fonte de corrente produz uma corrente igual a $10 \operatorname{sgn}(t)$. Nesse contexto encontre: (a) $v_o(t)$; (b) $i_2(t)$, (c) $i_1(t)$, (d) $i_1(0^-)$ e $i_1(0^+)$, (e) $i_2(0^-)$ e $i_2(0^+)$ e, $v_o(0^-)$ e $v_o(0^+)$.

Encontrando $v_o(t)$:

Inicialmente encontramos $v_o(t)$ usando o circuito equivalente mostrado na figura 5.21, a informação de que $i_g(t) = 10 \operatorname{sgn}(t)$ e a estratégia usada nos exemplos anteriores.

Figura 5.20: Circuito elétrico original.

- Encontramos a transformada de Fourier de $i_g(t)$ (usando tabelas e as propriedades das transformadas operacionais) da seguinte forma:

$$I_g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t) = 10 \operatorname{sgn}(t)\} = 10 \left(\frac{2}{j\omega} \right) = \frac{20}{j\omega}$$

Figura 5.21: Circuito elétrico na transformada de Fourier.

- Encontramos a função de transferência $H(\omega)$ usando o circuito elétrico:
A função de transferência assume a seguinte forma:

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{I_g(\omega)}$$

Do circuito elétrico temos o seguinte:

$$4[I_g(\omega) - I_2(\omega)] = (1 + j\omega)I_2(\omega) \implies 4I_g(\omega) = (5 + j\omega)I_2(\omega) \implies I_2(\omega) = \frac{4}{5 + j\omega}I_g(\omega)$$

$$V_o(\omega) = j\omega I_2(\omega) = \frac{j4\omega}{5 + j\omega}I_g(\omega) \implies H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{I_g(\omega)} = \frac{j4\omega}{5 + j\omega}$$

- Encontramos a transformada de Fourier de $v_o(t)$:

Usando a função de transferência de Fourier temos o seguinte:

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{I_g(\omega)} \implies V_o(\omega) = H(\omega) I_g(\omega) = \left(\frac{j4\omega}{5 + j\omega} \right) \left(\frac{20}{j\omega} \right) = \frac{80}{5 + j\omega}$$

- Encontramos a transformada inversa de Fourier de $V_o(\omega)$:

$$v_o(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V_o(\omega)\} = 80 e^{-5t} u(t)$$

Encontrando $i_2(t)$:

$i_2(t)$ pode ser encontrado no domínio do tempo já que conhecemos $v_o(t)$. Entretanto vamos resolver usando a mesma estratégia usada para resolver $v_o(t)$. Assim, temos o seguinte:

$$H(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{I_g(\omega)}$$

A relação anterior já foi deduzida na análise de $v_o(t)$ e tem a seguinte forma:

$$H(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{I_g(\omega)} = \frac{4}{5 + j\omega} \implies$$

$$I_2(\omega) = H(\omega) I_g(\omega) = \left(\frac{4}{5 + j\omega} \right) \left(\frac{20}{j\omega} \right) = \frac{80}{j\omega(5 + j\omega)} = \frac{16}{j\omega} - \frac{16}{5 + j\omega}$$

$$i_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{I_2(\omega)\} \implies$$

$$i_2(t) = 8 \operatorname{sgn}(t) - 16 e^{-5t} u(t)$$

Encontrando $i_1(t)$: Usamos a relação $i_g(t) = i_1(t) + i_2(t)$ para encontrar $i_1(t)$.

$$i_1(t) = 10 \operatorname{sgn}(t) - 8 \operatorname{sgn}(t) + 16 e^{-5t} u(t) \implies i_1(t) = 2 \operatorname{sgn}(t) + 16 e^{-5t} u(t)$$

Encontrando as outras grandezas: Usamos as relações encontradas para $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $v_o(t)$ em $t = 0^-$ ou em $t = 0^+$ para encontrar as outras grandezas solicitadas. Assim, encontramos os seguintes valores:

- $i_1(0^-) = -2$ A $i_1(0^+) = 18$ A
- $i_2(0^-) = -8$ A $i_2(0^+) = -8$ A
- $v_o(0^-) = 0$ V $v_o(0^+) = 80$ V

Figura 5.22: Circuito elétrico original.

Por exemplo, $i_1(0^-)$ é encontrada da seguinte forma:

$$i_1(0^-) = 2 \operatorname{sgn}(0^-) + 16 e^{(-5)(0)} u(0^-) = -2 + 0 = -2$$

Exemplo 11: Resolvendo um circuito elétrico simples.

No circuito mostrado na figura 5.22 a tensão gerada pela fonte é dada por $v_g = e^t u(-t) + u(t)$ volts. (a) use a transformada de Fourier para encontrar $v_a(t)$; (b) Calcular $v_a(0^-)$, $v_a(0^+)$ e $v_a(\infty)$.

Encontrando $v_a(t)$:

Inicialmente encontramos $v_a(t)$ usando o circuito equivalente mostrado na figura 5.23, a informação de que $v_g(t) = e^t u(-t) + u(t)$ e a estratégia usada nos exemplos anteriores.

- Encontramos a transformada de Fourier de $v_g(t)$ (usando tabelas e as propriedades das transformadas operacionais) da seguinte forma:

$$v_g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t) = e^t u(-t) + u(t)\} = \frac{1}{1 - j\omega} + \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

- Encontramos a função de transferência $H(\omega)$ usando o circuito elétrico:

A função de transferência assume a seguinte forma:

$$H(\omega) = \frac{V_a(\omega)}{V_g(\omega)}$$

Do circuito elétrico temos o seguinte:

$$V_g(\omega) = V_a(\omega) + 2V_a(\omega) + \frac{V_a(\omega)}{\frac{1}{j\omega}} \implies V_g(\omega) = (3 + j\omega)V_a(\omega) \implies$$

$$\frac{V_a(\omega)}{V_g(\omega)} = \frac{1}{3 + j\omega} \implies H(\omega) = \frac{1}{3 + j\omega}$$

Figura 5.23: Circuito elétrico na transformada de Fourier.

- Encontramos a transformada de Fourier de $v_a(t)$:

Usando a função de transferência de Fourier temos o seguinte:

$$H(\omega) = \frac{V_a(\omega)}{V_g(\omega)} \implies V_a(\omega) = H(\omega) V_g(\omega) = \left(\frac{1}{3 + j\omega} \right) \left(\frac{1}{1 - j\omega} + \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right)$$

$$V_a(\omega) = \frac{1}{(3 + j\omega)(1 - j\omega)} + \frac{1}{j\omega(3 + j\omega)} + \frac{\pi \delta(\omega)}{3 + j\omega}$$

$$V_a(\omega) = \frac{A}{3 + j\omega} + \frac{B}{1 - j\omega} + \frac{C}{j\omega} + \frac{D}{3 + j\omega} + \frac{\pi \delta(\omega)}{3 + j\omega} \implies$$

$$V_a(\omega) = \frac{1/4}{3 + j\omega} + \frac{1/4}{1 - j\omega} + \frac{1/3}{j\omega} - \frac{1/3}{3 + j\omega} + \frac{\pi \delta(\omega)}{3 + j\omega} \implies$$

Adaptamos a relação anterior para aplicar a transformada inversa:

$$V_a(\omega) = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{j\omega} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - j\omega} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{3 + j\omega} \right) + \frac{\pi \delta(\omega)}{3 + j\omega} \implies$$

- Encontramos a transformada inversa de Fourier de $V_a(\omega)$:

Aplicamos a transformada inversa a cada termo da relação anterior:

$$v_a(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V_a(\omega)\} \implies$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{2}{j\omega} \right) \right\} = \frac{1}{6} \text{sgn}(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - j\omega} \right) \right\} = \frac{1}{4} e^t u(-t)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{3+j\omega} \right) \right\} = -\frac{1}{12} e^{-3t} u(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\pi \delta(\omega)}{3+j\omega} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi \delta(\omega)}{3+j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{j\omega t}}{3+j\omega} \right] \delta(\omega) d\omega$$

Usando a propriedade de filtragem da função impulso temos o seguinte:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\pi \delta(\omega)}{3+j\omega} \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{j0t}}{3+j0} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

Substituindo os cálculos parciais na relação geral temos o seguinte:

$$v_a(t) = \frac{1}{6} \operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{4} e^t u(-t) - \frac{1}{12} e^{-3t} u(t) + \frac{1}{6}$$

Encontrando as outras grandezas: Usamos a relação encontrada para $v_a(t)$ em $t = 0^-$, em $t = 0^+$ e em $t \rightarrow \infty$ para encontrar as outras grandezas solicitadas. Assim, encontramos os seguintes valores:

- $v_a(0^-) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \implies v_a(0^-) = \frac{1}{4}$ volts.
- $v_a(0^+) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \implies v_a(0^+) = \frac{1}{4}$ volts.
- $v_a(\infty) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \implies v_a(\infty) = \frac{1}{3}$ volts.

5.9. O teorema de Parseval

O teorema de Parseval relaciona a energia de uma função tipo tensão ou corrente no domínio do tempo representada por $f(t)$ com a transformada de Fourier da mesma função. Assim, supor que $f(t)$ é a tensão ou corrente em um resistor de 1Ω . Então a energia associada a $f(t)$ assume a seguinte forma:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (5.43)$$

De acordo com o teorema de Parseval a mesma energia pode ser obtida integrando no domínio da frequência da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (5.44)$$

Obviamente, a relação anterior é válida se ambas integrais existem. Portanto, ambas integrais representam a energia dissipada por um resistor de 1Ω .

Prova do teorema de Parseval: Procedemos da seguinte forma:

Procedemos da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{f(t)\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega$$

já que sabemos que $F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt$.

Também sabemos que: $F(-\omega) = F^*(\omega)$ e $F(\omega) F^*(\omega) = |F(\omega)|^2$. Assim temos o seguinte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Como $|F(\omega)|$ é uma função par então a relação anterior pode ser representada da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (5.45)$$

Exemplo 12: Verificando o teorema de Parseval.

Verificar o teorema de Parseval para $f(t) = e^{-a|t|}$.

Encontramos a integral da primeira parcela de (5.44):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt = \int_{-\infty}^0 e^{2at} dt + \int_0^{\infty} e^{-2at} dt$$

$$I_1 = \left[\frac{e^{2at}}{2a} \right]_{-\infty}^0 - \left[\frac{e^{-2at}}{2a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a} \implies I_1 = \frac{1}{a}$$

Encontramos a integral da segunda parcela de (5.44):

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Das tabelas de transformadas de Fourier temos o seguinte:

$$F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \implies [F(\omega)]^2 = \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2}$$

Assim, podemos continuar calculando I_2 :

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega$$

Fazemos uma mudança de variáveis para encontrar a integral de I_2 da seguinte forma:

$$\omega = a \operatorname{tg} \theta \implies \omega^2 = a^2 \operatorname{tg}^2(\theta) \implies d\omega = a \operatorname{sec}^2(\theta) d\theta$$

$$[a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2(\theta)]^2 = [a^2 \operatorname{sec}^2(\theta)]^2 = a^4 \operatorname{sec}^4(\theta)$$

Também quando $\omega = 0 \implies \theta = 0$ e quando $\omega \rightarrow \infty \implies \theta = \frac{\pi}{2}$.

Substituindo as relações encontradas na integral de I_2 temos o seguinte:

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4a^2}{[a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2(\theta)]^2} a \operatorname{sec}^2(\theta) d\theta$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{a \operatorname{sec}^2(\theta)} d\theta = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [1 + \cos(2\theta)] d\theta$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi a} \left[\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi a} \left[\frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{a} \implies I_2 = \frac{1}{a}$$

Interpretação física do teorema de Parseval:

A relação $|F(\omega)|^2$ pode ser interpretado como uma densidade de energia (medida em Joules/Hertz). Para mostrar essa característica vamos trabalhar com a segunda parcela da relação (5.44) e lembrando que $\omega = 2\pi f$.

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(2\pi f)|^2 (2\pi df) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(2\pi f)|^2 df \quad (5.46)$$

Na equação (5.46) a relação $|F(2\pi f)|^2 (2\pi df)$ é a energia em uma faixa infinitesimal de frequência df e a energia total dissipada por $f(t)$ em um resistor de 1Ω é a soma (integral) de $|F(2\pi f)|^2 (2\pi df)$ para todas as frequências possíveis. Portanto, parte dessa energia corresponde a uma faixa de frequências. Assim, de (5.45) verificamos que a energia dissipada na faixa de frequências entre ω_1 e ω_2 assume a seguinte forma:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (5.47)$$

Também observamos que se usamos a relação (5.44) então a relação que permite encontrar a energia dissipada assume a seguinte forma:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} |F(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (5.48)$$

A figura 5.24 mostra a distribuição de energia neste último caso onde pode ser verificado que a maior quantidade de energia é dissipada na vizinhança de $\omega = 0$.

Exemplo 13: Encontrando a energia dissipada em um resistor.

Figura 5.24: Gráfico de $|F(\omega)|^2$ vs ω .

A corrente elétrica em um resistor de 40Ω é igual a $i(t) = 20 e^{-2t}u(t)$ amperes. Que porcentagem da energia total dissipada no resistor está contida na faixa de frequências $0 \leq \omega \leq 2\sqrt{3}$ rad/s.?

Encontramos a energia total dissipada no resistor usando a relação (5.43):

$$W_{40\Omega} = 40 \int_0^{\infty} 400 e^{-4t} dt = 16000 \left[-\frac{1}{4}e^{-4t} \right]_0^{\infty} = \frac{16000}{4} = 4000 \implies$$

$$W_{40\Omega} = 4000 \quad \text{Joules}$$

Verificamos o resultado usando o teorema de Parseval:

$$F(\omega) = \frac{20}{2 + j\omega} \implies |F(\omega)| = \frac{20}{\sqrt{4 + \omega^2}} \implies |F(\omega)|^2 = \frac{400}{4 + \omega^2}$$

$$W_{40\Omega} = 40 \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \right\} = \frac{40}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{400}{4 + \omega^2} d\omega = \frac{16000}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{4 + \omega^2}$$

Continuamos encontrando a integral fazendo a seguinte mudança de variável:

$$\omega = 2 \operatorname{tg}(\theta) \implies \omega^2 = 4 \operatorname{tg}^2(\theta) \implies 4 + \omega^2 = 4 + 4 \operatorname{tg}^2(\theta) = 4 \operatorname{sec}^2(\theta) \implies d\omega = 2 \operatorname{sec}^2(\theta)$$

Quando $\omega = 0 \implies \theta = 0$ e quando $\omega \rightarrow \infty \implies \theta = \frac{\pi}{2}$

Substituindo as relações anteriores na integral temos o seguinte:

$$W_{40\Omega} = \frac{16000}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \operatorname{sec}^2(\theta)}{4 \operatorname{sec}^2(\theta)} d\theta = \frac{8000}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{8000}{\pi} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8000}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 4000 \implies$$

$$W_{40\Omega} = 4000 \quad \text{Joules}$$

Agora encontramos a energia dissipada na faixa de frequências $0 \leq \omega \leq 2\sqrt{3}$:

$$W_{40\Omega} = 40 \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{400}{4 + \omega^2} d\omega \right\} = \frac{16000}{\pi} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4 + \omega^2} d\omega$$

Quando $\omega = 0 \implies \theta = 0$ e quando $\omega = 2\sqrt{3} \implies 2\sqrt{3} = 2 \operatorname{tg}(\theta) \implies \theta = \sqrt{3} \implies \theta = \frac{\pi}{3}$.

$$W_{40\Omega} = \frac{8000}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{8000}{\pi} [\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8000}{\pi} \left[\frac{\pi}{3} \right] = \frac{8000}{3} \implies$$

$$W_{40\Omega} = \frac{8000}{3} \quad \text{Joules}$$

Encontramos a porcentagem procurada da seguinte forma:

$$\eta = \frac{8000/3}{4000} (100) = \frac{200}{3} \implies \eta = 66,67\%$$

Exemplo 14: Um filtro elétrico

A tensão de entrada de um filtro de banda de passagem ideal é $v(t) = 120 e^{-24t} u(t)$ volts. O filtro deixa passar sem atenuação todas as frequências entre 24 e 48 rad/s. e rejeita totalmente todas as frequências fora desta banda de passagem. (a) Faça um gráfico de $|V(\omega)|^2$ em função de ω para a tensão de entrada do filtro; (b) Faça um gráfico de $|V_o(\omega)|^2$ em função de ω para a tensão de saída do filtro; (c) Que porcentagem da energia total disponível na entrada do filtro está presente na saída?

1. A transformada de Fourier da tensão de entrada do filtro é o seguinte:

$$V(\omega) = \frac{120}{24 + j\omega} \implies |V(\omega)| = \frac{14400}{576 + \omega^2}$$

O gráfico solicitado é mostrado na figura 5.25.

Figura 5.25: Gráfico de $|V(\omega)|^2$ vs ω .

Figura 5.26: Gráfico da função de saída.

2. O gráfico da função de saída é mostrado na figura 5.26.
3. Encontramos a energia (referida a 1Ω) na entrada do filtro:

$$W_e = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{14400}{576 + \omega^2} d\omega$$

Continuamos encontrando a integral fazendo a seguinte mudança de variável:

$$\omega = 24 \operatorname{tg}(\theta) \implies 576 + \omega^2 = 576 + 576 \operatorname{tg}^2(\theta) = 576(1 + \operatorname{tg}^2(\theta)) = 576 \operatorname{sec}^2(\theta) \implies d\omega = 24 \operatorname{sec}^2(\theta) d\theta$$

Quando $\omega = 0 \implies \theta = 0$ e quando $\omega \rightarrow \infty \implies \theta = \frac{\pi}{2}$

Substituindo as relações anteriores na integral temos o seguinte:

$$W_e = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{14400}{576 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{14400(24)}{576 \operatorname{sec}^2(\theta)} \operatorname{sec}^2(\theta) d\theta$$

$$W_e = \frac{25(24)}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{600}{\pi} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{600}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 300 \implies$$

$$W_e = 300 \quad \text{Joules}$$

Podemos usar também a outra relação matemática para encontrar W_e da seguinte forma:

$$W_e = \int_0^{\infty} 14400 e^{-48t} dt = 14400 \left[-\frac{e^{-48t}}{48} \right]_0^{\infty} = \frac{14400}{48} = 300$$

4. Agora encontramos a energia (referida a 1ω) na saída do filtro:

$$W_s = \frac{1}{\pi} \int_{24}^{48} \frac{14400}{576 + \omega^2} d\omega$$

Neste caso também fazemos a mesma mudança de variável usada anteriormente: $\omega = 24 \operatorname{tg}(\theta)$. Assim, Quando $\omega_1 = 24 \implies 24 = 24 \operatorname{tg}(\theta_1) \implies \theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e quando $\omega_2 = 48 \implies 48 = 24 \operatorname{tg}(\theta_2) \implies \theta_2 = 1,107$ rad.

Substituindo as relações anteriores na integral temos o seguinte:

$$W_e = \frac{1}{\pi} \int_{24}^{48} \frac{14400}{576 + \omega^2} d\omega = \frac{600}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{600}{\pi} [\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{1,107} = 61,44 \implies$$

$$W_e = 61,44 \quad \text{Joules}$$

5. Encontramos a porcentagem de energia na saída:

$$\eta = \frac{61,44}{300}(100) = 20,48 \implies \eta = 20,48\%$$

Exemplo 15: Um filtro elétrico tipo RC.

A tensão de entrada do filtro RC passa-baixos mostrada na figura 5.27 é igual a $v_i(t) = 15 e^{-5t} u(t)$ volts. (a) que porcentagem da energia disponível no sinal de entrada está presente no sinal de saída? (b) Que porcentagem da energia presente da saída está no intervalo de frequências $0 \leq \omega \leq 10$ rad/s.?

Figura 5.27: Circuito elétrico RC.

1. Encontramos a energia (referida a 1Ω) do sinal de entrada do filtro:

$$W_i = \int_0^{\infty} [15 e^{-5t}]^2 dt = 225 \int_0^{\infty} e^{-10t} dt = 225 \left[-\frac{e^{-10t}}{10} \right]_0^{\infty} = 22,5 \implies$$

$$W_i = 22,5 \quad \text{Joules}$$

2. Encontramos a energia presente no sinal de saída.

Inicialmente encontramos a transformada de Fourier da tensão de saída: $V_o(\omega)$.

Conhecemos as seguintes relações matemáticas:

Figura 5.28: Circuito elétrico no universo das transformadas de Laplace e de Fourier.

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} \implies V_o(\omega) = H(\omega) V_i(\omega) \implies V_o(s) = H(s) V_i(s)$$

As relações anteriores são mostradas para o circuito elétrico do problema na figura 5.28.

- Encontramos a transformada de Fourier do sinal de entrada usando tabelas:

$$V_i = \frac{15}{5 + j\omega}$$

- Encontramos $H(\omega)$ do circuito elétrico:

$$I(\omega) = \frac{V_1(\omega)}{10000 + \frac{100000}{j\omega}} \implies V_o(\omega) = \frac{100000}{j\omega} \frac{V_1(\omega)}{10000 + \frac{100000}{j\omega}} = \frac{10}{10 + j\omega} V_1(\omega) \implies$$

$$\frac{V_o(\omega)}{V_1(\omega)} = \frac{10}{10 + j\omega} \implies H(\omega) = \frac{10}{10 + j\omega}$$

- Encontramos a transformada de Fourier de $V_o(\omega)$:

$$V_o(\omega) = H(\omega) V_i(\omega) = \frac{10}{10 + j\omega} \frac{15}{5 + j\omega} = \frac{150}{(10 + j\omega)(5 + j\omega)}$$

Para encontrar a energia presente no sinal de saída encontramos $|V_o(\omega)|^2$:

$$|V_o(\omega)|^2 = \frac{22500}{(100 + \omega^2)(25 + \omega^2)} = \frac{A}{100 + \omega^2} + \frac{B}{25 + \omega^2} \implies$$

$$|V_o(\omega)|^2 = -\frac{300}{100 + \omega^2} + \frac{300}{25 + \omega^2} \implies$$

A energia presente no sinal de saída (referido a 1Ω) assume a seguinte forma:

$$W_o = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |V_o(\omega)|^2 d\omega$$

$$W_o = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{22500}{(100 + \omega^2)(25 + \omega^2)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{300}{25 + \omega^2} d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{300}{100 + \omega^2} d\omega$$

Resolvemos a primeira integral usando a seguinte mudança de variável:

$$\omega = 5 \operatorname{tg}(\theta) \implies d\omega = 5 \operatorname{sec}^2(\theta) \implies 25 + \omega^2 = 25 \operatorname{sec}^2(\theta)$$

Quando $\omega = 0 \implies \theta = 0$ e quando $\omega \rightarrow \infty \implies \theta = \frac{\pi}{2}$. Assim, a integral procurada assume a seguinte forma:

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{25 + \omega^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \operatorname{sec}^2(\theta)}{25 \operatorname{sec}^2(\theta)} d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{5} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{10}$$

Usando a mesma estratégia podemos calcular a segunda integral que assume a seguinte forma:

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{100 + \omega^2} = \frac{1}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{10} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{20}$$

Assim, W_o assume a seguinte forma:

$$W_o = \frac{300}{\pi} \left[\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{20} \right] = 15 \implies$$

$$W_o = 15 \quad \text{Joules}$$

Portanto, a porcentagem de energia dissipada na saída é o seguinte:

$$\eta = \frac{W_o}{W_i}(100) = \frac{15}{22,5}(100) = 66,67 \implies \eta = 66,67\%$$

3. Quantidade da energia do sinal de saída contida no intervalo $0 \leq \omega \leq 10$ rad/s.

$$W'_o = \frac{300}{\pi} \left\{ \int_0^{10} \frac{d\omega}{25 + \omega^2} - \int_0^{10} \frac{d\omega}{100 + \omega^2} \right\}$$

Para a primeira integral fazemos a mudança de variável $\omega = 5 \operatorname{tg}(\theta)$ (nesse caso quando $\omega = 10 \implies 10 = 5 \operatorname{tg}(\theta) \implies \operatorname{tg}(\theta) = 2 \implies \theta = 1,107$ rad. e quando $\omega = 0 \implies \theta = 0$) e para a segunda integral fazemos a mudança de variável $\omega = 10 \operatorname{tg}(\theta)$ (nesse caso quando $\omega = 10 \implies 10 = 10 \operatorname{tg}(\theta) \implies \operatorname{tg}(\theta) = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}$ rad.). Assim, temos o seguinte:

$$W'_o = \frac{300}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{5} \theta \right]_0^{1,107} - \left[\frac{1}{10} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right\} = 13,6 \implies$$

$$W'_o = 13,6 \quad \text{Joules}$$

Finalmente, encontramos a porcentagem de energia de saída contida no intervalo especificado:

$$\eta = \frac{13,6}{15}(100) = 90,9 \implies \eta = 90,9\%$$