Equações de Maxwell na Forma Fasorial

Neste texto trata-se das equações de Maxwell na forma fasorial e as relações constitutivas em meios materiais, as quais serão amplamente emprega- das ao longo o texto, por tratar-se de uma poderosa ferramenta matemática para a descrição de ondas eletromagnéticas. De mesma importância é o estudo do vetor de Poynting complexo. Antes, porém, estuda-se brevemente as propriedades do operador Re{.}.

1 EQUAÇÕES DE MAXWELL NA FORMA INSTANTÂNEA

A forma mais adequada para o estudo de ondas eletromagnéticas é a forma pontual ou diferencial, em vez da forma integral comumente usada em áreas como transformadores e máquinas elétricas. Neste texto, grandezas instantâneas serão representadas através de letras minúsculas, reservando-se as letras maiúsculas à representação fasorial. Desta forma, $\vec{v}(x,y,z,t)$, ou simplesmente $\vec{v}$, representa a forma instantânea do vetor associado ao fasor $\vec{V}(x,y,z)$, ou simplesmente $\vec{V}$, sendo x, y e z as coordenadas de um sistema cartesiano ortogonal, e, t é o tempo. Assim, de acordo com o eletromagnetismo tem-se as quatro equações de Maxwell♦:

a) Lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{e} = \vec{m} - \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \tag{1}$$

que estabelece que uma densidade de corrente magnética $\vec{m}$ (V/m^2), ou, uma densidade de campo magnético $\vec{b}$ (Wb/m^2 ou T) variável no tempo conduz a uma distribuição de campo elétrico $\vec{e}$ (V/m).

b) Lei de Ampére

$$\nabla \times \vec{h} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{d}}{\partial t} \tag{2}$$

que estabelece que uma densidade de corrente elétrica $\vec{j}$ (A/m^2), ou, um deslocamento elétrico $\vec{d}$ (C/m^2) variável no tempo (uma densidade de corrente de deslocamento) produz uma distribuição de campo magnético $\vec{h}$ (A/m).

♦Neste texto, o operador (vetor simbólico) nabla será denotado simplesmente por ∇, em vez de $\vec{\nabla}$.

c) Lei de Gauss elétrica

$$\nabla \bullet \vec{d} = \rho \tag{3}$$

que estabelece a existência de cargas elétricas positivas e negativas, sendo ρ (C/m^3) a densidade de carga elétrica.

d) Lei de Gauss magnética

$$\nabla \bullet \vec{b} = 0 \tag{4}$$

que informa sobre a não existência de cargas magnéticas.

A densidade de corrente magnética $\vec{m}$ foi apresentada apenas para tornar a descrição das equações de Maxwell mais geral, sendo uma grandeza auxiliar puramente matemática, que permite simplificar a análise de alguns problemas eletromagnéticos como, por exemplo, o estudo de antenas de fenda (*slot antenna*). Neste texto esta grandeza não será necessária.

2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MEIOS MATERIAIS

Considera-se neste texto que os meios sejam lineares, isotrópicos e homogêneos. Neste caso, as relações constitutivas para meios materiais são:

$$\vec{d} = \varepsilon \vec{e} \tag{5a}$$

$$\vec{b} = \mu \vec{h} \tag{5b}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{e} \tag{5c}$$

sendo ε (F/m), μ (H/m) e σ (S/m) as permissividade elétrica, permeabilidade magnética e condutividade elétrica do meio material. Em geral, as grandezas ε, μ e σ são escalares e reais. Além disso,

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \tag{6a}$$

$$\mu = \mu_r \mu_0 \tag{6b}$$

nas quais ε_r e μ_r são as permissividade e permeabilidade relativas do meio, grandezas adimensionais e cujos valores são superiores a unidade (isto é, $\varepsilon_r \geq 1$ e $\mu_r \geq 1$). Por sua vez, tem-se $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \cong 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, correspondentes as permissividade e permeabilidade do vácuo (ou do ar). No caso de meios não-magnéticos, ocorre: $\mu = \mu_0$, ou então, $\mu_r = 1$.

Um fato curioso de se observar é que

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \tag{7}$$

correspondente à velocidade da luz no vácuo. Este resultado será detalhado adiante.

3 NOTAÇÃO FASORIAL

Considere-se $\vec{a}(x,y,z,t)$ ou, simplificadamente, $\vec{a}(t)$, um vetor que varia harmonicamente no tempo. Ou seja,

$$\vec{a}(t) = \vec{A}_{\max} \cos(\omega t + \phi) \tag{8}$$

sendo $\vec{A}_{\max} = \vec{A}_{\max}(x,y,z)$, simplificadamente, e, ω e ϕ correspondentes as frequência angular e fase inicial do vetor instantâneo. Na sequência, recorde-se da identidade de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + jsen\theta \tag{9}$$

a partir da qual pode-se concluir que:

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\{e^{j\theta}\} \tag{10}$$

sendo que $\mathrm{Re}\{z\}$ representa a parte real de um número complexo z qualquer.

A partir do resultado (10), pode-se concluir que (8) também pode ser denotado por:

$$\vec{a}(t) = \mathrm{Re}\{\vec{A}_{\max} e^{j(\omega t+\phi)}\} = \mathrm{Re}\{(\vec{A}_{\max} e^{j\phi}) e^{j\omega t}\} \tag{11}$$

Em várias situações, o fator $e^{j\omega t}$ é comum a todas as grandezas envolvidas em uma dada análise. Se este for o caso, define-se o fasor♠ $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$ como:

$$\vec{A} = \vec{A}_{\max} e^{j\phi} \tag{12}$$

na qual $\vec{A}_{\max}$ fornece a magnitude e orientação, e, ϕ corresponde a fase do fasor. Conforme se observa, (12) corresponde a um vetor e fasor simultaneamente. Assim, a expressão (12) corresponde a notação fasorial do vetor $\vec{a}(t)$, sendo também conhecida como notação complexa ou vetor complexo $\vec{A}$. Neste texto, toda grandeza fasorial será representada pela letra maiúscula correspondente à grandeza instantânea a ela associada, no caso, $\vec{a}(t)$. Conforme ficará evidente no texto, a grande vantagem da notação fasorial está associada à facilidade das operações matemáticas sobre uma exponencial complexa, tais como produto, divisão, derivada e integral, por exemplo.

Uma vez que a entrada de um sistema linear seja escrito na forma fasorial, $\vec{A}$, e, que seu fasor resposta $\vec{R}$ seja obtido, o valor instantâneo correspondente $\vec{r}(t)$ pode ser obtido através da operação inversa:

$$\vec{r}(t) = \mathrm{Re}\{\vec{R} e^{j\omega t}\} \tag{13}$$

Antes de prosseguir, é adequado apresentar uma série de propriedades do operador $\mathrm{Re}\{.\}$. Através delas, será possível obter a resposta de um sistema linear a uma

---

♠ Ao contrário deste texto, em certos livros, costuma-se definir o fasor girante como $\vec{A} = A_{\max} e^{j(\omega t+\phi)}$.

dada entrada variável harmonicamente no tempo.

4 PROPRIEDADES DO OPERADOR REAL

O operador $\mathrm{Re}\{.\}$ aplicado a fasores é linear e, como tal, goza de todas as propriedades dos sistemas lineares. Suas principais propriedades são listadas abaixo. Embora sejam referidas a fasores-vetores ($\vec{A}, \vec{B}$, etc.), estas propriedades também podem ser aplicadas a fasores-escalares (A, B, etc.)

a) Adição de fasores

$$\mathrm{Re}\{\vec{A}+\vec{B}\} = \mathrm{Re}\{\vec{A}\} + \mathrm{Re}\{\vec{B}\} \tag{14}$$

Demonstração: sejam os vetores complexos $\vec{A} = \vec{K} + j\vec{L}$ e $\vec{B} = \vec{M} + j\vec{N}$, sendo $\vec{K}, \vec{L}, \vec{M}$ e $\vec{N}$ vetores reais, então,

$$\mathrm{Re}\{\vec{A}+\vec{B}\} = \mathrm{Re}\{(\vec{K}+\vec{M}) + j(\vec{L}+\vec{N})\} = \vec{K}+\vec{M} = \mathrm{Re}\{\vec{A}\} + \mathrm{Re}\{\vec{B}\} \quad \text{c.q.d.}$$

____#

b) Multiplicação de fasor por escalar

$$\mathrm{Re}\{\alpha\, \vec{A}\} = \alpha\, \mathrm{Re}\{\vec{A}\} \tag{15a}$$

$$\mathrm{Re}\{\beta\, \vec{B}\} = \mathrm{Re}\{\beta\}\vec{B} \tag{15b}$$

sendo α um escalar real e $\vec{A}$ um vetor complexo, e, β um escalar complexo e $\vec{B}$ um vetor real. A demonstração destas relações fica a cargo do leitor.

c) Igualdade de fasores

Se $\mathrm{Re}\{\vec{A}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\vec{B}e^{j\omega t}\}$ para todo t, então, $\vec{A} = \vec{B}$, e vice-versa. A demonstração desta propriedade fica a cargo do leitor.

d) Derivada de fasor

$$\frac{\partial}{\partial w}\mathrm{Re}\{\vec{A}\} = \mathrm{Re}\{\frac{\partial \vec{A}}{\partial w}\} \tag{16}$$

para $w=x$, y, z ou t. A demonstração desta propriedade fica a cargo do leitor.

e) Derivada de fasor no tempo

$$\frac{\partial(\vec{A}e^{j\omega t})}{\partial t} = j\omega(\vec{A}e^{j\omega t}) \tag{17}$$

que estabelece que a derivada temporal de um fasor pode ser convertida em um fator algébrico. Esta é uma das vantagens da notação fasorial.

Demonstração: aplicando-se (13) ao vetor instantâneo $\vec{a}$, em conjunto com (16), tem-se

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\{\vec{A}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{A}e^{j\omega t})\} \qquad \text{(i)}$$

sendo $\vec{A}$ o fasor associado. Por outro lado, a partir de (2.8)

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\{\vec{A}_{\max}\cos(\omega t+\phi)\} = -\omega A_{\max} sen\,(\omega t+\phi) = -\omega A_{\max}\cos(\omega t+\phi = \pi/2)$$

A seguir, recorrendo-se a identidade de Euler (2.9), obtém-se

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \mathrm{Re}\{-\omega A_{\max} e^{j(\omega t+\phi-\pi/2)}\} = \mathrm{Re}\{-\omega A_{\max} e^{j\phi}e^{j\omega t}e^{-j\pi/2}\}$$

Lembrando-se que $e^{-j\pi/2} = \cos(\pi/2) - jsen(\pi/2) = 0 - j = -j$, e, usando a definição (2.12), vem

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \mathrm{Re}\{j\omega(\vec{A}e^{j\omega t})\} \qquad \text{(ii)}$$

Comparando-se (i) com (ii), conclui-se que (2.17) é verdadeira. #

f) Integral de fasor

$$\int \mathrm{Re}\{\vec{A}(w)\}dw = \mathrm{Re}\{\int \vec{A}(w)dw\} \qquad (18)$$

para *w*=*x*, *y*, *z* ou *t*. A demonstração desta propriedade fica a cargo do leitor.

g) Integral no tempo

$$\int (\vec{A}e^{j\omega t})\,dt = \frac{\vec{A}e^{j\omega t}}{j\omega} \qquad (19)$$

sendo que a demonstração é deixada para o leitor.

h) Propriedade do rotacional

$$\nabla\times\mathrm{Re}\{\vec{E}\,e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{(\nabla\times\vec{E})\,e^{j\omega t}\} \qquad (20)$$

Demonstração: Sendo $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$, então,

$$\nabla\times\mathrm{Re}\{\vec{E}\,e^{j\omega t}\} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \mathrm{Re}\{E_x e^{j\omega t}\} & \mathrm{Re}\{E_y e^{j\omega t}\} & \mathrm{Re}\{E_z e^{j\omega t}\} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}[\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\{E_z e^{j\omega t}\} - \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Re}\{E_y e^{j\omega t}\}] + \hat{y}[\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Re}\{E_x e^{j\omega t}\} - \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\{E_z e^{j\omega t}\}]$$

$$+ \hat{z}[\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\{E_y e^{j\omega t}\} - \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\{E_x e^{j\omega t}\}]$$

Usando a propriedade (2.14), obtém-se

$$\nabla \times \mathrm{Re}\{\vec{E}\, e^{j\omega t}\} = \hat{x}\,\mathrm{Re}\{(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z})\, e^{j\omega t}\} + \hat{y}\,\mathrm{Re}\{(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x})\, e^{j\omega t}\}$$

$$+ \hat{z}\,\mathrm{Re}\{(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})\, e^{j\omega t}\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x e^{j\omega t} & E_y e^{j\omega t} & E_z e^{j\omega t} \end{vmatrix}\right\} = \mathrm{Re}\{(\nabla \times \vec{E})\, e^{j\omega t}\} \quad \text{c.q.d.}$$

____ #

i) Propriedade do divergente

$$\nabla \bullet \mathrm{Re}\{\vec{E}\, e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{(\nabla \bullet \vec{E})\, e^{j\omega t}\} \tag{21}$$

Demonstração: $\nabla \bullet \mathrm{Re}\{\vec{E}\, e^{j\omega t}\} = \nabla \bullet \mathrm{Re}\{(E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z})\, e^{j\omega t}\}$

Usando a propriedade (14), tem-se

$$\nabla \bullet \mathrm{Re}\{\vec{E}\, e^{j\omega t}\} = \nabla \bullet \mathrm{Re}\{E_x\hat{x}\, e^{j\omega t}\} + \nabla \bullet \mathrm{Re}\{E_y\hat{y}\, e^{j\omega t}\} + \nabla \bullet \mathrm{Re}\{E_z\hat{z}\, e^{j\omega t}\}$$

e, da propriedade (15b), vem

$$\nabla \bullet \mathrm{Re}\{\vec{E}\, e^{j\omega t}\} = \nabla \bullet [\mathrm{Re}\{E_x\, e^{j\omega t}\}\hat{x}] + \nabla \bullet [\mathrm{Re}\{E_y e^{j\omega t}\}\hat{y}] + \nabla \bullet [\mathrm{Re}\{E_z\, e^{j\omega t}\}\hat{z}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\{E_x\, e^{j\omega t}\} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\{E_y\, e^{j\omega t}\} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Re}\{E_z\, e^{j\omega t}\}$$

Por sua vez, aplicando-se (16),

$$\nabla \bullet \mathrm{Re}\{\vec{E}\, e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\frac{\partial}{\partial x}(E_x\, e^{j\omega t})\} + \mathrm{Re}\{\frac{\partial}{\partial y}(E_y e^{j\omega t})\} + \mathrm{Re}\{\frac{\partial}{\partial z}(E_z\, e^{j\omega t})\}$$

$$= \mathrm{Re}\{(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z})\, e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{(\nabla \bullet \vec{E})\, e^{j\omega t}\} \qquad \text{c.q.d.}$$

____ #

5 EQUAÇÕES DE MAXWELL NA FORMA DE FASOR

Basicamente, aplicam-se os resultados (17), (20) e (21) para se obter os resultados listados abaixo. Por exemplo, no caso da lei de Faraday (1), se os vetores instantâneos $\vec{e}, \vec{m}$ e $\vec{b}$ estiverem associados aos fasores $\vec{E}, \vec{M}$ e $\vec{B}$, respectivamente, então, aplicando-se (13), vem

$$\nabla \times \mathrm{Re}\{\vec{E}\, e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\vec{M}\, e^{j\omega t} - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} e^{j\omega t})\}$$

e assim, usando-se (17) e (20)

$$\mathrm{Re}\{(\nabla \times \vec{E})\, e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\vec{M}\, e^{j\omega t} - j\omega \vec{B} e^{j\omega t}\}.$$

Empregando-se o conceito de igualdade fasorial [seção 4, item c)], tem-se a lei de Faraday na forma fasorial (22a) listada abaixo. Através de demonstrações similares, obtém-se as demais equações de Maxwell na forma de fasor, associadas a (2), (3) e (4):

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{M} - j\omega \vec{B} \tag{22a}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \tag{22b}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho \tag{22c}$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \tag{22d}$$

Essencialmente, substituiu-se $\partial / \partial t$ por $j\omega$, e, letras minúsculas por letras maiúsculas ao se passar de (1)-(4) para (22a)-(22d). Deve ser observado que deu-se preferência por representar o fasor densidade de carga elétrica pela mesma letra usada na forma instantânea, ρ. Ressalta-se, contudo, que ρ tem a forma (8) em (3), enquanto tem a forma (12) em (22c).

De forma similar, as relações constitutivas (5a) a (5c), tornam-se:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \tag{23a}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{23b}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{23c}$$

Em meios homogêneos, não existem gradientes de permissividade elétrica ou de permeabilidade magnética, ou seja, $\nabla \varepsilon = 0$ e $\nabla \mu = 0$, e assim, aplicando-se (23a) e a regra da cadeia à (22c), obtém-se: $\nabla \bullet \vec{D} = \nabla \bullet (\varepsilon \vec{E}) = \nabla \varepsilon \bullet \vec{E} + \varepsilon \nabla \bullet \vec{E} = \varepsilon \nabla \bullet \vec{E}$. Nestes tipos de meios materiais, e, desconsiderando-se a densidade de corrente magnética, as equações de Maxwell (22a)-(22d) podem ser escritas simplesmente em termos de $\vec{E}$ e $\vec{H}$:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \tag{24a}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \varepsilon \vec{E} \tag{24b}$$

$$\nabla \bullet \vec{E} = \rho / \varepsilon \tag{24c}$$

$$\nabla \bullet \vec{H} = 0 \tag{24d}$$

6 VETOR DE POYNTING COMPLEXO

Nesta seção será deduzido o valor médio do vetor de Poynting instantâneo de um campo eletromagnético:

$$\vec{s} = \vec{e} \times \vec{h} \tag{25}$$

medido em W/m^2, e que está relacionado ao fluxo de potência que atravessa uma dada área. Também será de interesse obter uma expressão similar a um fasor para o vetor de Poynting $\vec{s}$, a qual é denominada de vetor de Poynting complexo $\vec{S}$, nos casos em que $\vec{e}$ e $\vec{h}$ variam harmonicamente no tempo. Para ambos os caso, inicia-se pelo estudo de um produto vetorial de grandezas harmônicas, do tipo $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Produto vetorial de grandezas harmônicas

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores harmônicos com magnitudes $\vec{A}_{\max}$ e $\vec{B}_{\max}$, e, fases ϕ_a e ϕ_b, respectivamente. Ou seja, $\vec{a} = \vec{A}_{\max}\cos(\omega t + \phi_a)$ e $\vec{b} = \vec{B}_{\max}\cos(\omega t + \phi_b)$. Aplicando-se a definição de fasor (12), obtém-se que $\vec{a} = \mathrm{Re}\{\vec{A}e^{j\omega t}\}$ e $\vec{b} = \mathrm{Re}\{\vec{B}e^{j\omega t}\}$, para $\vec{A} = \vec{A}_{\max}e^{j\omega t}$ e $\vec{B} = \vec{B}_{\max}e^{j\omega t}$. Na sequência, investiga-se o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Neste caso, aplicando-se (13), pode-se escrever que $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ torna-se igual a $\vec{c} = \mathrm{Re}\{\vec{A}e^{j\omega t}\} \times \mathrm{Re}\{\vec{B}e^{j\omega t}\}$.

Deve ser relembrada a relação válida para o número complexo z (facilmente demonstrável), qual seja: $\mathrm{Re}\{z\} = (z + z^*)/2$, sendo z^* o complexo conjugado de z. Utilizando-se esta propriedade no segundo fator do produto vetorial acima, obtém-se $\vec{c} = \mathrm{Re}\{\vec{A}e^{j\omega t}\} \times (\vec{B}e^{j\omega t} + \vec{B}^* e^{-j\omega t})/2$. Como o segundo fator é um vetor real, utiliza-se a propriedade de multiplicação por escalar (15b) (estendida para produto vetorial), para se obter: $\vec{c} = \mathrm{Re}\{\vec{A}e^{j\omega t} \times (\vec{B}e^{j\omega t} + \vec{B}^* e^{-j\omega t})\}/2$.

Aplicando-se agora a propriedade distributiva a este produto vetorial, chega-se o resultado de interesse, a equação (25a). Por outro lado, se a propriedade $\mathrm{Re}\{z\} = (z + z^*)/2$ for aplicada ao primeiro fator de $\vec{c} = \mathrm{Re}\{\vec{A}e^{j\omega t}\} \times \mathrm{Re}\{\vec{B}e^{j\omega t}\}$, obtém-se (25b):

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{(\vec{A} \times \vec{B})e^{j2\omega t} + \vec{A} \times \vec{B}^*\} \tag{26a}$$

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{(\vec{A} \times \vec{B})e^{j2\omega t} + \vec{A}^* \times \vec{B}\} \tag{26b}$$

sendo ambas as relações equivalentes.

b) Valor médio do produto vetorial de grandezas harmônicas

O próximo tópico de interesse é investigar o valor médio do produto vetorial de grandezas harmônicas $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, aqui denotado por c_{avg}. Por definição de valor médio temporal (*average*), tem-se que

$$\vec{c}_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{c}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T (\vec{a}\times\vec{b})\, dt \tag{27}$$

sendo T o período ($T = 2\pi/\omega$) da função harmônica. Substituindo-se (26a) em (27), c_{avg} torna-se igual a

$$\begin{aligned}\vec{c}_{avg} &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{A}\times\vec{B}^* + (\vec{A}\times\vec{B})\,e^{j2\omega t}\}\, dt \\ &= \frac{1}{2T}\int_0^T \mathrm{Re}\{\vec{A}\times\vec{B}^*\}dt + \frac{1}{2T}\int_0^T \mathrm{Re}\{(\vec{A}\times\vec{B})\,e^{j2\omega t}\}\, dt\end{aligned} \tag{28}$$

Ora, como o integrando da primeira parcela de (28) não depende de t, e, como a função $e^{j2\omega t}$ tem período $T/2$, a integral na segunda parcela é nula. Com isto, se atinge o resultado da equação (29a). Por outro lado, substituindo-se (26b) em (27), chega-se ao resultado (29b), sendo ambos os resultados equivalentes:

$$\vec{c}_{avg} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{A}\times\vec{B}^*\} \tag{29a}$$

$$\vec{c}_{avg} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{A}^*\times\vec{B}\} \tag{29b}$$

Os resultados acima permanecem válidos para o caso do produto entre escalares que variam harmonicamente no tempo. Assim, dados os seguintes escalares $v = V_{\max}\cos(\omega t + \phi_v)$, potencial elétrico, e, $i = I_{\max}\cos(\omega t + \phi_i)$, corrente elétrica, a expressão da potência média de $p = v\,i$ será:

$$p_{avg} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{VI^*\} \tag{30}$$

A potência média corresponde a potência útil ou potência ativa em um dado sistema em regime permanente senoidal. O resultado (30) será amplamente empregado no cálculo da potência transmitida no capítulo sobre a linha de transmissão TEM.

Exemplo 2.1: Demonstrar a relação (2.30).

Solução: Em primeiro lugar, escrevem-se v e i como $v = \mathrm{Re}\{V\,e^{j\omega t}\}$ e $i = \mathrm{Re}\{I\,e^{j\omega t}\}$, sendo $V = V_{\max}e^{j\phi_v}$ e $I = I_{\max}e^{j\phi_i}$, os fasores associados a v e i, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}p &= \mathrm{Re}\{V\,e^{j\omega t}\}\mathrm{Re}\{I\,e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{V\,e^{j\omega t}\}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{I\,e^{j\omega t} + I^*e^{-j\omega t}\} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{V\,e^{j\omega t}(I\,e^{j\omega t} + I^*e^{-j\omega t})\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{VI\,e^{j2\omega t} + VI^*\}\end{aligned}$$

Portanto, o valor médio de p será:

$$p_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{VI\,e^{j2\omega t} + VI^*\}dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{VI^*\}\frac{1}{T}\int_0^T dt$$

pois o valor da integral na primeira parcela é igual a zero. Com isto, a potência média será:

$p_{avg} = \mathrm{Re}\{VI^*\}/2$. ### c.q.d.

c) Vetor de Poynting médio

Aplicando-se o resultado (29a) (por exemplo), ao caso do vetor de Poynting dado por (25), obtém-se:

$$\vec{s}_{avg} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}\times\vec{H}^*\} \tag{31}$$

Observe-se que, embora (31) trate-se um valor médio temporal, o resultado ainda é uma grandeza vetorial (medida em W/m^2), e não um simples escalar. Ou seja, no caso geral, deve ser uma função de (x,y,z).

d) Vetor de Poynting Complexo

Conforme foi visto nas seções anteriores, à cada grandeza temporal $\vec{a}$ foi associado um fasor $\vec{A}$. A fim de estender este conceito ao caso do vetor de Poynting instantâneo $\vec{s}$, define-se um vetor de Poynting complexo $\vec{S}$ através de:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* \tag{32}$$

tal que:

$$\vec{s}_{avg} = \mathrm{Re}\{\vec{S}\} \tag{33}$$

Portanto, $\vec{S}$ não é um fasor no sentido estrito. Trata-se de uma grandeza que pode ser calculada no domínio da frequência e que, através dela, pode-se determinar o valor da potência média (ou potência útil) fornecida para (ou consumida por) um sistema. No caso geral, $\vec{S}$ deve ser uma função de (x,y,z).

7 TEOREMA DE POYNTING

A investigação de $\nabla\bullet\vec{S}$ conduz ao conhecido teorema de Poynting para grandezas harmônicas no tempo. Partindo-se de (32), vem

$$\nabla\bullet\vec{S} = \frac{1}{2}\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H}^*) = \frac{1}{2}[\vec{H}^*\bullet(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\bullet(\nabla\times\vec{H}^*)] \tag{34}$$

A partir de (24b), calcula-se o termo (conferir este resultado):

$$\nabla\times\vec{H}^* = (\nabla\times\vec{H})^* = \sigma\vec{E}^* - j\omega\varepsilon\vec{E}^* \tag{35}$$

e assim, substituindo-se (31) e (35) em (34) obtém-se

$$\nabla \bullet \vec{S} = -\frac{1}{2}\sigma \vec{E} \bullet \vec{E}^* + j\omega(\frac{1}{2}\varepsilon \vec{E} \bullet \vec{E}^* + \frac{1}{2}\mu \vec{H} \bullet \vec{H}) \qquad (36)$$

A relação (36) constitui o teorema de Poynting, que descreve o valor do fluxo de potência por unidade de volume, $\nabla \bullet \vec{S}$, que entra ou sai de um dado sistema fechado. Do eletromagnetismo, sabe-se que a primeira parcela do lado direito de (36) corresponde à energia dissipada por efeito Joule, enquanto que, as segunda e terceira parcelas correspondem às energias elétrica e magnética armazenadas no sistema. Ou seja, o teorema de Poynting estabelece que a diferença entre a energia armazenada e a energia dissipada corresponde ao fluxo de potência da radiação eletromagnética através de uma unidade de volume de um sistema.

A notação fasorial constitui uma poderosa ferramenta matemática para estudar o campo eletromagnético, em vista das simplificações algébricas decorrentes do uso da exponencial complexa. Além disso, várias grandezas eletromagnéticas como, por exemplo, a potência ou impedância, podem ser calculadas em valores absolutos no próprio domínio da frequência, evitando-se as dificuldades que se encontrariam com cálculos realizados no domínio temporal. A forma fasorial será empregada ao longo de todo este trabalho para o estudo da propagação de ondas, guiadas ou não. Somente nas ocasiões onde é necessário, por exemplo, visualizar a distribuição de campo eletromagnético, as ondas estacionárias ou propor algum arranjo de medição prática, é que a notação instantânea será novamente necessária. No entanto, este expediente é realizado prontamente, aplicando-se a relação (13).