

EMERSON RAVAZZI PIRES DA SILVA

**CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES
INCERTOS VIA REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA
UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV
DEPENDENTES DE PARÂMETROS**

EMERSON RAVAZZI PIRES DA SILVA

**CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES
INCERTOS VIA REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA
UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV
DEPENDENTES DE PARÂMETROS**

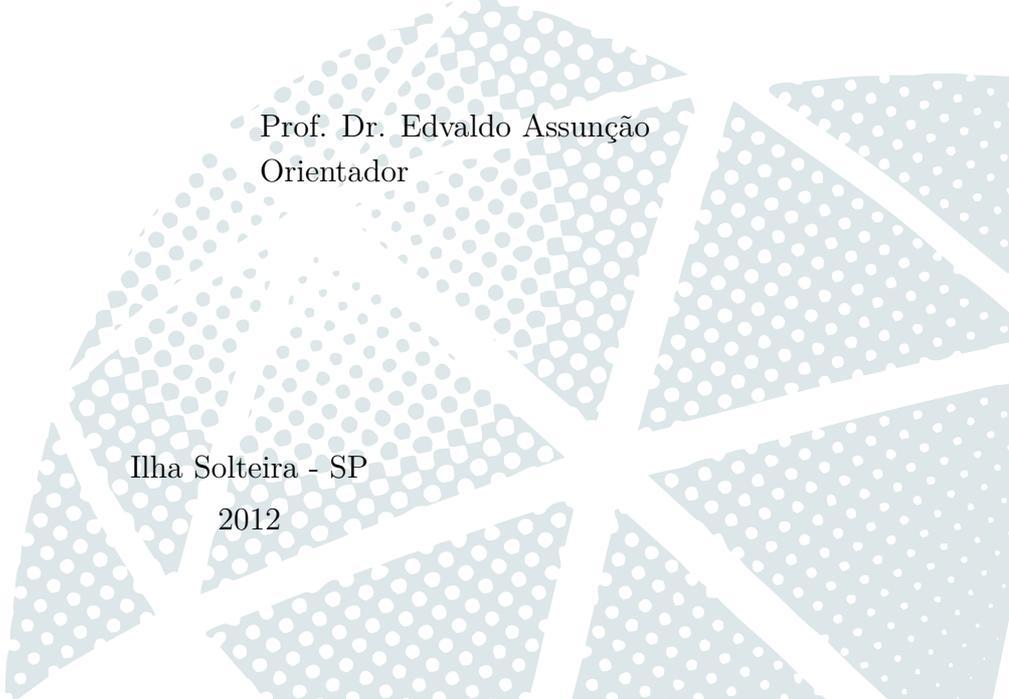
Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Edvaldo Assunção
Orientador

Ilha Solteira - SP

2012



FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

S586c Silva, Emerson Ravazzi Pires da.
Controle de sistemas lineares incertos via realimentação derivativa utilizando Funções de Lyapunov dependentes de parâmetros / Emerson Ravazzi Pires da Silva. – Ilha Solteira: [s.n.], 2012.
126 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2012

Orientador: Edvaldo Assunção
Inclui bibliografia

1. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). 2. Realimentação derivativa.
3. Sistemas lineares. 4. Incertezas politópicas. 5. Falhas estruturais. 6. Liapunov, Funções de. 7. Função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF).



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Controle de sistemas lineares incertos via realimentação derivativa utilizando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros

AUTOR: EMERSON RAVAZZI PIRES DA SILVA
ORIENTADOR: Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO
Divisão de Engenharia Eletrônica / ITA - Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Prof. Dr. FLAVIO ANDRADE FARIA
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação / Escola de Engenharia de São Carlos - USP

Data da realização: 23 de novembro de 2012.

*A toda minha família, em especial aos meus pais, Radir e Etelvina;
À minha irmã Thais;
À minha noiva Elisa Raquel;
pelo incentivo, apoio, amor e compreensão,
em todos os momentos desta e de outras caminhadas, dedico.*

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

- Dedico este trabalho primeiramente a Deus por iluminar sempre o meu caminho;
- Dedico a minha família, em especial aos meus pais, minha irmã e minha noiva, presentes em todos os momentos, obrigado pelo incentivo e amor constantes;
- Ao meu orientador professor Dr. Edvaldo Assunção, fico grato por tudo, principalmente pela oportunidade oferecida, orientação, amizade, incentivo e confiança depositada em mim;
- Ao professor Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela amizade, sugestões e ajudas cedidas;
- Ao professor Dr. José Paulo Fernandes Garcia e professora Dr^a. Lizete Maria C. Fernandes Garcia pelos bons momentos convividos e pela amizade;
- Ao professor Dr. Antonio de Pádua Lima Filho, do Departamento de Engenharia Mecânica da FEIS, agradeço pelos conselhos e pela amizade;
- A professora Dr^a. Neusa A. P. da Silva, pelo acompanhamento nas bancas examinadoras;
- Aos funcionários da seção de pós-graduação, pelo bom atendimento;
- Aos meus amigos de Getulina/SP, minha cidade natal, agradeço pelos momentos de descontração;
- Aos meus amigos doutores Flávio Andrade Faria e Rodrigo Cardim por toda ajuda com este trabalho e pela grande amizade;
- Aos colegas do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) e do Laboratório Computacional de Pesquisa em Controle (LCPC), Gisele de Carvalho Apolinário, Luiz Francisco Sanches Buzachero, Victor Leonardo Yoshimura, Rodolpho Moreira Manesco, Fernando Barros Rodrigues, Ueslei Barbosa Fernandes, Wallysonn Alves de Souza, Edson Italo Mainardi Júnior, Manoel Rodrigo Moreira, João Henrique Pereira Silva, pela amizade e pela contribuição, que de forma direta ou indireta também me ajudaram;
- Aos amigos de república, Luiz Renato (Tinoco), Marcus (Deka), Rodrigo (Juarez),

Fernando (Toca), Gabriel (Ryu) e Bruno;

– A todos desenvolvedores de pacotes de classe $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, em especial aos desenvolvedores do pacote $\text{ABN}^{\text{T}}\text{E}^{\text{X}}$, útil para a criação e formatação de documentos conforme as normas da ABNT;

– Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo suporte financeiro (Número do processo: 141582/2009-0);

– À FAPESP (Processo número 2011/17610-0) pela aquisição do sistema de suspensão ativa.

“No meio da dificuldade encontra-se a oportunidade”

Albert Einstein (1879-1955)

*“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem
foram conquistadas do que parecia impossível.”*

Charlie Chaplin (1889 - 1977)

*“Confia os teus cuidados ao Senhor, e ele te susterá;
jamaiz permitirá que o justo seja abalado.”*

Salmos 55:22

RESUMO

Este trabalho trata do problema de estabilização robusta de sistemas lineares contínuos no tempo sujeitos a incertezas do tipo politópicas no modelo. Todo o trabalho é fundamentado em leis de controle por realimentação da derivada do vetor de estado (realimentação derivativa). A motivação em utilizar a realimentação derivativa ($u(t) = -K_d \dot{x}(t)$) em vez da realimentação do vetor de estado convencional é devido à facilidade de implementação em algumas aplicações mecânicas, por exemplo, no controle de vibrações de sistemas mecânicos, nos quais sensores como acelerômetros têm sido utilizados para medir a derivada de segunda ordem (aceleração) de uma variável de estado (posição) desses sistemas. A metodologia apresenta condições suficientes na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs, acrônimo inglês para *Linear Matrix Inequalities*) para a síntese de controladores lineares robustos estáticos (K_d), visando a princípio apenas a estabilização do sistema, na sequência a estabilização com restrição de taxa de decaimento ($\gamma > 0$) e por fim projetos que asseguram a \mathcal{D} -estabilidade (alocação regional) robusta, restringindo os autovalores a uma determinada região do plano complexo. Os índices de desempenho de taxa de decaimento e \mathcal{D} -estabilidade são adicionados no projeto dos controladores visto que, garantir apenas a estabilidade do sistema nem sempre é suficiente para um bom desempenho prático. As formulações LMIs são realizadas através de lemas largamente utilizados (Lema da Projeção Recíproca e Lema de Finsler) em análise de estabilidade e projetos de controladores para os mais diversos problemas. Estes lemas permitem o uso de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF, acrônimo inglês para *Parameter-Dependent Lyapunov Function*) para assegurar a estabilidade assintótica dos sistemas no sentido de Lyapunov. Em comparação com a literatura existente, nos quais os resultados apresentados abordam formulações LMIs clássicas, baseadas na existência de uma função de Lyapunov quadrática comum (CQLF, acrônimo inglês para *Common Quadratic Lyapunov Function*) para a solução dos problemas, o presente trabalho mostra resultados menos conservadores na maior parte das ocasiões. Em muitos casos, encontra-se factibilidade para os problemas tratados com uma PDLF que não são factíveis com o uso de uma CQLF (estabilidade quadrática). Neste trabalho todas as simulações são realizadas em microcomputadores, uma vez que LMIs podem ser resolvidas facilmente e eficientemente utilizando pacotes de otimização como, por exemplo, o “*Robust Control Toolbox*” do *software* MatLab[®]. Durante todo o texto, vários exemplos numéricos são apresentados e simulados a fim de ilustrar a eficiência das metodologias propostas. No final uma implementação prática realizada em laboratório utilizando o sistema de suspensão ativa da Quanser[®] é exibida.

Palavras-chave: Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Realimentação derivativa. Sistemas lineares. Incertezas politópicas. Falhas estruturais. Função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF).

ABSTRACT

This work deals with the problem of robust stabilization of continuous-time linear systems subjected to polytopic uncertainties in the plant. All our work is based on control techniques using only the state-derivative feedback. The motivation for the use of state-derivative feedback ($u(t) = -K_d \dot{x}(t)$) instead of conventional state feedback is due to ease of implementation in some mechanical applications, for instance, in the vibration control of mechanical systems, in which sensors like accelerometers have been used to measure the second order derivative (acceleration) of one state variable (position) of these systems. The methodology presents sufficient conditions in the form of linear matrix inequalities (LMIs) for the synthesis of static linear robust controllers (K_d), aiming at first only the system's stability, followed by the system's stability with decay rate ($\gamma > 0$) and finally designs that ensure the system's robust \mathcal{D} -stability (regional allocation), restricting the eigenvalues at a given region of the complex plane. The performance indexes of decay rate and \mathcal{D} -stability are added in the controllers design since ensuring system's stability only is not always sufficient for a good practical performance. The LMIs formulations are made through widely used lemmas (Reciprocal Projection Lemma and Finsler's Lemma) in the stability analysis and in the controllers design for many problems. These lemmas allow the use of a parameter-dependent Lyapunov function (PDLF) to ensure the asymptotic stability of the systems in the sense of Lyapunov. Comparing with the existing literature, in which the results consider classical LMIs formulations, based on the existence of a common quadratic Lyapunov function (CQLF) for the solution of the problems, the present work shows to be less conservative in most occasions. In many cases the problems treated with a PDLF are feasible while problems dealt with a CQLF (quadratic stability) may have no feasibility. In this work all simulations were made on microcomputers, once LMIs can be easily and efficiently solved using optimization packages as, for instance, the "Robust Control Toolbox" from MatLab[®]. Throughout the text, several numerical examples are presented and simulated in order to illustrate the effectiveness of the proposed methodologies. Lastly a practical implementation at laboratory using the active suspension system from Quanser[®] is displayed.

Keywords: Linear matrix inequalities (LMIs). State-derivative feedback. Linear systems. Polytopic uncertainties. Structural failures. Parameter-dependent Lyapunov function (PDLF).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Região γ para alocação dos autovalores.	30
Figura 2 -	Sistema de suspensão ativa de um veículo.	34
Figura 3 -	Simulação do sistema (47) com $u(t) = 0$.	37
Figura 4 -	Simulação do sistema (47) com o ganho (48).	38
Figura 5 -	Sinal de controle considerando o ganho (48).	38
Figura 6 -	Simulação do sistema (47) com o ganho (49).	39
Figura 7 -	Sinal de controle considerando o ganho (49).	40
Figura 8 -	Simulação do sistema (47) com o ganho (50).	41
Figura 9 -	Sinal de controle considerando o ganho (50).	41
Figura 10 -	Projeto do controlador com os Teoremas 1 (\square) e 3 ($\varphi = 200000, \times$).	43
Figura 11 -	Parâmetro para o qual os controladores são encontrados (Factibilidade $\times \varphi$).	44
Figura 12 -	Projeto do controlador com os Teoremas 2 (\square) e 4 ($\varphi = 0, 2, \times$).	44
Figura 13 -	Parâmetros para os quais os controladores são encontrados ($\varphi \times \gamma \times$ Factibilidade).	45
Figura 14 -	Projeto do controlador com os Teoremas 1 (\square) e 3 ($\varphi = 200000, \times$) e com Assunção et al. (2007, Teorema 3, \square, \times e \circ).	46
Figura 15 -	Projeto do controlador com Assunção et al. (2007, Teorema 4, \circ) e com os Teoremas 2 (\circ e \square) e 4 ($\varphi = 0, 2, \circ, \square$ e \times).	47
Figura 16 -	Sistema mecânico de controle de vibração.	54
Figura 17 -	Simulação do sistema (72) com o ganho (73).	56
Figura 18 -	Sinal de controle considerando o ganho (73).	56
Figura 19 -	Simulação do sistema (72) com o ganho (74).	57
Figura 20 -	Sinal de controle considerando o ganho (74).	58
Figura 21 -	Simulação do sistema (72) com o ganho (75).	59
Figura 22 -	Sinal de controle considerando o ganho (75).	59
Figura 23 -	Simulação do sistema (72) com o ganho (76).	61
Figura 24 -	Sinal de controle considerando o ganho (76).	61
Figura 25 -	Projeto do controlador com os Teoremas 5 (\circ) e 7 ($\kappa = 0, 55, \times$).	63
Figura 26 -	Parâmetro para o qual os controladores são encontrados ($\kappa \times$ Factibilidade).	63
Figura 27 -	Projeto do controlador com os Teoremas 6 (\circ) e 8 ($\kappa = 0, 1, \times$).	64
Figura 28 -	Projeto do controlador com o Teorema 8 ($\kappa = 0, 1, \times$).	65

Figura 29 -	Parâmetros para o qual os controladores são encontrados ($\kappa \times \gamma \times$ Factibilidade).	65
Figura 30 -	Projeto do controlador com o Teorema 3 ($\varphi = 200000, \times$), com Assunção et al. (2007, Teorema 3, \times e \circ) e com o Teorema 5 (\times, \circ e \cdot).	67
Figura 31 -	Projeto do controlador com Assunção et al. (2007, Teorema 4, \times), com o Teorema 4 ($\varphi = 0.2, \times$ e \circ) e com o Teorema 8 ($\kappa = 0, 1, \times, \circ$ e \cdot).	68
Figura 32 -	Região $S(\gamma, r, \theta)$ para alocação de autovalores.	71
Figura 33 -	Resposta transitória com K_d .	81
Figura 34 -	Localização dos autovalores dos vértices do sistema (47), realimentado com (105) (\times).	82
Figura 35 -	Região de factibilidade, Lema 2.3 (\circ) e Teorema 9 (\times).	84
Figura 36 -	Localização dos autovalores do sistema (47) controlado com os ganhos obtidos pelo Lema 2.3, na região $S(0, 75, 30, 50^\circ)$ (\circ).	85
Figura 37 -	Localização dos autovalores do sistema (47) controlado com os ganhos obtidos pelo Teorema 9, na região $S(0, 75, 30, 50^\circ)$ (\times).	85
Figura 38 -	Região $S(\gamma, r)$ para alocação de autovalores.	87
Figura 39 -	Simulação do sistema (47) com $u(t) = 0$.	94
Figura 40 -	Respostas transitórias com K_{d1} e K_{d2} .	94
Figura 41 -	Localização dos autovalores dos vértices do sistema (47), realimentado com K_{d1} (\bullet) e K_{d2} (\circ).	95
Figura 42 -	Resposta transitória com K_{d3} .	96
Figura 43 -	Localização dos autovalores dos vértices do sistema (47), realimentado com K_{d3} (\circ).	97
Figura 44 -	Resposta transitória com K_{d4} .	98
Figura 45 -	Localização dos autovalores dos vértices do sistema (47), realimentado com K_{d4} (\circ e \times).	98
Figura 46 -	Resposta transitória com K_{d5} .	100
Figura 47 -	Localização dos autovalores dos vértices do sistema (47), realimentado com K_{d5} (\circ).	100
Figura 48 -	Região de factibilidade, Lema 4.2 (\bullet) e Teorema 11 (\circ) com $\kappa = 0, 28$.	101
Figura 49 -	Localização dos autovalores dos vértices do sistema (106), realimentado com os ganhos obtidos pelo Lema 4.2 (\cdot) e pelo Teorema 11 (\circ).	102
Figura 50 -	Região de factibilidade, Lema 4.2 (\bullet), Teorema 10 (\times) e Teorema 11 (\circ) com $\kappa = 0, 28$.	103
Figura 51 -	Localização dos autovalores dos vértices do sistema (106), realimentado com os ganhos obtidos pelo Lema 4.2 (\cdot), pelo Teorema 10 (\times) e pelo Teorema 11 (\circ).	103

Figura 52 -	Sistema de suspensão ativa Quanser [®] .	106
Figura 53 -	Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.	107
Figura 54 -	Ampliação visual para destacar a massa de carga útil.	108
Figura 55 -	Diagrama utilizado para a implementação prática.	109
Figura 56 -	Resposta transitória prática de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 2,45\text{kg}$.	110
Figura 57 -	Resposta transitória simulada de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 2,45\text{kg}$.	111
Figura 58 -	Sinal de controle atuando a partir de 10s, com $M_s = 2,45\text{kg}$.	112
Figura 59 -	Resposta transitória prática de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 1,9525\text{kg}$.	112
Figura 60 -	Resposta transitória simulada de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 1,9525\text{kg}$.	113
Figura 61 -	Sinal de controle atuando a partir de 10s, com $M_s = 1,9525\text{kg}$.	113
Figura 62 -	Resposta transitória prática de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 1,455\text{kg}$.	114
Figura 63 -	Resposta transitória simulada de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 1,455\text{kg}$.	114
Figura 64 -	Sinal de controle atuando a partir de 10s, com $M_s = 1,455\text{kg}$.	115

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Localização dos autovalores do sistema (47) realimentado com o ganho (50).	42
Tabela 2 -	Parâmetros do sistema mecânico.	54
Tabela 3 -	Localização dos autovalores do sistema (72) realimentado com o ganho (75).	60
Tabela 4 -	Localização dos autovalores do sistema (72) realimentado com o ganho (76).	62
Tabela 5 -	Autovalores do sistema controlado com o ganho (105).	82
Tabela 6 -	Parâmetros do sistema de suspensão ativa Quanser [®] .	106

ABREVIATURAS E ACRÔNIMOS

CQLF	<i>Common Quadratic Lyapunov Function</i>
FLF	<i>Fuzzy Lyapunov Functions</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
MatLab [®]	<i>MATrix LABoratory</i>
PDLF	<i>Parameter-Dependent Lyapunov Functions</i>
PLF	<i>Piecewise Lyapunov Functions</i>
PPDLF	<i>Polynomial Parameter-Dependent Lyapunov Functions</i>
SISO	<i>Single Input Single Output</i>
T-S	<i>Takagi-Sugeno</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	PROPRIEDADES E CONCEITOS INICIAIS	21
3	REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA EM SISTEMAS LINEARES INCERTOS	25
3.1	Formulação LMI: Lema da Projeção Recíproca	26
3.1.1	<i>Projeto do controlador: Condição de estabilidade</i>	27
3.1.2	<i>Projeto do controlador: Condição de estabilidade com taxa de decaimento</i>	29
3.1.3	<i>Resultados estendidos do Lema da Projeção aplicado a realimentação derivativa</i>	32
3.1.4	<i>Conclusões parciais</i>	47
3.2	Formulação LMI: Lema de Finsler	48
3.2.1	<i>Projeto do controlador: Condição de estabilidade</i>	49
3.2.2	<i>Projeto do controlador: Condição de estabilidade com taxa de decaimento</i>	51
3.2.3	<i>Resultados estendidos do Lema de Finsler aplicado a realimentação derivativa</i>	52
3.2.4	<i>Conclusões parciais</i>	69
4	\mathcal{D} -ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS USANDO A REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA	70
4.1	\mathcal{D} -estabilidade robusta na região $S(\gamma, r, \theta)$	70
4.2	\mathcal{D} -estabilidade robusta na região $S(\gamma, r)$	86
4.3	Resultados estendidos da \mathcal{D} -estabilidade robusta na região $S(\gamma, r)$	92
4.3.1	<i>Conclusões parciais</i>	104

5	IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA: SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA QUANSER®	105
6	CONCLUSÕES	116
6.1	Sugestões para pesquisas futuras	117
6.2	Publicações	117
	REFERÊNCIAS	121

1 INTRODUÇÃO

Dentro da teoria de controle clássica é bem conhecido que a utilização da realimentação da derivada do vetor de estado (realimentação derivativa — $u(t) = -K_d \dot{x}(t)$) pode ser muito útil e, em alguns casos, essencial e mais vantajosa para alcançar performances desejadas em sistemas dinâmicos (LEWIS; SYRMOS, 1991). O interesse para o estudo da realimentação derivativa vem do fato que em sistemas que utilizam acelerômetros como sensores para medir o estado desses sistemas, é mais fácil obter os sinais da derivada do vetor de estado do que os sinais do vetor de estado. A partir da aceleração é possível obter a velocidade com boa precisão, porém, se o sinal for integrado novamente o resultado poderá ter um acúmulo de erros e não representará adequadamente o deslocamento do sistema (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004). Logo, os sinais usados na realimentação são: a velocidade e a aceleração. Respectivamente, estes são as derivadas da posição e da velocidade que, na maioria dos casos, representam as variáveis de estado do sistema. Devido à sua estrutura simples e ao baixo custo operacional, os acelerômetros têm sido aplicados nas indústrias para a solução de vários tipos de problemas de engenharia. Por exemplo, no controle de vibrações de cabos de pontes suspensas (DUAN; NI; KO, 2005), no controle de vibrações dos componentes de aterrissagem de aviões (KWAK; WASHINGTON; YEDAVALLI, 2002b), em sistemas de suspensão ativa de veículos (REITHMEIER; LEITMANN, 2003) e em controle de oscilações de sistemas mecânicos (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2005a).

O uso da realimentação derivativa em sistemas dinâmicos tem sido bem explorado nos últimos anos. A estratégia comumente empregada é procurar desenvolver técnicas semelhantes às já existentes para a realimentação do vetor de estado convencional. Por exemplo, Abdelaziz e Valášek (2004) desenvolveram uma fórmula de Ackermann generalizada para sistemas lineares com uma entrada e uma saída (SISO, acrônimo inglês para *Single Input Single Output*) com realimentação derivativa. Kwak, Washington e Yedavalli (2002a) apresentam o projeto de um regulador linear quadrático (LQR, acrônimo inglês para *Linear Quadratic Regulator*). Moreira et al. (2010) fizeram uma análise sobre a observabilidade e a estabilidade de sistemas lineares cuja saída é a derivada do vetor de estado com realimentação da saída, ainda, um estudo sobre a rejeição de distúrbios com realimentação derivativa foi apresentado. Cardim et al. (2007), apresentam uma forma

de se obter o controlador da realimentação da derivada do estado a partir da realimentação de estado usual. Um estudo comparativo envolvendo a realimentação de estado e a realimentação derivativa em sistemas lineares invariantes no tempo é apresentado por Araújo et al. (2007). Uma abordagem sobre a estabilizabilidade e robustez da estabilidade com realimentação derivativa, incluindo a fragilidade, pode ser vista no trabalho de Michiels et al. (2009). Outros trabalhos que relatam o projeto de controladores para sistemas mecânicos e sistemas amortecedores de vibrações utilizando realimentação derivativa podem ser encontrados nas obras de Abdelaziz e Valášek (2005b, 2005c), Abdelaziz (2007, 2009, 2010). Ainda, na literatura especializada, pode-se encontrar trabalhos que relatam o uso da realimentação derivativa em sistemas lineares, não-lineares, lineares e não-lineares sujeitos a incertezas na planta entre outros, utilizando técnicas baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs, acrônimo inglês para *Linear Matrix Inequalities*) (CARDIM et al., 2008, 2009; FARIA et al., 2009, 2010; GAINO et al., 2011; JING et al., 2009). Projetos empregando LMIs têm a vantagem de permitir facilmente a inclusão de incertezas no modelo, por exemplo, de tipo politópicas, e índices de desempenho na abordagem do problema. Além disso, LMIs podem ser resolvidas eficientemente em microcomputadores utilizando procedimentos de otimização convexa através de algoritmos de tempo polinomial com o uso, por exemplo, do *software MATrix LABORatory* (MatLab®) (GAHINET et al., 1995). Neste caminho, por exemplo, Assunção et al. (2007) apresentam uma formulação LMI para o projeto de controladores que garantem a estabilização, sem e com restrição de taxa de decaimento, de sistemas lineares e lineares incertos. Faria et al. (2009) propõe um método baseado na \mathcal{D} -estabilidade (alocação regional) com realimentação derivativa, no geral a ideia é garantir que os autovalores do sistema em malha fechada estejam em uma certa região do plano complexo com o objetivo de obter certos índices de desempenho. Silva et al. (2011b) propõem um método para a estabilização de sistemas fuzzy *Takagi-Sugeno* (T-S) com incertezas de tipo politópicas no modelo, a técnica permite a estabilização do sistema sem e com restrição de desempenho de taxa de decaimento. Uma abordagem sobre a realimentação derivativa envolvendo o projeto de controladores, sem e com índice de desempenho, de sistemas descritores e também descritores incertos é apresentada por Faria et al. (2010).

Na literatura pode-se encontrar metodologias para a análise de estabilidade através da teoria de Lyapunov, proporcionando várias ferramentas eficazes. Formulações LMIs clássicas utilizam como ponto de partida condições baseadas na existência de uma função de Lyapunov quadrática comum (CQLF, acrônimo inglês para *Common Quadratic Lyapunov Function*) para garantir a estabilidade do sistema (também conhecida como estabilidade

quadrática). A estabilidade quadrática (CQLF) já mostrou ser muito eficiente, tendo solucionado muitos problemas através de otimização convexa. No entanto, trabalhos recentes da literatura provaram que CQLFs conduzem a resultados conservadores no contexto de sistemas incertos, ou seja, em certos casos não é possível encontrar uma CQLF que assegure a estabilidade do sistema (OLIVEIRA; PERES, 2006). Desta forma, tem surgido na literatura trabalhos que utilizam funções de Lyapunov alternativas visando obter condições de estabilidade menos conservadoras. Dentre os resultados existentes destacam-se: as funções de Lyapunov por partes (PLFs, acrônimo inglês para *Piecewise Lyapunov Functions*) (CAO; REES; FENG, 1997; JOHANSSON, 2003), as funções de Lyapunov fuzzy (FLFs, acrônimo inglês para *Fuzzy Lyapunov Functions*) (MOZELLI et al., 2009), as funções de Lyapunov dependente de parâmetros polinomiais (PPDLFs, acrônimo inglês para *Polynomial Parameter-Dependent Lyapunov Functions*) (OLIVEIRA; PERES, 2006) e as funções de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLFs, acrônimo inglês para *Parameter-Dependent Lyapunov Functions*) (GEROMEL; KOROGUI, 2006; KAU et al., 2005; OLIVEIRA; GEROMEL, 2005; OLIVEIRA; SKELTON, 2001; PIPELEERS et al., 2009).

Este trabalho é uma sequência de outros estudos envolvendo o uso de LMIs utilizando a realimentação derivativa. São propostas condições suficientes para a síntese de controladores lineares robustos estáticos que asseguram a estabilidade de sistemas lineares com incertezas de tipo politópicas no modelo, ou sujeitos a falhas estruturais. Os projetos dos controladores visam a estabilidade do sistema ou a estabilidade com restrição de taxa de decaimento, que é útil para diminuir o tempo de transitório do sistema. Por fim, também são propostos projetos envolvendo a \mathcal{D} -estabilidade, esta é utilizada para assegurar que os autovalores do sistema estejam em uma determinada região do plano complexo, e dessa forma, garantir que o sistema em malha fechada apresente um desempenho satisfatório. O objetivo principal é procurar obter resultados menos conservadores que soluções fundamentadas na estabilidade quadrática (CQLFs), principalmente aprimorar, em termos de factibilidade, os resultados apresentados por Assunção et al. (2007), Faria, Assunção e Teixeira (2009). Utilizando basicamente dois lemas (lema da projeção recíproca e o lema de Finsler) amplamente aplicados em distintas áreas de sistemas de controle, condições para a existência de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF) que garante a estabilidade do politopo são obtidas. Na maioria das vezes, as condições robustas apresentadas mostram ser menos conservadoras para a estabilização de sistemas dinâmicos incertos usando a realimentação derivativa.

A eficiência da metodologia proposta é ilustrada por meio de vários exemplos numéri-

cos. Ainda, uma validação experimental é realizada em ambiente de laboratório utilizando o sistema de suspensão ativa da Quanser[®].

Durante o texto são usados alguns símbolos e notações, os mais destacados são:

Notações: $M > 0$ ($M \geq 0$) é usada para representar matrizes definidas (semi-definidas) positivas e de modo equivalente $M < 0$ ($M \leq 0$) representa matrizes definidas (semi-definidas) negativas; $(^T)$ indica transposição de um vetor ou matriz; $(^{-T})$ indica a inversa de uma matriz transposta; $0_{n \times n}$ indica uma matriz nula de dimensões $n \times n$; (\bullet) indica termos transpostos em uma matriz simétrica; $\text{diag}(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ indica uma matriz diagonal de dimensões adequadas e $\text{He}\{A\} := A + A^T$.

- \blacksquare : indica o final de demonstração.
- \square : indica o final de exemplo.

A estrutura do texto é organizada da seguinte forma:

- Capítulo 2: Apresenta algumas propriedades necessárias para o desenvolvimento teórico do trabalho e alguns lemas, utilizando a realimentação derivativa, propostos na literatura. Estes lemas foram adicionados para facilitar a leitura, pois são referenciados ao longo do texto quando há a necessidade de compará-los com as técnicas propostas neste trabalho.
- Capítulo 3, Seção 3.1: Investiga a estabilidade assintótica através da existência de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF). Usando o lema da projeção recíproca (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001) como ponto de partida, condições suficientes são obtidas para o projeto de controladores robustos sem e com restrição de taxa de decaimento. Observa-se que considerando apenas a estabilização do sistema, o método proposto utilizando uma PDLF é mais conservador que o método utilizando uma CQLF apresentado por Assunção et al. (2007). No entanto, o método proposto possui vantagens significativas sobre uma CQLF considerando a estabilização do sistema com taxa de decaimento.
- Capítulo 3, Seção 3.2: Investiga a estabilidade assintótica através da existência de uma PDLF. Usando o lema de Finsler (SKELTON; IWASAKI; GRIGORIADIS, 1998) como ponto de partida, condições suficientes são obtidas para o projeto de controladores robustos sem e com restrição de taxa de decaimento. Observa-se que a estratégia fornece resultados menos conservadores, para a estabilização do sistema

sem e com taxa de decaimento, comparado com o método apresentado em Assunção et al. (2007) (CQLF) e com os resultados, utilizando uma PDLF, apresentados na Seção 3.1 deste trabalho.

- Capítulo 4: Investiga a \mathcal{D} -estabilidade (alocação regional de autovalores) através da existência de uma PDLF. Usando o lema de Finsler como ponto de partida, condições suficientes são obtidas para o projeto de controladores que garantem a \mathcal{D} -estabilização robusta em uma região pré-estabelecida em projeto. A princípio, tem-se como meta assegurar a \mathcal{D} -estabilidade na região de interesse denominada $S(\gamma, \mathfrak{r}, \theta)$. Os resultados são comparados com a metodologia baseada em uma CQLF apresentada por Faria et al. (2009), que considera a mesma região de alocação. Em seguida, a meta é assegurar a \mathcal{D} -estabilidade na região de interesse denominada $S(\gamma, \mathfrak{r})$. Um lema baseado em uma CQLF é apresentado para fins de comparações com os teoremas baseados em uma PDLF.
- Capítulo 5: Apresenta uma implementação prática realizada em ambiente laboratorial com a finalidade de validar a técnica de projeto empregando a realimentação derivativa. Utiliza-se o sistema de suspensão ativa, fabricado pela Quanser[®], para a realização do experimento.
- Por fim, as conclusões são apresentadas e também algumas sugestões para pesquisas futuras. Em seguida, uma lista de publicações relacionadas diretamente e indiretamente com o trabalho é exibida.

2 PROPRIEDADES E CONCEITOS INICIAIS

Para a obtenção dos resultados a serem propostos, utilizam-se ao longo do texto as Propriedades 2.1 e 2.2.

Propriedade 2.1. *Para toda matriz M não simétrica ($M \neq M^T$), se $M + M^T < 0$, então M é invertível.*

Prova: Veja Boyd et al. (1994). ■

Propriedade 2.2. *Uma matriz simétrica $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix}$ é definida positiva se e somente:*

1. $M_1 > 0$ e $M_3 - M_2^T(M_1)^{-1}M_2 > 0$,
- ou*
2. $M_3 > 0$ e $M_1 - M_2(M_3)^{-1}M_2^T > 0$.

Esse resultado é conhecido na literatura como complemento de Schur.

Prova: Veja Boyd et al. (1994). ■

A principal ideia desse trabalho é obter extensões dos resultados apresentados por Faria (2005, 2009) e Silva (2009) para tratar de sistemas lineares incertos. O objetivo é obter resultados menos conservadores utilizando funções PDLF para o projeto dos controladores, visto que Faria (2005, 2009) e Silva (2009) utilizaram apenas funções CQLFs para a solução dos problemas. Com a finalidade de facilitar a leitura do texto e também as comparações entre as técnicas, são exibidos abaixo os principais resultados obtidos pelo uso de CQLFs. Os resultados são colocados apenas para se ter um texto auto-contido e todas as demonstrações são omitidas.

Considere um sistema controlável, linear e invariante no tempo com incertezas politópicas, descrito na forma de variáveis de estado (1).

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i x(t) + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j u(t), \quad (1)$$

satisfazendo as condições (2)

$$\begin{aligned} \alpha_i &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, r, & \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, & \text{e} \\ \beta_j &\geq 0, & j = 1, 2, \dots, q, & \quad \sum_{j=1}^q \beta_j = 1, \end{aligned} \quad (2)$$

sendo r o número de vértices do politopo em A , q o número de vértices do politopo em B e α_i, β_j constantes reais desconhecidas para quaisquer i, j . $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes que representam a dinâmica do sistema incerto, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada de controle. O projeto do controlador com realimentação derivativa consiste em encontrar uma matriz constante $K_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que, o sistema (1), realimentado com a entrada de controle (3),

$$u(t) = -K_d \dot{x}(t), \quad (3)$$

seja assintoticamente estável. Sendo que, se o $\det\left(I + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j K_d\right) \neq 0$, o sistema realimentado pode ser representado por (4).

$$\dot{x}(t) = \left(I + \sum_{j=1}^q \beta_j B_j K_d\right)^{-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i x(t), \quad (4)$$

sendo $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade.

Utilizando propriedades de formas quadráticas, o Lema 2.1 apresenta condições suficientes que garantem a estabilidade assintótica do sistema incerto (4).

Lema 2.1. *Suponha que as matrizes A_i não possuam autovalores nulos ($\det(A_i) \neq 0, \forall i$). Então, o sistema (4) é estabilizável se existir uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfazendo as LMIs (5).*

$$\begin{aligned} A_i Q + Q A_i^T + A_i Y^T B_j^T + B_j Y A_i^T &< 0, & i = 1, 2, \dots, r, & \quad j = 1, 2, \dots, q, \\ Q &> 0, \end{aligned} \quad (5)$$

com $K_d = YQ^{-1}$.

Prova: Veja Faria (2005), Assunção et al. (2007), Faria, Assunção e Teixeira (2009). ■

O Lema 2.2 apresenta condições suficientes que garantem a estabilidade com restrição na taxa de decaimento do sistema incerto (4). A Figura 1 mostra a região γ de alocação de autovalores.

Lema 2.2. *Suponha que as matrizes A_i não possuam autovalores nulos ($\det(A_i) \neq 0, \forall i$).*

Então, o sistema (4) é estabilizável com taxa de decaimento γ se existir uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfazendo as LMIs (6).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i^T + B_j Y A_i^T + A_i Y^T B_j^T & Q + B_j Y \\ Q + Y^T B_j^T & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, q, \\ Q > 0, \end{aligned} \quad (6)$$

com $K_d = YQ^{-1}$.

Prova: Veja Faria (2005), Assunção et al. (2007), Faria, Assunção e Teixeira (2009). ■

O Lema 2.3 apresenta condições suficientes para a \mathcal{D} -estabilidade do sistema incerto (4) na região $S(\gamma, r, \theta)$. A Figura 32 mostra a região $S(\gamma, r, \theta)$ de alocação de autovalores.

Lema 2.3. *Suponha que as matrizes A_i não possuam autovalores nulos ($\det(A_i) \neq 0, \forall i$). Então, o sistema (4) é \mathcal{D} -estável, na região $S(\gamma, r, \theta)$, se existir uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfazendo as LMIs (7).*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i^T + B_j Y A_i^T + A_i Y^T B_j^T & Q + B_j Y \\ Q + Y^T B_j^T & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left((Q + B_j Y) A_i^T + A_i (Q + B_j Y)^T \right) & -A_i Q A_k^T \\ -A_k Q A_i^T & \frac{r}{2} \left((Q + B_j Y) A_i^T + A_i (Q + B_j Y)^T \right) \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} \sin(\theta) \left(A_i Q + Q A_i^T + B_j Y A_i^T + A_i Y^T B_j^T \right) & \cos(\theta) \left[A_i Q + A_i Y^T B_j^T - (Q A_i^T + B_j Y A_i^T) \right] \\ \cos(\theta) \left[Q A_i^T + B_j Y A_i^T - (A_i Q + A_i Y^T B_j^T) \right] & \sin(\theta) \left(A_i Q + Q A_i^T + B_j Y A_i^T + A_i Y^T B_j^T \right) \end{bmatrix} < 0, \\ Q > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, q$ e $k = 1, 2, \dots, r$, com $K_d = YQ^{-1}$.

Prova: Veja Faria (2005), Faria et al. (2009). ■

Neste trabalho a solução numérica das LMIs é realizada em microcomputadores, através do *software* MatLab[®] da MathWorks. Mais especificamente, utiliza-se o *solver* (resolvedor) padrão “LMILab”, pertencente ao pacote comercial *Robust Control Toolbox* (GAHINET et al., 1995). No entanto, pela dificuldade e pela estrutura complexa em representar as LMIs para que o *solver* “LMILab” as entenda, utiliza-se o pacote, de natureza gratuita, “YALMIP *toolbox*”, para facilitar a modelagem dos problemas. O “YALMIP” é

uma linguagem de alto nível para a modelagem avançada e solução de problemas de otimização convexa (no caso das LMIs) e não-convexas (LÖFBERG, 2004, 2012). Uma outra vantagem da utilização do “YALMIP” é o suporte para vários *solvers*. Para o usuário que possui o *software* MatLab[®] mas não possui o *solver* “LMILab”, pertencente ao pacote pago *Robust Control Toolbox*, uma alternativa é utilizar o *solver* gratuito “SeDuMi” (STURM, 1999). O “SeDuMi” é muito utilizado para a solução de LMIs e é o *solver* grátis mais comumente usado entre os usuários de “YALMIP”.

3 REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA EM SISTEMAS LINEARES INCERTOS

Podemos ressaltar que todos os tipos de sistemas e equipamentos estão sujeitos a apresentarem algum tipo de interrupção permanente não desejada em seu funcionamento. Isto pode acontecer devido, por exemplo, ao desgaste natural de algum componente, quebra por fatores externos, quebra por manuseio incorreto, entre outras (ISERMANN, 2006; ISERMANN; BALLÉ, 1997). Então denominamos estes eventos como sendo falhas estruturais, e as mesmas podem ser inseridas no modelo dinâmico da planta através de incertezas do tipo politópicas (BOYD et al., 1994).

Considere um sistema controlável, linear com incertezas invariantes no tempo, descrito na forma de variáveis de estado, como em (8).

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (8)$$

sendo $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrizes que representam a dinâmica do sistema incerto, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada de controle.

As matrizes $(A, B)(\alpha)$ são representadas pela combinação convexa de vértices, descrita em (9) (BOYD et al., 1994):

$$(A, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A, B)_i, \quad (9)$$

sendo r o número de vértices denotado pela relação $r = 2^\phi$, sendo ϕ o número de componentes incertos das matrizes $(A, B)(\alpha)$ e $(A, B)_i$ representam os vértices do politopo. Os parâmetros α_i são constantes reais desconhecidas pertencentes ao simplex unitário \mathcal{A} , i.e., satisfazem a relação (10).

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^r \ ; \ \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \ ; \ \alpha_i \geq 0 \right\}. \quad (10)$$

Embora α não dependa explicitamente do tempo, o sistema incerto (8) pode possuir parâmetros variantes, sendo admitidas taxas de variação suficientemente pequenas de forma a garantir o tempo de acomodação necessário às perturbações oriundas de tais variações (DAHLEH; DAHLEH, 1991; LEITE; MONTAGNER; PERES, 2004).

Supondo que a matriz $A(\alpha)$ do sistema (8) não possua autovalores nulos ($\det(A(\alpha)) \neq 0$) (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004), o objetivo é projetar uma matriz constante $K_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que, ao realimentar o sistema (8) com a entrada de controle (11)

$$u(t) = -K_d \dot{x}(t), \quad (11)$$

o sistema em malha fechada dado por (8) e (11) seja assintoticamente estável e a matriz $(I + B(\alpha)K_d)$ seja invertível ($\det(I + B(\alpha)K_d) \neq 0$). Logo, o sistema em malha fechada pode ser representado por (12).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K_d \dot{x}(t) \Leftrightarrow \\ \dot{x}(t) &= (I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (12)$$

sendo $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade.

O projeto do controlador K_d é realizado usando o conceito de estabilidade assintótica através da análise de existência de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF) (OLIVEIRA; SKELTON, 2001). Para o projeto, uma candidata a função de Lyapunov (13) é utilizada, $\forall x(t) \neq 0$.

$$\begin{aligned} V(x(t), \alpha) &= x(t)^T \tilde{P}(\alpha)x(t) > 0, \quad \tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{com} \\ \dot{V}(x(t), \alpha) &= \dot{x}(t)^T \tilde{P}(\alpha)x(t) + x(t)^T \tilde{P}(\alpha)\dot{x}(t) < 0, \end{aligned} \quad (13)$$

sendo $\tilde{P}(\alpha)$ dada por (14).

$$\tilde{P}(\alpha) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j \tilde{P}_{ij}, \quad \alpha \in \mathcal{A}. \quad (14)$$

3.1 Formulação LMI: Lema da Projeção Recíproca

Usando propriedades de formas quadráticas e considerando (12), conclui-se que (13) é equivalente a solução das LMIs (15).

$$\begin{aligned} A(\alpha)^T \left(I + B(\alpha)K_d \right)^{-T} \tilde{P}(\alpha) + \tilde{P}(\alpha) \left(I + B(\alpha)K_d \right)^{-1} A(\alpha) &< 0, \\ \tilde{P}(\alpha) &> 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Durante a formulação das LMIs, o Lema 3.1 é utilizado.

Lema 3.1 (Lema da Projeção Recíproca). *Dada uma matriz $Y = Y^T > 0$ de dimensões adequadas, as seguintes desigualdades são equivalentes:*

1. $\Psi + S + S^T < 0$,
2. A LMI abaixo é factível em relação a W ,

$$\begin{bmatrix} \Psi + Y - (W + W^T) & S^T + W^T \\ S + W & -Y \end{bmatrix} < 0.$$

Prova: Veja Apkarian, Tuan e Bernussou (2001). ■

O Lema 3.1 pode ser usado para estudar as desigualdades (15), sem que haja uma multiplicação explícita entre as matrizes do sistema (12) com as matrizes $\tilde{P}(\alpha)$ da função de Lyapunov (13). Esta propriedade permite o uso de funções paramétricas de Lyapunov no projeto de controladores (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001).

Para a demonstração dos resultados, matrizes $Q(\alpha)$ como em (14), são consideradas.

3.1.1 Projeto do controlador: Condição de estabilidade

Considerando o Lema 3.1, condições suficientes para que o sistema (12) seja estabilizável são propostas no Teorema 1.

Teorema 1. Considerando $\hat{A}_i = A_i^{-1}$, se existirem matrizes simétricas $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs (16).

$$\begin{bmatrix} -(V^T + V) & \bullet & \bullet \\ \hat{A}_i V + \hat{A}_i B_j Z + P_{ij} & -P_{ij} & \bullet \\ V & 0_{n \times n} & -P_{ij} \end{bmatrix} < 0, \quad (16a)$$

$$P_{ij} > 0, \quad (16b)$$

sendo, $i, j = 1, 2, \dots, r$. Então, o sistema (12) é estabilizável e uma matriz de ganho que resolve o problema pode ser dada por (17).

$$K_d = ZV^{-1}. \quad (17)$$

Prova: Suponha que (16) é factível. Substituindo $Z = K_d V$ em (16) e utilizando a forma dual $(\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d) \rightarrow (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T$, segue (18).

$$\begin{bmatrix} -(V^T + V) & \bullet & \bullet \\ (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T V + P_{ij} & -P_{ij} & \bullet \\ V & 0_{n \times n} & -P_{ij} \end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

Então, aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em relação ao elemento 3×3 da LMI (18), segue (19), com $Q_{ij} = P_{ij}^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} V^T Q_{ij} V - (V^T + V) & \bullet \\ (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T V + P_{ij} & -P_{ij} \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

Multiplicando (19) à esquerda por $\text{diag}(W^T, I)$ e à direita por $\text{diag}(W, I)$, segue (20), com $W = V^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} Q_{ij} - (W + W^T) & \bullet \\ (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T + P_{ij} W & -P_{ij} \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

Agora, multiplicando (20) à esquerda e à direita por $\text{diag}(I, Q_{ij})$, segue (21).

$$\begin{bmatrix} Q_{ij} - (W + W^T) & \bullet \\ Q_{ij} (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T + W & -Q_{ij} \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

Multiplicando (21) por $\alpha_i \alpha_j$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ e somando todos os termos, de (14), segue (22).

$$\begin{bmatrix} Q(\alpha) - (W + W^T) & \bullet \\ Q(\alpha) (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T + W & -Q(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

Assumindo $\Psi = 0_{n \times n}$, $Y = Q(\alpha)$ e $S = Q(\alpha) (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T$, pelo item 2 do Lema 3.1 a desigualdade (22) é equivalente à (23).

$$Q(\alpha) (I + B_j K_d)^T \hat{A}_i^T + \hat{A}_i (I + B_j K_d) Q(\alpha) < 0. \quad (23)$$

Multiplicando a desigualdade (23) à esquerda por A_i e à direita por A_i^T , segue (24).

$$A_i Q(\alpha) (I + B_j K_d)^T + (I + B_j K_d) Q(\alpha) A_i^T < 0. \quad (24)$$

Agora, multiplicando (24) por $\alpha_i \alpha_j$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ e somando todos os termos, de (10) e (14), segue (25).

$$A(\alpha) Q(\alpha) (I + B(\alpha) K_d)^T + (I + B(\alpha) K_d) Q(\alpha) A(\alpha)^T < 0. \quad (25)$$

Aplicando a Propriedade 2.1 em (25) conclui-se que as matrizes $(I + B(\alpha) K_d)$ e $Q(\alpha)$ são invertíveis (condições necessárias para a solução do problema). Então, multiplicando (25) à esquerda por $Q(\alpha)^{-1} (I + B(\alpha) K_d)^{-1}$ e à direita por $(I + B(\alpha) K_d)^{-T} Q(\alpha)^{-1}$, (26)

é obtido.

$$A(\alpha)^T \left(I + B(\alpha) K_d \right)^{-T} Q(\alpha)^{-1} + Q(\alpha)^{-1} \left(I + B(\alpha) K_d \right)^{-1} A(\alpha) < 0. \quad (26)$$

Observe que (26) é equivalente à condição (15). Daí segue que, se a LMI (16) é factível, então existe uma matriz paramétrica $\tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}(\alpha)^T > 0$, satisfazendo as condições de Lyapunov (13) para o sistema (12). Logo, o sistema (12), considerando a matriz de ganho (17), é assintoticamente estável. ■

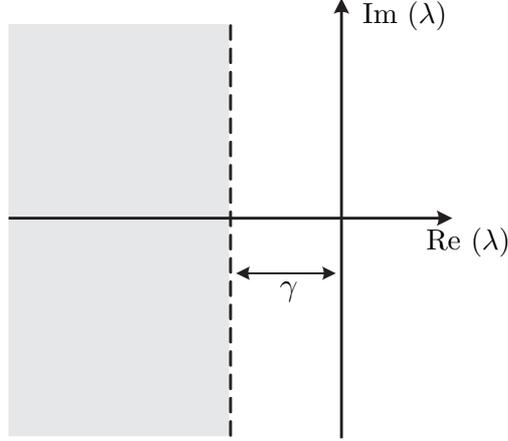
Geralmente, garantir apenas a estabilidade do sistema (12) é insuficiente para obter um desempenho desejado em malha fechada, ou seja, existem projetos que exigem restrições em seu desempenho. Um índice de desempenho muito importante, é a restrição de taxa de decaimento, que é responsável pela rapidez de resposta transitória do sistema (BOYD et al., 1994). Formulações envolvendo LMIs permitem que essa restrição seja adicionada de maneira simples ao projeto do controlador, isso é visto abaixo.

3.1.2 Projeto do controlador: Condição de estabilidade com taxa de decaimento

Dada uma constante real $\gamma > 0$, pode-se impor uma restrição de taxa de decaimento em (12) se a condição (27) for satisfeita para toda a trajetória $x(t) \neq 0$ do sistema, $t \geq 0$ (BOYD et al., 1994).

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \alpha) &\leq -2\gamma V(x(t), \alpha), \Leftrightarrow \\ \dot{x}(t)^T \tilde{P}(\alpha) x(t) + x(t)^T \tilde{P}(\alpha) \dot{x}(t) &\leq -2\gamma x(t)^T \tilde{P}(\alpha) x(t). \end{aligned} \quad (27)$$

A Figura 1 ilustra a região γ , sendo λ são os autovalores de (12).

Figura 1 - Região γ para alocação dos autovalores.

Fonte: (SILVA et al., 2012)

Considerando (12), conclui-se que (27) é equivalente a solução das LMIs (28).

$$A(\alpha)^T \left(I + B(\alpha) K_d \right)^{-T} \tilde{P}(\alpha) + \tilde{P}(\alpha) \left(I + B(\alpha) K_d \right)^{-1} A(\alpha) < -2\gamma \tilde{P}(\alpha), \quad (28)$$

$$\tilde{P}(\alpha) > 0.$$

Considerando o Lema 3.1, condições suficientes para que o sistema (12) seja estabilizável com restrições na taxa de decaimento $\gamma > 0$ são propostas no Teorema 2.

Teorema 2. Dada uma constante real $\gamma > 0$ e considerando $\hat{A}_i = A_i^{-1}$, se existirem matrizes simétricas $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs (29).

$$\begin{bmatrix} -(V^T + V) & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hat{A}_i V + \hat{A}_i B_j Z + P_{ij} & -P_{ij} & \bullet & \bullet \\ \hat{A}_i V + \hat{A}_i B_j Z & 0_{n \times n} & -\frac{P_{ij}}{2\gamma} & \bullet \\ V & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -P_{ij} \end{bmatrix} < 0, \quad (29a)$$

$$P_{ij} > 0, \quad (29b)$$

sendo, $i, j = 1, 2, \dots, r$. Então, o sistema (12) é estabilizável com taxa de decaimento maior ou igual a γ e uma matriz de ganho que resolve o problema pode ser dada por (30).

$$K_d = ZV^{-1}. \quad (30)$$

Prova: Suponha que (29) é factível. Substituindo $Z = K_d V$ em (29) e utilizando a

forma dual $(\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d) \rightarrow (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T$, segue (31).

$$\begin{bmatrix} -(V^T + V) & \bullet & \bullet & \bullet \\ (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T V + P_{ij} & -P_{ij} & \bullet & \bullet \\ (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T V & 0_{n \times n} & -\frac{P_{ij}}{2\gamma} & \bullet \\ V & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -P_{ij} \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

Então, aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em relação ao elemento 4×4 da LMI (31), segue (32), com $Q_{ij} = P_{ij}^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} V^T Q_{ij} V - (V^T + V) & \bullet & \bullet \\ (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T V + P_{ij} & -P_{ij} & \bullet \\ (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T V & 0_{n \times n} & -\frac{P_{ij}}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0. \quad (32)$$

Novamente, aplicando o complemento de Schur no elemento 3×3 de (32), segue (33).

$$\begin{bmatrix} V^T \hat{A}_i (I + B_j K_d) [2\gamma Q_{ij}] (I + B_j K_d)^T \hat{A}_i^T V + V^T Q_{ij} V - (V^T + V) & \bullet \\ (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T V + P_{ij} & -P_{ij} \end{bmatrix} < 0. \quad (33)$$

Multiplicando (33) à esquerda por $\text{diag}(W^T, I)$ e à direita por $\text{diag}(W, I)$, segue (34), com $W = V^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_i (I + B_j K_d) [2\gamma Q_{ij}] (I + B_j K_d)^T \hat{A}_i^T + Q_{ij} - (W + W^T) & \bullet \\ (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T + P_{ij} W & -P_{ij} \end{bmatrix} < 0. \quad (34)$$

Agora, multiplicando (34) à esquerda e à direita por $\text{diag}(I, Q_{ij})$, segue (35).

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_i (I + B_j K_d) [2\gamma Q_{ij}] (I + B_j K_d)^T \hat{A}_i^T + Q_{ij} - (W + W^T) & \bullet \\ Q_{ij} (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T + W & -Q_{ij} \end{bmatrix} < 0. \quad (35)$$

Multiplicando (35) por $\alpha_i \alpha_j$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ e somando todos os termos, de (14), segue (36).

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_i (I + B_j K_d) [2\gamma Q(\alpha)] (I + B_j K_d)^T \hat{A}_i^T + Q(\alpha) - (W + W^T) & \bullet \\ Q(\alpha) (\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T + W & -Q(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \quad (36)$$

Assumindo $\Psi = \hat{A}_i (I + B_j K_d) [2\gamma Q(\alpha)] (I + B_j K_d)^T \hat{A}_i^T$, $Y = Q(\alpha)$ e $S = Q(\alpha) (\hat{A}_i +$

$\hat{A}_i B_j K_d)^T$, pelo item 2 do Lema 3.1 a desigualdade (36) é equivalente à (37).

$$\hat{A}_i (I + B_j K_d) \left[2\gamma Q(\alpha) \right] (I + B_j K_d)^T \hat{A}_i^T + Q(\alpha) (I + B_j K_d)^T \hat{A}_i^T + \hat{A}_i (I + B_j K_d) Q(\alpha) < 0. \quad (37)$$

Multiplicando a desigualdade (37) à esquerda por A_i e à direita por A_i^T , segue (38).

$$(I + B_j K_d) \left[2\gamma Q(\alpha) \right] (I + B_j K_d)^T + A_i Q(\alpha) (I + B_j K_d)^T + (I + B_j K_d) Q(\alpha) A_i^T < 0. \quad (38)$$

Agora, multiplicando (38) por $\alpha_i \alpha_j$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ e somando todos os termos, de (10) e (14), segue (39).

$$(I + B(\alpha) K_d) \left[2\gamma Q(\alpha) \right] (I + B(\alpha) K_d)^T + A(\alpha) Q(\alpha) (I + B(\alpha) K_d)^T + (I + B(\alpha) K_d) Q(\alpha) A(\alpha)^T < 0. \quad (39)$$

Aplicando a Propriedade 2.1 em (39) conclui-se que as matrizes $(I + B(\alpha) K_d)$ e $Q(\alpha)$ são invertíveis (condições necessárias para a solução do problema). Então, multiplicando (39) à esquerda por $Q(\alpha)^{-1} (I + B(\alpha) K_d)^{-1}$ e à direita por $(I + B(\alpha) K_d)^{-T} Q(\alpha)^{-1}$, (40) é obtido.

$$A(\alpha)^T \left(I + B(\alpha) K_d \right)^{-T} Q(\alpha)^{-1} + Q(\alpha)^{-1} \left(I + B(\alpha) K_d \right)^{-1} A(\alpha) < -2\gamma Q(\alpha)^{-1}. \quad (40)$$

Observe que (40) é equivalente à condição (28). Daí segue que, se a LMI (29) é factível, então existe uma matriz paramétrica $\tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}(\alpha)^T > 0$, satisfazendo as condições de Lyapunov (27) para o sistema (12). Logo, o sistema (12), considerando a matriz de ganho (30), é assintoticamente estável com taxa de decaimento $\gamma > 0$. ■

3.1.3 Resultados estendidos do Lema da Projeção aplicado a realimentação derivativa

Nos próximos teoremas, um escalar $\varphi > 0$ é incorporado no conjunto de LMIs. Com uma escolha adequada de φ , o objetivo é obter resultados menos conservadores que os apresentados nos teoremas anteriores. O Teorema 3 é uma extensão do Teorema 1.

Teorema 3. *Dado um escalar arbitrário $\varphi > 0$ e considerando $\hat{A}_i = A_i^{-1}$, se existirem matrizes simétricas $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs*

(41).

$$\begin{bmatrix} -(V^T + V) & \bullet & \bullet \\ \hat{A}_i V + \hat{A}_i B_j Z + P_{ij} & -\varphi P_{ij} & \bullet \\ V & 0_{n \times n} & -\frac{P_{ij}}{\varphi} \end{bmatrix} < 0, \quad (41a)$$

$$P_{ij} > 0, \quad (41b)$$

sendo, $i, j = 1, 2, \dots, r$. Então, o sistema (12) é estabilizável e uma matriz de ganho que resolve o problema pode ser dada por (42).

$$K_d = ZV^{-1}. \quad (42)$$

Prova: A demonstração segue passos similares aos da demonstração do Teorema 1, considerando (22) como (43).

$$\begin{bmatrix} \varphi Q(\alpha) - (W + W^T) & \bullet \\ Q(\alpha)(\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T + W & -\varphi Q(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \quad (43)$$

Agora, multiplicando (43) à esquerda por $[I \ I]$ e à direita por $[I \ I]^T$, obtém-se (23). ■

O Teorema 4 é uma extensão do Teorema 2.

Teorema 4. Dada uma constante real $\gamma > 0$, um escalar arbitrário $\varphi > 0$ e considerando $\hat{A}_i = A_i^{-1}$, se existirem matrizes simétricas $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs (44).

$$\begin{bmatrix} -(V^T + V) & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hat{A}_i V + \hat{A}_i B_j Z + P_{ij} & -\varphi P_{ij} & \bullet & \bullet \\ \hat{A}_i V + \hat{A}_i B_j Z & 0_{n \times n} & -\frac{P_{ij}}{2\gamma} & \bullet \\ V & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -\frac{P_{ij}}{\varphi} \end{bmatrix} < 0, \quad (44a)$$

$$P_{ij} > 0, \quad (44b)$$

sendo, $i, j = 1, 2, \dots, r$. Então, o sistema (12) é estabilizável com taxa de decaimento maior ou igual a γ e uma matriz de ganho que resolve o problema pode ser dada por (45).

$$K_d = ZV^{-1}. \quad (45)$$

Prova: A demonstração segue passos similares aos da demonstração do Teorema 2,

considerando (36) como (46).

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_i(I + B_j K_d) [2\gamma Q(\alpha)] (I + B_j K_d)^T \hat{A}_i^T + \varphi Q(\alpha) - (W + W^T) & \bullet \\ Q(\alpha)(\hat{A}_i + \hat{A}_i B_j K_d)^T + W & -\varphi Q(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \quad (46)$$

Agora, multiplicando (46) à esquerda por $[I \ I]$ e à direita por $[I \ I]^T$, obtém-se (37). ■

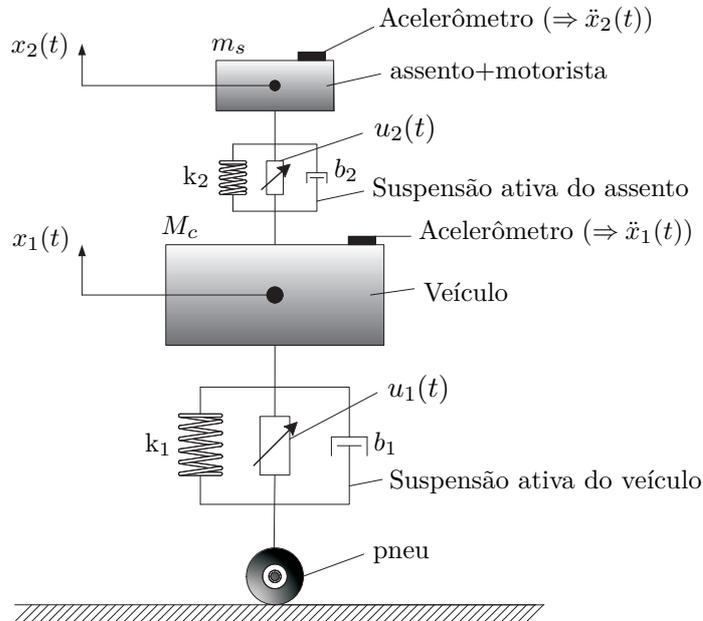
Nota 1. Nos Teoremas 3 e 4 o escalar $\varphi > 0$ pode ser obtido por meio de uma busca unidimensional.

A eficiência da metodologia proposta é ilustrada na solução dos exemplos numéricos a seguir.

Exemplo 3.1.1: Sistema de suspensão ativa de um veículo

Considere o sistema de suspensão ativa dado na Figura 2 (REITHMEIER; LEITMANN, 2003).

Figura 2 - Sistema de suspensão ativa de um veículo.



Fonte: (ASSUNÇÃO et al., 2007)

O modelo dinâmico pode ser representado pelo sistema incerto (8), considerando (47).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1-k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & \frac{-b_1-b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix} u(t). \quad (47)$$

O vetor de estado é definido por $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$, sendo que $x_3(t) = \dot{x}_1(t)$ e $x_4(t) = \dot{x}_2(t)$.

O sistema consiste em um veículo de massa M_c , um assento e uma pessoa, cuja massa total é m_s . As vibrações causadas por irregularidades na estrada podem ser atenuadas pelo sistema de suspensão do veículo (mola k_1 e amortecedor b_1). Mesmo assim, o motorista ainda pode sentir um pouco de vibrações. Uma maneira de melhorar o conforto do motorista é instalar um sistema de suspensão ativa no seu assento (mola k_2 e amortecedor b_2). Desta forma, pode-se diminuir as vibrações entre o motorista (m_s) e o chassi do veículo (M_c), modificando as entradas de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Considere $M_c = 1500\text{kg}$, $b_2 = 500\text{Ns/m}$, $k_1 = 4 \times 10^4\text{N/m}$ e $k_2 = 5 \times 10^3\text{N/m}$. Considere que o peso do motorista possa assumir valores entre 50kg e 100kg. Logo, a massa m_s é incerta e pertence ao intervalo $70 \leq m_s \leq 120(\text{kg})$ (motorista + assento (20kg)). Suponha também que o amortecedor do veículo esteja sujeito a uma falha estrutural, de tal forma que $b_1 = 2 \times 10^3\text{Ns/m}$ enquanto o amortecedor está funcionando normalmente e $b_1 = 0$ após uma eventual quebra do amortecedor. Ou seja, o parâmetro b_1 é incerto e pertence ao intervalo $0 \leq b_1 \leq 2 \times 10^3(\text{Ns/m})$.

A partir dessas informações, são obtidos os seguintes vértices do polítopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -0,3333 & 0,3333 \\ 71,4286 & -71,4286 & 7,1429 & -7,1429 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -1,6667 & 0,3333 \\ 71,4286 & -71,4286 & 7,1429 & -7,1429 \end{bmatrix},$$

com $m_s = 70\text{kg}$ ($b_1 = 0$ em A_1 e $b_1 = 2 \times 10^3\text{Ns/m}$ em A_2),

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -0,3333 & 0,3333 \\ 41,6667 & -41,6667 & 4,1667 & -4,1667 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -1,6667 & 0,3333 \\ 41,6667 & -41,6667 & 4,1667 & -4,1667 \end{bmatrix},$$

com $m_s = 120\text{kg}$ ($b_1 = 0$ em A_3 e $b_1 = 2 \times 10^3\text{Ns/m}$ em A_4),

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,6667 \times 10^{-4} & -6,6667 \times 10^{-4} \\ 0 & 1,4286 \times 10^{-2} \end{bmatrix},$$

$$B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,6667 \times 10^{-4} & -6,6667 \times 10^{-4} \\ 0 & 0,8333 \times 10^{-2} \end{bmatrix},$$

com $m_s = 70\text{kg}$ em B_1 e B_2 , e $m_s = 120\text{kg}$ em B_3 e B_4 .

Para este exemplo, considerou o seguinte caso:

► Estabilidade

Utilizando as LMIs (16) do Teorema 1, o ganho (48) foi calculado usando (17).

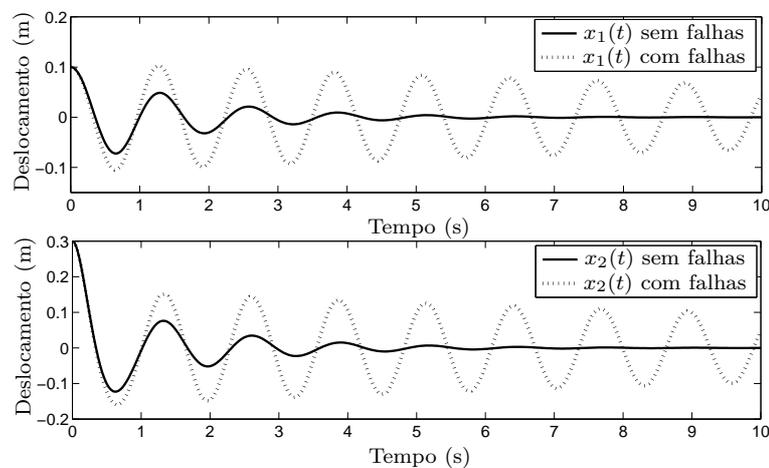
$$K_d = ZV^{-1} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 3,9650 & -0,0014 & -0,2890 & -0,0032 \\ -0,4883 & 0,4869 & 0,0191 & -0,0223 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 2,5626 & -0,0001 & 2,1955 & -0,0001 \\ 0,0000 & 2,5615 & 0,0000 & 2,1956 \\ -1,0978 & 0,0000 & 2,0496 & 0,0000 \\ -0,0000 & -1,0978 & -0,0000 & 2,0492 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$K_d = 10^5 \times \begin{bmatrix} 1,0478 & -0,0000 & 0,8113 & -0,0010 \\ -0,1272 & 0,1272 & -0,1033 & 0,1023 \end{bmatrix}.$$

Para a condição inicial de simulação $x(0) = [0, 1 \ 0, 3 \ 0 \ 0]^T$ com $m_s = 90\text{kg}$ (motorista (70kg) + assento (20kg)), o comportamento dinâmico do sistema mecânico (47), sem ação de controle ($u(t) = 0$), pode ser visto na Figura 3. Pela figura, o sistema é naturalmente estável enquanto o amortecedor do veículo funciona normalmente ($b_1 = 2 \times 10^3 \text{Ns/m}$). Contudo, após uma eventual falha no amortecedor ($b_1 = 0$) o sistema passa a apresentar oscilações pouco amortecidas, gerando desconforto ao motorista e também risco de acidente.

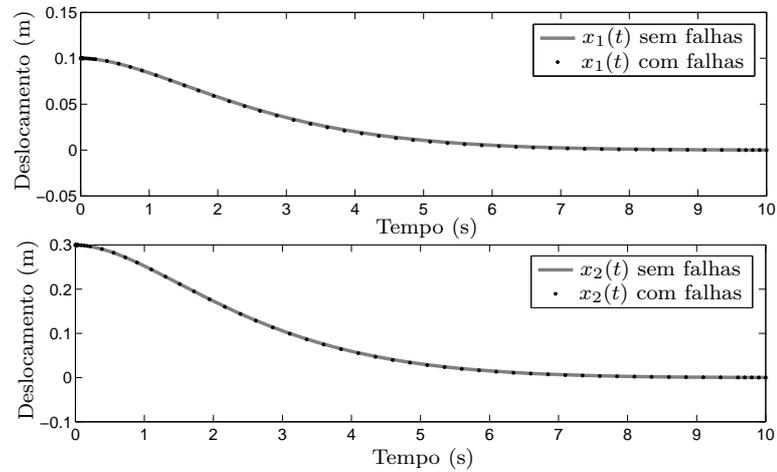
Figura 3 - Simulação do sistema (47) com $u(t) = 0$.



Fonte: Resultado do próprio autor

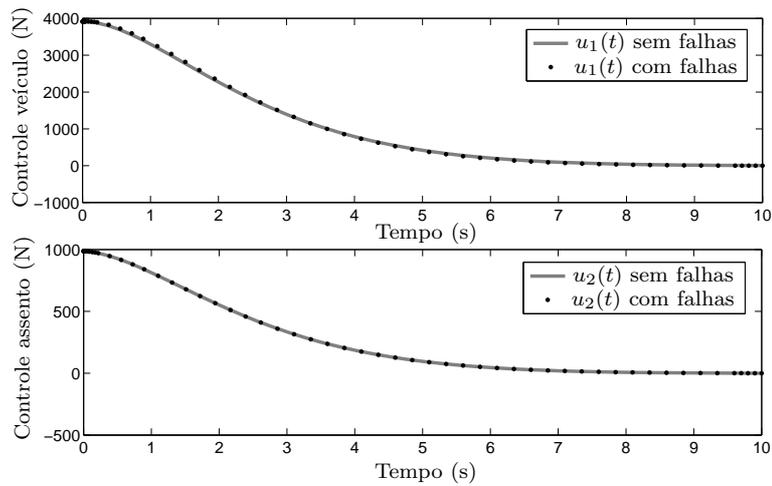
No entanto, ao considerarmos o ganho (48) na entrada de controle (11), o veículo passa a apresentar mínimas oscilações mesmo após a ocorrência de uma falha (Figura 4). Além disso, observando a figura, nota-se que o comportamento do sistema controlado praticamente não é afetado, mesmo após a quebra do amortecedor b_1 . Em ambos os casos, o sistema possui um tempo de duração de transitório em torno de 9s para a suspensão do veículo e para a suspensão do assento. A Figura 5 mostra o esforço do sinal de controle considerando o ganho (48).

Figura 4 - Simulação do sistema (47) com o ganho (48).



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 5 - Sinal de controle considerando o ganho (48).



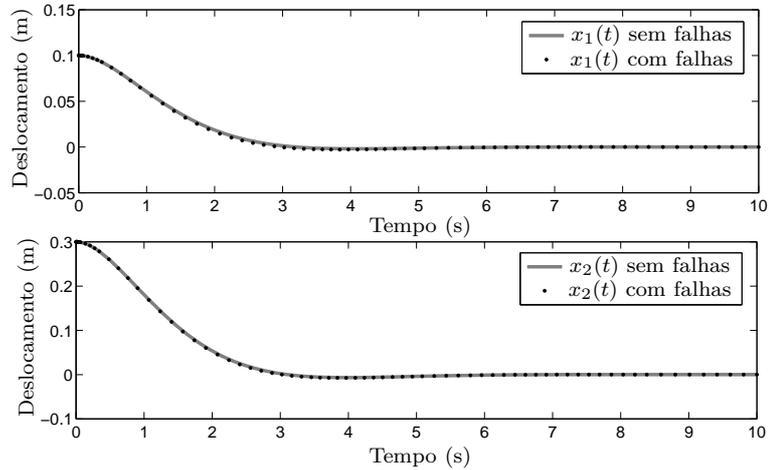
Fonte: Resultado do próprio autor

► Agora, utilizando as LMIs (41) do Teorema 3 com $\varphi = 0,15$, o ganho (49) foi calculado usando (42).

$$\begin{aligned}
K_d = ZV^{-1} &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 1,1215 & -0,0019 & -0,3126 & -0,0034 \\ -0,1392 & 0,1373 & 0,0230 & -0,0265 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 0,3737 & -0,0001 & 0,2563 & -0,0000 \\ 0,0000 & 0,3729 & 0,0000 & 0,2563 \\ -0,2123 & 0,0000 & 0,1320 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,2123 & -0,0000 & 0,1319 \end{bmatrix}, \quad (49) \\
K_d &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 4,8544 & -0,0006 & 2,4621 & -0,0100 \\ -0,5692 & 0,5683 & -0,3265 & 0,3171 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

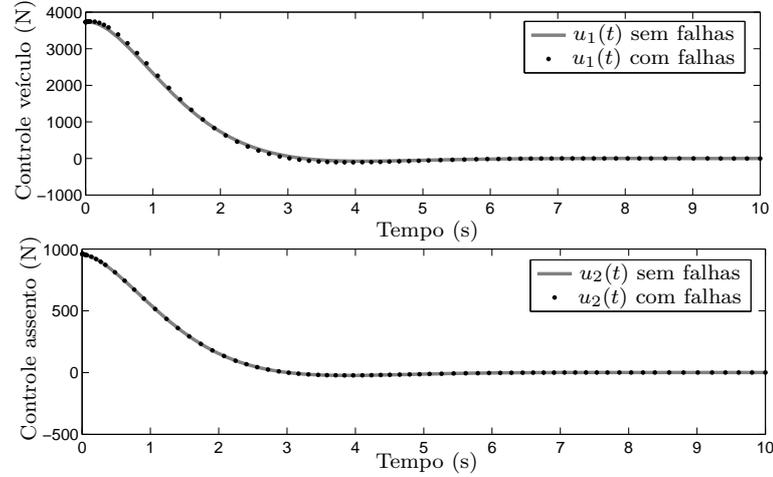
Neste exemplo, com uma busca unidimensional em φ , a matriz de ganho (49) encontrada pelo Teorema 3 obteve um melhor desempenho (Figura 6) que o ganho (48) encontrado pelo Teorema 1 (Figura 4). Contudo, não existem garantias teóricas sobre a influência de φ no desempenho do sistema em malha fechada. O que podemos observar é que existem sistemas que podem ser estabilizados com o Teorema 3 e não podem ser com o Teorema 1 e vice-versa. Isto é verificado mais adiante, no Exemplo 3.1.2. A Figura 7 mostra o esforço do sinal de controle considerando o ganho (49).

Figura 6 - Simulação do sistema (47) com o ganho (49).



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 7 - Sinal de controle considerando o ganho (49).



Fonte: Resultado do próprio autor

Embora os ganhos (48) e (49) sejam capazes de garantir a estabilidade do sistema (47), com ou sem falhas estruturais, o tempo de duração do transitório está elevado ainda, gerando assim, desconforto ao motorista. Com o intuito de diminuir o tempo de duração do transitório, os Teoremas 2 e 4 foram considerados para o projeto do controlador.

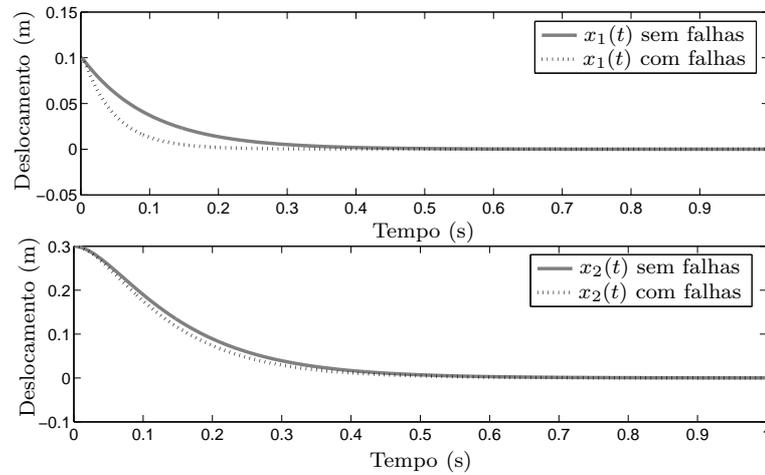
► Estabilidade com taxa de decaimento

Utilizando as LMIs (29) do Teorema 2 com $\gamma = 6,52$ (máximo obtido para o exemplo), o ganho (50) foi calculado usando (30).

$$\begin{aligned}
 K_d &= ZV^{-1} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0157 & 0,0201 & -7,2885 & -0,1296 \\ 0,0004 & 0,0079 & -0,0064 & -0,0872 \end{bmatrix} \\
 &\times 10^3 \times \begin{bmatrix} 1,5150 & -0,1558 & 0,0028 & -0,0109 \\ -0,0930 & 0,1826 & -0,0000 & 0,0143 \\ 0,0028 & -0,0001 & 0,0002 & -0,0000 \\ -0,0052 & 0,0130 & -0,0000 & 0,0020 \end{bmatrix}, \quad (50) \\
 K_d &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 1,9477 & 0,0367 & -1,4933 & -0,0887 \\ 0,2304 & 0,2459 & -0,0004 & -0,0671 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

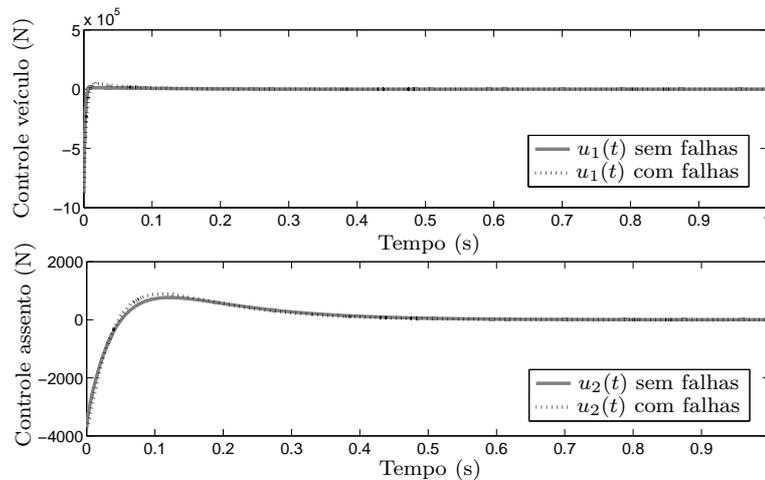
Pela Figura 8, note que, em ambos os casos (com falha e sem falha) o sistema controlado possui período transitório abaixo de 0,5s. Logo, o ganho (50) foi capaz de melhorar o desempenho do sistema em relação as respostas dos ganhos (48) e (49). A resposta com (50) é aproximadamente 18 vezes mais rápida que a resposta com (48) e 8 vezes que (49). A Figura 9 mostra o esforço do sinal de controle considerando o ganho (50).

Figura 8 - Simulação do sistema (47) com o ganho (50).



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 9 - Sinal de controle considerando o ganho (50).



Fonte: Resultado do próprio autor

Pela Tabela 1, verifica-se que os autovalores dos modelos locais têm parte real menor que $-6,52$. Logo, a especificação de taxa de decaimento ($\gamma = 6,52$) do projeto foi atendida. Temos quatro autovalores para cada vértice.

Tabela 1 - Localização dos autovalores do sistema (47) realimentado com o ganho (50).

Vértices	Autovalores
A_1, B_1	$-203,3678 \pm 253,8627j$
	$-6,7061$
	$-21,8230$
A_2, B_2	$-433,0317 \pm 174,3418j$
	$-10,8413$
	$-6,5543$
A_3, B_3	$-6,6099 \pm 6,6931j$
	$-282,1304$
	$-21,8118$
A_4, B_4	$-6,6797 \pm 6,4355j$
	$-580,9447$
	$-10,8948$

Fonte: Resultado do próprio autor

► Utilizando as LMIs (44) do Teorema 4, após uma busca bidimensional, foi possível encontrar $\gamma = 6,54$ com $\varphi = 2$. Entretanto, não obteve-se alterações significativas na resposta transitória do sistema (47) realimentado com o ganho projetado. Porém, existem sistemas que podem ser estabilizados com o Teorema 4 e não podem ser com o Teorema 2. No próximo exemplo é ilustrado que as condições de estabilidade considerando $\varphi > 0$ nos projetos são menos conservadoras. \square

Exemplo 3.1.2: Sistema linear com incertezas politópicas

Considere um sistema linear incerto (8) representado pelos seguintes vértices do politopo,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 21 & -98 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} a & -98 \\ 11 & 32 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{51}$$

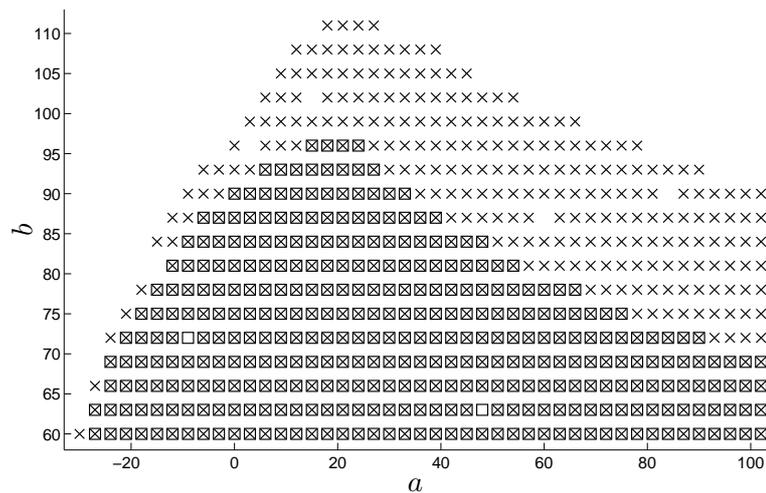
O objetivo é verificar os pontos nos quais os Teoremas 1 e 3 foram capazes de obter o ganho estabilizante para o sistema (51), considerando a variação dos parâmetros nos

intervalos $-30 \leq a \leq 102$ e $60 \leq b \leq 111$, com espaçamento uniforme 3 para a e b .

Nota 2. Em relação aos exemplos numéricos que investigam o conjunto (a, b) para o qual é possível encontrar uma solução, no parâmetro de ajuste $\varphi > 0$, presente em alguns teoremas e útil para a síntese do controlador, não foi feita uma busca otimizada individual para cada par (a, b) investigado. Isto é, dado um par (a_1, b_1) e um escalar φ_1 que obtém um controlador, no par vizinho (a_2, b_2) com a utilização desse mesmo escalar φ_1 pode não haver solução. Porém, pode haver um escalar φ_2 que obtenha sucesso para o par (a_2, b_2) analisado. Com o objetivo de facilitar a varredura numérica, utiliza-se sempre um valor fixo de φ para a análise completa do conjunto (a, b) .

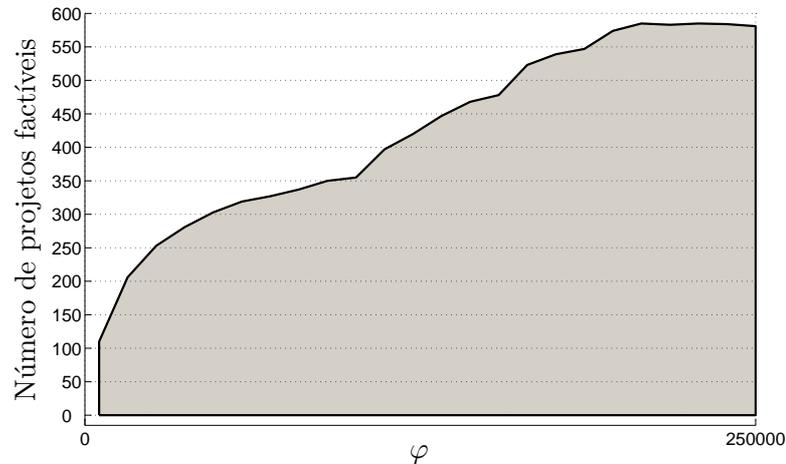
A região de factibilidade pode ser vista na Figura 10.

Figura 10 - Projeto do controlador com os Teoremas 1 (\square) e 3 ($\varphi = 200000, \times$).



Fonte: Resultado do próprio autor

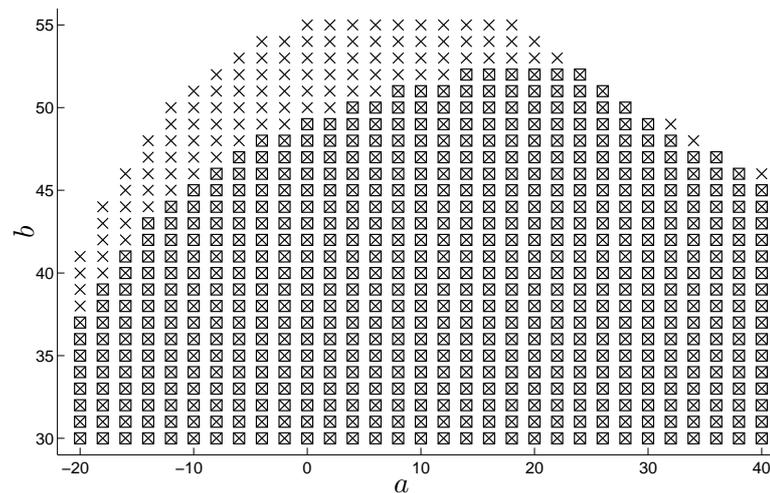
Para as mesmas informações anteriores, na Figura 11 é ilustrado a totalidade de controladores que puderam ser encontrados (factíveis) para vários valores de φ , compreendendo $\varphi \in [0, 1, 250000]$, com espaçamento não uniforme. Observe pela Figura 11 que para valores grandes de φ a totalidade de projetos factíveis é maior. Foram analisados 810 sistemas incertos.

Figura 11 - Parâmetro para o qual os controladores são encontrados (Factibilidade $\times \varphi$).

Fonte: Resultado do próprio autor

► Estabilidade com taxa de decaimento

Agora, utilizando os Teoremas 2 e 4 e considerando $-20 \leq a \leq 40$ e $30 \leq b \leq 55$, com espaçamento uniforme de 2 e 1 respectivamente. A região de factibilidade com $\gamma = 2$ pode ser vista na Figura 12.

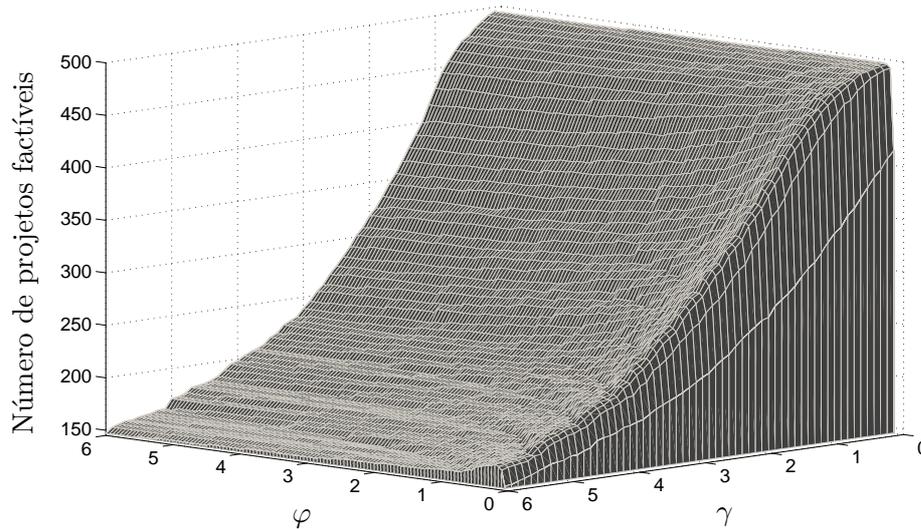
Figura 12 - Projeto do controlador com os Teoremas 2 (\square) e 4 ($\varphi = 0, 2, \times$).

Fonte: Resultado do próprio autor

Considerando o mesmo sistema linear incerto (51) com $a \in [-30, 42]$ e $b \in [-6, 60]$, com espaçamento uniforme de 3 para a e b , na Figura 13 é ilustrado a totalidade de controladores que puderam ser encontrados (factíveis) para vários valores de γ e φ , compreendendo $\gamma \in [0, 1, 6]$, com espaçamento 0,1 e $\varphi \in [0, 05, 6]$, com espaçamento 0,05.

Observe pela Figura 13 que para a faixa de valores selecionados para a simulação, a escolha do valor de φ tem pouca influencia na totalidade de projetos factíveis, percebe-se que existe uma pequena superioridade quando a escolha é feita com $\varphi \in [0, 1, 0, 3]$. Foram analisados 575 sistemas incertos.

Figura 13 - Parâmetros para os quais os controladores são encontrados ($\varphi \times \gamma \times$ Factibilidade).



Fonte: Resultado do próprio autor

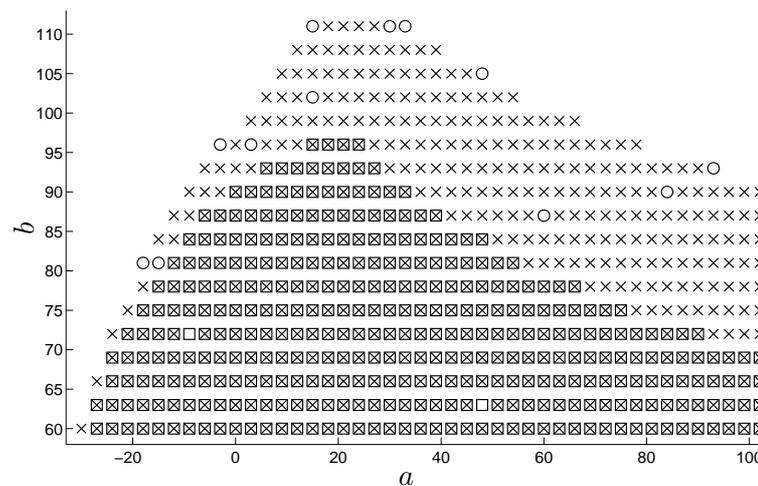
Observe neste exemplo que os valores de φ são completamente diferentes para cada situação de projeto. Após uma busca unidimensional e visual através das Figuras 11 e 13, estes foram os melhores valores encontrados para o sistema incerto (51). Contudo, não existem provas teóricas que estes são os valores ótimos de φ .

O próximo exemplo ilustra uma comparação entre os critérios de estabilidade propostos neste trabalho com os apresentados por Assunção et al. (2007), para facilitar a leitura, as LMIs foram apresentadas no Lema 2.1 e 2.2 deste trabalho. Em Assunção et al. (2007) é utilizada uma CQLF para garantir a estabilidade sem e com restrição de taxa de decaimento $\gamma > 0$, de sistemas lineares incertos. A primeira vista, seria injusto comparar uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF) com uma CQLF. Parece ser mais fácil garantir as condições de estabilidade utilizando uma \tilde{P}_k multiplicada por escalares positivos μ_k do que uma \tilde{P} única. Porém, os resultados são particularmente interessantes. \square

Exemplo 3.1.3: Comparação entre PDLF e CQLF

Considerando o mesmo sistema linear incerto (51) do exemplo 3.1.2, com $-30 \leq a \leq 102$ e $60 \leq b \leq 111$ e espaçamento uniforme 3 para a e b . A região de factibilidade pode ser vista na Figura 14. Considere a Nota 2, apresentada anteriormente, para as soluções numéricas a seguir.

Figura 14 - Projeto do controlador com os Teoremas 1 (\square) e 3 ($\varphi = 200000$, \times) e com Assunção et al. (2007, Teorema 3, \square , \times e \circ).



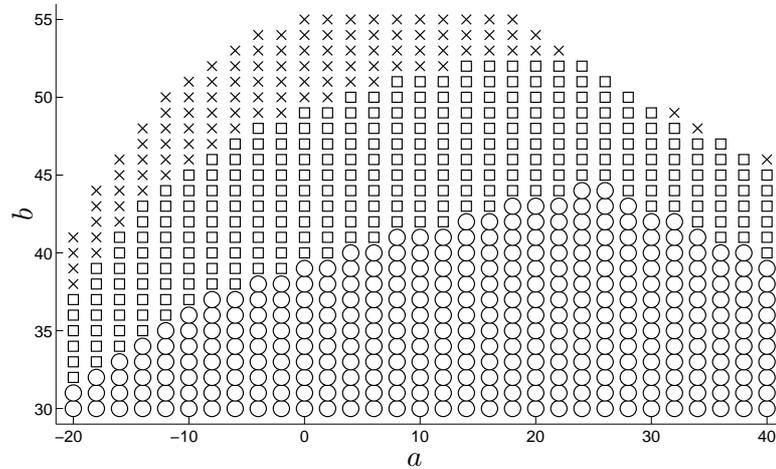
Fonte: Resultado do próprio autor

Pela Figura 14, observe que a região de factibilidade utilizando uma CQLF e considerando apenas a estabilidade do sistema, é praticamente equivalente a região do Teorema 3 deste trabalho. No entanto, ao considerarmos a restrição de taxa de decaimento no projeto do controlador, o método utilizando CQLF passa a ser mais restritivo, ou seja, existe um maior conservadorismo no conjunto de LMIs, veja Figura 15.

► **Estabilidade com taxa de decaimento**

Considerando $-20 \leq a \leq 40$ e $30 \leq b \leq 55$, com espaçamentos uniformes de 2 e 1 respectivamente. A região de factibilidade com $\gamma = 2$ pode ser vista na Figura 15.

Figura 15 - Projeto do controlador com Assunção et al. (2007, Teorema 4, \circ) e com os Teoremas 2 (\circ e \square) e 4 ($\varphi = 0, 2, \circ, \square$ e \times).



Fonte: Resultado do próprio autor

Acreditando que a estabilidade do sistema nem sempre é suficiente para fins de aplicações práticas, pois existem projetos que possuem restrições de desempenho, o projeto de controladores com restrição de taxa de decaimento é mais interessante. Logo, o método proposto neste trabalho é mais vantajoso do que o apresentado por Assunção et al. (2007). \square

3.1.4 Conclusões parciais

Esta seção apresentou condições suficientes baseadas em LMIs para a obtenção de controladores robustos, sem e com restrição de taxa de decaimento, visando a estabilização de sistemas lineares incertos contínuos no tempo. As condições de estabilidade foram obtidas a partir de funções de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLFs) através da utilização do lema da projeção recíproca na modelagem LMIs. A metodologia abordada desassocia as matrizes do sistema (A_i, B_i) das matrizes da função de Lyapunov (P_k) , melhorando assim a solução numérica dos problemas. Para comprovar a eficiência da metodologia proposta, exemplos numéricos foram apresentados. A princípio, projetaram-se controladores para a estabilização de um sistema de suspensão ativa de um veículo, utilizou-se os Teoremas 1 e 3 que asseguram apenas a estabilidade do sistema e em seguida, os Teoremas 2 e 4 que asseguram a estabilidade com taxa de decaimento, os resultados ilustram um bom desempenho dos controladores projetados. Em seguida, foi realizada uma análise comparativa, no qual as metodologias propostas são comparadas entre si e

com os resultados apresentados por Assunção et al. (2007). Foi visto que a introdução de um parâmetro de ajuste $\varphi > 0$ nos conjuntos de LMIs levam a resultados menos conservadores, i.e., o Teorema 3 apresentou uma região de factibilidade maior comparado ao Teorema 1 e de maneira similar, a região do Teorema 4 foi superior a do Teorema 2. Quando comparado com Assunção et al. (2007) e, considerando apenas a estabilidade do sistema, os Teoremas 1 e 3 apresentaram uma pequena desvantagem (veja Figura 14), entretanto, ao considerar a taxa de decaimento nos projetos, os Teoremas 2 e 4 obtiveram uma região de factibilidade significativamente maior (veja Figura 15).

3.2 Formulação LMI: Lema de Finsler

A ideia básica do processo consiste em avaliar a estabilidade do sistema (12), a partir da igualdade (52).

$$0 = A(\alpha)x(t) - (I + B(\alpha)K_d)\dot{x}(t). \quad (52)$$

Observe que, o sistema (52) é equivalente ao sistema em malha fechada (12), para o caso que $(I + B(\alpha)K_d)$ é não singular.

Durante as formulações das LMIs, para o projeto dos controladores, utiliza-se o Lema 3.2. As novas formulações evitam o produto das matrizes da função de Lyapunov (13) com as matrizes do sistema (52), permitindo o uso de funções paramétricas de Lyapunov no projeto dos controladores.

Lema 3.2. (*Lema de Finsler*) Considere $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{D}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ com posto $(\mathcal{B}(\alpha)) < n$ e $\mathcal{B}(\alpha)^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\alpha)$ (isto é $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0$).

Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\mathcal{W}^T \mathcal{D}(\alpha) \mathcal{W} < 0$, $\forall \mathcal{W} \neq 0$, $\mathcal{B}(\alpha) \mathcal{W} = 0$,
- (ii) $\mathcal{B}(\alpha)^\perp{}^T \mathcal{D}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)^\perp < 0$,
- (iii) $\exists \rho \in \mathbb{R} : \mathcal{D}(\alpha) - \rho \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{B}(\alpha) < 0$,
- (iv) $\exists \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{2n \times n} : \mathcal{D}(\alpha) + \mathcal{Q} \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{Q}^T < 0$,

sendo ρ e \mathcal{Q} variáveis adicionais (ou multiplicadoras).

Prova: Veja Skelton, Iwasaki e Grigoriadis (1998), Oliveira e Skelton (2001). ■

Este lema é largamente utilizado em muitas aplicações de controle ou análise de estabilidade baseadas em LMIs. As principais finalidades são a eliminação de variáveis, a desassociação de matrizes ou a redução do número de LMIs em projeto de controladores (MOZELLI; PALHARES; MENDES, 2010; PIPELEERS et al., 2009).

3.2.1 Projeto do controlador: Condição de estabilidade

A princípio, definem-se os seguintes vetores e matrizes (53).

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, & \mathcal{D}(P(\alpha)) &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix}, & \mathcal{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & -I - B(\alpha)K_d \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (53)$$

sendo X qualquer matriz não-singular de dimensões adequadas.

Usando estas definições, o sistema em malha fechada (52) e a condição de estabilidade (13) podem ser reescritas respectivamente como (54).

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\alpha)\mathcal{W} &= 0, \quad \text{e} \\ \dot{V}(\mathcal{W}, \alpha) &= \mathcal{W}^T \mathcal{D}(P(\alpha))\mathcal{W} < 0, \quad P(\alpha) > 0, \quad \forall \mathcal{W} \neq 0. \end{aligned} \quad (54)$$

A partir destas informações, no Teorema 5 são propostas condições suficientes para que o sistema (52) seja estabilizável.

Teorema 5. *Se existirem matrizes simétricas $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs (55).*

$$\begin{bmatrix} A_i Y^T + Y A_i^T & Q_i - Y^T - B_i G + Y A_i^T \\ \bullet & -Y^T - Y - B_i G - G^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (55a)$$

$$Q_i > 0, \quad (55b)$$

sendo, $i = 1, 2, \dots, r$. Então, o sistema (52) é estabilizável e uma matriz de ganho que resolve o problema pode ser dada por (56).

$$K_d = GY^{-T}. \quad (56)$$

Prova: Suponha que (55) é factível. Substituindo $Q_i = X^{-1}P_iX^{-T}$, $G = K_dX^{-T}$ e $Y = X^{-1}$ em (55), multiplicando cada elemento por α_i e somando todos para $i = 1, 2, \dots, r$,

segue (57).

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i X^{-T} + X^{-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T & X^{-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i X^{-T} - X^{-T} - \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i K_d X^{-T} + X^{-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T \\ \bullet & -X^{-T} - X^{-1} - \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i K_d X^{-T} - X^{-1} K_d^T \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i^T \end{bmatrix} < 0. \quad (57)$$

De (9) e (14), segue (58).

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) X^{-T} + X^{-1} A(\alpha)^T & X^{-1} P(\alpha) X^{-T} - X^{-T} - B(\alpha) K_d X^{-T} + X^{-1} A(\alpha)^T \\ \bullet & -X^{-T} - X^{-1} - B(\alpha) K_d X^{-T} - X^{-1} K_d^T B(\alpha)^T \end{bmatrix} < 0. \quad (58)$$

Agora, multiplicando (58) à esquerda por $\text{diag}(X, X)$ e à direita por $\text{diag}(X^T, X^T)$, segue (59).

$$\begin{bmatrix} X A(\alpha) + A(\alpha)^T X^T & P(\alpha) - X + A(\alpha)^T X^T - X B(\alpha) K_d \\ \bullet & -X - X^T - X B(\alpha) K_d - K_d^T B(\alpha)^T X^T \end{bmatrix} < 0. \quad (59)$$

Multiplicando (59) por (-1) e ainda à esquerda e à direita por $\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, segue (60).

$$\begin{bmatrix} X + X B(\alpha) K_d + X^T + K_d^T B(\alpha)^T X^T & -P(\alpha) + X^T - X A(\alpha) + K_d^T B(\alpha)^T X^T \\ \bullet & -X A(\alpha) - A(\alpha)^T X^T \end{bmatrix} > 0, \quad (60)$$

logo: $X + X B(\alpha) K_d + X^T + K_d^T B(\alpha)^T X^T > 0 \Leftrightarrow X(I + B(\alpha) K_d) + (I + K_d^T B(\alpha)^T) X^T > 0$. Segundo a Propriedade 2.1, conclui-se que $X(I + B(\alpha) K_d)$ é de posto completo, logo $(I + B(\alpha) K_d)$ e X^T são de posto completo, ou seja, invertíveis.

Note que, (60) pode ser reescrita como (61).

$$\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X A(\alpha) + A(\alpha)^T X^T & -X + A(\alpha)^T X^T - X B(\alpha) K_d \\ \bullet & -X - X B(\alpha) K_d - X^T - K_d^T B(\alpha)^T X^T \end{bmatrix} < 0, \quad (61)$$

ou (62).

$$\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X A(\alpha) & -X - X B(\alpha) K_d \\ X A(\alpha) & -X - X B(\alpha) K_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(\alpha)^T X^T & A(\alpha)^T X^T \\ -X^T - K_d^T B(\alpha)^T X^T & -X^T - K_d^T B(\alpha)^T X^T \end{bmatrix} < 0. \quad (62)$$

Agora, colocando X e X^T em evidência, segue (63).

$$\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha) & -I - B(\alpha)K_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A(\alpha) & -I - B(\alpha)K_d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix}^T < 0. \quad (63)$$

Considerando (53) e pelo Lema 3.2, $\mathcal{W}^T \mathcal{D}(\alpha) \mathcal{W} < 0$ é equivalente a $\mathcal{D}(\alpha) + \mathcal{L}\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{Q}^T < 0$, porque $\mathcal{B}(\alpha) \mathcal{W} = 0$. Daí segue que, se a LMI (55) é factível, então existe uma matriz dependente de parâmetros $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$, satisfazendo as condições de Lyapunov (13) para o sistema (52). Logo, o sistema (52), considerando a matriz de ganho (56), é assintoticamente estável. ■

Visto que a solução do Teorema 5 garante apenas a estabilidade do sistema (52), na próxima seção é estudado o caso em que o projeto possui restrições de taxa de decaimento envolvendo o Lema de Finsler.

3.2.2 Projeto do controlador: Condição de estabilidade com taxa de decaimento

Definindo-se os seguintes vetores e matrizes (64).

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, & \mathcal{D}(P(\alpha)) &= \begin{bmatrix} 2\gamma P(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} X \\ X \end{bmatrix}, & \mathcal{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & -I - B(\alpha)K_d \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (64)$$

o sistema em malha fechada (52) e a condição de estabilidade com restrição de taxa de decaimento (27) podem ser reescritas respectivamente como (54).

A partir destas informações, no Teorema 6 são propostas condições suficientes para que o sistema (52) seja estabilizável com taxa de decaimento $\gamma > 0$.

Teorema 6. *Dada uma constante real $\gamma > 0$, se existirem matrizes simétricas $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs (65).*

$$\begin{bmatrix} 2\gamma Q_i + A_i Y^T + Y A_i^T & Q_i - Y^T - B_i G + Y A_i^T \\ \bullet & -Y^T - Y - B_i G - G^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (65a)$$

$$Q_i > 0, \quad (65b)$$

sendo, $i = 1, 2, \dots, r$. Então, o sistema (52) é estabilizável com taxa de decaimento maior ou igual a γ e uma matriz de ganho que resolve o problema pode ser dada por (66).

$$K_d = GY^{-T}. \quad (66)$$

Prova: A demonstração segue passos similares aos da demonstração do Teorema 5, considerando (64). ■

3.2.3 Resultados estendidos do Lema de Finsler aplicado a realimentação derivativa

Com uma estratégia similar a apresentada na Seção 3.1.3, nos próximos teoremas, um escalar $\kappa > 0$ é incorporado no conjunto de LMIs. Com uma escolha adequada de κ , é possível obter resultados menos conservadores que os teoremas apresentados anteriormente. O Teorema 7 é uma extensão do Teorema 5.

Teorema 7. *Dado um escalar arbitrário $\kappa > 0$, se existirem matrizes simétricas $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs (67).*

$$\begin{bmatrix} A_i Y^T + Y A_i^T & Q_i - Y^T - B_i G + \kappa Y A_i^T \\ \bullet & -\kappa Y^T - \kappa Y - \kappa B_i G - \kappa G^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (67a)$$

$$Q_i > 0, \quad (67b)$$

sendo, $i = 1, 2, \dots, r$. Então, o sistema (52) é estabilizável e uma matriz de ganho que resolve o problema pode ser dada por (68).

$$K_d = GY^{-T}. \quad (68)$$

Prova: A demonstração segue passos similares aos da demonstração do Teorema 5, considerando (69).

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X \\ \kappa X \end{bmatrix}. \quad (69)$$

■

O Teorema 8 é uma extensão do Teorema 6.

Teorema 8. *Dada uma constante real $\gamma > 0$ e um escalar arbitrário $\kappa > 0$, se existirem matrizes simétricas $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs*

(70).

$$\begin{bmatrix} 2\gamma Q_i + A_i Y^T + Y A_i^T & Q_i - Y^T - B_i G + \kappa Y A_i^T \\ \bullet & -\kappa Y^T - \kappa Y - \kappa B_i G - \kappa G^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (70a)$$

$$Q_i > 0, \quad (70b)$$

sendo, $i = 1, 2, \dots, r$. Então, o sistema (52) é estabilizável com taxa de decaimento maior ou igual a γ e uma matriz de ganho que resolve o problema pode ser dada por (71).

$$K_d = GY^{-T}. \quad (71)$$

Prova: A demonstração segue passos similares aos da demonstração do Teorema 5, considerando (64) e (69). ■

Nota 3. Nos Teoremas 7 e 8 o escalar $\kappa > 0$ pode ser obtido por meio de uma busca unidimensional.

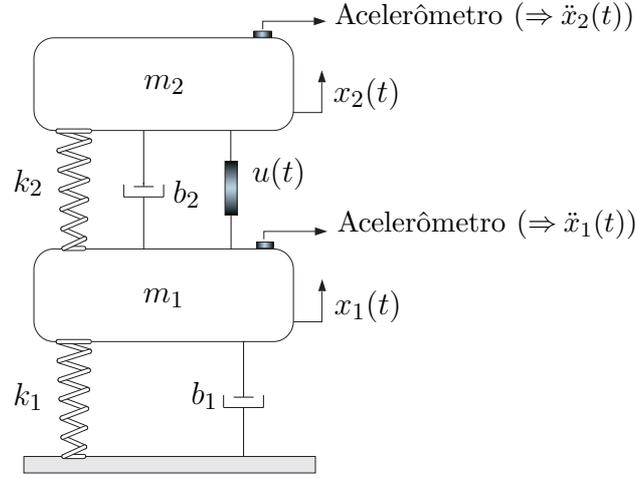
De forma semelhante a técnica apresentada na Seção 3.1.3 deste trabalho, o parâmetro de ajuste κ foi adicionado nos conjuntos de LMIs (67) e (70) em uma tentativa de flexibilizar as condições de estabilidade dos Teoremas (7) e (8) respectivamente. Este procedimento tem sido amplamente explorada na literatura, por exemplo, Geromel e Korogui (2006), Pipeleers et al. (2009), Mozelli, Palhares e Avellar (2009), conseguiram melhorar a região de factibilidade LMI simplesmente escolhendo adequadamente, através de uma busca unidimensional, os valores dos parâmetros.

A eficiência da metodologia proposta pode ser verificada na solução dos exemplos abordados a seguir.

Exemplo 3.2.1: Sistema mecânico de controle de vibração

Considere o sistema de controle de vibração ilustrado na Figura 16 (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004).

Figura 16 - Sistema mecânico de controle de vibração.



Fonte: (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004)

A dinâmica do sistema pode ser representada pelo sistema incerto (8), considerando (72):

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1-k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{-b_1-b_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}. \quad (72)$$

O vetor de estado é dado por $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$, sendo que, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são os deslocamentos verticais das massas m_1 e m_2 respectivamente e $\dot{x}_1(t)$ e $\dot{x}_2(t)$ são as velocidades. Os parâmetros k_1 e k_2 são constantes elásticas e b_1 e b_2 são constantes de amortecimento. Os respectivos valores referentes aos parâmetros do sistema são mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros do sistema mecânico.

m_1	m_2	k_1	k_2	b_1	b_2
100	10	360	36	[0, 70]	50
(kg)	(kg)	(kN/m)	(kN/m)	(Ns/m)	(Ns/m)

Fonte: (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004)

Supondo que o coeficiente de amortecimento b_1 é incerto e pertence ao intervalo $0 \leq b_1 \leq 70(\text{Ns/m})$ (ou seja, o amortecedor pode sofrer uma falha estrutural depois de algum tempo de uso, $b_1 = 0$). O objetivo do sistema de controle é diminuir a vibração da massa

m_1 através da vibração controlada da massa m_2 , com o sinal de controle $u(t)$.

A partir dessas informações, são obtidos os seguintes vértices do polítopo:

$$A_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0010 \\ -3,9600 & 0,3600 & -0,0012 & 0,0005 \\ 3,6000 & -3,6000 & 0,0050 & -0,0050 \end{bmatrix},$$

com $b_1 = 70\text{Ns/m}$ em A_1 ,

$$A_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0010 \\ -3,9600 & 0,3600 & -0,0005 & 0,0005 \\ 3,6000 & -3,6000 & 0,0050 & -0,0050 \end{bmatrix},$$

com $b_1 = 0$ em A_2 ,

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,01 \\ 0,10 \end{bmatrix}.$$

Para este exemplo, considerou o seguinte caso:

► Estabilidade

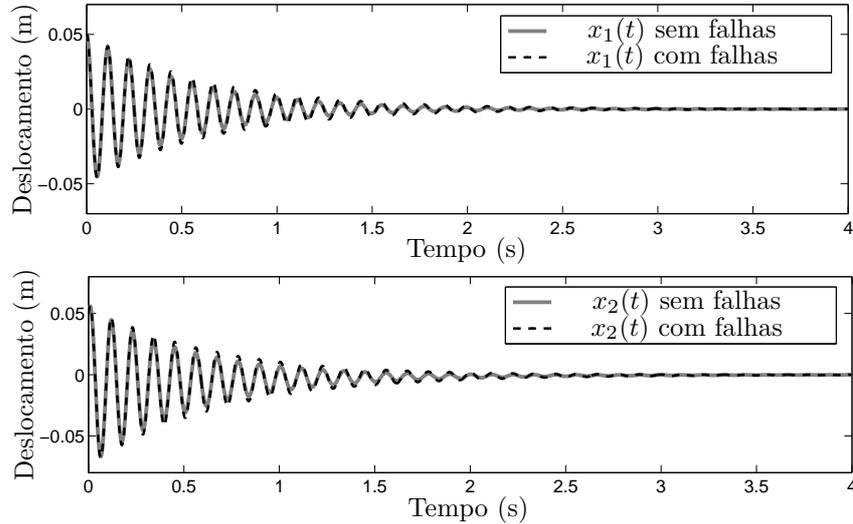
Utilizando as LMIs (55) do Teorema 5, o ganho (73) foi calculado usando (56).

$$\begin{aligned} K_d = GY^{-T} &= 10^5 \times \begin{bmatrix} -0,1114 & 1,1248 & -0,5783 & 0,8437 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0,3887 & -0,0403 & -0,1564 & -0,0156 \\ 0,1181 & -0,0043 & -0,0155 & -0,0016 \\ 0,2227 & -0,0407 & -0,0003 & -0,0001 \\ -0,4709 & 0,4001 & 0,0032 & 0,0009 \end{bmatrix}, \\ K_d &= 10^4 \times \begin{bmatrix} -4,3659 & 3,6076 & 0,0292 & 0,0075 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (73)$$

A resposta transitória do sistema (72) realimentado para a condição inicial de simulação $x(0) = [0,05 \ 0,05 \ 0,2 \ 0,2]^T$ com o amortecedor b_1 funcionando e após a ocorrência de uma falha estrutural ($b_1 = 0$) pode ser vista na Figura 17. Observando a Figura 17, nota-se que o comportamento do sistema controlado praticamente não é afetado, mesmo

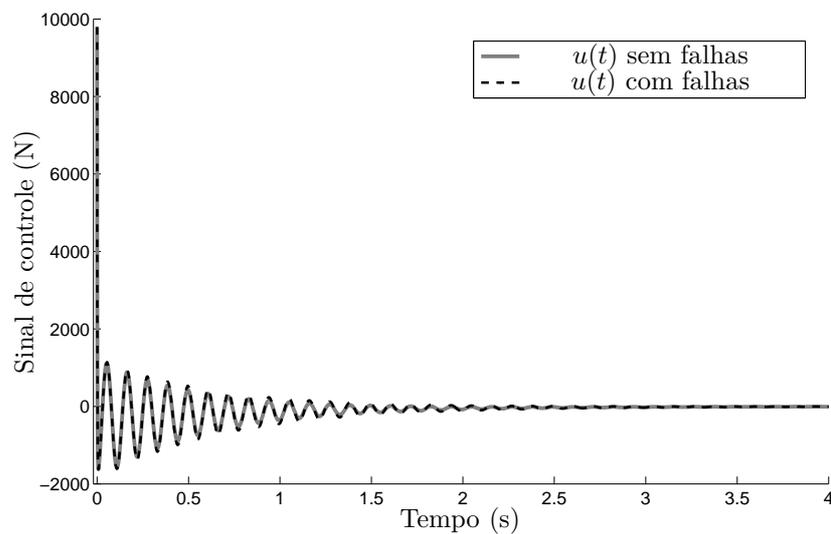
após a quebra do amortecedor b_1 . Logo, o controlador projetado foi capaz de garantir a estabilidade do sistema mesmo após a ocorrência de uma falha no sistema. A Figura 18 mostra o esforço do sinal de controle considerando o ganho (73).

Figura 17 - Simulação do sistema (72) com o ganho (73).



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 18 - Sinal de controle considerando o ganho (73).



Fonte: Resultado do próprio autor

► Agora, utilizando as LMIs (67) do Teorema 7 com $\kappa = 20$, o ganho (74) foi calculado

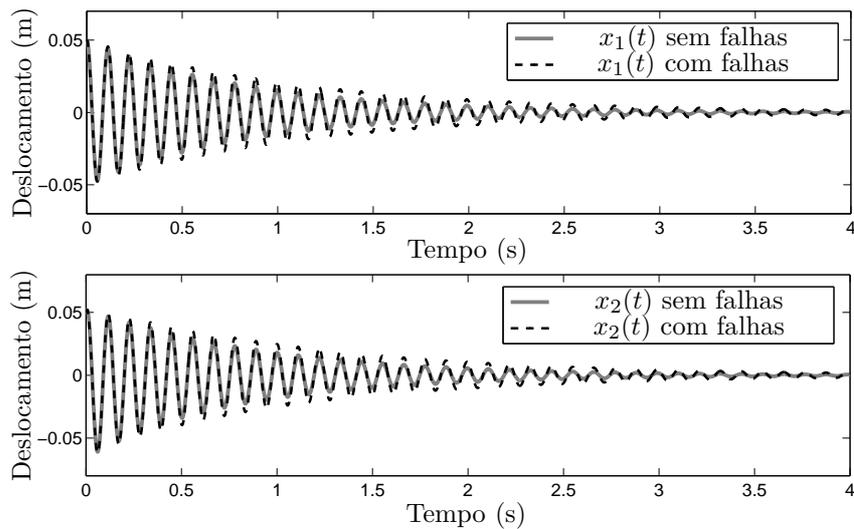
usando (68).

$$\begin{aligned}
 K_d = GY^{-T} &= \begin{bmatrix} -11,5622 & 117,6838 & -65,2087 & 57,0174 \\ 3,8620 & -3,3021 & -0,0823 & -0,0132 \\ 0,4441 & -0,3452 & -0,0081 & -0,0014 \\ 0,1132 & -0,0312 & -0,0001 & -0,0001 \\ -0,2162 & 0,1928 & 0,0007 & 0,0004 \end{bmatrix} \\
 &\times 10^3 \times \hspace{15em} (74) \\
 K_d &= 10^4 \times \begin{bmatrix} -1,2108 & 1,0586 & 0,0041 & 0,0011 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Neste exemplo, com uma busca unidimensional em κ , o ganho (74) encontrado pelo Teorema 7 obteve um melhor desempenho em relação ao valor máximo de $|u(t)|$ (sinal de entrada de controle) do que o ganho (73) encontrado pelo Teorema 5 (compare as Figuras 20 e 18). Contudo, não existem garantias teóricas sobre a influência de κ no desempenho do sistema em malha fechada. O que podemos garantir é que existem sistemas que podem ser estabilizados com o Teorema 7 e não podem ser com o Teorema 5. Isto é verificado adiante, no Exemplo 3.2.2.

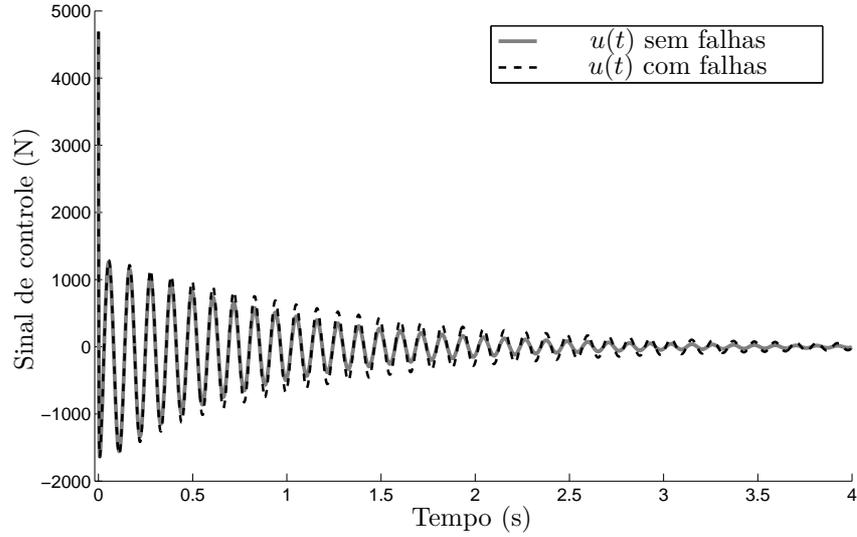
Ainda, observando as Figuras 17 e 19, temos que o tempo de duração do período transitório do sistema controlado em ambos os casos é semelhante ficando em torno de 3s, i.e., o parâmetro de ajuste κ teve poucas influências neste aspecto.

Figura 19 - Simulação do sistema (72) com o ganho (74).



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 20 - Sinal de controle considerando o ganho (74).



Considerando que o sistema (72) deve possuir um tempo de transitório menor, pois em alguns casos esse tempo pode ser elevado demais, os novos projetos podem ser realizados adicionando a restrição de taxa de decaimento. Utilizando os Teoremas 6 e 8, pode-se tentar obter uma resposta com menor tempo de período transitório.

► Estabilidade com taxa de decaimento

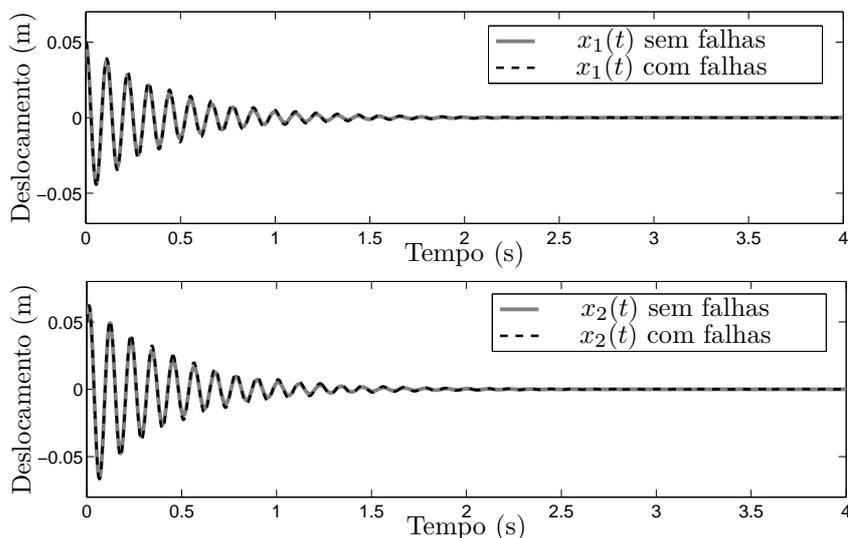
Utilizando as LMIs (65) do Teorema 6 com $\gamma = 0,99$ (máximo obtido para o exemplo), o ganho (75) foi calculado usando (66).

$$\begin{aligned}
 K_d = GY^{-T} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,4673 & 4,9539 & -4,3541 & 9,8702 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} 54,6603 & -44,3825 & -0,9239 & -0,1682 \\ 6,8194 & -5,2140 & -0,0994 & -0,0210 \\ 0,6871 & -0,2061 & -0,0028 & -0,0008 \\ -1,0474 & 0,8899 & 0,0108 & 0,0026 \end{bmatrix}, \quad (75) \\
 K_d &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -5,0893 & 4,5906 & 0,0577 & 0,0038 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

A resposta do sistema (72) realimentado com o ganho (75), com o amortecedor b_1 em funcionamento e após uma falha estrutural, pode ser vista na Figura 21. Analisando a Figura 21, observa-se que o comportamento transitório praticamente não muda, mesmo após a ocorrência de uma falha no amortecedor b_1 ($b_1 = 0$). Logo, o controlador projetado foi capaz de estabilizar o sistema e ainda diminuir o tempo de duração do transitório em

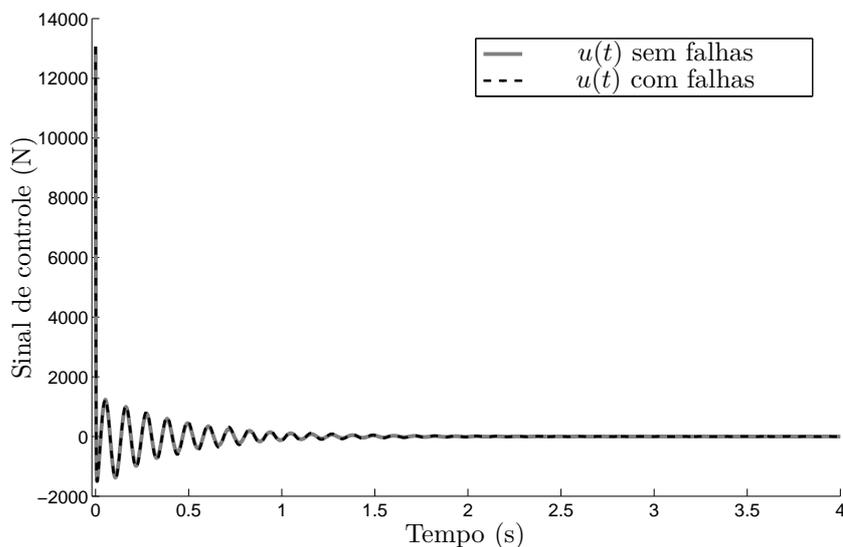
aproximadamente 1,5s. A Figura 22 mostra o esforço do sinal de controle considerando o ganho (75).

Figura 21 - Simulação do sistema (72) com o ganho (75).



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 22 - Sinal de controle considerando o ganho (75).



Fonte: Resultado do próprio autor

Pela Tabela 3, verifica-se que os autovalores dos modelos locais têm parte real menor que $-0,99$. Logo, a especificação de taxa de decaimento ($\gamma = 0,99$) do projeto foi atendida. Temos quatro autovalores para cada vértice.

Tabela 3 - Localização dos autovalores do sistema (72) realimentado com o ganho (75).

Vértices	Autovalores
A_1, B_1	$-2,5821 \pm 56,7358j$
	$-629,6952$
	$-7,9420$
A_2, B_2	$-2,2683 \pm 56,7752j$
	$-629,1198$
	$-7,9421$

Fonte: Resultado do próprio autor

Nota 4. Após exaustivos testes, através de exemplos numéricos, não foi possível obter valores de $\gamma > 0,99$ utilizando as LMIs (65) do Teorema 6. Entretanto, isso é superado utilizando as LMIs (70) do Teorema 8.

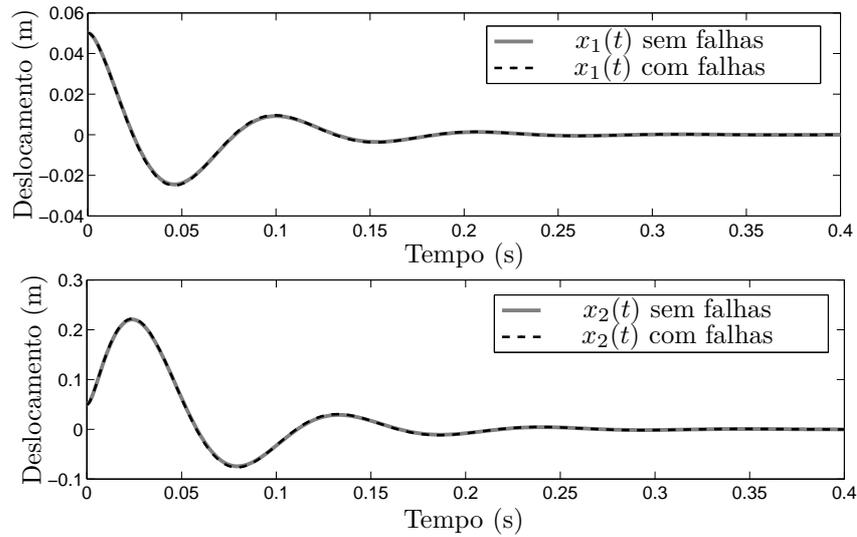
► Utilizando as LMIs (70) do Teorema 8 com $\kappa = 0,01$ e $\gamma = 10$, o ganho (76) foi calculado usando (71).

$$\begin{aligned}
K_d = GY^{-T} &= 10^6 \times \begin{bmatrix} -0,2080 & 2,0551 & -0,1527 & -3,7775 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 0,3504 & -0,0768 & -0,0115 & -0,0014 \\ 0,0383 & -0,0071 & -0,0011 & -0,0001 \\ 0,0044 & -0,0008 & -0,0000 & -0,0000 \\ 0,0005 & 0,0001 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}, \quad (76) \\
K_d &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 3,2028 & 1,0459 & 0,0573 & -0,0027 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Observe agora que, com a adição do parâmetro de ajuste κ nas LMIs, foi possível projetar um ganho de realimentação com taxa de decaimento $\gamma > 0,99$, o que não foi possível utilizando o Teorema 6. Logo, o Teorema 8 deve ser utilizado em projetos que consideram a estabilização do sistema com restrição de taxa de decaimento e exigem um valor de γ superior à 0,99.

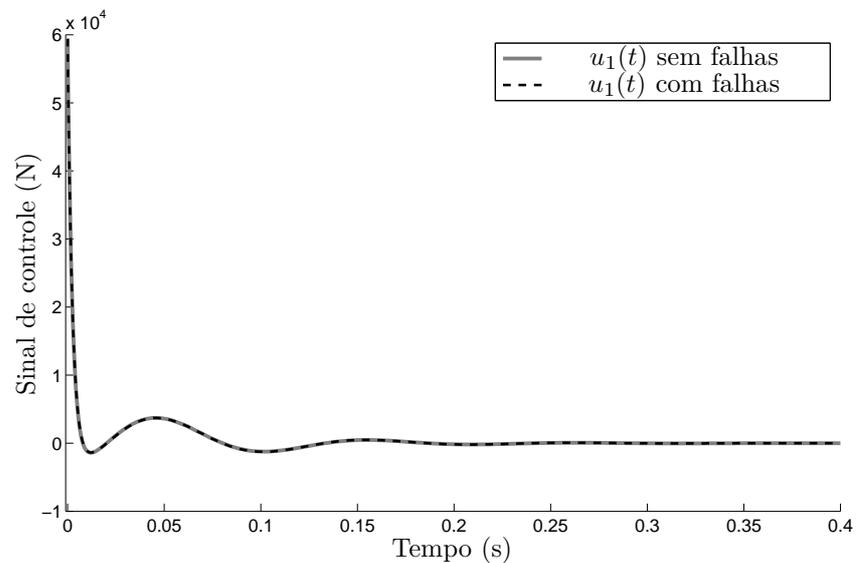
Observando a Figura 23, temos que o sistema controlado, com ou sem falha, possui um tempo de período transitório abaixo de 0,4s. Logo, o ganho (76) foi capaz de melhorar o desempenho do sistema em relação as respostas dos ganhos (73), (74) e (75). A resposta com (76) é aproximadamente 12 vezes mais rápida que a resposta com (73) e (74), e 7 vezes que (75). A Figura 24 mostra o esforço do sinal de controle considerando o ganho (76).

Figura 23 - Simulação do sistema (72) com o ganho (76).



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 24 - Sinal de controle considerando o ganho (76).



Fonte: Resultado do próprio autor

Pela Tabela 4, verifica-se que os autovalores dos modelos locais têm parte real menor que -10 . Logo, a especificação de taxa de decaimento ($\gamma = 10$) do projeto foi atendida. Temos quatro autovalores para cada vértice.

Tabela 4 - Localização dos autovalores do sistema (72) realimentado com o ganho (76).

Vértices	Autovalores
A_1, B_1	$-17,9465 \pm 58,5021j$
	$-403,4928$
	$-53,8439$
A_2, B_2	$-17,6585 \pm 58,8130j$
	$-400,8770$
	$-53,8185$

Fonte: Resultado do próprio autor

Nota 5. Em testes exaustivos, o valor máximo encontrado para este exemplo foi $\gamma = 162,88$ com $\kappa = 0,00001$. Considerando estes parâmetros, o sistema realimentado com o ganho obtido possui um transitório de aproximadamente 0,04s. Consequentemente, há um acréscimo considerável do esforço de controle (aproximadamente $\max |u(t)| = 1 \times 10^{10} \text{N}$). \square

No próximo exemplo é ilustrado que as condições de estabilidade considerando $\kappa > 0$ nos projetos são menos conservadoras.

Exemplo 3.2.2: Sistema linear com incertezas politópicas

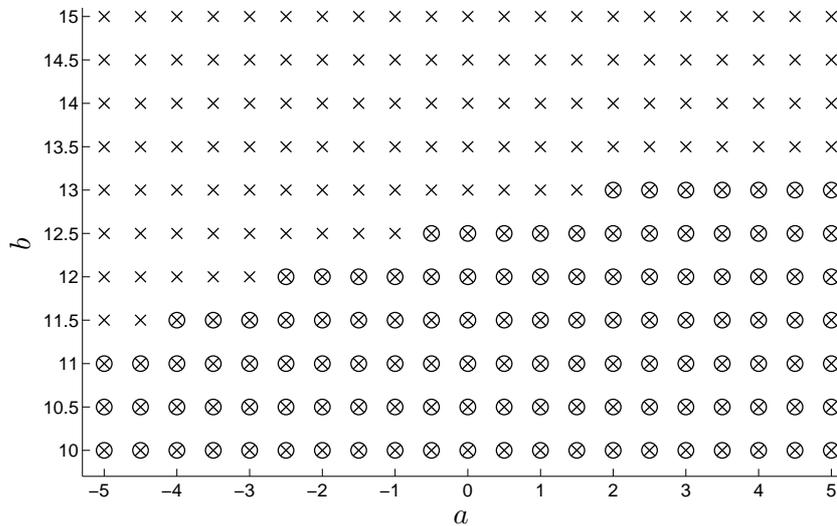
Considere um sistema linear incerto (8) representado pelos seguintes vértices do politopo,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 20 & -100 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} a & -100 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{77}$$

Os Teoremas 5 e 7 são utilizados apenas para garantir a estabilidade deste exemplo considerando vários valores de a e b , tais que, $a \in [-5, 5]$ e $b \in [10, 15]$, com espaçamento uniforme de 0,5 para a e b . A Figura 25 exhibe os pontos da região de análise onde foi possível encontrar os ganhos estabilizantes para o sistema (77). Observe pela Figura 25 que a região de estabilização do Teorema 7 é maior que a região do Teorema 5. Logo, as condições de estabilidade do Teorema 7 são menos conservadoras. Para as soluções

numéricas deste exemplo, considere a Nota 2 apresentada no Exemplo 3.1.2, substituindo φ por κ .

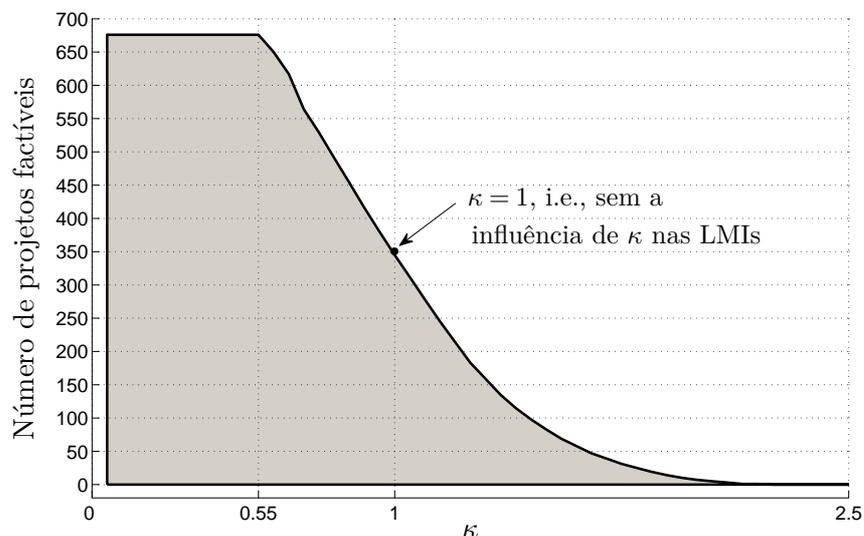
Figura 25 - Projeto do controlador com os Teoremas 5 (o) e 7 ($\kappa = 0,55$, \times).



Fonte: Resultado do próprio autor

Para o mesmo sistema incerto anterior, mas considerando $a \in [-5, 5]$ e $b \in [10, 15]$, com espaçamento uniforme de 0,4 para a e 0,2 para b . Na Figura 26 é ilustrado a totalidade de controladores que puderam ser encontrados para vários valores de κ , compreendendo $\kappa \in [0,05, 2,5]$, com espaçamento 0,05. Observe pela Figura 26 que para valores pequenos de κ a totalidade de projetos factíveis é maior. Foram analisados 676 sistemas incertos.

Figura 26 - Parâmetro para o qual os controladores são encontrados ($\kappa \times$ Factibilidade).

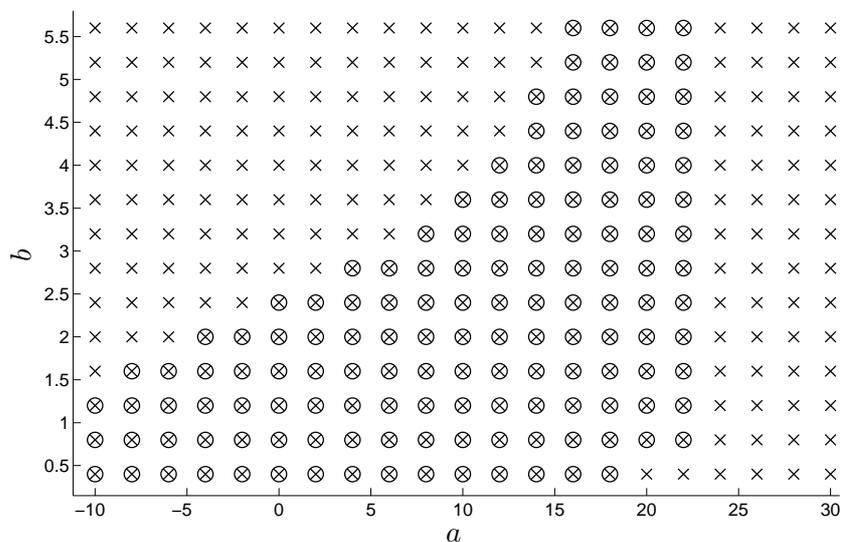


Fonte: Resultado do próprio autor

► Estabilidade com taxa de decaimento

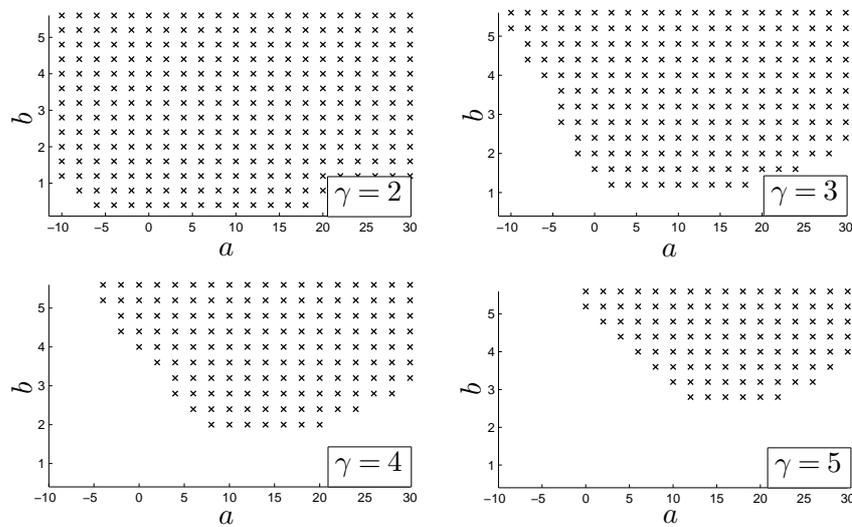
Agora, os Teoremas 6 e 8 são utilizados para garantir a estabilidade com restrição de taxa de decaimento do mesmo exemplo, mas considerando $a \in [-10, 30]$ e $b \in [0, 4, 5, 6]$, com espaçamento uniforme de 2 para a e 0,4 para b . A Figura 27 exibe os pontos da região de análise onde foi possível encontrar os ganhos estabilizantes para o sistema (77) com $\gamma = 0,99$. A escolha de $\gamma = 0,99$ foi de caráter proposital, pelo motivo mencionado na Nota 4.

Figura 27 - Projeto do controlador com os Teoremas 6 (\circ) e 8 ($\kappa = 0, 1, \times$).



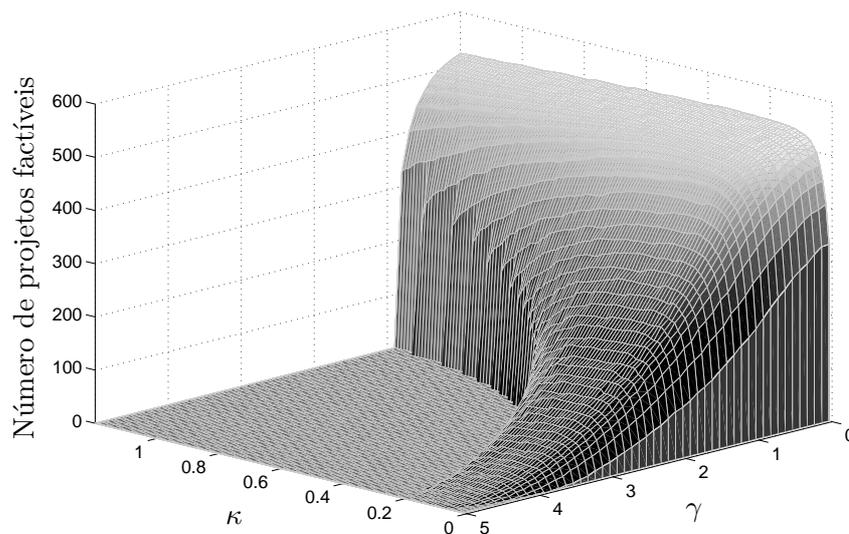
Fonte: Resultado do próprio autor

Aumentando-se gradativamente o valor do parâmetro γ , o Teorema 8 ainda consegue encontrar os ganhos estabilizantes para o sistema linear incerto (77), enquanto que, os projetos sem o parâmetro κ (Teorema 6) não são mais factíveis, isso é ilustrado na Figura 28.

Figura 28 - Projeto do controlador com o Teorema 8 ($\kappa = 0, 1, \times$).

Fonte: Resultado do próprio autor

Considerando o mesmo sistema linear incerto (77), mas com $a \in [-20, 30]$ e $b \in [-1, 6, 2, 4]$ e espaçamento de 2 e 0,2 respectivamente. A Figura 29 ilustra a totalidade de controladores que puderam ser encontrados para vários valores de γ e κ , compreendendo $\gamma \in [0, 5]$, com espaçamento 0,1 e $\kappa \in [0,01, 1,2]$, com espaçamento 0,01. Observe pela Figura 29 que para um valor de γ elevado, necessita-se de um valor de κ pequeno para obter factibilidade. Foram analisados 546 sistemas incertos.

Figura 29 - Parâmetros para o qual os controladores são encontrados ($\kappa \times \gamma \times$ Factibilidade).

Fonte: Resultado do próprio autor

Observe que os valores de κ são diferentes para cada situação de projeto. Após uma

busca unidimensional e visual através das Figuras 26 e 29, estes foram os melhores valores encontrados para o sistema incerto (77). Contudo, não existem provas teóricas que estes são os valores ótimos de κ .

No próximo exemplo, é exibida uma comparação entre os critérios de estabilidade propostos nas Seções 3.1 e 3.2 deste trabalho com os propostos por Assunção et al. (2007). Destacando que, para facilitar a leitura, as LMIs propostas por Assunção et al. (2007) foram apresentadas no Lema 2.1 e 2.2 deste trabalho. \square

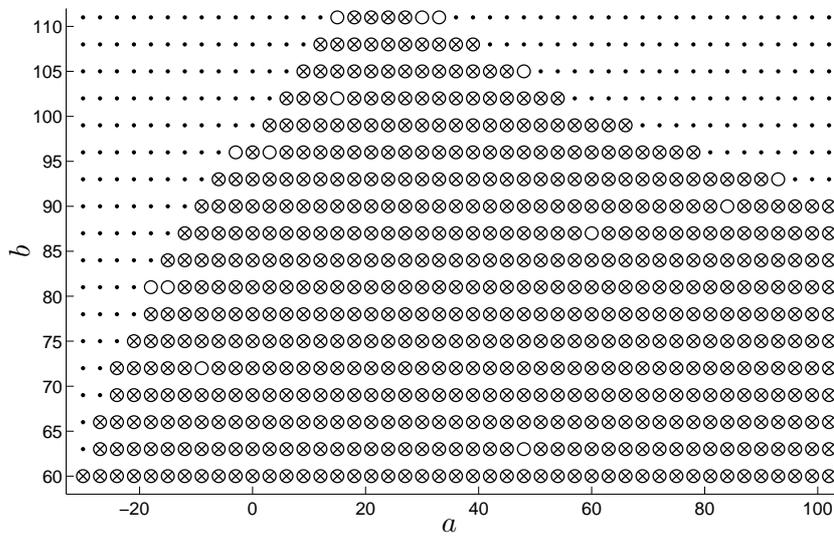
Exemplo 3.2.3: Comparação entre PDLF e CQLF

Considere um sistema linear incerto (8) representado pelos seguintes vértices do polítopo,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 21 & -98 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} a & -98 \\ 11 & 32 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{78}$$

Garantindo apenas a estabilidade deste exemplo e considerando $a \in [-30, 102]$ e $b \in [60, 111]$, com espaçamento uniforme de 3 para a e b , na Figura 30 são exibidos os pontos da região de análise onde foi possível encontrar os ganhos estabilizantes para o sistema incerto (78). Observe pela Figura 30 que a região de estabilização do Teorema 5 é maior que a região do Teorema 3 e Assunção et al. (2007). Logo, as condições de estabilidade do Teorema 5 são menos conservadoras. A Nota 2 apresentada no Exemplo 3.1.2, substituindo φ por κ , é válida para as soluções a seguir.

Figura 30 - Projeto do controlador com o Teorema 3 ($\varphi = 200000$, \times), com Assunção et al. (2007, Teorema 3, \times e \circ) e com o Teorema 5 (\times , \circ e \cdot).



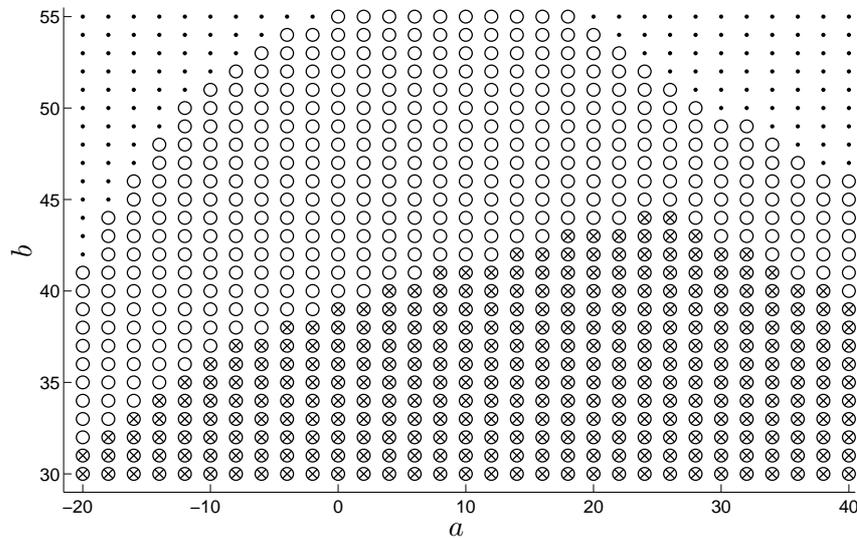
Fonte: Resultado do próprio autor

Note pela Figura 30 que utilizando apenas o Teorema 5 que é mais conservador do que o Teorema 7 ambos deste trabalho, já foi possível obter condições menos conservadoras do que o Teorema 3 deste trabalho e Assunção et al. (2007).

► **Estabilidade com taxa de decaimento**

Agora, garantindo a estabilidade com restrição de taxa de decaimento, mas considerando $a \in [-20, 40]$ e $b, \in [30, 55]$, com espaçamento uniforme de 2 e 1 respectivamente. A Figura 31 exibe os pontos da região de análise onde foi possível encontrar os ganhos estabilizantes com $\gamma = 2$ para o sistema incerto (78).

Figura 31 - Projeto do controlador com Assunção et al. (2007, Teorema 4, \times), com o Teorema 4 ($\varphi = 0.2$, \times e \circ) e com o Teorema 8 ($\kappa = 0, 1$, \times , \circ e \cdot).



Fonte: Resultado do próprio autor

Considerando a restrição de taxa de decaimento $\gamma = 2$, neste exemplo foi utilizado o Teorema 8, visto que, o Teorema 6 não apresenta soluções factíveis para o valor de γ utilizado. Pela Figura 31, note que as condições de estabilidade do Teorema 8 são menos conservadoras do que as do Teorema 4 deste trabalho e Assunção et al. (2007).

Os Teoremas 1 e 2 não foram utilizados em ambas comparações visto que são mais conservadores do que os Teoremas 3 e 4 deste trabalho. \square

Da teoria de controle é conhecido que o comportamento transitório de um sistema está relacionado diretamente com a localização dos seus autovalores (λ) no plano complexo. Alocando os autovalores na região da Figura 1, consegue-se melhorar o desempenho do sistema incerto (12), isto é, utilizando os Teoremas 2, 4, 6 ou 8 é possível diminuir o tempo de transitório do sistema simplesmente aumentando o valor de γ . Porém, garantir apenas um transitório mais rápido pode ser insuficiente. Ainda, estes teoremas não garantem uma limitação para os autovalores do sistema em malha fechada, por exemplo, pode ocorrer que algum autovalor tenha parte real muito negativa ($\lambda \rightarrow -\infty$), e essa situação não é desejável quando pretende-se implementar o controlador projetado. Para resolver este problema e para sistemas que exigem um melhor controle sobre seu transitório, na próxima seção são apresentadas condições para a alocação robusta de autovalores dentro de uma região S estipulada em projeto. Com o posicionamento adequado na região S ,

é possível garantir certos índices de desempenho, tais como, tempo de estabelecimento, porcentagem de *overshoot* e tempo de subida (CHILALI; GAHINET, 1996).

3.2.4 Conclusões parciais

De modo semelhante à Seção 3.1, esta seção apresentou condições suficientes baseadas em LMIs adequadas para o projeto de controladores robustos, sem e com restrição de taxa de decaimento, objetivando estabilizar sistemas lineares incertos contínuos no tempo. As condições de estabilidade foram obtidas a partir de PDLFs através da utilização do Lema de Finsler na modelagem LMIs. A metodologia apresentada desassocia as matrizes do sistema (A_i, B_i) das matrizes da função de Lyapunov (Q_i) , permitindo uma melhoria significativa na solução numérica dos problemas. A comprovação da eficiência do método foi verificada através de exemplos numéricos. Utilizando os Teoremas 5, 6, 7 e 8 foi possível garantir a estabilidade sem e com taxa de decaimento de um sistema mecânico de controle de vibração, pelos resultados verificou-se um bom desempenho dos controladores projetados. No entanto, projetos que necessitam de controladores com taxa de decaimento $\gamma > 0,99$ não podem ser resolvidos utilizando o Teorema 6, esta questão pode ser superada com a utilização do Teorema 8. Ainda, um estudo comparativo foi realizado entre os teoremas propostos nesta seção e, em seguida, os teoremas foram comparados com os teoremas da Seção 3.1 e com Assunção et al. (2007). Foi verificado que a introdução do parâmetro de ajuste $\kappa > 0$ nos conjuntos de LMIs levam a resultados menos conservadores, i.e., com uma escolha adequada de κ , o Teorema 7 obteve uma região de factibilidade maior quando comparado ao Teorema 5 e de maneira similar, a região do Teorema 8 foi superior a do Teorema 6. Em seguida, realizou-se uma comparação com o Teorema 3 (melhor resultado da Seção 3.1 considerando apenas a estabilidade do sistema) e com Assunção et al. (2007), como visto na Figura 30 usando apenas o Teorema 5 (teorema mais conservador dessa seção considerando apenas a estabilidade do sistema) já foi possível obter uma região de factibilidade consideravelmente maior, conseqüentemente, conclui-se que o Teorema 7 é menos conservador que os Teoremas 1, 3, 5 e Assunção et al. (2007). Na análise comparativa com taxa de decaimento $\gamma = 2$ só foi possível utilizar o Teorema 8, tendo em vista que o Teorema 6 não produz soluções factíveis para este valor de γ . A análise foi realizada com o Teorema 4 (melhor resultado da Seção 3.1 considerando a estabilidade com taxa de decaimento) e com Assunção et al. (2007), como visto na Figura 31, o Teorema 8, no caso em questão, alcançou uma região de factibilidade maior, logo, o Teorema 8 é menos conservador que os Teoremas 2, 4, 6 e Assunção et al. (2007).

4 \mathcal{D} -ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS USANDO A REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA

Nesta seção são apresentadas condições suficientes para a síntese de controladores robustos estáticos que asseguram a alocação robusta de autovalores de sistemas lineares com incertezas de tipo politópicas no modelo. Toda parte introdutória dessa seção é baseada no trabalho de Faria (2009).

É conhecido da teoria de controle que o desempenho do sistema (12) está diretamente relacionado com a localização dos seus autovalores (CHEN, 1999; OGATA, 2003). Por exemplo, a resposta de um sistema de segunda ordem sem zeros e com autovalores

$$\lambda = x \pm y\mathbf{j} = -\zeta\omega_n \pm \omega_d\mathbf{j},$$

sendo, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ e $0 < \zeta < 1$, pode ser caracterizada em termos da frequência natural não amortecida $\omega_n = |\lambda|$, do coeficiente de amortecimento ζ e da frequência amortecida ω_d (DORF; BISHOP, 2001; OGATA, 2003). Restringindo os autovalores (λ) em uma determinada região do semi-plano esquerdo complexo, pode-se especificar limites nesses parâmetros e garantir uma resposta transitória satisfatória.

Inicialmente nesse capítulo, um conjunto de LMIs é caracterizado para a alocação robusta de autovalores em uma região denominada $S(\gamma, r, \theta)$. Em seguida, uma formulação LMI garante a alocação robusta na região de interesse denominada $S(\gamma, r)$.

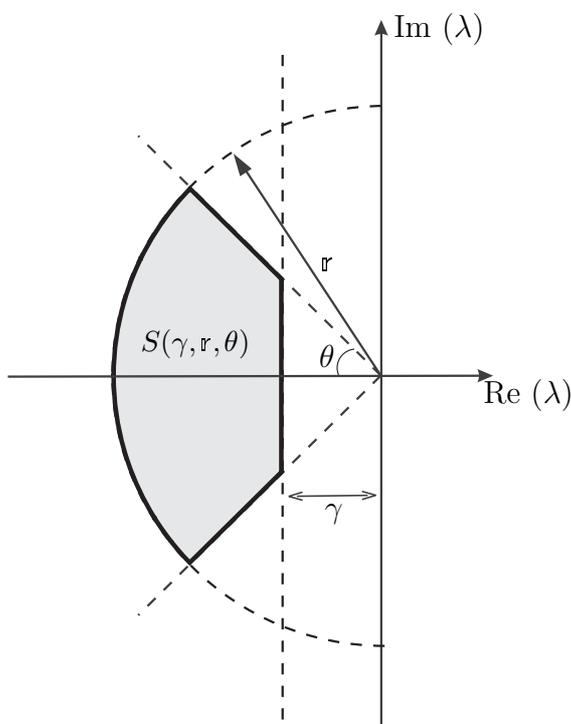
4.1 \mathcal{D} -estabilidade robusta na região $S(\gamma, r, \theta)$

Para a formulação LMI, considere as seguintes substituições de variáveis (CHILALI; GAHINET, 1996): $r = \omega_n$, $\zeta = \cos(\theta)$ e $\gamma = \zeta\omega_n$. Neste caso, a região de interesse para a alocação robusta é a região denominada $S(\gamma, r, \theta)$ de números complexos $x + y\mathbf{j}$ que satisfazem:

$$S(\gamma, r, \theta) = \begin{cases} x < -\gamma < 0, & (a) \\ |x + yj| < r, & (b) \\ \tan(\theta)x < -|y|, & (c) \end{cases}$$

a restrição (a) representa um semi-plano à esquerda da reta vertical que passa pelo ponto $(-\gamma, 0)$, com $\gamma > 0$, a restrição (b) representa um disco centrado na origem de raio r e a restrição (c) limita o argumento θ dos elementos do conjunto. A região $S(\gamma, r, \theta)$ pode ser vista na Figura 32.

Figura 32 - Região $S(\gamma, r, \theta)$ para alocação de autovalores.



Fonte: (CHILALI; GAHINET, 1996)

Quando os autovalores de um sistema de segunda ordem pertencem a região $S(\gamma, r, \theta)$, o sistema possui uma taxa de decaimento γ mínima, coeficiente de amortecimento $\zeta = \cos(\theta)$ mínimo, e frequência amortecida $\omega_d = r\sin(\theta)$ máxima (CHILALI; GAHINET, 1996). Portanto, a região $S(\gamma, r, \theta)$ estabelece limites para o *overshoot* máximo, o tempo de subida e o tempo de estabelecimento (FARIA, 2009; OGATA, 2003).

A técnica de alocação de autovalores apresentada nessa seção usa o conceito de \mathcal{D} -estabilidade (ou estabilidade regional). Esse conceito permite que restrições de projeto tais como porcentagem de *overshoot* $PO\%$, tempo de subida t_s e tempo de estabelecimento t_e

sejam caracterizados por LMIs (CHILALI; GAHINET, 1996; EBIHARA; HAGIWARA, 2004).

Definição 4.1. *Dada uma região \mathcal{D} do semi-plano esquerdo complexo. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita \mathcal{D} -estável se todos os seus autovalores estão contidos na região \mathcal{D} (CHILALI; GAHINET, 1996).*

Chilali e Gahinet (1996) demonstraram que certas regiões convexas no plano complexo podem ser representadas por LMIs. Os resultados são obtidos considerando extensões da Definição 4.1. Neste trabalho, exploramos os resultados que garante a \mathcal{D} -estabilidade de sistemas lineares incertos na região $S(\gamma, r, \theta)$. O principal resultado é mencionado abaixo.

Lema 4.1. *Considere um sistema linear autônomo*

$$\dot{x}(t) = A_N x(t). \quad (79)$$

O sistema (79) é \mathcal{D} -estável, na região $S(\gamma, r, \theta)$, se e somente se, existir uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que, as LMIs abaixo sejam satisfeitas.

$$Q > 0, \quad (I)$$

$$A_N Q + Q A_N^T + 2\gamma Q < 0, \quad (II)$$

$$\begin{bmatrix} -rQ & A_N Q \\ Q A_N^T & -rQ \end{bmatrix} < 0, \quad (III)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(A_N Q + Q A_N^T) & \cos(\theta)(A_N Q - Q A_N^T) \\ \cos(\theta)(Q A_N^T - A_N Q) & \sin(\theta)(A_N Q + Q A_N^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (IV)$$

Prova: Veja Chilali e Gahinet (1996). ■

Considerando $A_N = (I + B_j K_d)^{-1} A_i$, $i, j = 1, 2, \dots, r$, Faria (2005) e Faria et al. (2009) apresentam condições suficientes, baseadas em CQLFs, para a \mathcal{D} -estabilização de sistemas lineares incertos na região $S(\gamma, r, \theta)$ usando a realimentação derivativa (veja o Lema 2.3 para uma consulta rápida).

O interesse agora é estudar a \mathcal{D} -estabilidade do sistema incerto (52) na região $S(\gamma, r, \theta)$ utilizando uma PDLF. Para a solução desse problema, condições suficientes são propostas no Teorema 9. Para a demonstração do teorema, o Lema 4.1 é essencial.

Teorema 9. *Suponha que as matrizes A_i não possuam autovalores nulos ($\det(A_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$). Sejam $\gamma > 0$, $r > 0$ e $\theta > 0$ números reais conhecidos, o sistema (52) é \mathcal{D} -*

estabilizável, na região $S(\gamma, r, \theta)$, com ganho $K_d = GL^{-T}$, se existirem matrizes simétricas $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs (80).

$$Q_i > 0, \quad \forall i, \quad (80a)$$

$$\begin{bmatrix} 2\gamma Q_i + A_i L^T + L A_i^T & Q_i - L^T - B_i G + L A_i^T \\ Q_i - L - G^T B_i^T + A_i L^T & -(L^T + L) - (B_i G + G^T B_i^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (80b)$$

$$\begin{bmatrix} -rQ_i + A_i L^T + L A_i^T & -L^T - B_i G + L A_i^T & 0_{n \times n} \\ -L - G^T B_i^T + A_i L^T & -(L^T + L) - (B_i G + G^T B_i^T) & Q_i \\ 0_{n \times n} & Q_i & -rQ_i \end{bmatrix} < 0, \quad (80c)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} \text{sen}(\theta) (A_i L^T + L A_i^T) & \text{sen}(\theta) (Q_i - L^T - B_i G + L A_i^T) \\ \text{sen}(\theta) (Q_i + A_i L^T - L - G^T B_i^T) & \text{sen}(\theta) (-L^T - B_i G - L - G^T B_i^T) \\ \text{cos}(\theta) (Q_i + A_i L^T + L + G^T B_i^T) & \text{cos}(\theta) (-L^T - B_i G + L + G^T B_i^T) \\ \text{cos}(\theta) (A_i L^T - L A_i^T) & \text{cos}(\theta) (-Q_i - L^T - B_i G - L A_i^T) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{cos}(\theta) (Q_i + L^T + B_i G + L A_i^T) & \text{cos}(\theta) (-A_i L^T + L A_i^T) \\ \text{cos}(\theta) (L^T + B_i G - L - G^T B_i^T) & \text{cos}(\theta) (-Q_i - A_i L^T - L - G^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta) (-L^T - B_i G - L - G^T B_i^T) & \text{sen}(\theta) (Q_i + A_i L^T - L - G^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta) (Q_i - L^T - B_i G + L A_i^T) & \text{sen}(\theta) (A_i L^T + L A_i^T) \end{matrix} \end{matrix} < 0. \quad (80d)$$

Prova: A demonstração do Teorema 9 é formada por três partes, isto é, cada LMI é provada individualmente.

(**Parte 1** - LMI (80b)) Considerando as mudanças de variáveis $L = Z^{-1}$, $G = K_d Z^{-T}$ e $Q_i = Z^{-1} P_i Z^{-T}$ em (80b), segue (81).

$$\begin{bmatrix} 2\gamma Z^{-1} P_i Z^{-T} + A_i Z^{-T} + Z^{-1} A_i^T \\ Z^{-1} P_i Z^{-T} - Z^{-1} - Z^{-1} K_d^T B_i^T + A_i Z^{-T} \\ Z^{-1} P_i Z^{-T} - Z^{-T} - B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1} A_i^T \\ -(Z^{-T} + Z^{-1}) - (B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1} K_d^T B_i^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (81)$$

Multiplicando (81) à esquerda por $\text{diag}(Z, Z)$ e à direita por $\text{diag}(Z^T, Z^T)$, por α_i e

somando em $i = 1, 2, \dots, r$, segue (82).

$$\begin{bmatrix} 2\gamma P(\alpha) + ZA(\alpha) + A(\alpha)^T Z^T \\ P(\alpha) - Z^T - K_d^T B(\alpha)^T Z^T + ZA(\alpha) \\ P(\alpha) - Z - ZB(\alpha)K_d + A(\alpha)^T Z^T \\ - (Z + Z^T) - (ZB(\alpha)K_d + K_d^T B(\alpha)^T Z^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (82)$$

de $-Z - Z^T - ZB(\alpha)K_d - K_d^T B(\alpha)^T Z^T < 0 \Leftrightarrow Z(I + B(\alpha)K_d) + (I + B(\alpha)K_d)^T Z^T > 0$ e segundo a Propriedade 2.1, conclui-se que $Z(I + B(\alpha)K_d)$ é invertível, logo $(I + B(\alpha)K_d)$ e Z são invertíveis. Do item (iv) do Lema 3.2, a desigualdade (82) pode ser reescrita como (83).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\gamma P(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} + \text{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} Z \\ Z \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) & -I - B(\alpha)K_d \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)} \right\} < 0. \quad (83)$$

Assume-se a matriz variável adicional \mathcal{Q} como

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Z \\ Z \end{bmatrix}, \quad (84)$$

sendo $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular.

Agora, note que $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0_{n \times n}$ com

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Pelo item (ii) do Lema 3.2 a equivalência é estabelecida

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha)^{-T} & (I + B(\alpha)K_d)^{-T} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)^{\perp T}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2\gamma P(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)^\perp} < 0, \quad (86)$$

ou,

$$A(\alpha)^{-T} 2\gamma P(\alpha) A(\alpha)^{-1} + (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) A(\alpha)^{-1} + A(\alpha)^{-T} P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} < 0. \quad (87)$$

Multiplicando (87) à esquerda por $A(\alpha)^T$ e à direita por $A(\alpha)$, segue (88).

$$\begin{aligned} A(\alpha)^T(I + B(\alpha)K_d)^{-T}P(\alpha) + P(\alpha)(I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha) + 2\gamma P(\alpha) &< 0, \\ \Leftrightarrow A_N^T P(\alpha) + P(\alpha)A_N &< -2\gamma P(\alpha). \end{aligned} \quad (88)$$

Note que a desigualdade (88) é equivalente a desigualdade (II), substituindo a matriz de Lyapunov Q por $P(\alpha)^{-1}$, com $\alpha_i \in \mathcal{A}$. Logo, quando a LMI (80b) é factível, o sistema (52), considerando o Lema 3.2, satisfaz a desigualdade (II).

(Parte 2 - LMI (80c)) Considerando as mudanças de variáveis $L = Z^{-1}$, $G = K_d Z^{-T}$ e $Q_i = Z^{-1}P_i Z^{-T}$ em (80c), segue (89).

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{c} -rZ^{-1}P_i Z^{-T} + A_i Z^{-T} + Z^{-1}A_i^T \\ -Z^{-1} - Z^{-1}K_d^T B_i^T + A_i Z^{-T} \\ 0_{n \times n} \end{array} \right. \\ &\quad \left. \begin{array}{cc} -Z^{-T} - B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1}A_i^T & 0_{n \times n} \\ -(Z^{-T} + Z^{-1}) - (B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1}K_d^T B_i^T) & Z^{-1}P_i Z^{-T} \\ Z^{-1}P_i Z^{-T} & -rZ^{-1}P_i Z^{-T} \end{array} \right] < 0, \end{aligned} \quad (89)$$

Multiplicando (89) à esquerda por $\text{diag}(Z, Z, Z)$ e à direita por $\text{diag}(Z^T, Z^T, Z^T)$, por α_i e somando em $i = 1, 2, \dots, r$, segue (90).

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{c} -rP(\alpha) + ZA(\alpha) + A(\alpha)^T Z^T \\ -Z^T - K_d^T B(\alpha)^T Z^T + ZA(\alpha) \\ 0_{n \times n} \end{array} \right. \\ &\quad \left. \begin{array}{cc} -Z - ZB(\alpha)K_d + A(\alpha)^T Z^T & 0_{n \times n} \\ -(Z + Z^T) - (ZB(\alpha)K_d + K_d^T B(\alpha)^T Z^T) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & -rP(\alpha) \end{array} \right] < 0, \end{aligned} \quad (90)$$

de $-Z - Z^T - ZB(\alpha)K_d - K_d^T B(\alpha)^T Z^T < 0 \Leftrightarrow Z(I + B(\alpha)K_d) + (I + B(\alpha)K_d)^T Z^T > 0$ e segundo a Propriedade 2.1, conclui-se que $Z(I + B(\alpha)K_d)$ é invertível, logo $(I + B(\alpha)K_d)$ e Z são invertíveis. Do item (iv) do Lema 3.2, a desigualdade (90) pode ser reescrita como

(91).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -rP(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & P(\alpha) \\ 0_{n \times n} & P(\alpha) & -rP(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} + \text{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} Z \\ Z \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) & -I - B(\alpha)K_d & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)} \right\} < 0. \quad (91)$$

Assume-se a matriz variável adicional \mathcal{Q} como

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Z \\ Z \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (92)$$

sendo $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular.Agora, note que $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0_{n \times n}$ com

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Pelo item (ii) do Lema 3.2 a equivalência é estabelecida

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha)^{-T} & (I + B(\alpha)K_d)^{-T} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & I \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)^{\perp T}} \underbrace{\begin{bmatrix} -rP(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & P(\alpha) \\ 0_{n \times n} & P(\alpha) & -rP(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)^\perp} < 0, \quad (94)$$

ou,

$$\begin{bmatrix} -A(\alpha)^{-T} rP(\alpha) A(\alpha)^{-1} & (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) \\ P(\alpha)(I + B(\alpha)K_d)^{-1} & -rP(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \quad (95)$$

Multiplicando (95) à esquerda por $\text{diag}(A(\alpha)^T, I)$ e à direita por $\text{diag}(A(\alpha), I)$, segue

(96).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -rP(\alpha) & A(\alpha)^T(I + B(\alpha)K_d)^{-T}P(\alpha) \\ P(\alpha)(I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha) & -rP(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} -rP(\alpha) & A_N^T P(\alpha) \\ P(\alpha)A_N & -rP(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Note que a desigualdade (96) é equivalente a desigualdade (III), substituindo a matriz de Lyapunov Q por $P(\alpha)^{-1}$, com $\alpha_i \in \mathcal{A}$. Logo, quando a LMI (80c) é factível, o sistema (52), considerando o Lema 3.2, satisfaz a desigualdade (III).

(Parte 3 - LMI (80d)) Considerando as mudanças de variáveis $L = Z^{-1}$, $G = K_d Z^{-T}$ e $Q_i = Z^{-1}P_i Z^{-T}$ em (80d), segue (97).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_i Z^{-T} + Z^{-1}A_i^T) & \text{sen}(\theta)(Z^{-1}P_i Z^{-T} - Z^{-T} - B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1}A_i^T) \\ \text{sen}(\theta)(Z^{-1}P_i Z^{-T} + A_i Z^{-T} - Z^{-1} - Z^{-1}K_d^T B_i^T) & \text{sen}(\theta)(-Z^{-T} - B_i K_d Z^{-T} - Z^{-1} - Z^{-1}K_d^T B_i^T) \\ \text{cos}(\theta)(Z^{-1}P_i Z^{-T} + A_i Z^{-T} + Z^{-1} + Z^{-1}K_d^T B_i^T) & \text{cos}(\theta)(-Z^{-T} - B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1} + Z^{-1}K_d^T B_i^T) \\ \text{cos}(\theta)(A_i Z^{-T} - Z^{-1}A_i^T) & \text{cos}(\theta)(-Z^{-1}P_i Z^{-T} - Z^{-T} - B_i K_d Z^{-T} - Z^{-1}A_i^T) \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta)(Z^{-1}P_i Z^{-T} + Z^{-T} + B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1}A_i^T) & \text{cos}(\theta)(-A_i Z^{-T} + Z^{-1}A_i^T) \\ \text{cos}(\theta)(Z^{-T} + B_i K_d Z^{-T} - Z^{-1} - Z^{-1}K_d^T B_i^T) & \text{cos}(\theta)(-Z^{-1}P_i Z^{-T} - A_i Z^{-T} - Z^{-1} - Z^{-1}K_d^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta)(-Z^{-T} - B_i K_d Z^{-T} - Z^{-1} - Z^{-1}K_d^T B_i^T) & \text{sen}(\theta)(Z^{-1}P_i Z^{-T} + A_i Z^{-T} - Z^{-1} - Z^{-1}K_d^T B_i^T) \\ \text{sen}(\theta)(Z^{-1}P_i Z^{-T} - Z^{-T} - B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1}A_i^T) & \text{sen}(\theta)(A_i Z^{-T} + Z^{-1}A_i^T) \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Multiplicando (97) à esquerda por $\text{diag}(Z, Z, Z, Z)$ e à direita por $\text{diag}(Z^T, Z^T, Z^T, Z^T)$, por α_i e somando em $i = 1, 2, \dots, r$, segue (98).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(ZA(\alpha) + A(\alpha)^T Z^T) & \text{sen}(\theta)(P(\alpha) - Z - ZB(\alpha)K_d + A(\alpha)^T Z^T) \\ \text{sen}(\theta)(P(\alpha) + ZA(\alpha) - Z^T - K_d^T B(\alpha)^T Z^T) & \text{sen}(\theta)(-Z - ZB(\alpha)K_d - Z^T - K_d^T B(\alpha)^T Z^T) \\ \text{cos}(\theta)(P(\alpha) + ZA(\alpha) + Z^T + K_d^T B(\alpha)^T Z^T) & \text{cos}(\theta)(-Z - ZB(\alpha)K_d + Z^T + K_d^T B(\alpha)^T Z^T) \\ \text{cos}(\theta)(ZA(\alpha) - A(\alpha)^T Z^T) & \text{cos}(\theta)(-P(\alpha) - Z - ZB(\alpha)K_d - A(\alpha)^T Z^T) \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta)(P(\alpha) + Z + ZB(\alpha)K_d + A(\alpha)^T Z^T) & \text{cos}(\theta)(-ZA(\alpha) + A(\alpha)^T Z^T) \\ \text{cos}(\theta)(Z + ZB(\alpha)K_d - Z^T - K_d^T B(\alpha)^T Z^T) & \text{cos}(\theta)(-P(\alpha) - ZA(\alpha) - Z^T - K_d^T B(\alpha)^T Z^T) \\ \text{sen}(\theta)(-Z - ZB(\alpha)K_d - Z^T - K_d^T B(\alpha)^T Z^T) & \text{sen}(\theta)(P(\alpha) + ZA(\alpha) - Z^T - K_d^T B(\alpha)^T Z^T) \\ \text{sen}(\theta)(P(\alpha) - Z - ZB(\alpha)K_d + A(\alpha)^T Z^T) & \text{sen}(\theta)(ZA(\alpha) + A(\alpha)^T Z^T) \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (98)$$

de $-Z - Z^T - ZB(\alpha)K_d - K_d^T B(\alpha)^T Z^T < 0 \Leftrightarrow Z(I + B(\alpha)K_d) + (I + B(\alpha)K_d)^T Z^T > 0$ e segundo a Propriedade 2.1, conclui-se que $Z(I + B(\alpha)K_d)$ é invertível, logo $(I + B(\alpha)K_d)$ e Z são invertíveis. Do item (iv) do Lema 3.2, a desigualdade (98) pode ser reescrita como

(99).

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P(\alpha) & \text{cos}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} \\ \text{sen}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -\text{cos}(\theta)P(\alpha) \\ \text{cos}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P(\alpha) \\ 0_{n \times n} & -\text{cos}(\theta)P(\alpha) & \text{sen}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} \\
& + \text{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)Z & -\text{cos}(\theta)Z \\ \text{sen}(\theta)Z & -\text{cos}(\theta)Z \\ \text{cos}(\theta)Z & \text{sen}(\theta)Z \\ \text{cos}(\theta)Z & \text{sen}(\theta)Z \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) & -(I+B(\alpha)K_d) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -(I+B(\alpha)K_d) & A(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)} \right\} < 0.
\end{aligned} \tag{99}$$

Assume-se a matriz variável adicional \mathcal{Q} como

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)Z & -\text{cos}(\theta)Z \\ \text{sen}(\theta)Z & -\text{cos}(\theta)Z \\ \text{cos}(\theta)Z & \text{sen}(\theta)Z \\ \text{cos}(\theta)Z & \text{sen}(\theta)Z \end{bmatrix}, \tag{100}$$

sendo (θ) o ângulo informado para o projeto do controlador e $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular.

Agora, note que $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0_{n \times n}$ com

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I+B(\alpha)K_d)^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & (I+B(\alpha)K_d)^{-1} \\ 0_{n \times n} & A(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{101}$$

Pelo item (ii) do Lema 3.2 a equivalência é estabelecida

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha)^{-T} & (I + B(\alpha)K_d)^{-T} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & (I + B(\alpha)K_d)^{-T} & A(\alpha)^{-T} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)^{\perp T}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P(\alpha) & \text{cos}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} \\ \text{sen}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -\text{cos}(\theta)P(\alpha) \\ \text{cos}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P(\alpha) \\ 0_{n \times n} & -\text{cos}(\theta)P(\alpha) & \text{sen}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & (I + B(\alpha)K_d)^{-1} \\ 0_{n \times n} & A(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)^{\perp}} < 0, \quad (102)$$

ou,

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(I + B(\alpha)K_d)^{-T}P(\alpha)A(\alpha)^{-1} + \text{sen}(\theta)A(\alpha)^{-T}P(\alpha)(I + B(\alpha)K_d)^{-1} \\ \text{cos}(\theta)(I + B(\alpha)K_d)^{-T}P(\alpha)A(\alpha)^{-1} - \text{cos}(\theta)A(\alpha)^{-T}P(\alpha)(I + B(\alpha)K_d)^{-1} \\ \text{cos}(\theta)A(\alpha)^{-T}P(\alpha)(I + B(\alpha)K_d)^{-1} - \text{cos}(\theta)(I + B(\alpha)K_d)^{-T}P(\alpha)A(\alpha)^{-1} \\ \text{sen}(\theta)A(\alpha)^{-T}P(\alpha)(I + B(\alpha)K_d)^{-1} + \text{sen}(\theta)(I + B(\alpha)K_d)^{-T}P(\alpha)A(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (103)$$

Multiplicando (103) à esquerda por $\text{diag}(A(\alpha)^T, A(\alpha)^T)$ e à direita por $\text{diag}(A(\alpha), A(\alpha))$, segue (104).

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) \left(A(\alpha)^T (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) + P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} A(\alpha) \right) \\ \text{cos}(\theta) \left(A(\alpha)^T (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) - P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} A(\alpha) \right) \\ \text{cos}(\theta) \left(P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} A(\alpha) - A(\alpha)^T (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) \right) \\ \text{sen}(\theta) \left(P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} A(\alpha) + A(\alpha)^T (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) \right) \end{bmatrix} < 0, \quad (104)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) \left(A_N^T P(\alpha) + P(\alpha) A_N \right) & \text{cos}(\theta) \left(P(\alpha) A_N - A_N^T P(\alpha) \right) \\ \text{cos}(\theta) \left(A_N^T P(\alpha) - P(\alpha) A_N \right) & \text{sen}(\theta) \left(P(\alpha) A_N + A_N^T P(\alpha) \right) \end{bmatrix} < 0.$$

Note que a desigualdade (104) é equivalente a desigualdade (IV), substituindo a matriz de Lyapunov Q por $P(\alpha)^{-1}$, com $\alpha_i \in \mathcal{A}$. Logo, quando a LMI (80d) é factível, o sistema (52), considerando o Lema 3.2, satisfaz a desigualdade (IV). ■

Durante todo o texto, a partir de um teorema proposto, uma extensão considerando a inserção de um escalar de relaxação no conjunto de LMIs foi apresentada. Como visto pelas soluções numéricas, com a escolha adequada desse parâmetro, na maioria das vezes, foi possível obter resultados menos conservadores. Uma extensão do Teorema 9 será

investigada em trabalhos futuros, visto que, é mais custoso localizar a posição ótima do parâmetro quando leva-se em conta as três matrizes adicionais referente as LMIs (80b), (80c) e (80d). Teoricamente, espera-se que os resultados sejam menos conservadores comparados com o Lema 2.3 e o Teorema 9.

A seguir, a eficácia do Teorema 9 proposto é verificada através de exemplos numéricos.

Exemplo 4.1.1: Sistema de suspensão ativa de um veículo

Considere o sistema de suspensão ativa de um veículo dado pela Figura 2 e apresentado no Exemplo 3.1.1. O modelo dinâmico pode ser representado pelo sistema incerto (8), considerando as matrizes (47).

Considere $M_c = 1500\text{kg}$, $b_1 = 2 \times 10^3\text{Ns/m}$, $b_2 = 500\text{Ns/m}$, $k_1 = 4 \times 10^4\text{N/m}$ e $k_2 = 5 \times 10^3\text{N/m}$. Ainda, considere que o peso do motorista possa assumir valores entre 50kg e 100kg. Logo, a massa m_s é incerta e pertence ao intervalo $70 \leq m_s \leq 120(\text{kg})$ (motorista + assento (20kg)) (SILVA et al., 2011a).

A partir dessas informações são obtidos os seguintes vértices do politopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -1,6667 & 0,3333 \\ 71,4286 & -71,4286 & 7,1429 & -7,1429 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,3333 & -1,6667 & 0,3333 \\ 41,6667 & -41,6667 & 4,1667 & -4,1667 \end{bmatrix},$$

com $m_s = 70\text{kg}$ em A_1 e $m_s = 120\text{kg}$ em A_2 .

$$B_1 = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0667 & -0,0667 \\ 0 & 1,4286 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0667 & -0,0667 \\ 0 & 0,8333 \end{bmatrix},$$

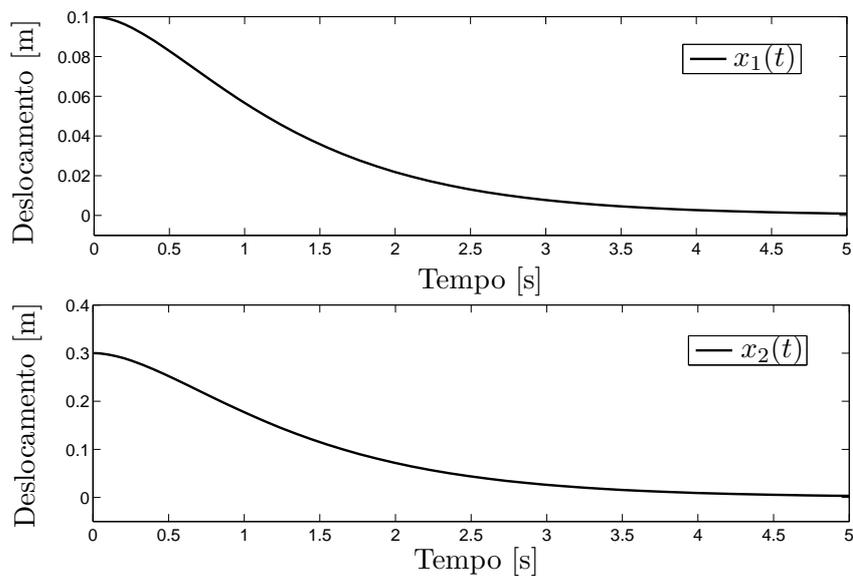
com $m_s = 70\text{kg}$ em B_1 e $m_s = 120\text{kg}$ em B_2 .

As LMIs do Teorema 9 foram resolvidas, com $\gamma = 0,99$, $r = 2$ e $\theta = 45^\circ$, e o seguinte ganho robusto foi projetado:

$$\begin{aligned} K_d &= GL^{-T} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0730 & 0,0900 & 1,5425 & 0,6315 \\ -0,0002 & 0,0026 & -0,0104 & 0,1198 \end{bmatrix} \\ &\times 10^4 \times \begin{bmatrix} -1,3933 & 1,1372 & -1,0571 & 0,8667 \\ 1,0857 & -1,0105 & 0,8626 & -0,7850 \\ 0,0179 & -0,0065 & 0,0096 & -0,0034 \\ -0,0300 & 0,0289 & -0,0217 & 0,0201 \end{bmatrix}, \quad (105) \\ K_d &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 4,6676 & 0,2379 & 1,5200 & 0,0204 \\ -0,7120 & 0,6996 & -0,2654 & 0,2495 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para a condição inicial $x(0) = [0,1 \ 0,3 \ 0 \ 0]^T$, com $m_s = 120\text{kg}$ (motorista (100kg) + assento (20kg)), é exibida, na Figura 33, a resposta transitória do sistema (47) \mathcal{D} -estabilizado com o ganho robusto (105).

Figura 33 - Resposta transitória com K_d .



Fonte: Resultado do próprio autor

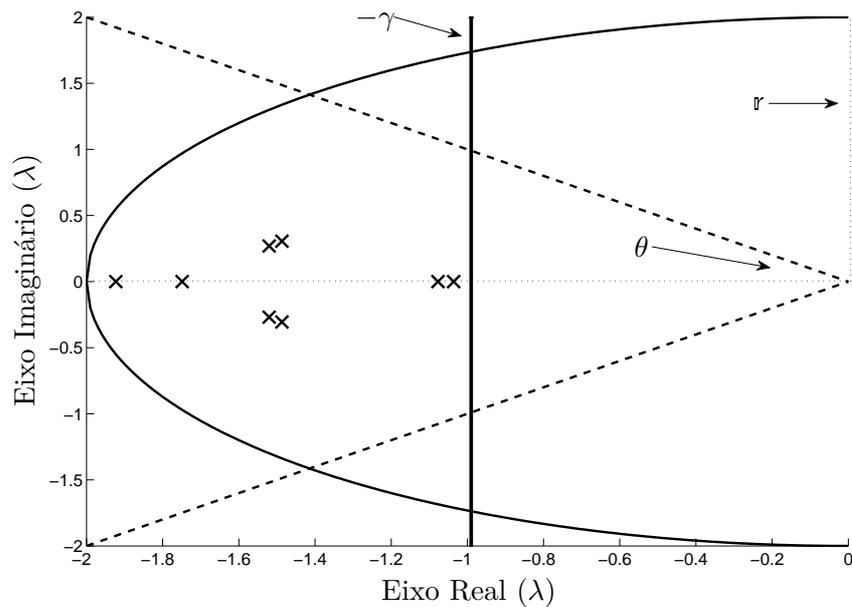
Na Tabela 5 são exibidos os módulos e argumentos dos autovalores dos vértices do sistema (47) realimentado com o ganho robusto (105). A Figura 34 exibe a localização dos autovalores dos vértices do sistema na região $S(\gamma = 0,99, r = 2, \theta = 45^\circ)$.

Tabela 5 - Autovalores do sistema controlado com o ganho (105).

Autovalores de malha fechada	Módulo	Argumento ($135^\circ - 225^\circ$)
Vértice (A_1, B_1)		
-1,0361	1,0361	180,00°
-1,4868 + 0,3060j	1,5180	168,36°
-1,4868 - 0,3060j	1,5180	191,64°
-1,9229	1,9229	180,00°
Vértice (A_2, B_2)		
-1,0772	1,0772	180,00°
-1,5205 + 0,2688j	1,5441	169,97°
-1,5205 - 0,2688j	1,5441	190,03°
-1,7488	1,7488	180,00°

Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 34 - Localização dos autovalores dos vértices do sistema (47), realimentado com (105) (x).



Fonte: Resultado do próprio autor

Observando a Tabela 5 e a Figura 34, verifica-se que os autovalores do sistema controlado têm parte real menor que $-\gamma = -0,99$, módulo menor que $r = 2$ e os argumentos pertencem ao intervalo $[135^\circ, 225^\circ]$, definido pelo ângulo $\theta = 45^\circ$. Logo, o sistema é \mathcal{D} -estável na região $S(\gamma, r, \theta)$.

Após vários testes numéricos, constatou-se que a \mathcal{D} -estabilização robusta utilizando o Teorema 9 somente é praticável para $\gamma \leq 0,99$. Isso acontece pela limitação da LMI (80b). Tal limitação aparece em todos os teoremas baseados no Lema de Finsler que envolve o projeto do controlador com taxa de decaimento, sem considerar a inserção do escalar de relaxação. Ao contrário dos primeiros teoremas propostos, que utilizaram a equivalência entre os itens (i) e (iv) para a formulação LMI, este último, empregou a equivalência entre os itens (ii) e (iv) do Lema 3.2. Apesar disso, a estrutura final da LMI é a mesma e limitada em $\gamma \leq 0,99$. \square

No próximo exemplo realiza-se uma comparação numérica entre o Teorema 9, proposto aqui e baseado em uma PDLF, com o Lema 2.3, apresentado no início deste trabalho e baseado em uma CQLF. O objetivo é investigar o conjunto de parâmetros (a, b) para o qual é possível encontrar um controlador que \mathcal{D} -estabilize, na região $S(\gamma, r, \theta)$, o sistema incerto.

Exemplo 4.1.2: Sistema linear com incertezas politópicas

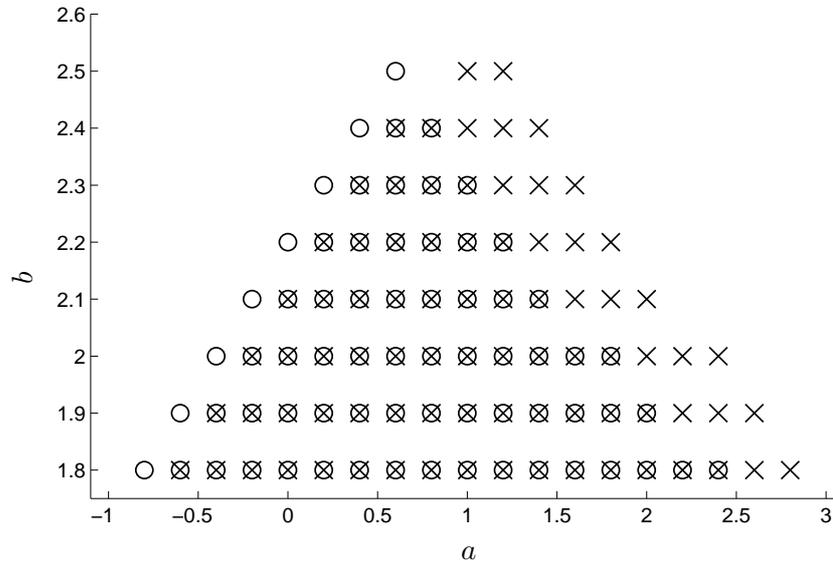
Como segundo exemplo, considere um sistema incerto (8) com os seguintes vértices do politopo:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1,52 & -9,27 \\ 1,43 & 0,50 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1,18 \\ 0,32 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} a & -9,27 \\ 1,43 & 3,00 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0,32 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{106}$$

A investigação no conjunto de parâmetros (a, b) é realizada em uma malha uniforme, considerando $a \in [-1, 3]$, com espaçamento 0,2 e $b \in [1,8, 2,5]$, com espaçamento 0,1. Para o projeto do controlador que \mathcal{D} -estabilize na região $S(\gamma, r, \theta)$, assume-se: $\gamma = 0,75$, $r = 30$ e $\theta = 50^\circ$. Os resultados são mostrados na Figura 35 e exibem os pontos de análise onde foi possível encontrar os ganhos \mathcal{D} -estabilizantes para o sistema (106). A Figura 35 revela que, para a região $S(\gamma, r, \theta)$ escolhida, utilizando o Teorema 9 é possível assegurar

a \mathcal{D} -estabilidade para uma maior quantidade de pares (a, b) . Entretanto, existem certos pares (a, b) para os quais apenas o Lema 2.3 é factível. Ainda, sabe-se que para valores de $\gamma > 0,99$, somente o Lema 2.3 possui sucesso.

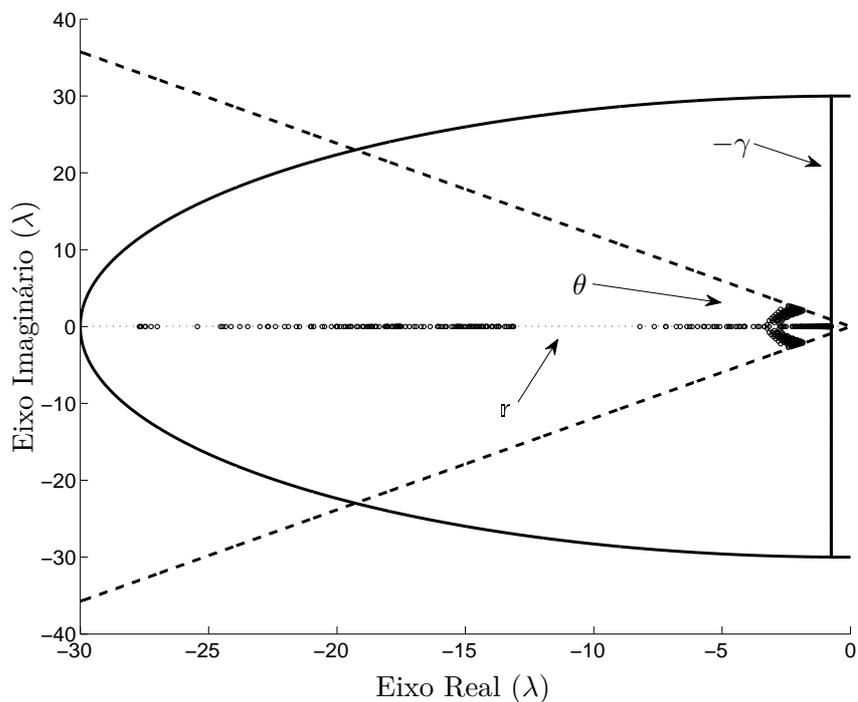
Figura 35 - Região de factibilidade, Lema 2.3 (\circ) e Teorema 9 (\times).



Fonte: Resultado do próprio autor

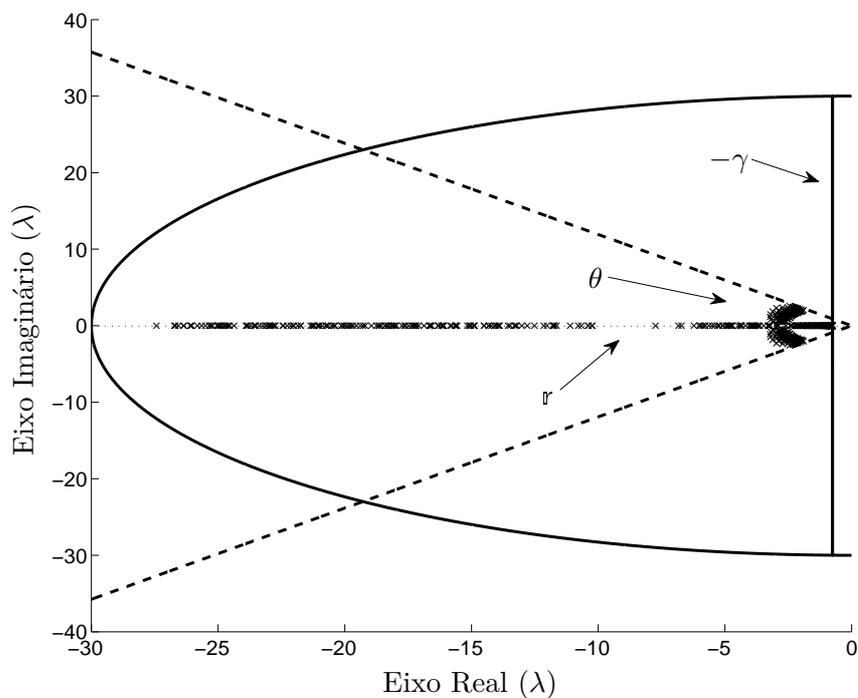
A Figura 36 mostra que todos os autovalores dos vértices do sistema incerto (106), controlado pelo Lema 2.3, pertencem a região $S(\gamma = 0,75, r = 30, \theta = 50^\circ)$. E, a Figura 37 mostra que todos os autovalores dos vértices do sistema incerto (106), controlado pelo Teorema 9, também pertencem a região $S(\gamma = 0,75, r = 30, \theta = 50^\circ)$.

Figura 36 - Localização dos autovalores do sistema (47) controlado com os ganhos obtidos pelo Lema 2.3, na região $S(0, 75, 30, 50^\circ)$ (o).



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 37 - Localização dos autovalores do sistema (47) controlado com os ganhos obtidos pelo Teorema 9, na região $S(0, 75, 30, 50^\circ)$ (x).



Fonte: Resultado do próprio autor

□

Na próxima seção são apresentadas condições que asseguram a alocação robusta de autovalores na região denominada $S(\gamma, \mathfrak{r})$. Apesar da região de alocação ser diferente da anterior, o posicionamento dos autovalores dentro dessa região também garante as especificações de projeto como, porcentagem de *overshoot* ($PO\%$), tempo de subida (t_s) e tempo de estabelecimento (t_e) (HADDAD; BERNSTEIN, 1992; NGUANG; SHI, 2006).

4.2 \mathcal{D} -estabilidade robusta na região $S(\gamma, \mathfrak{r})$

Utilizando o método direto de Lyapunov CQLF

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= x(t)^T P x(t) > 0, \quad P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{com} \\ \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0, \end{aligned} \quad (107)$$

foi verificado no trabalho de Haddad e Bernstein (1992) que existe uma relação entre a alocação de autovalores em uma certa região do semi-plano complexo negativo considerando a existência de $P = P^T > 0$ e satisfazendo a desigualdade

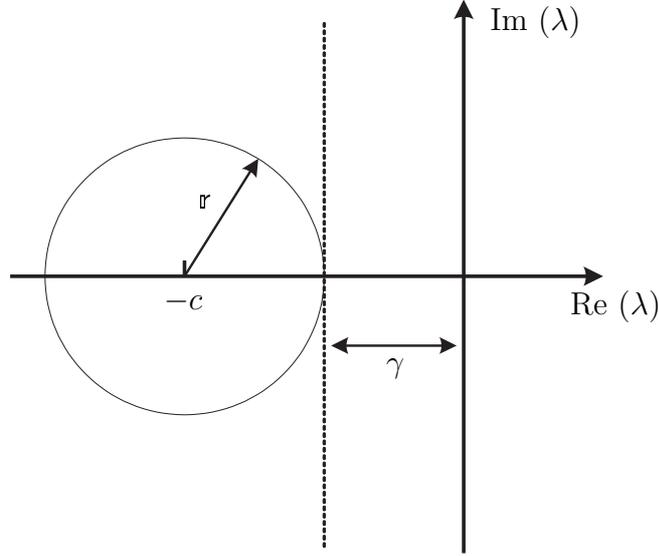
$$A^T P + P A + 2\gamma P + \frac{1}{\mathfrak{r}}(A + \gamma I)^T P (A + \gamma I) < 0, \quad (108)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz conhecida. A partir da factibilidade de (108), é possível assegurar que todos os autovalores (λ) de A pertencem a um disco de raio \mathfrak{r} e taxa de decaimento maior ou igual a γ , com centro em $(-c, 0)$ ($c = \gamma + \mathfrak{r}$).

Neste caso, a região de interesse para a alocação robusta é denominada $S(\gamma, \mathfrak{r})$ de números complexos $x + y\mathbf{j}$ que satisfazem:

$$S(\gamma, \mathfrak{r}) = \begin{cases} x < -\gamma < 0, & (a) \\ |(x + \mathfrak{r} + \gamma) + y\mathbf{j}| < \mathfrak{r}, & (b) \end{cases}$$

a restrição (a) representa um semi-plano à esquerda da reta vertical que passa pelo ponto $(-\gamma, 0)$, com $\gamma > 0$, e a restrição (b) representa um disco centrado em $(-c, 0)$ ($c = \gamma + \mathfrak{r}$) de raio \mathfrak{r} , com $\mathfrak{r} > 0$. A Figura 38 ilustra a região $S(\gamma, \mathfrak{r})$ de alocação de autovalores (λ).

Figura 38 - Região $S(\gamma, r)$ para alocação de autovalores.

Fonte: (LEITE; MONTAGNER; PERES, 2004)

Além de assegurar a estabilidade, o posicionamento adequado dos autovalores no interior do disco garante um limitante para a porcentagem de *overshoot*, para o tempo de subida e uma taxa de decaimento para o sistema em malha fechada.

Considerando A pertencente ao polítopo de vértices A_i , ou seja, $A_i, i = 1, 2, \dots, r$, uma condição suficiente para a alocação de autovalores na região da Figura 38 é alcançada aplicando-se o complemento de Schur em (108) (LEITE; MONTAGNER; PERES, 2004):

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + 2\gamma P & (A_i + \gamma I)^T P \\ P(A_i + \gamma I) & -rP \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i. \quad (109)$$

A partir dessa informação, pode-se formular uma condição suficiente para a \mathcal{D} -estabilização robusta dos autovalores de malha fechada do sistema (12) usando a realimentação derivativa. O Lema 4.2, apresentado a seguir, utiliza o método direto de Lyapunov (função CQLF) para a formulação LMIs.

Lema 4.2. *Suponha que as matrizes A_i não possuam autovalores nulos ($\det(A_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots, r$). Sejam $\gamma > 0$ e $r > 0$ números reais conhecidos, o sistema (12) é \mathcal{D} -estabilizável, com ganho $K_d = YQ^{-1}$, se existir uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$*

satisfazendo as LMIs (110).

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i^T + A_i Y^T B_j^T + B_j Y A_i^T & \bullet & \bullet \\ Q A_i^T + \gamma Q + \gamma Y^T B_j^T & -\mathfrak{r} Q & \bullet \\ Q + Y^T B_j^T & 0_{n \times n} & \frac{-Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (110)$$

$$Q > 0, \quad \forall i, j.$$

Prova: Substituindo $Y = K_d Q$ em (110), segue (111).

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i^T + A_i Q K_d^T B_j^T + B_j K_d Q A_i^T & \bullet & \bullet \\ Q A_i^T + \gamma Q + \gamma Q K_d^T B_j^T & -\mathfrak{r} Q & \bullet \\ Q + Q K_d^T B_j^T & 0_{n \times n} & \frac{-Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0. \quad (111)$$

Multiplicando (111) por $\alpha_i \alpha_j$ e somando em $i, j = 1, 2, \dots, r$, segue (112).

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) Q (I + B(\alpha) K_d)^T + (I + B(\alpha) K_d) Q A(\alpha)^T & \bullet & \bullet \\ \gamma Q (I + B(\alpha) K_d)^T + Q A(\alpha)^T & -\mathfrak{r} Q & \bullet \\ Q (I + B(\alpha) K_d)^T & 0_{n \times n} & \frac{-Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (112)$$

de $A(\alpha) Q (I + B(\alpha) K_d)^T + (I + B(\alpha) K_d) Q A(\alpha)^T < 0$ e segundo a Propriedade 2.1, conclui-se que $(I + B(\alpha) K_d)$ e $A(\alpha)$ são invertíveis (condições necessárias para a realimentação derivativa). Aplicando o complemento de Schur na desigualdade (112), segue (113).

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) Q (I + B(\alpha) K_d)^T + (I + B(\alpha) K_d) Q A(\alpha)^T + (I + B(\alpha) K_d) 2\gamma Q (I + B(\alpha) K_d)^T \\ \gamma Q (I + B(\alpha) K_d)^T + Q A(\alpha)^T \\ A(\alpha) Q + (I + B(\alpha) K_d) \gamma Q \\ -\mathfrak{r} Q \end{bmatrix} < 0. \quad (113)$$

Multiplicando (113) à esquerda por $\text{diag}\left(\left(I + B(\alpha) K_d\right)^{-1}, I\right)$ e à direita por $\text{diag}\left(\left(I + B(\alpha) K_d\right)^{-T}, I\right)$, segue (114).

$$\begin{bmatrix} (I + B(\alpha) K_d)^{-1} A(\alpha) Q + Q A(\alpha)^T (I + B(\alpha) K_d)^{-T} + 2\gamma Q \\ \gamma Q + Q A(\alpha)^T (I + B(\alpha) K_d)^{-T} \\ (I + B(\alpha) K_d)^{-1} A(\alpha) Q + \gamma Q \\ -\mathfrak{r} Q \end{bmatrix} < 0, \quad (114)$$

ou (115).

$$\begin{bmatrix} [(I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha)]Q + Q[(I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha)]^T + 2\gamma Q \\ Q[(I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha) + \gamma I]^T \\ [(I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha) + \gamma I]Q \\ -\mathfrak{r}Q \end{bmatrix} < 0. \quad (115)$$

Para facilitar a demonstração, considere $A_F = (I + B(\alpha)K_d)^{-1}A(\alpha)$. Reescrevendo (115), segue (116).

$$\begin{bmatrix} A_F Q + Q A_F^T + 2\gamma Q & (A_F + \gamma I)Q \\ Q(A_F + \gamma I)^T & -\mathfrak{r}Q \end{bmatrix} < 0. \quad (116)$$

Utilizando a forma dual $[(A_F + \gamma I)Q] \rightarrow [Q(A_F + \gamma I)^T]$ e considerando $Q = P^{-1}$, segue (117).

$$\begin{bmatrix} A_F P^{-1} + P^{-1} A_F^T + 2\gamma P^{-1} & P^{-1}(A_F + \gamma I)^T \\ (A_F + \gamma I)P^{-1} & -\mathfrak{r}P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (117)$$

Multiplicando (117) à esquerda e à direita por $\text{diag}(P, P)$, segue a desigualdade (118).

$$\begin{bmatrix} P A_F + A_F^T P + 2\gamma P & (A_F + \gamma I)^T P \\ P(A_F + \gamma I) & -\mathfrak{r}P \end{bmatrix} < 0, \xleftrightarrow{\text{Schur}} \quad (118)$$

$$P A_F + A_F^T P + 2\gamma P + \frac{1}{\mathfrak{r}}(A_F + \gamma I)^T P(A_F + \gamma I) < 0,$$

que, por sua vez, é correspondente à equação (109). Logo, condições suficientes para assegurar a \mathcal{D} -estabilidade do sistema incerto (12) com $(A, B)(\alpha) \in \mathcal{A}$ podem ser obtidas a partir da desigualdade (118). ■

As condições LMIs do Lema 4.2 são obtidas a partir de uma CQLF, no entanto, nem sempre é possível assegurar a estabilidade no contexto de sistemas incertos com esta classe de função. Com a finalidade de obter resultados menos conservadores, propõe-se o Teorema 10, sendo que uma PDLF é utilizada para garantir a estabilidade do politopo.

A ideia básica do processo consiste em avaliar a estabilidade do sistema (12) a partir da igualdade (52). Para a prova do Teorema 10 utiliza-se o Lema 3.2. O Lema 3.2 é utilizado para estudar a desigualdade (118), sem que haja uma multiplicação explícita entre as matrizes do sistema (52) com as matrizes P_i , $i = 1, 2, \dots, r$, da função de Lyapunov dependente de parâmetros.

A partir dessas informações, o Teorema 10 propõe condições suficientes para a \mathcal{D} -estabilização robusta do sistema (52) usando a realimentação derivativa. A região de alocação de autovalores é a mesma e pode ser vista na Figura 38.

Teorema 10. *Suponha que as matrizes A_i não possuam autovalores nulos ($\det(A_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$). Sejam $\gamma > 0$ e $\mathfrak{r} > 0$ números reais conhecidos, o sistema (52) é \mathcal{D} -estabilizável, com ganho $K_d = GL^{-T}$, se existirem matrizes simétricas $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs (119).*

$$\begin{bmatrix} \gamma Q_i(2\mathfrak{r} + \gamma) + A_i L^T + L A_i^T & Q_i(\mathfrak{r} + \gamma) - L^T - B_i G + L A_i^T \\ Q_i(\mathfrak{r} + \gamma) - L - G^T B_i^T + A_i L^T & Q_i - (L^T + L) - (B_i G + G^T B_i^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (119)$$

$$Q_i > 0, \quad \forall i.$$

Prova: Considerando as mudanças de variáveis $L = Z^{-1}$, $G = K_d Z^{-T}$ e $Q_i = Z^{-1} P_i Z^{-T}$ em (119), segue (120).

$$\begin{bmatrix} \gamma Z^{-1} P_i Z^{-T} (2\mathfrak{r} + \gamma) + A_i Z^{-T} + Z^{-1} A_i^T \\ Z^{-1} P_i Z^{-T} (\mathfrak{r} + \gamma) - Z^{-1} - Z^{-1} K_d^T B_i^T + A_i Z^{-T} \\ Z^{-1} P_i Z^{-T} (\mathfrak{r} + \gamma) - Z^{-T} - B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1} A_i^T \\ Z^{-1} P_i Z^{-T} - Z^{-T} - Z^{-1} - B_i K_d Z^{-T} - Z^{-1} K_d^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (120)$$

Multiplicando (120) à esquerda por $\text{diag}(Z, Z)$ e à direita por $\text{diag}(Z^T, Z^T)$, por α_i e somando em $i = 1, 2, \dots, r$, segue (121).

$$\begin{bmatrix} \gamma P(\alpha)(2\mathfrak{r} + \gamma) + Z A(\alpha) + A(\alpha)^T Z^T \\ P(\alpha)(\mathfrak{r} + \gamma) - Z^T - K_d^T B(\alpha)^T Z^T + Z A(\alpha) \\ P(\alpha)(\mathfrak{r} + \gamma) - Z - Z B(\alpha) K_d + A(\alpha)^T Z^T \\ P(\alpha) - Z - Z^T - Z B(\alpha) K_d - K_d^T B(\alpha)^T Z^T \end{bmatrix} < 0, \quad (121)$$

de $P(\alpha) - Z - Z^T - Z B(\alpha) K_d - K_d^T B(\alpha)^T Z^T < 0 \iff -P(\alpha) + Z(I + B(\alpha)K_d) + (I + B(\alpha)K_d)^T Z^T > 0$ e segundo a Propriedade 2.1, conclui-se que $Z(I + B(\alpha)K_d)$ é invertível, logo $(I + B(\alpha)K_d)$ e Z são invertíveis. Note que, (121) pode ser reescrita como

(122).

$$\begin{aligned} & \overbrace{\begin{bmatrix} \gamma P(\alpha)(2\mathfrak{r} + \gamma) & P(\alpha)(\mathfrak{r} + \gamma) \\ P(\alpha)(\mathfrak{r} + \gamma) & P(\alpha) \end{bmatrix}}^{\mathcal{D}(\alpha)} \\ & + \text{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} Z \\ Z \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) & -I - B(\alpha)K_d \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)} \right\} < 0. \end{aligned} \quad (122)$$

Para concluir a prova, utiliza-se a equivalência entre os itens (i) e (iv) do Lema 3.2. Observe que a igualdade (52) pode ser reescrita como (123).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) & -I - B(\alpha)K_d \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}}_{\mathcal{W}} = 0, \quad (123)$$

e a desigualdade (109), substituindo P por $P(\alpha)$, é equivalente a (124).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t)^T & \dot{x}(t)^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{W}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma P(\alpha)(2\mathfrak{r} + \gamma) & \bullet \\ P(\alpha)(\mathfrak{r} + \gamma) & P(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}}_{\mathcal{W}} < 0, \quad (124)$$

$$\begin{aligned} & \overset{\text{verificação}}{\Leftrightarrow} x(t)^T \gamma P(\alpha)(2\mathfrak{r} + \gamma)x(t) + \dot{x}(t)^T P(\alpha)(\mathfrak{r} + \gamma)x(t) \\ & + x(t)^T P(\alpha)(\mathfrak{r} + \gamma)\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P(\alpha)\dot{x}(t) < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow x(t)^T \gamma P(\alpha)(2\mathfrak{r} + \gamma)x(t) + x(t)^T A(\alpha)^T P(\alpha)(\mathfrak{r} + \gamma)x(t) \\ & + x(t)^T P(\alpha)(\mathfrak{r} + \gamma)A(\alpha)x(t) + x(t)^T A(\alpha)^T P(\alpha)A(\alpha)x(t) < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow 2\gamma\mathfrak{r}P(\alpha) + \gamma^2 P(\alpha) + \mathfrak{r}A(\alpha)^T P(\alpha) + \mathfrak{r}P(\alpha)A(\alpha) \\ & + \gamma A(\alpha)^T P(\alpha) + \gamma P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha)A(\alpha) < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow 2\gamma P(\alpha) + \frac{\gamma^2 P(\alpha)}{\mathfrak{r}} + A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \\ & + \frac{\gamma A(\alpha)^T P(\alpha)}{\mathfrak{r}} + \frac{\gamma P(\alpha)A(\alpha)}{\mathfrak{r}} + \frac{A(\alpha)^T P(\alpha)A(\alpha)}{\mathfrak{r}} < 0, \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + 2\gamma P(\alpha) + \frac{1}{\mathfrak{r}}(A(\alpha) + \gamma I)^T P(\alpha)(A(\alpha) + \gamma I) < 0,$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + 2\gamma P(\alpha) & \bullet \\ P(\alpha)(A(\alpha) + \gamma I) & -\mathfrak{r}P(\alpha) \end{bmatrix} < 0.$$

Ainda, assume-se a matriz variável adicional \mathcal{Q} como

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Z \\ Z \end{bmatrix}, \quad (125)$$

sendo $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular. \blacksquare

4.3 Resultados estendidos da \mathcal{D} -estabilidade robusta na região $S(\gamma, \mathfrak{r})$

De maneira análoga as estratégias apresentadas nas Seções 3.1.3 e 3.2.3, no próximo teorema um escalar $\kappa > 0$ é incorporado na formulação LMI. Como esperado pela teoria, com uma escolha adequada do escalar positivo κ , o Teorema 11 consegue, na maioria das vezes, suplantando os resultados apresentados pelo Lema 4.2 e Teorema 10 no contexto de condições de factibilidade.

Teorema 11. *Suponha que as matrizes A_i não possuam autovalores nulos ($\det(A_i) \neq 0, \forall i$). Sejam $\kappa > 0$, $\gamma > 0$ e $\mathfrak{r} > 0$ números reais conhecidos, o sistema (52) é \mathcal{D} -estabilizável, com ganho $K_d = GL^{-T}$, se existirem matrizes simétricas $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs (126).*

$$\begin{bmatrix} \gamma Q_i(2\mathfrak{r} + \gamma) + A_i L^T + L A_i^T & Q_i(\mathfrak{r} + \gamma) - L^T - B_i G + \kappa L A_i^T \\ Q_i(\mathfrak{r} + \gamma) - L - G^T B_i^T + \kappa A_i L^T & Q_i - \kappa(L^T + L) - \kappa(B_i G + G^T B_i^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (126)$$

$$Q_i > 0, \quad \forall i.$$

Prova: A demonstração segue passos similares aos da demonstração do Teorema 10, considerando a matriz variável adicional (125) como

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Z \\ \kappa Z \end{bmatrix}, \quad (127)$$

sendo $\kappa > 0$ um escalar arbitrário e $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular. Esta escolha não introduz conservadorismo nas LMIs (PIPELEERS et al., 2009). \blacksquare

Nota 6. O escalar $\kappa > 0$ pode ser obtido por meio de uma busca unidimensional.

A eficiência das metodologias propostas é ilustrada na solução dos exemplos numéricos a seguir.

Exemplo 4.3.1: Sistema de suspensão ativa

Considere os mesmos parâmetros e condições apresentadas no Exemplo 4.1.1. O projeto visa a \mathcal{D} -estabilização dos autovalores do sistema em malha fechada no interior do disco de raio $r = 2$ e taxa de decaimento $\gamma = 1$ ($c = \gamma + r = 3$).

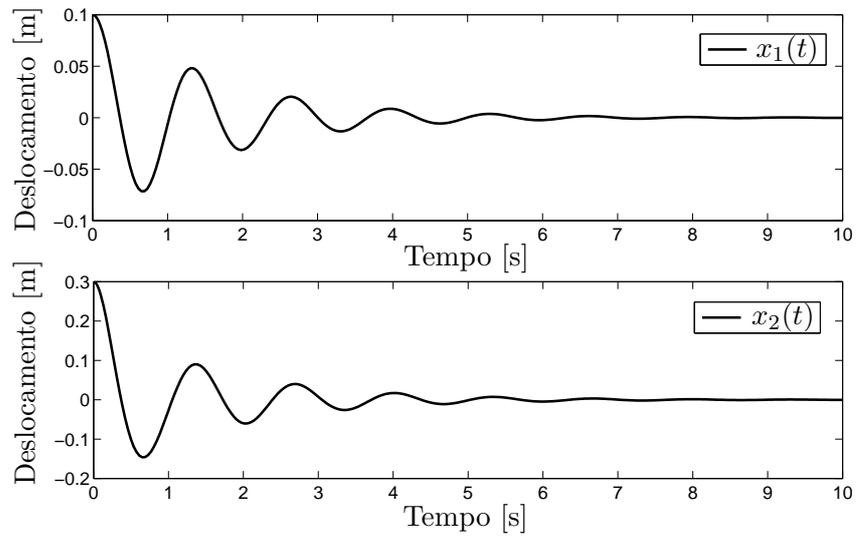
Utilizando o Lema 4.2, o seguinte ganho robusto foi obtido

$$\begin{aligned}
 K_{d1} = YQ^{-1} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 3,1922 & 2,9176 & -8,3603 & -6,8607 \\ 0,0470 & 0,1417 & -0,1437 & -0,4225 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} 99,3613 & -79,1271 & 22,1855 & -17,3423 \\ -79,1271 & 78,8551 & -17,5702 & 17,8409 \\ 22,1855 & -17,5702 & 5,6554 & -4,3168 \\ -17,3423 & 17,8409 & -4,3168 & 4,6786 \end{bmatrix}, \quad (128) \\
 K_{d1} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,9826 & 0,1966 & 0,1894 & 0,0684 \\ -0,2404 & 0,2443 & -0,0436 & 0,0357 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

e, considerando o Teorema 11, com $\kappa = 0,5$, obteve-se

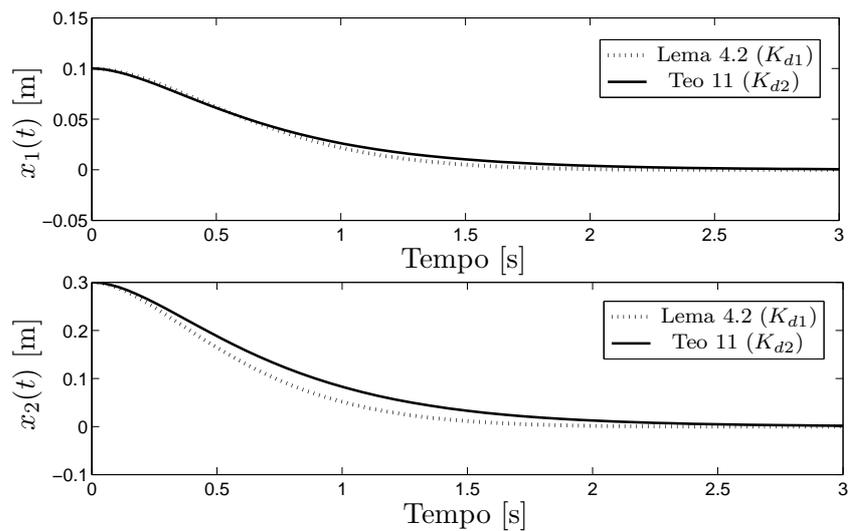
$$\begin{aligned}
 K_{d2} = GL^{-T} &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,1686 & 0,1810 & 1,5032 & 0,3033 \\ 0,0016 & 0,0070 & -0,0099 & 0,0871 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} -1,5537 & 0,9103 & -1,5039 & 0,9751 \\ 1,1882 & -1,0801 & 1,0447 & -1,0034 \\ 0,3206 & -0,0694 & 0,0971 & -0,0172 \\ -0,4274 & 0,4613 & -0,1252 & 0,1308 \end{bmatrix}, \quad (129) \\
 K_{d2} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 3,0540 & -0,0644 & 0,4356 & -0,0337 \\ -0,3451 & 0,3473 & -0,0691 & 0,0606 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Para a condição inicial de simulação $x(0) = [0, 1 \ 0, 3 \ 0 \ 0]^T$ com $m_s = 120\text{kg}$ (motorista (100kg) + assento (20kg)), o comportamento dinâmico do sistema (47), sem ação de controle ($u(t) = 0$), pode ser visto na Figura 39. Pela figura, o sistema é naturalmente estável, porém, apresenta oscilações pouco amortecidas, gerando desconforto e também risco de acidente ao motorista.

Figura 39 - Simulação do sistema (47) com $u(t) = 0$.

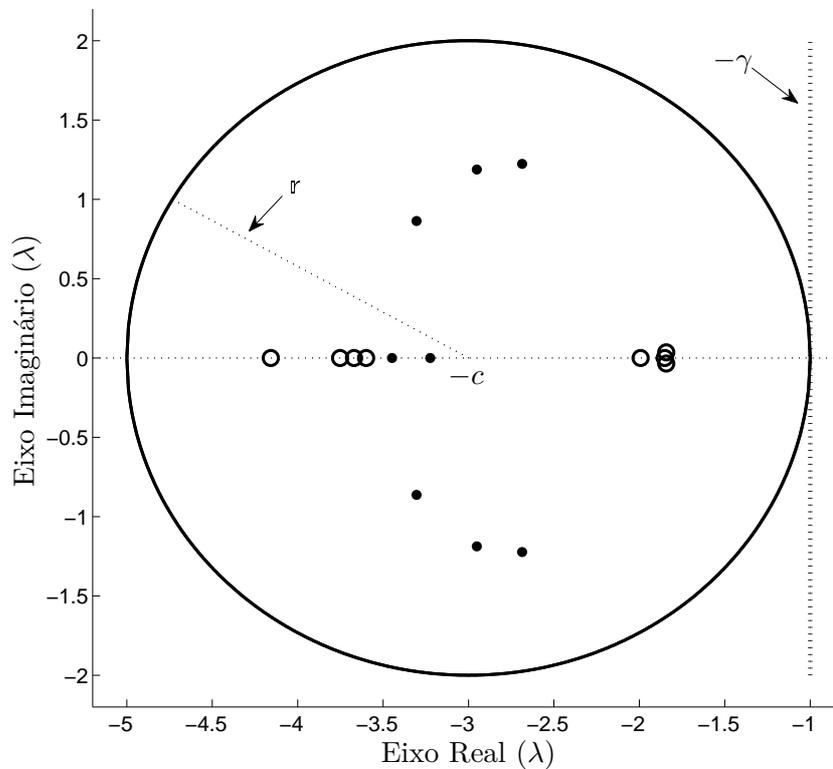
Fonte: Resultado do próprio autor

No entanto, ao considerar o ganho K_{d1} ou o ganho K_{d2} na entrada de controle (11), o sistema passa a apresentar uma resposta com um período transitório mais curto e mais amortecido (veja Figura 40). A Figura 41 exibe a localização dos autovalores dos vértices do sistema (47) realimentado com o ganho K_{d1} ou K_{d2} .

Figura 40 - Respostas transitórias com K_{d1} e K_{d2} .

Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 41 - Localização dos autovalores dos vértices do sistema (47), realimentado com K_{d1} (●) e K_{d2} (○).



Fonte: Resultado do próprio autor

Neste exemplo e pela Figura 40, observe que o ganho K_{d1} , projetado com o Lema 4.2, obteve um desempenho ligeiramente melhor do que o ganho K_{d2} , projetado pelo Teorema 11. Como já mencionado anteriormente, não existem garantias teóricas sobre a atuação do parâmetro de ajuste κ na resposta transitória do sistema em malha fechada. O que pode-se constatar é que existem sistemas que podem ser \mathcal{D} -estabilizados com o Teorema 11 e não podem ser com o Lema 4.2. O contrário também é verdade, isto é, existem alguns casos que o Lema 4.2 encontra uma solução factível e o Teorema 11 não. Porém, este evento ocorre na minoria das vezes. A seguir, é exibido este fato. E, no Exemplo 4.3.2, é revelado que usando o Teorema 11 é possível assegurar a \mathcal{D} -estabilidade para uma maior quantidade de sistemas incertos.

Primeiro caso:

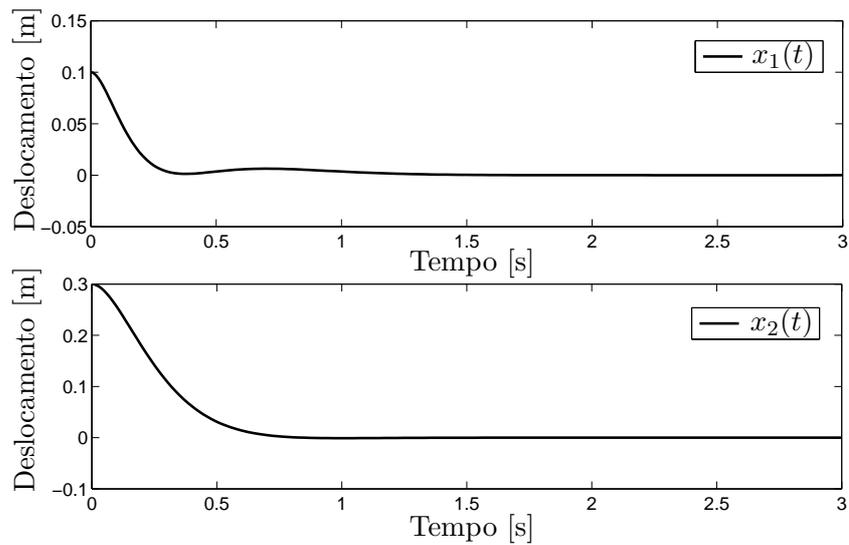
Por exemplo, se o projeto tiver como meta o disco com raio $r = 7$ e taxa de decaimento $\gamma = 5$ ($c = 12$), o Lema 4.2 mostra-se infactível, entretanto, o Teorema 11, com $\kappa = 0,19$,

consegue um ganho robusto dado por

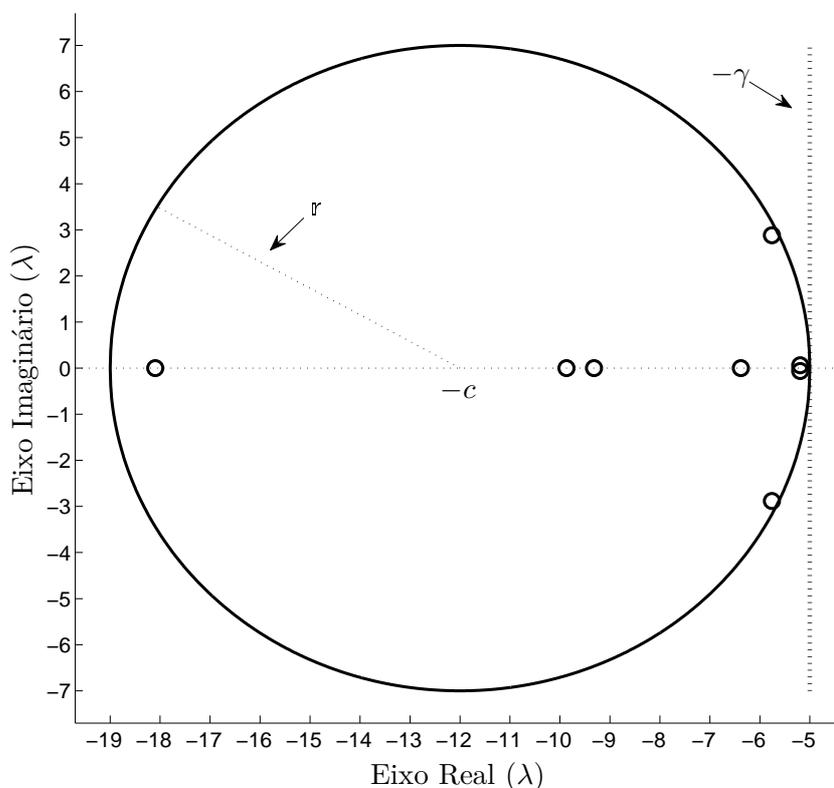
$$\begin{aligned}
 K_{d3} = GL^{-T} &= 10^6 \times \begin{bmatrix} 0,7051 & 0,0062 & 1,0615 & -0,1919 \\ 0,0061 & 0,0000 & 0,0011 & 0,0135 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} -0,4410 & -1,1459 & -0,0383 & -0,0745 \\ 0,5741 & -1,2301 & 0,0511 & -0,2425 \\ 0,3171 & 0,8620 & 0,0259 & 0,0565 \\ 0,1059 & 0,5245 & 0,0084 & 0,0343 \end{bmatrix}, \quad (130) \\
 K_{d3} &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 8,8919 & -1,3310 & -0,7993 & -0,6519 \\ -0,8935 & 1,0135 & -0,0904 & 0,0644 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Note pela Figura 42 que o ganho K_{d3} possibilita um tempo de acomodação mais rápido comparado com as respostas da Figura 40. A Figura 43 exibe a localização dos autovalores em malha fechada considerando o sistema realimentado com o ganho K_{d3} .

Figura 42 - Resposta transitória com K_{d3} .



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 43 - Localização dos autovalores dos vértices do sistema (47), realimentado com K_{d3} (\circ).

Fonte: Resultado do próprio autor

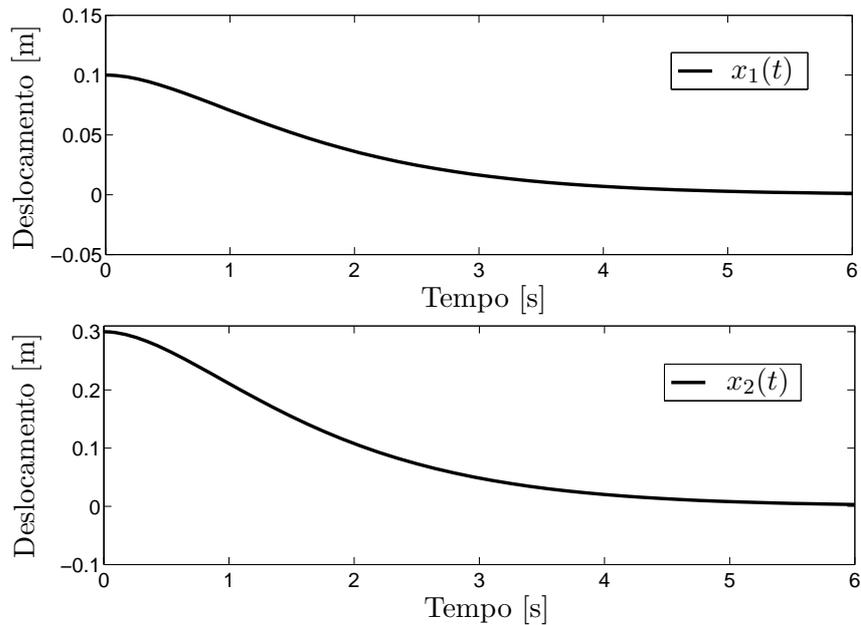
Segundo caso:

Por exemplo, se o projeto tiver como meta o disco com raio $r = 0,1$ e taxa de decaimento $\gamma = 1$ ($c = 1,1$), o Teorema 11 mostra-se infactível, a busca unidimensional ocorreu considerando $\kappa \in [0,1 \ 100]$, com espaçamento 0,1. Entretanto, o Lema 4.2 projeta um ganho robusto dado por

$$\begin{aligned}
 K_{d4} = YQ^{-1} &= \begin{bmatrix} 79,4906 & 55,4456 & -87,1632 & -60,0208 \\ -2,5852 & 6,7474 & 2,9602 & -7,2081 \end{bmatrix} \\
 &\times 10^5 \times \begin{bmatrix} 1,0019 & -0,4516 & 0,8955 & -0,4024 \\ -0,4516 & 0,6356 & -0,4058 & 0,5784 \\ 0,8955 & -0,4058 & 0,8059 & -0,3644 \\ -0,4024 & 0,5784 & -0,3644 & 0,5304 \end{bmatrix}, \quad (131) \\
 K_{d4} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 7,0232 & 0,0493 & 3,1104 & 0,0354 \\ -0,8565 & 0,8616 & -0,4109 & 0,4060 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

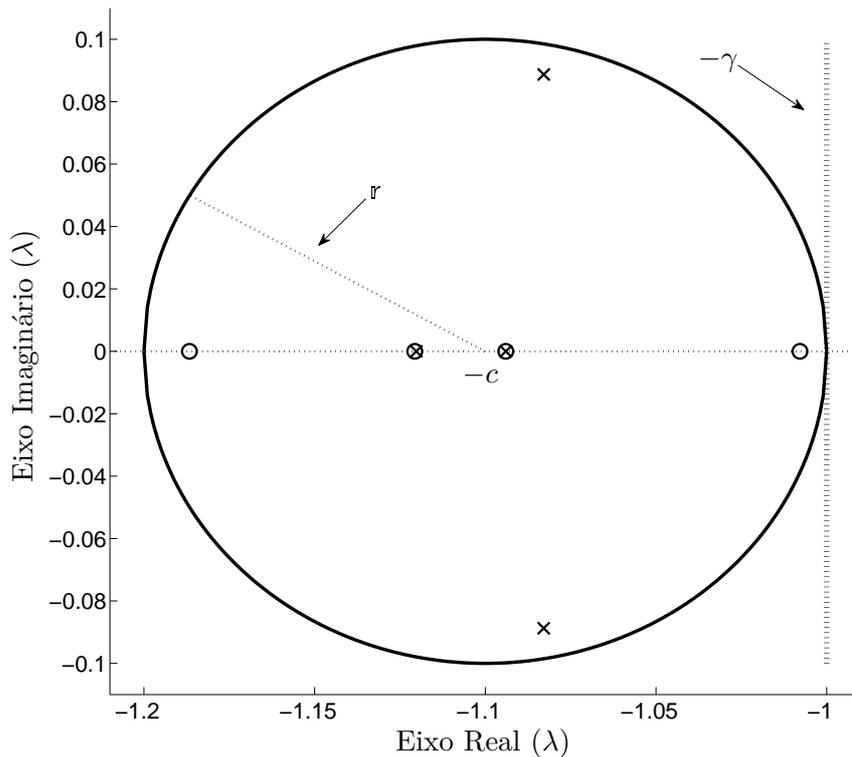
A resposta transitória em malha fechada com o ganho K_{d4} pode ser vista na Figura 44. A Figura 45 exibe a localização dos autovalores dos vértices do sistema (47) controlado com o ganho K_{d4} .

Figura 44 - Resposta transitória com K_{d4} .



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 45 - Localização dos autovalores dos vértices do sistema (47), realimentado com K_{d4} (\circ e \times).



Fonte: Resultado do próprio autor

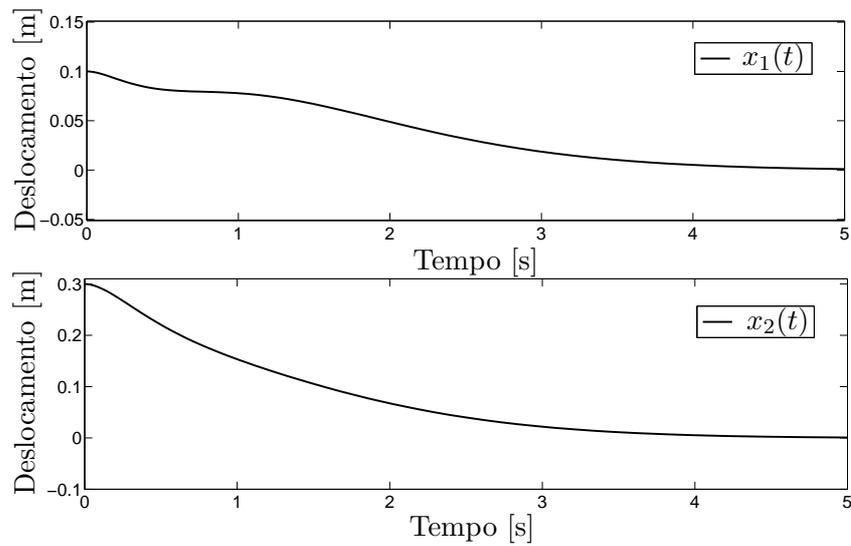
Levando em conta as especificações de projeto consideradas neste exemplo, não foi possível encontrar um ganho \mathcal{D} -estabilizante utilizando as LMIs (119) do Teorema 10. Após exaustivos testes computacionais, só foi possível encontrar os ganhos \mathcal{D} -estabilizantes utilizando valores de $\gamma \leq 0,99$. Porém, como foi visto neste exemplo, essa questão é solucionada com a utilização do Teorema 11, ou seja, com uma busca unidimensional em κ .

Esse fato também acontece com as LMIs do Teorema 6 e foi relatado na Nota 4 do Exemplo 3.2.1. Está claro que, quando utilizado o Lema 3.2 (Lema de Finsler) sem a inserção do parâmetro de ajuste κ , as formulações LMIs com a inclusão do índice de desempenho de taxa de decaimento somente sintetiza controladores quando $\gamma \leq 0,99$.

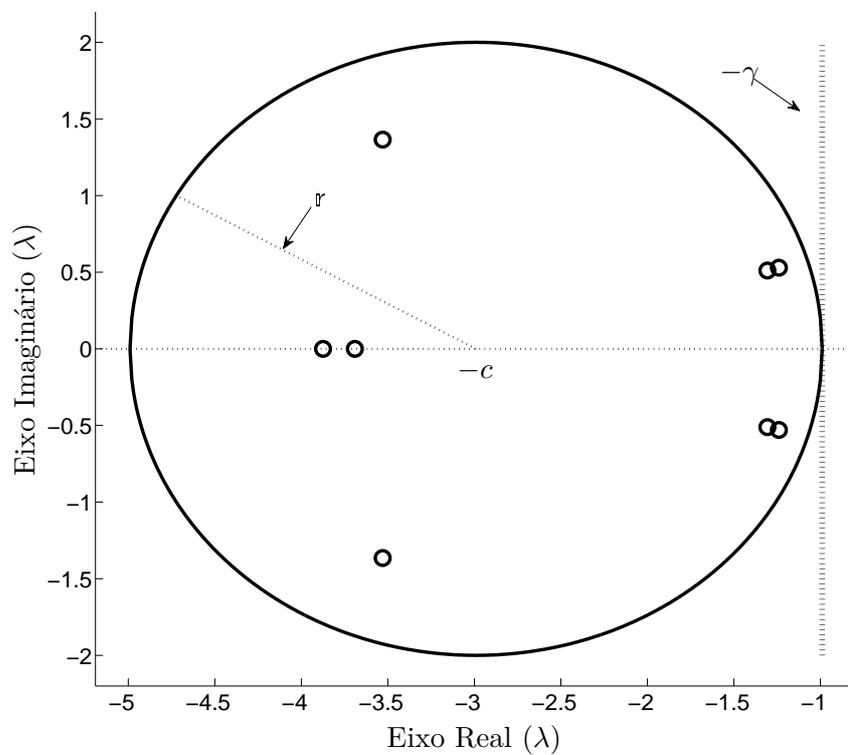
A título de ilustração e repetindo o exemplo com $r = 2$, mas considerando $\gamma = 0,99$, o Teorema 10 foi resolvido e o seguinte ganho robusto foi obtido:

$$\begin{aligned}
 K_{d5} = GL^{-T} &= 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,1063 & 0,1416 & 1,3221 & 1,1485 \\ 0,0054 & 0,0070 & -0,0072 & 0,0436 \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} -21,9115 & 18,4853 & -9,5917 & 7,9159 \\ 15,3002 & -14,0039 & 7,0853 & -6,2083 \\ 0,8366 & -0,6003 & 0,2037 & -0,1479 \\ -0,7294 & 0,8987 & -0,1426 & 0,1839 \end{bmatrix}, \quad (132) \\
 K_{d5} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,0527 & 2,2082 & 0,8910 & -0,2181 \\ -0,4821 & 0,4458 & -0,0951 & 0,0806 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

A resposta transitória do sistema em malha fechada considerando o ganho K_{d5} pode ser vista na Figura 46. A Figura 47 exhibe a localização dos autovalores dos vértices do sistema (47) realimentado com o ganho K_{d5} .

Figura 46 - Resposta transitória com K_{d5} .

Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 47 - Localização dos autovalores dos vértices do sistema (47), realimentado com K_{d5} (\circ).

Fonte: Resultado do próprio autor

Vale salientar que as metodologias apresentadas podem ser aplicadas em sistemas

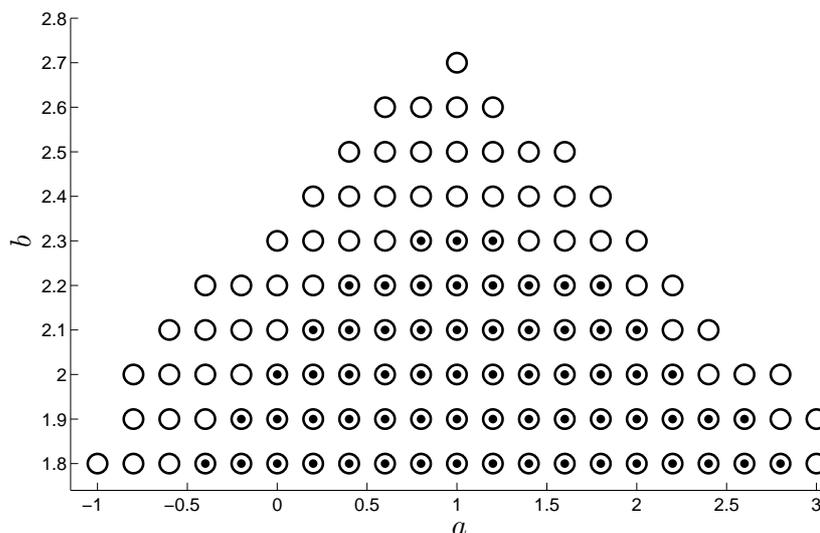
politópicos sujeitos a falhas estruturais, simulações digitais considerando falhas no modelo dinâmico podem ser vistas, por exemplo, nas obras de Faria et al. (2009, 2010) e Silva et al. (2011a). \square

Exemplo 4.3.2: Sistema linear incerto

O sistema incerto 106, do Exemplo 4.1.2, é retomado para a comparação em questão.

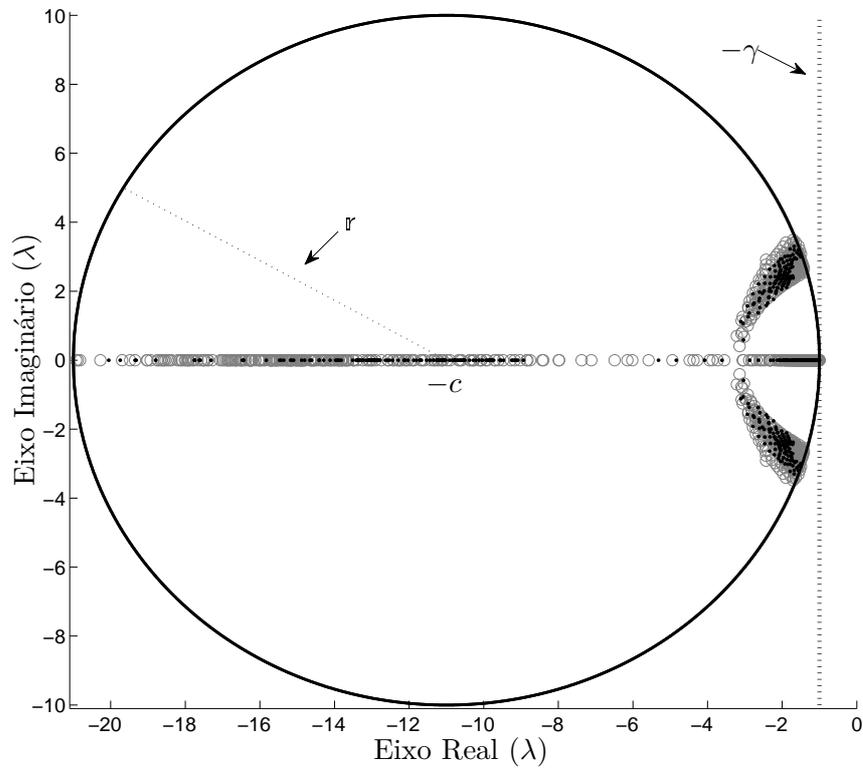
Considerando uma malha uniforme $a \in [-1 \ 3]$, com espaçamento 0,2 e $b \in [1,8 \ 2,8]$, com espaçamento 0,1, o Lema 4.2 e o Teorema 11 são utilizados para garantir a \mathcal{D} -estabilidade do sistema (106). Para o projeto assume-se $r = 10$ e $\gamma = 1$ ($c = 11$). A Figura 48 exibe os pontos da região de análise onde foi possível encontrar os ganhos \mathcal{D} -estabilizantes para o sistema (106). Pela Figura 48, observe que a região de factibilidade do Teorema 11 é maior que a região do Lema 4.2. Logo, as condições de \mathcal{D} -estabilidade do Teorema 11 levam a resultados menos conservadores. A Figura 49 exibe a localização dos autovalores dos vértices do sistema (106) para cada par (a, b) da região de análise. Observe pela Figura 49 que todos os autovalores dos vértices do sistema (106) encontram-se dentro do círculo estipulado em projeto, utilizando o Lema 4.2 ou o Teorema 11. A Nota 2 apresentada no Exemplo 3.1.2, substituindo φ por κ , é válida para as soluções numéricas a seguir.

Figura 48 - Região de factibilidade, Lema 4.2 (\bullet) e Teorema 11 (\circ) com $\kappa = 0,28$.



Fonte: Resultado do próprio autor

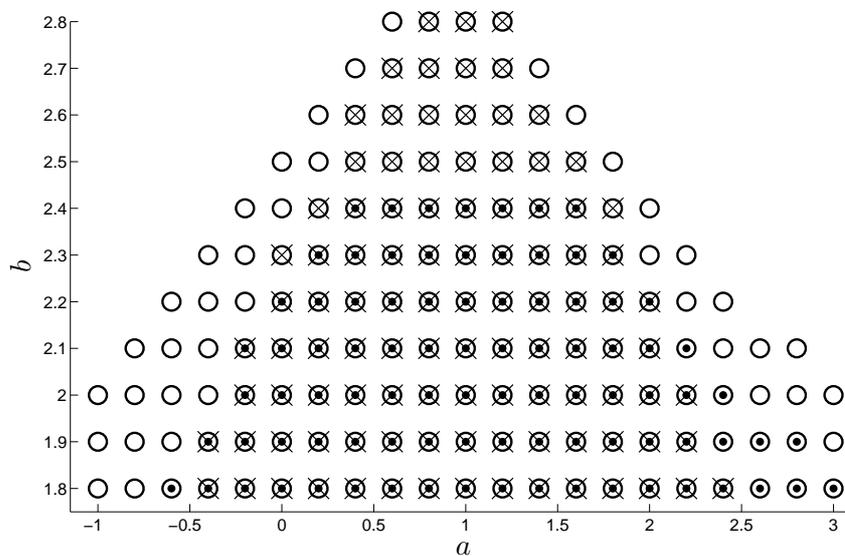
Figura 49 - Localização dos autovalores dos vértices do sistema (106), realimentado com os ganhos obtidos pelo Lema 4.2 (\cdot) e pelo Teorema 11 (\circ).



Fonte: Resultado do próprio autor

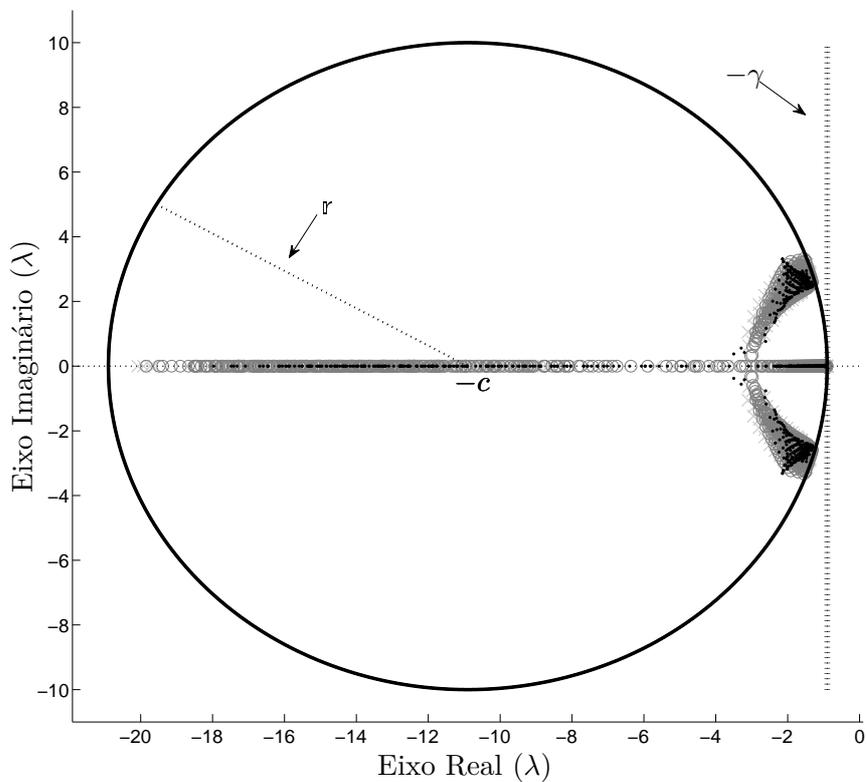
Para o valor de $\gamma = 1$, determinado em projeto, não foi possível projetar nenhum ganho \mathcal{D} -estabilizante utilizando o Teorema 10. Com a intenção de uma comparação imparcial entre o Lema 4.2, e os Teorema 10 e 11, considera-se o mesmo exemplo, mas com uma taxa de decaimento $\gamma = 0,90$, visto que, o Teorema 10 só retorna soluções factíveis para $\gamma \leq 0,99$. A comparação é exibida na Figura 50 e mostra o sucesso de cada técnica. Observe que o Teorema 11 consegue determinar uma maior quantidade de controladores em relação as outras duas técnicas. Contudo, como verificado no Exemplo 4.3.1, pode acontecer, na minoria das vezes, o projeto com o Lema 4.2 e não com os Teoremas 10 e 11. A Figura 51 mostra a nuvem de autovalores para cada par do conjunto (a, b) considerando as três técnicas envolvidas na comparação.

Figura 50 - Região de factibilidade, Lema 4.2 (\bullet), Teorema 10 (\times) e Teorema 11 (\circ) com $\kappa = 0,28$.



Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 51 - Localização dos autovalores dos vértices do sistema (106), realimentado com os ganhos obtidos pelo Lema 4.2 (\cdot), pelo Teorema 10 (\times) e pelo Teorema 11 (\circ).



Fonte: Resultado do próprio autor

□

4.3.1 Conclusões parciais

Esta seção apresentou condições suficientes baseadas em LMIs adequadas para o projeto de controladores robustos objetivando \mathcal{D} -estabilizar sistemas lineares incertos contínuos no tempo. As condições de \mathcal{D} -estabilidade foram obtidas a partir de uma PDLF, através da utilização do lema de Finsler na modelagem LMIs. As metodologias apresentadas desassocia as matrizes do sistema (A_i, B_i) das matrizes da função de Lyapunov (Q_i) , permitindo, na maioria dos casos, uma melhoria na solução numérica dos problemas. A comprovação da eficiência dos métodos foi verificada através de exemplos numéricos. Primeiro, utilizou-se o Teorema 9 para garantir a \mathcal{D} -estabilidade, na região $S(\gamma, \mathfrak{r}, \theta)$, de um sistema de suspensão ativa de um veículo e, observando os resultados, verificou-se um bom desempenho do controlador projetado. Entretanto, não foi possível obter sucesso para projetos que necessitam de uma taxa de decaimento com $\gamma > 0,99$. Em seguida, um estudo comparativo foi realizado entre o Teorema 9 e a metodologia apresentada em Faria et al. (2009). Para as condições apresentadas e a região estabelecida em projeto, com o Teorema 9 foi possível \mathcal{D} -estabilizar uma maior quantidade de sistemas incertos comparado com Faria et al. (2009). Contudo, não existem garantias que o Teorema 9 sempre terá mais sucesso que o teorema apresentado por Faria et al. (2009), pois, existem infinitas possibilidades de escolha da região $S(\gamma, \mathfrak{r}, \theta)$ para efetuar uma comparação, ainda, sabe-se que o Teorema 9 não é factível para $\gamma > 0,99$.

Posteriormente, o Lema 4.2 e os Teoremas 10 e 11 foram utilizados para garantir a \mathcal{D} -estabilidade do sistema de suspensão ativa, agora considerando a região $S(\gamma, \mathfrak{r})$ para os projetos. Os resultados ilustram um bom desempenho dos controladores projetados pelas técnicas propostas. Porém, foi visto que, dependendo da região $S(\gamma, \mathfrak{r})$ escolhida para o projeto, somente o Teorema 11 é bem sucedido, em outros casos, somente o Lema 4.2 obtém sucesso. Além disso, com o Teorema 10, não foi possível realizar projetos que exigem uma taxa de decaimento considerando $\gamma > 0,99$. No entanto, esta questão é solucionada com o Teorema 11, realizando uma busca unidimensional em $\kappa > 0$. No outro exemplo, uma comparação numérica envolvendo as técnicas foi efetuada e, com uma busca no parâmetro de ajuste $\kappa > 0$, foi possível assegurar a \mathcal{D} -estabilidade para uma maior quantidade de sistema incertos considerando o Teorema 11. Embora nesse exemplo o Teorema 11 conseguiu suplantear os resultados do Lema 4.2 e do Teoremas 10, não é possível garantir que isso ocorrerá sempre.

5 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA: SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA QUANSER[®]

Considere o sistema de suspensão ativa de um veículo, fabricado pela Quanser[®], mostrado na Figura 52 (QUANSER, 2009). Seu modelo esquemático está representado na Figura 53. O sistema consiste de um conjunto composto por duas massas, denominadas M_s e M_{us} . A massa M_s representa $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo e é suportada pela mola k_s e pelo amortecedor b_s . A massa M_{us} corresponde a massa do conjunto do pneu do veículo e é suportada pela mola k_{us} e pelo amortecedor b_{us} . Para diminuir as vibrações causadas por irregularidades na pista utiliza-se o sistema de suspensão ativa, representado por um motor (atuador) conectado entre as massas M_s e M_{us} , e controlado pela força F_c .

Originalmente, o sistema de suspensão ativa Quanser[®] (Figura 52) não possui o acelerômetro para a medida de $\ddot{z}_{us}(t)$. Para a implementação da realimentação derivativa foi solicitado ao fabricante o acréscimo do acelerômetro ao sistema.

O modelo dinâmico (QUANSER, 2009) pode ser representado pelo sistema incerto (8), considerando (133).

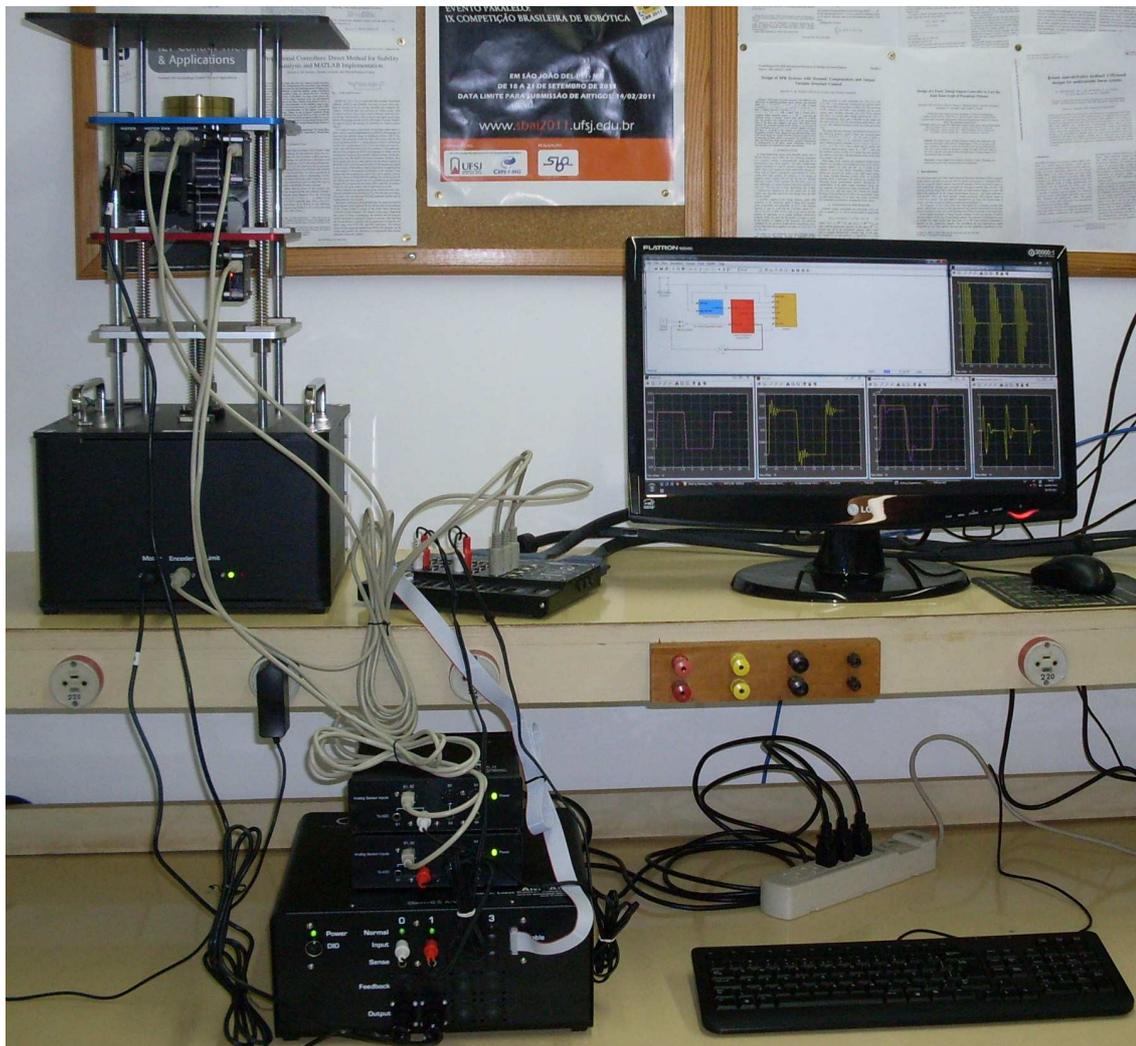
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{(b_s + b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_s} \\ -1 & 0 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} & -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t), \quad (133)$$

com

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_r(t) \\ F_c \end{bmatrix}.$$

Os valores das constantes podem ser encontrados na Tabela 6.

Figura 52 - Sistema de suspensão ativa Quanser® pertencente ao LPC-FEIS-UNESP.



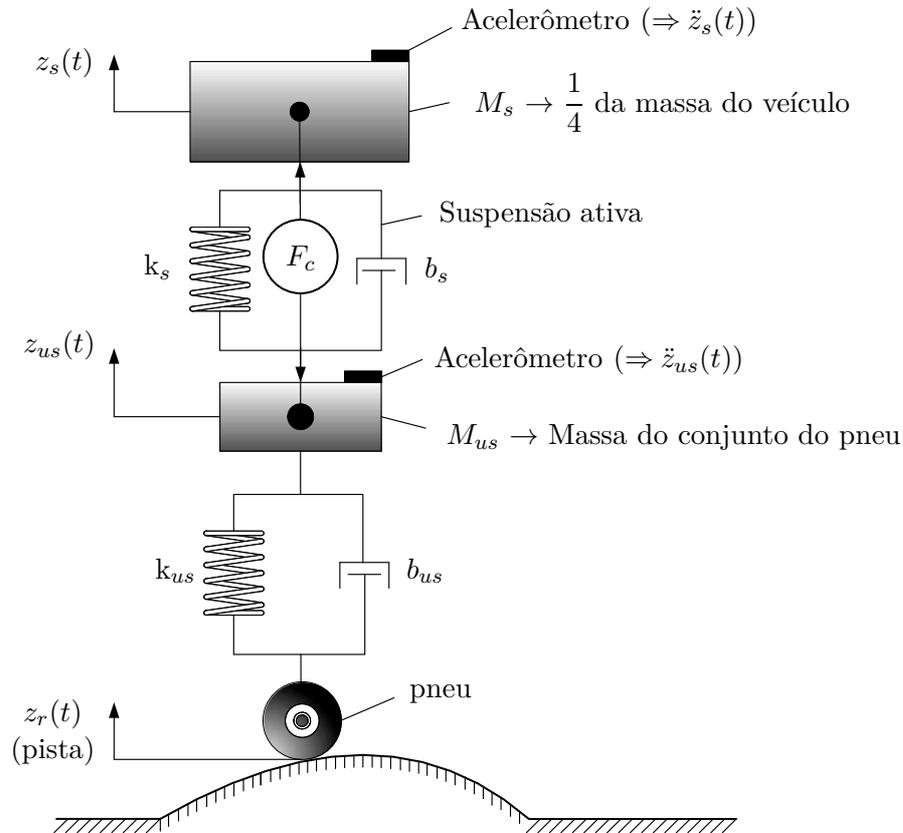
Fonte: Elaboração do próprio autor

Tabela 6 - Parâmetros do sistema de suspensão ativa Quanser®.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa de $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo (kg)	M_s	2,45
Massa do conjunto do pneu (kg)	M_{us}	1
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_s	900
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_{us}	2500
Coefficiente de amortecimento (Ns/m)	b_s	7,5
Coefficiente de amortecimento (Ns/m)	b_{us}	5

Fonte: (QUANSER, 2009)

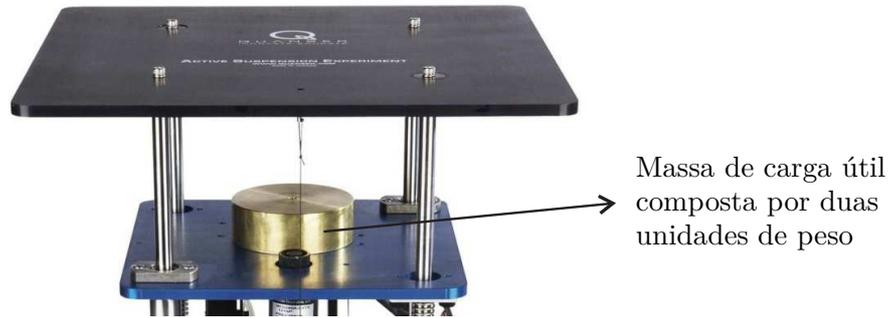
Figura 53 - Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.



Fonte: Elaboração do próprio autor

No modelo físico do sistema de suspensão ativa existe uma massa de carga útil removível, constituída por duas unidades de peso idênticas, compondo a massa M_s . Cada unidade pesa 0,4975kg, de tal forma que a massa total corresponde aos 2,45kg informado na tabela acima. Logo, a massa M_s pode assumir valores entre 1,455kg (sem as duas unidades de peso) e 2,45kg (com as duas unidades de peso). Sendo assim, a massa M_s pode ser incerta e pertencer ao intervalo $1,455 \leq M_s \leq 2,45(\text{kg})$. Para uma melhor visualização um *zoom* foi aplicado na Figura 52 para destacar a massa de carga útil, veja a Figura 54.

Figura 54 - Ampliação visual para destacar a massa de carga útil.



Fonte: Elaboração do próprio autor

Observe que a representação em espaço de estados do sistema (133) possui duas entradas de controle, isto é, uma controla a velocidade da superfície da pista (\dot{z}_r) e a outra controla a força (F_c) aplicada no motor que atua na suspensão ativa. Neste exemplo, o procedimento para estabilizar o sistema consiste em determinar um ganho robusto de realimentação derivativa ($K_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$) que atue somente na entrada de controle F_c , ou seja, $F_c = -K_d \dot{x}(t)$.

A partir dessas informações, são obtidos os seguintes vértices do polítopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,35 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,40816 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

com $M_s = 2,45\text{kg}$ em A_1 e B_1 (com a carga útil),

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,56 & -5,1546 & 0 & 5,1546 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,68729 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

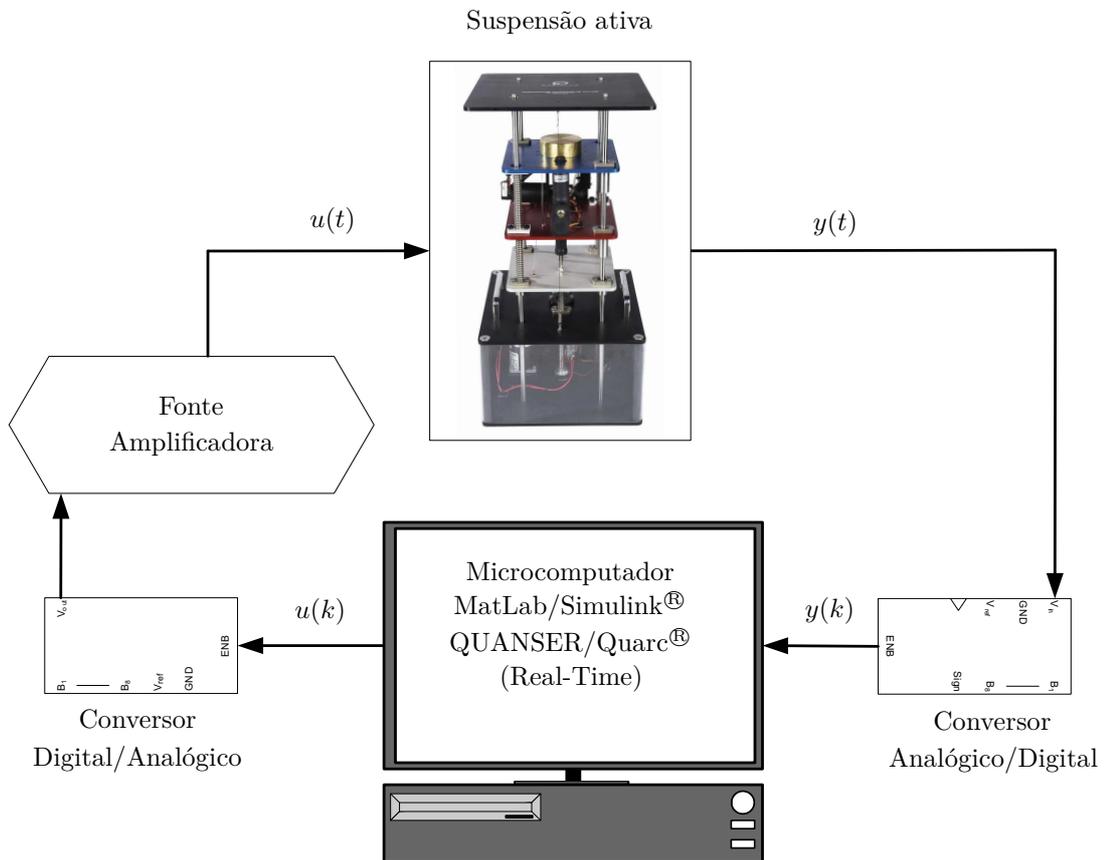
com $M_s = 1,455\text{kg}$ em A_2 e B_2 (sem a carga útil).

Após alguns testes nos teoremas propostos neste trabalho, escolheu-se o Teorema 8 para o projeto do controlador robusto. Utilizando as LMIs (70) com $\kappa = 0,1$ e $\gamma = 5$, obteve-se o ganho (134) a partir de (71).

$$\begin{aligned}
 K_d = GY^{-T} &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,1007 & 1,0567 & -0,0493 & -2,1450 \\ -0,1466 & -0,0152 & 0,4689 & -0,0040 \\ 0,0055 & 0,0001 & 0,0135 & 0,0001 \\ -0,2133 & -0,0217 & 0,6024 & -0,0075 \\ -0,0045 & -0,0003 & 0,0191 & -0,0000 \end{bmatrix}, \\
 K_d &= \begin{bmatrix} 112,0823 & 2,5380 & -92,8594 & 0,9787 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{134}$$

A Figura 55 representa o diagrama de controle utilizado para a implementação do controlador.

Figura 55 - Diagrama utilizado para a implementação prática.



Fonte: Elaboração do próprio autor

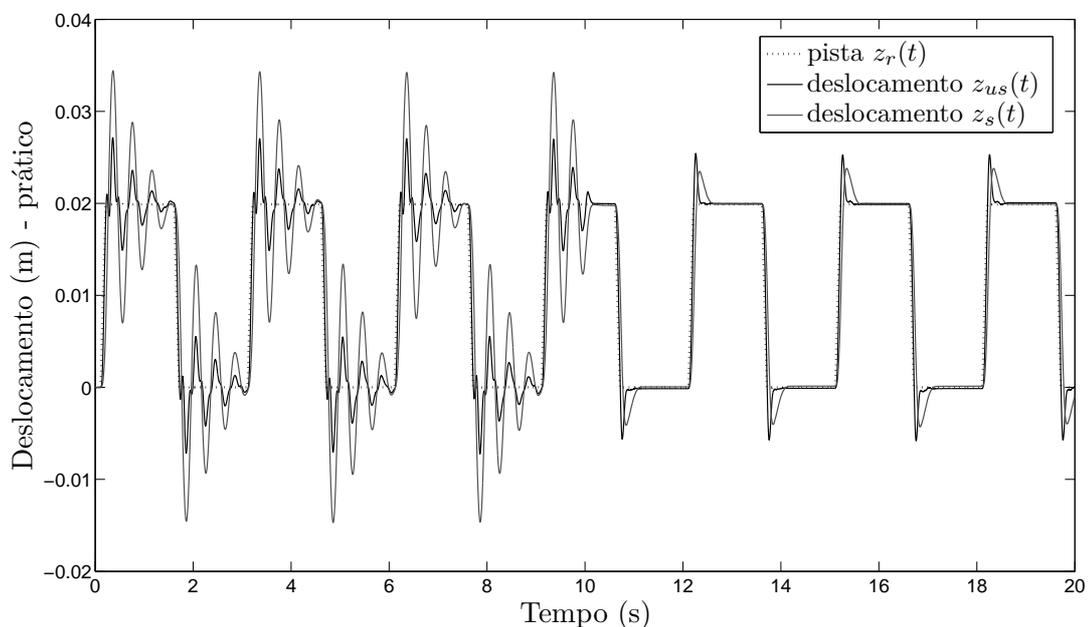
Nota 7. *Devido a recente aquisição do equipamento, para viabilizar a implementação prática, optou-se em utilizar os sinais da aceleração e velocidade já disponíveis pelo fabricante. A obtenção da velocidade a partir da aceleração será feita em trabalhos futuros.*

O objetivo da implementação prática consiste em atenuar, através do sistema de

suspensão ativa, as oscilações causadas pela superfície da pista de rodagem ($z_r(t)$). A referência $z_r(t)$ foi escolhida para produzir um sinal de onda quadrada, de amplitude 0,02m, frequência de $\frac{1}{3}$ Hz com largura de pulso de 50%. Ainda, adotou-se 1ms de período de amostragem. Foram realizadas três implementações práticas e para título de comparação foram geradas as respectivas simulações através do *software* MatLab/Simulink®. Para todos os casos foram geradas respostas de 20 segundos, sendo que, no intervalo de 0 a 9,99 segundos o sistema encontra-se em malha aberta, e em 10 segundos o sinal de controle com realimentação derivativa $F_c = -K_d\dot{x}(t)$ passa a atuar no sistema em malha fechada.

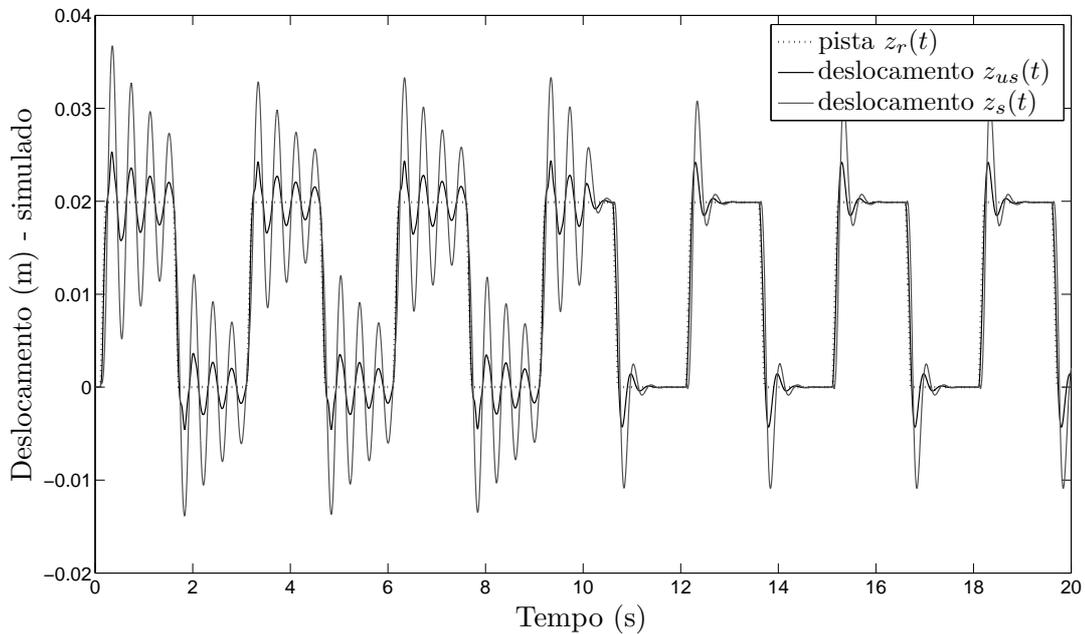
Primeiro caso: Considere as duas unidades de peso acopladas no sistema de suspensão ativa ($M_s = 2,45\text{kg}$). O comportamento dinâmico do sistema real (Figura 52) pode ser visto na Figura 56. Pela figura, o sistema é naturalmente estável mesmo sem a ação de controle, porém, o sistema apresenta oscilações pouco amortecidas, gerando desconforto ao motorista. Entretanto, as oscilações abruptas podem ser suavizadas considerando o sistema controlado pela força F_c . A respectiva simulação, considerando o modelo dinâmico (133), pode ser observada na Figura 57.

Figura 56 - Resposta transitória prática de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 2,45\text{kg}$.



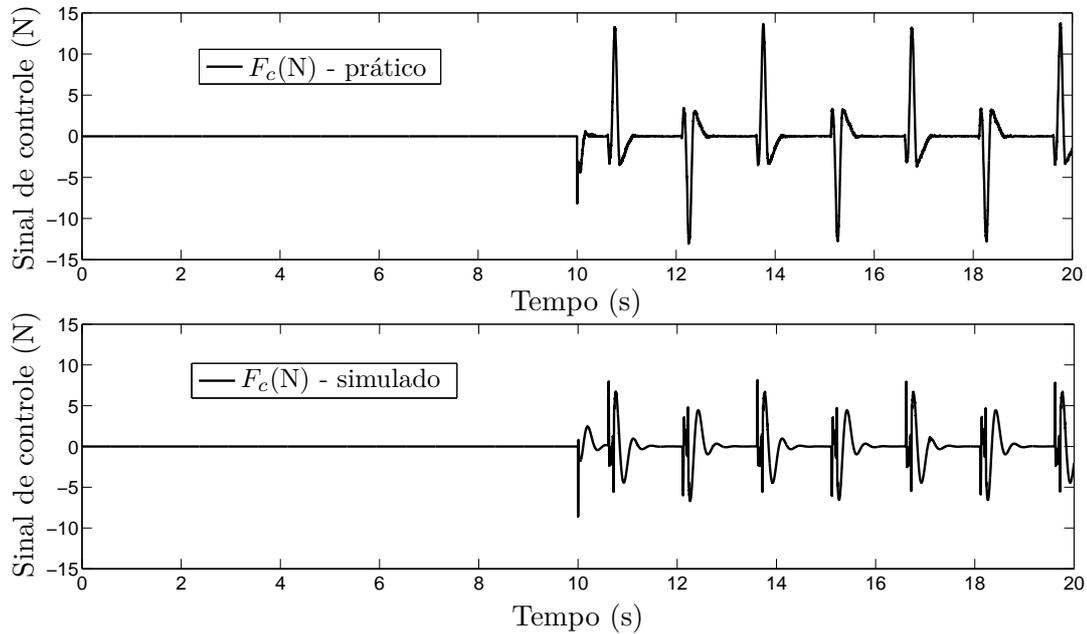
Fonte: Resultado do próprio autor

Figura 57 - Resposta transitória simulada de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 2,45\text{kg}$.



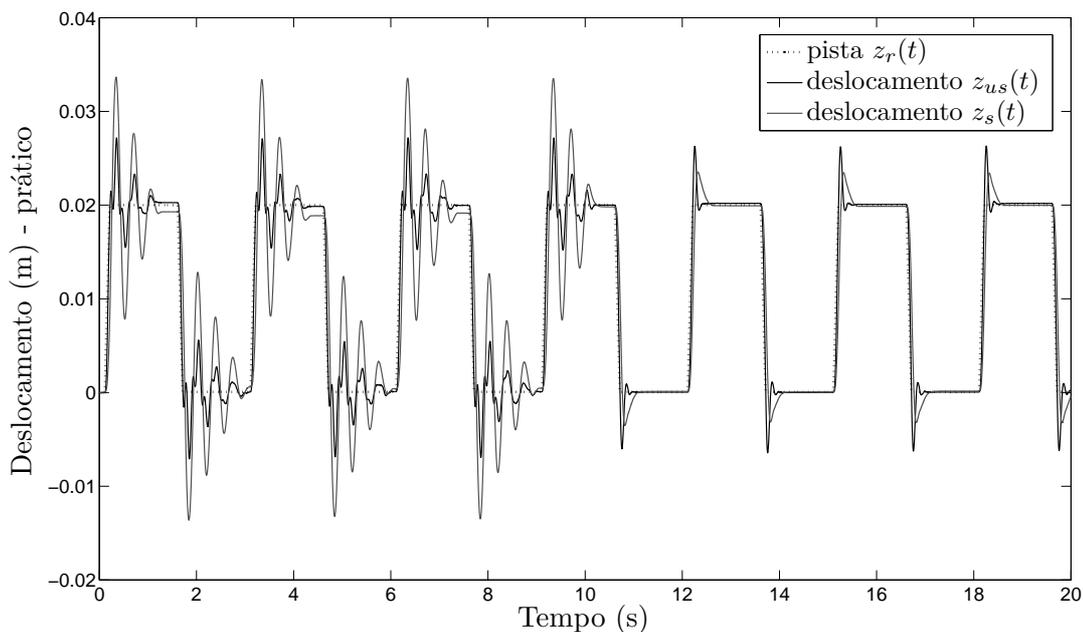
Fonte: Resultado do próprio autor

Pelas respostas nota-se uma melhoria significativa considerando a realimentação derivativa no sistema de suspensão ativa em atuação. Um ganho para diminuir ainda mais os picos que aparecem após o sinal de controle entrar em ação poderia ser obtido, contudo acredita-se que o conforto não estaria sendo mais garantido devido aos trancos que o próprio sistema geraria ao conjunto. A Figura 58 exibe o esforço do sinal de controle F_c para o sistema com carga útil total ($M_s = 2,45\text{kg}$).

Figura 58 - Sinal de controle atuando a partir de 10s, com $M_s = 2,45\text{kg}$.

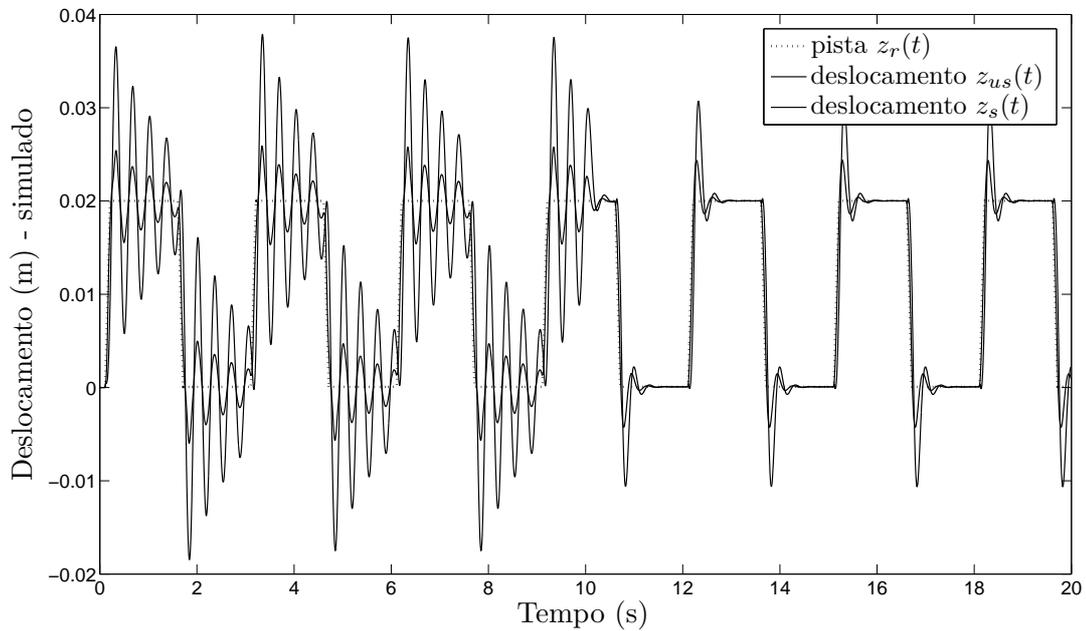
Fonte: Resultado do próprio autor

Segundo caso: Para a próxima implementação e simulação considera-se apenas uma unidade de peso acoplada ao sistema de suspensão ativa ($M_s = 1,9525\text{kg}$). O comportamento dinâmico real pode ser visto na Figura 59, e sua respectiva simulação pode ser observada na Figura 60.

Figura 59 - Resposta transitória prática de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 1,9525\text{kg}$.

Fonte: Resultado do próprio autor

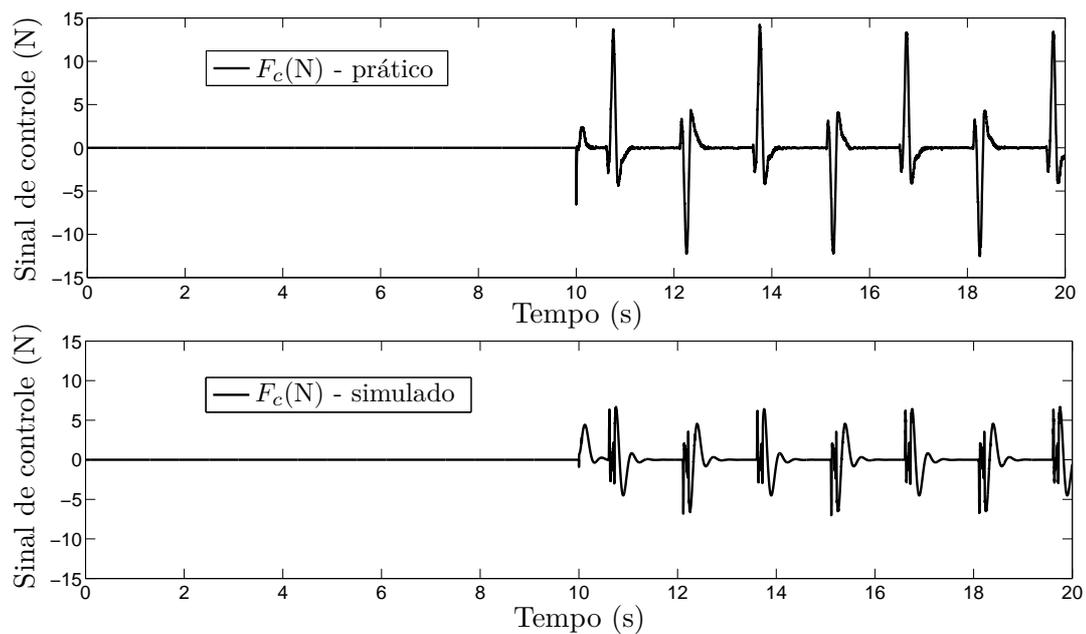
Figura 60 - Resposta transitória simulada de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 1,9525\text{kg}$.



Fonte: Resultado do próprio autor

A Figura 61 exibe o esforço do sinal de controle F_c para o sistema com metade da carga útil ($M_s = 1,9525\text{kg}$).

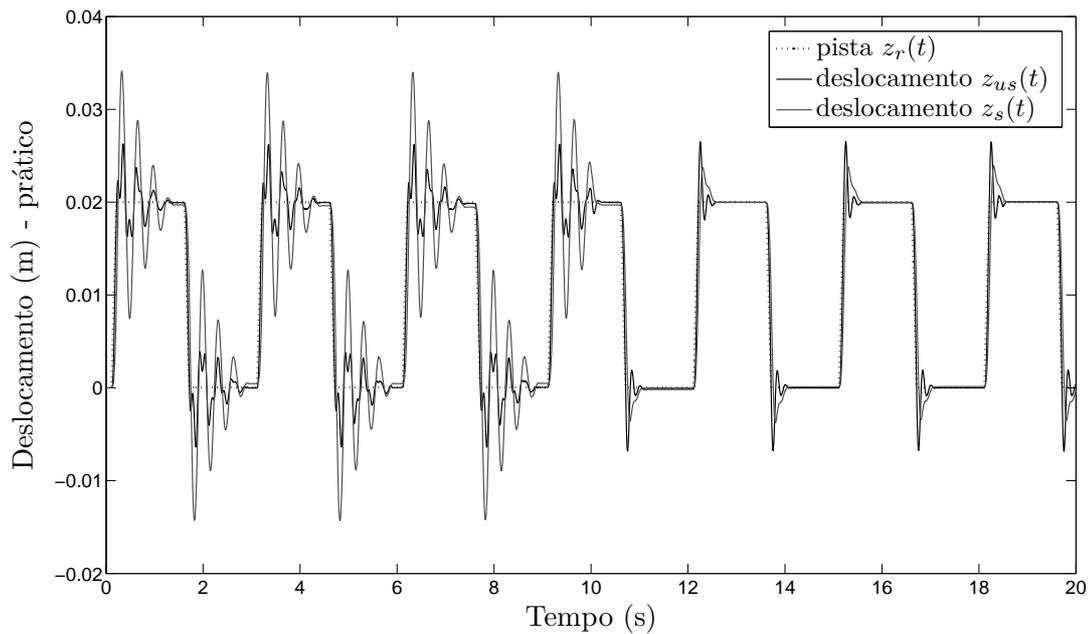
Figura 61 - Sinal de controle atuando a partir de 10s, com $M_s = 1,9525\text{kg}$.



Fonte: Resultado do próprio autor

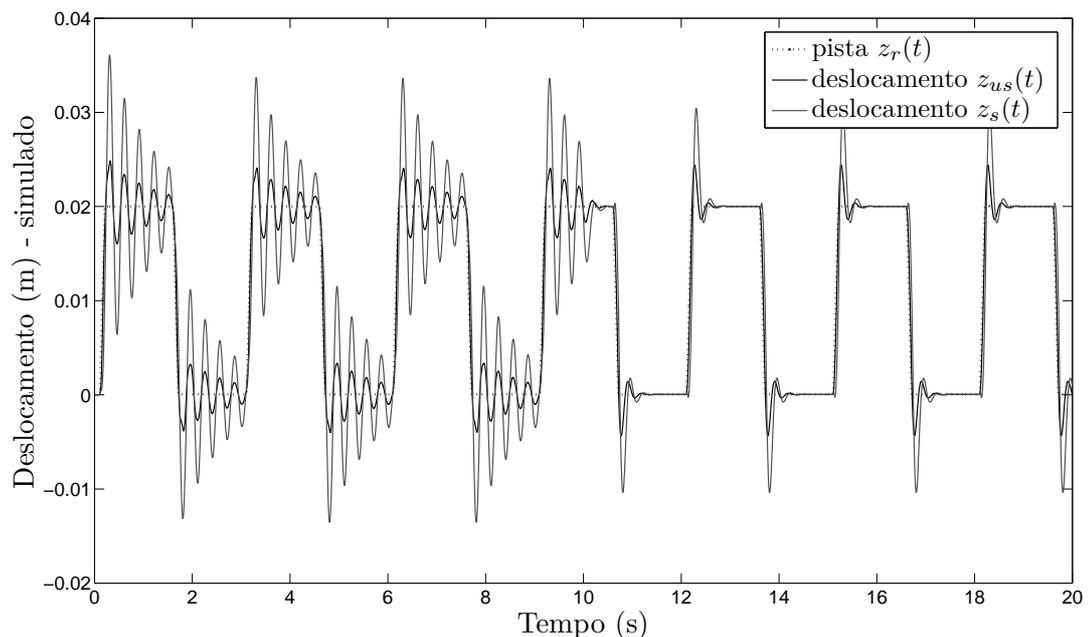
Terceiro caso: Por fim, nenhuma unidade de peso é considerada acoplada ao sistema de suspensão ativa ($M_s = 1,455\text{kg}$) para a execução da implementação e simulação. O comportamento dinâmico real pode ser visto na Figura 62, e sua respectiva simulação digital pode ser observada na Figura 63.

Figura 62 - Resposta transitória prática de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 1,455\text{kg}$.



Fonte: Resultado do próprio autor

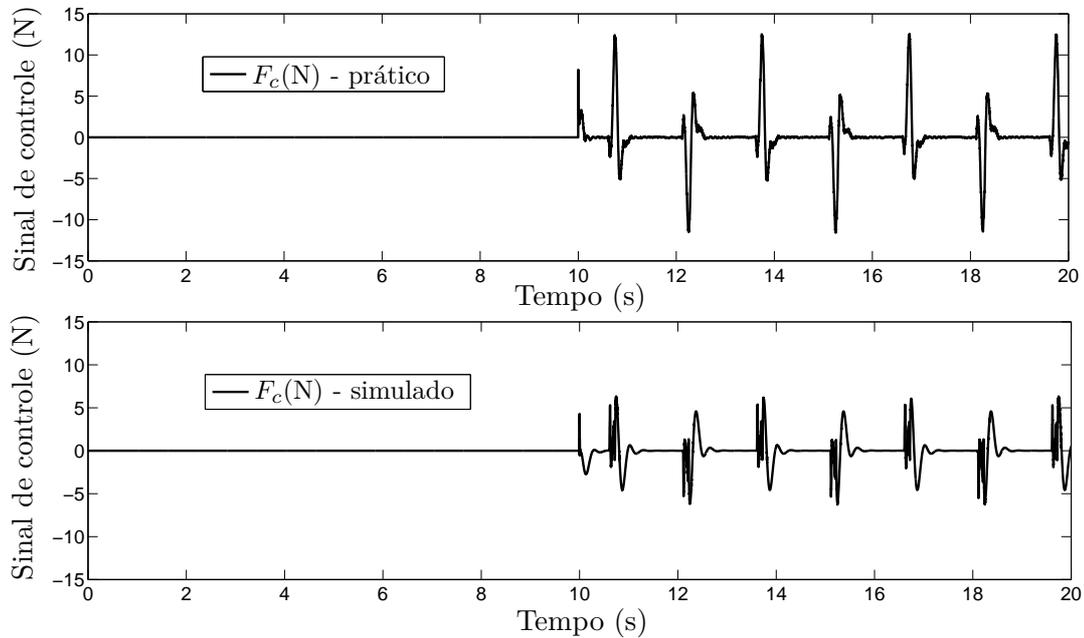
Figura 63 - Resposta transitória simulada de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com $M_s = 1,455\text{kg}$.



Fonte: Resultado do próprio autor

A Figura 64 exibe o esforço do sinal de controle F_c para o sistema sem a carga útil ($M_s = 1,455\text{kg}$).

Figura 64 - Sinal de controle atuando a partir de 10s, com $M_s = 1,455\text{kg}$.



Fonte: Resultado do próprio autor

Analisando as respostas obtidas, nota-se que o controlador robusto projetado foi capaz de amenizar as oscilações causadas pela pista Z_r para as três condições de peso M_s . Uma possível explicação para as diferenças entre as respostas da implementação prática e simulação, pode ser devido a utilização do modelo (133) linearizado, ou talvez pelas forças de atrito seco que surgem entre as superfícies em contato. Ainda, devido ao fato do equipamento ter sido adquirido recentemente, não foi possível chegar em um modelo mais fiel.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho procurou contribuir na obtenção de resultados mais flexíveis para o projeto de controladores de sistemas dinâmicos incertos, ou com falhas estruturais, com projetos baseados em LMIs. As condições LMIs propostas foram apresentadas na forma de teoremas, cuja soluções numéricas podem ser facilmente obtidas utilizando *softwares* que solucionam problemas de programação do tipo convexa (GAHINET et al., 1995). Em particular, neste trabalho utilizou-se o *software* MatLab[®] com seu *solver* padrão “LMILab” e interfaceado pelo pacote de modelagem avançada “YALMIP *toolbox*”.

Todo trabalho baseou-se em leis de controle por realimentação da derivada do vetor de estado ($u(t) = -K_d \dot{x}(t)$) (realimentação derivativa). A realimentação derivativa pode ser muito útil em sistemas de controle de vibração, no qual sensores do tipo acelerômetros podem ser utilizados para mensurar a derivada de segunda ordem (aceleração) de uma variável de estado (posição) desses sistemas. A partir do sinal da aceleração é possível construir o sinal da velocidade e então realimentar a derivada do vetor de estado ao invés do vetor de estado usual. Os acelerômetros têm sido empregados nas indústrias para a solução de vários tipos de problemas de engenharia, ainda, possuem uma estrutura simples e um baixo custo operacional, podendo ser interessante a utilização da estratégia de controle com a finalidade de baratear o custo de uma possível implementação do projeto.

Embora na literatura existam trabalhos que utilizam a realimentação derivativa para controlar sistemas lineares incertos com projetos baseados em LMIs, os mesmos apresentam uma fonte conhecida de conservadorismo. O conservadorismo em questão é a utilização de formulações LMIs clássicas, baseadas na existência de uma função de Lyapunov quadrática comum (CQLF) para tratar os problemas. Sabe-se que uma CQLF tende a fornecer resultados muito conservadores por utilizar somente uma matriz de Lyapunov P fixa para todo o domínio de incertezas do sistema. Apesar das funções de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF) serem usadas há muito tempo para solucionar diversos tipos de problemas, neste trabalho consideramos PDLFs como ponto de partida na busca de tentar reduzir o conservadorismo no projeto da realimentação derivativa no contexto de sistemas incertos. Os resultados apresentados mostraram que as técnicas propostas,

na maioria das vezes, foram capazes de estabilizar uma maior quantidade de sistemas incertos comparado com as técnicas baseadas em uma CQLF. No entanto, foi verificado que soluções puderam ser encontradas com técnicas baseadas em uma CQLF mas não com uma PDLF. Logo, a busca por novas condições com funções de Lyapunov alternativas devem ser realizadas a fim de tentar corrigir essa deficiência.

De qualquer forma, o presente trabalho apresentou novas condições para o projeto de controladores de sistemas lineares incertos utilizando a realimentação derivativa. As metodologias permitem que o projetista projete controladores robustos com a finalidade de apenas estabilizar o sistema incerto, controladores para a estabilização considerando o índice de desempenho de taxa de decaimento ou projetos que asseguram a \mathcal{D} -estabilidade (alocação regional de autovalores) na região $S(\gamma, \mathbf{r}, \theta)$ ou $S(\gamma, \mathbf{r})$, neste caso, com a escolha adequada dos parâmetros é possível garantir certos índices de desempenho, tais como, tempo de estabelecimento, porcentagem de *overshoot* e tempo de subida.

No decorrer do texto foram apresentados diversos exemplos numéricos, na forma de simulações digitais, com o objetivo de validar as metodologias propostas. Além disso, uma implementação prática no sistema de suspensão ativa da Quanser[®] foi efetuada com o intuito de testar a técnica de projeto proposta neste trabalho.

6.1 Sugestões para pesquisas futuras

- Projeto de LMIs que minimizam a norma do controlador considerando ganhos do tipo $K_d = GY^{-T}$, i.e., não dependem da matriz de Lyapunov Q_i , $\forall i$;
- Estabilização robusta através de realimentação derivativa dependente de parâmetros;
- Projeto de controladores chaveados utilizando a realimentação derivativa;
- Obtenção de novos conjuntos LMIs menos conservadores.

6.2 Publicações

Publicações diretamente relacionadas com o conteúdo da tese.

Artigos completos publicados em periódicos:

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2012, 21 p. 2012.

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; BUZACHERO, L. F. S. Parameter-dependent Lyapunov functions for state-derivative feedback control in polytopic linear systems. *International Journal of Control*, Essex, v. 84, n. 8, p. 1377-1386, 2011.

Trabalhos completos publicados em anais de congressos:

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. Condições robustas para a \mathcal{D} -estabilização de sistemas lineares politópicos usando a realimentação derivativa. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 19., 2012, Campina Grande, *Anais...* Campina Grande: SBA, 2012. 722-729.

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; BUZACHERO, L. F. S. Estabilidade robusta de sistemas lineares usando realimentação derivativa: Um método baseado no lema da projeção recíproca. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI, 10., 2011, São João del-Rei, MG. *Anais...* São João del-Rei: [s.n.], 2011. p. 695-700.

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A. Condições relaxadas para o projeto de controladores de sistemas lineares incertos usando a realimentação da derivada dos estados. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 18., 2010, Bonito, MS. *Anais...* Bonito: SBA, 2010. p. 474-479.

Publicações indiretamente relacionadas com o conteúdo da tese.

Artigo completo publicado em periódico:

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A. Estabilização de sistemas fuzzy T-S incertos usando realimentação derivativa. *Controle & Automação: Revista da Sociedade Brasileira de Automática*, Campinas, v. 22, n. 3, p. 273-283, 2011.

Capítulo de livro publicado:

BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P. da. New techniques for optimizing the norm of robust controllers of polytopic uncertain linear systems. In: SERRA, G. L. de O. (Ed.) *Frontiers in advanced control systems*. Rijeka, Croatia: InTech, 2012. p. 75-100.

Trabalhos completos publicados em anais de congressos:

- YOSHIMURA, V. L.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Observação de estados em sistemas chaveados afins e projeto de observadores em conversores CC-CC. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 19., 2012, Campina Grande, PB. *Anais...* Campina Grande: SBA, 2012. p. 379-385.
- MANESCO, R. M.; SILVA, J. H. P.; MOREIRA, M. R.; BUZACHERO, L. F. S.; SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; GALVÃO, R. K. H. α -estabilidade robusta \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares: uma implementação em um helicóptero 3-DOF de bancada. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 19., 2012, Campina Grande, PB. *Anais...* Campina Grande: SBA, 2012. p. 37-43.
- SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. Aplicação de controladores robustos via LMIs em um helicóptero de bancada modelo 3-DOF da Quanser. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING AND COMPUTER EDUCATION - ICECE, 7., 2011, Guimarães, Portugal. *Anais...* Guimarães: [s.n.], 2011. p. 464-468.
- FARIA, F. A.; SILVA, G. N.; OLIVEIRA, V. A.; CARDIM, R.; MOREIRA, M. R.; SILVA, E. R. P. da. \mathcal{D} -estabilização de sistemas fuzzy TS usando funções de Lyapunov Fuzzy. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS - Dincon, 10., 2011, Águas de Lindóia, SP. *Proceedings...* Águas de Lindóia: [s.n.], 2011. p. 200-203.
- BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P. da. Resultados menos conservadores para o projeto de controladores robustos ótimos de sistemas dinâmicos incertos. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI, 10., 2011, São João del-Rei, MG. *Anais...* São João del-Rei: [s.n.], 2011. p. 713-718.
- FARIA, F. A.; SILVA, G. N.; OLIVEIRA, V. A.; CARDIM, R.; SILVA, E. R. P. da. Projeto de controladores fuzzy usando funções de Lyapunov fuzzy. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI, 10., 2011, São João del-Rei, MG. *Anais...* São João del-Rei: [s.n.], 2011. p. 891-896.
- SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; CARDIM, R. Projeto de controladores fuzzy para uma classe de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, 9., Serra Negra, SP. *Proceedings...* Serra Negra: Unesp, 2010. p. 893-898.
- BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, E. R. P. da. Implementações de controladores robustos, com restrições de taxa de decaimento e otimizados em sistemas sujeitos a falhas. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, 9., Serra Negra, SP. *Proceedings...* Serra Negra: Unesp, 2010. p. 954-960 .
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; SILVA, E. R. P. da. Condições menos conservadoras para o projeto de controladores fuzzy usando realimentação da derivada dos estados. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE

AUTOMÁTICA, 18., 2010, Bonito, MS. *Anais...* Bonito: SBA, 2010. p. 4044-4049.

BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, E. R. P. da. Otimização de controladores robustos de sistemas dinâmicos sujeitos a falhas estruturais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 18., 2010, Bonito, MS. *Anais...* Bonito: SBA, 2010. p. 4068-4075.

SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 8., 2009, Bauru, SP. *Proceedings...* Bauru: Unesp, 2009. 7 p.

SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 9., 2009, Brasília, DF. *Anais...* Brasília, DF: [s.n.], 2009. Artigo 54988.

REFERÊNCIAS

- ABDELAZIZ, T. H. S. Pole assignment by state-derivative feedback for single-input linear systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, London, v. 221, n. 7, p. 991–1000, 2007.
- ABDELAZIZ, T. H. S. Robust pole assignment for linear time-invariant systems using state-derivative feedback. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, London, v. 223, n. 2, p. 187–199, 2009.
- ABDELAZIZ, T. H. S. Optimal control using derivative feedback for linear systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, London, v. 224, n. 2, p. 185–202, 2010.
- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. Pole placement for SISO linear systems by state-derivative feedback. *IEE Proceedings-Control Theory Applications*, New York, v. 151, n. 4, p. 377–385, 2004.
- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. State derivative feedback by LQR for linear time-invariant systems. In: IFAC WORLD CONGRESS, 16., 2005. Prague, Czech Republic: *Proceedings...* Prague: IFAC, 2005a. p. 933.
- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. Direct algorithm for pole placement by state-derivative feedback for multi-input linear systems - nonsingular case. *Kybernetika*, Prague, v. 41, n. 5, p. 637–660, 2005b.
- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. Eigenstructure assignment by proportional-plus-derivative feedback for second-order linear control systems. *Kybernetika*, Prague, v. 41, n. 5, p. 661–676, 2005c.
- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities LMI characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, Dec. 2001.
- ARAÚJO, J. M.; CASTRO, A. C.; SILVA, F. G. S.; SANTOS, E. T. F.; DÓREA, C. E. T. Comparative study on state feedback and state-derivative feedback in linear time invariant systems. In: IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM, STRUCTURE AND CONTROL, 3., 2007. Foz do Iguaçu: *Proceedings...* Foz do Iguaçu: IFAC, 2007. v. 3. Article 119.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. da; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, Aug. 2007.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix*

inequalities in systems and control theory. 2. ed. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. (Studies in Applied Mathematics, 15).

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Analysis and design for a class of complex control systems part II: Fuzzy controller design. *Automatica*, Amsterdam, v. 33, n. 6, p. 1029–1039, 1997.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Design of state-derivative feedback controllers using a state feedback control design. In: IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM, STRUCTURE AND CONTROL, 3., 2007. Foz do Iguaçu: *Proceedings...* Foz do Iguaçu: IFAC, 2007. v. 1, p. 135–141.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Control designs for linear systems using state-derivative feedback. In: HUSEK, P. (Ed.). Systems, structure and control. Vienna, Austria: InTech, 2008. p. 1–28.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E. LMI-based digital redesign of linear time-invariant systems with state-derivative feedback. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 18.; IEEE MULTI-CONFERENCE ON SYSTEMS AND CONTROL, 2009. Saint Petersburg, Russia: *Proceedings...* New York: IEEE, 2009. p. 745–749.

CHEN, C. *Linear system theory and design*. 3. ed. New York: Oxford, 1999. 352 p. (Oxford Series in Electrical and Computer Engineering).

CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.

DAHLEH, M.; DAHLEH, M. A. On slowly time-varying systems. *Automatica*, Amsterdam, v. 27, n. 1, p. 201–205, 1991.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle modernos*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 684 p.

DUAN, Y. F.; NI, Y. Q.; KO, J. M. State-Derivative feedback control of cable vibration using semiactive magnetorheological dampers. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Hoboken, v. 20, n. 6, p. 431–449, Nov. 2005.

EBIHARA, Y.; HAGIWARA, T. New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis. *Automatica*, Amsterdam, v. 40, n. 11, p. 2003–2009, 2004.

FARIA, F. A. *Alocação de polos com realimentação da derivada dos estados usando LMIs*. 2005. 52 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, dez. 2005. Disponível em: <<http://www.feis.unesp.br/#!/departamentos/engenharia-eletrica/pos-graduacao/dissertacoes/2003-a-2005/>>. Acesso em: 09 ago. 2011.

FARIA, F. A. *Projetos de controladores baseados em LMI usando realimentação da derivada dos estados*. 2009. 112 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) —

- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, ago. 2009. Disponível em: <<http://www.feis.unesp.br/#!/departamentos/engenharia-eletrica/pos-graduacao/teses/2009/>>. Acesso em: 09 ago. 2011.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs. *Controle & Automação*, Campinas, v. 20, n. 1, p. 83–93, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-17592009000100008>>.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; SILVA, N. A. P. da. Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 82, n. 1, p. 1–12, 2009.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for linear descriptor systems. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2010, 15 p., 2010. Article ID 927362.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI control toolbox: for use with MATLAB*. Natick: MathWorks, 1995.
- GAINO, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARVALHO, A. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; SANCHES, M. A. A.; COVACIC, M. R. Realimentação derivativa e modelo fuzzy Takagi-Sugeno para controle da articulação do joelho de pacientes paraplégicos com o uso de acelerômetros. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, Rio de Janeiro, v. 27, n. 2, p. 67–78, 2011.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 51, n. 12, p. 1984–1989, 2006.
- HADDAD, W. M.; BERNSTEIN, D. S. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 37, n. 1, p. 54–69, Jan. 1992. ISSN 0018-9286.
- ISERMANN, R. *Fault-Diagnosis systems: an introduction from fault detection to fault tolerance*. Berlin: Springer, 2006.
- ISERMANN, R.; BALLÉ, P. Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. *Control Engineering Practice*, Oxford, v. 5, n. 5, p. 709–719, 1997.
- JING, Y.; SHEN, C.; DIMIROVSKI, G. M.; JIANG, N. Delay-dependent state-derivative feedback with an α -stability constraint for time delay systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE - ACC, 2009. St. Louis: *Proceedings...* St. Louis: ACC, 2009. p. 1844–1848.
- JOHANSSON, M. K. J. *Piecewise Linear Control Systems*. Berlin: Springer, 2003.
- KAU, S. W.; LIU, Y. S.; HONG, L.; LEE, C. H.; FANG, C. H.; LEE, L. A new LMI condition for robust stability of discrete-time uncertain systems. *System & Control Letters*, Amsterdam, v. 54, n. 12, p. 1195–1203, 2005.

- KWAK, S. K.; WASHINGTON, G.; YEDAVALLI, R. K. Acceleration-based vibration control of distributed parameter systems using the “reciprocal state-space framework”. *Journal of Sound and Vibration*, London, v. 251, n. 3, p. 543–557, 2002a.
- KWAK, S. K.; WASHINGTON, G.; YEDAVALLI, R. K. Acceleration feedback-based active and passive vibration control of landing gear components. *Journal of Aerospace Engineering*, New York, v. 15, n. 1, p. 1–9, Jan. 2002b.
- LEITE, V. J. d. S.; MONTAGNER, V. F.; PERES, P. L. D. Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. *Controle & Automação: Revista da Sociedade Brasileira de Automática*, Campinas, v. 15, n. 2, p. 127–134, abr./jun. 2004.
- LEWIS, F. L.; SYRMOS, V. L. A geometric theory for derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 36, n. 9, p. 1111–1116, 1991.
- LÖFBERG, J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER-AIDED CONTROL SYSTEM DESIGN, 2004. Taipei, Taiwan: *Proceedings...* New York: IEEE, 2004. Disponível em: <<http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip>>.
- LÖFBERG, J. Automatic robust convex programming. *Optimization methods and software*, New York, v. 27, n. 1, p. 115–129, 2012. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10556788.2010.517532>>.
- MICHIELS, W.; VYHLÍDAL, T.; HUIJBERTS, H.; NIJMEIJER, H. Stabilizability and stability robustness of state derivative feedback controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 47, n. 6, p. 3100–3117, 2009.
- MOREIRA, M. R.; JÚNIOR, E. I. M.; ESTEVES, T. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Stabilizability and disturbance rejection with state-derivative feedback. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2010, 12 p., 2010. Article ID 123751.
- MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; AVELLAR, G. S. C. A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Information Sciences*, Philadelphia, v. 179, n. 8, p. 1149–1162, 2009.
- MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; MENDES, E. M. A. M. Equivalent techniques, extra comparisons and less conservative control design for Takagi-Sugeno (TS) fuzzy systems. *IET Control Theory and Applications*, Stevenage, v. 4, n. 12, p. 2813–2822, Dec. 2010.
- MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; SOUZA, F. O.; MENDES, E. M. A. M. Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. *Automatica*, Amsterdam, v. 45, n. 6, p. 1580–1583, 2009.
- NGUANG, S. K.; SHI, P. Robust H_∞ output feedback control design for fuzzy dynamic systems with quadratic \mathcal{D} stability constraints: An LMI approach. *Information Sciences*, Philadelphia, v. 176, n. 15, p. 2161–2191, 2006.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4. ed. New York: Prentice Hall, 2003. 800 p.

OLIVEIRA, M. C. de; GEROMEL, J. C. A class of robust stability conditions where linear parameter dependence of the Lyapunov function is a necessary condition for arbitrary parameter dependence. *System & Control Letters*, Amsterdam, v. 54, n. 11, p. 1131–1134, 2005.

OLIVEIRA, M. C. de; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, S. (Ed.). *Perspectives in robust control*. Berlin, Germany: Springer Berlin / Heidelberg, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Sciences). p. 241–257.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *System & Control Letters*, Amsterdam, v. 55, n. 1, p. 52–61, 2006.

PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE, B.; SWEVER, J.; VANDENBERGHE, L. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 58, n. 7, p. 510–518, 2009.

QUANSER. *Active Suspension - User's Manual*. Ontario, Canada, 2009.

REITHMEIER, E.; LEITMANN, G. Robust vibration control of dynamical systems based on the derivative of the state. *Archive of Applied Mechanics*, Heidelberg, v. 72, n. 11–12, p. 856–864, June 2003.

SILVA, E. R. P. da. *Controle Robusto de Sistemas Não Lineares Sujeitos a Falhas Estruturais*. 2009. 80 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP, fev. 2009. Disponível em: <<http://www.feis.unesp.br/#!/departamentos/engenharia-eletrica/pos-graduacao/dissertacoes/2009/>>. Acesso em: 09 ago. 2011.

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; BUZACHERO, L. F. S. Parameter-dependent Lyapunov functions for state-derivative feedback control in polytopic linear systems. *International Journal of Control*, Essex, v. 84, n. 8, p. 1377–1386, 2011a.

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2012, 21 p., 2012. Article ID 315049.

SILVA, E. R. P. da; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Estabilização de sistemas fuzzy T-S incertos usando realimentação derivativa. *Controle & Automação: Revista da Sociedade Brasileira de Automática*, Campinas, v. 22, n. 3, p. 273–283, maio/jun. 2011b.

SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. M. *A unified algebraic approach to linear control design*. Bristol: Taylor & Francis, 1998. (Taylor & Francis systems and control book series).

STURM, J. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, Essex, v. 11–12, p. 625–653, 1999. Disponível em: <http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2001/10/395.html>. Acesso em: 20 out. 2011.