

Sumário

Ementa & Programa da Disciplina	5
1 Rotação de corpos rígidos	11
1.1 Definições	11
1.2 Variáveis de Rotação	12
1.2.1 Posição Angular	13
1.2.2 Deslocamento Angular	14
1.2.3 Velocidade Angular	14
1.2.4 Aceleração Angular	15
1.2.5 Exemplos	15
1.3 Notação Vetorial para as variáveis de rotação	17
1.3.1 Relacionando as variáveis lineares com as angulares	21
1.4 Rotação com aceleração angular (α) constante	23
1.4.1 Exemplos	28
1.5 Energia cinética de rotação	33
1.5.1 Cálculo do momento de inércia	34
1.5.2 Teorema do eixo paralelo	38
1.6 Dinâmica da Rotação: Torque e Momento Angular	41
1.6.1 O Torque	41
1.6.2 O Momento Angular & 2ª lei de Newton para a rotação	44
1.6.3 Exemplos	47
1.7 Leis de Conservação	56
1.7.1 Teorema trabalho-energia cinética	56
1.7.2 Conservação do momento angular	58

1.7.3	Exemplos	60
1.8	Movimento de Rolamento	69
1.8.1	Rolamento como uma combinação de translação e rotação	69
1.8.2	Rolamento como uma Rotação Pura	70
1.8.3	Energia Cinética de Rolamento	71
1.8.4	As forças do Rolamento	72
1.8.5	Exemplos	76
3	Oscilações	85
3.1	O Movimento Harmônico Simples (MHS)	85
3.1.1	Equações Diferenciais: breve digressão	88
3.1.2	Solução da Equação Diferencial para o oscilador harmônico	90
3.1.3	Interpretação física da solução do oscilador harmônico	92
3.1.4	Energia do Oscilador Harmônico	95
3.2	Aplicações do movimento harmônico simples	98
3.2.1	O pêndulo de torção	98
3.2.2	Pêndulos	100
3.2.3	Exemplos	104
3.3	Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme	109
3.4	Oscilações Amortecidas e Forçadas	110
3.4.1	Oscilações Amortecidas	110
3.4.2	Oscilações Forçadas e Ressonância	115
3.4.3	Ressonância	116
3.4.4	Exemplos	118
3	Oscilações	123
3.1	O Movimento Harmônico Simples (MHS)	123
3.1.1	Equações Diferenciais: breve digressão	126
3.1.2	Solução da Equação Diferencial para o oscilador harmônico	128
3.1.3	Interpretação física da solução do oscilador harmônico	130
3.1.4	Energia do Oscilador Harmônico	133
3.2	Aplicações do movimento harmônico simples	136
3.2.1	O pêndulo de torção	136

3.2.2	Pêndulos	138
3.2.3	Exemplos	142
3.3	Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme	147
3.4	Oscilações Amortecidas e Forçadas	148
3.4.1	Oscilações Amortecidas	148
3.4.2	Oscilações Forçadas e Ressonância	153
3.4.3	Ressonância	154
3.4.4	Exemplos	156
3.5	Apêndice 1: Dedução das soluções amortecidas	160
3.6	Apêndice 2: Soluções Amortecidas-forçadas	165
4	Fluidos	169
4.1	Grandezas Básicas	169
4.1.1	Densidade	169
4.1.2	Pressão	170
4.2	Fluidos em Repouso (Hidrostática)	172
4.2.1	Medindo a pressão	175
4.2.2	O princípio de Pascal	177
4.2.3	O princípio de Arquimedes	179
4.3	Dinâmica dos fluidos ideais	183
4.3.1	Equação da continuidade	184
4.3.2	Equação de Bernoulli	187
5	Gravitação	195
5.1	Introdução	195
5.1.1	Princípio da Superposição	197
5.2	Gravitação nas proximidades da superfície da Terra	199
5.3	A aceleração gravitacional no interior da Terra	202
5.4	Energia Potencial Gravitacional	203
5.4.1	Demonstração da Eq. (5.7)	204
5.5	Velocidade de Escape	205
5.6	As leis de Kepler	206
5.6.1	Lei das áreas	206

5.6.2	A lei das órbitas	208
5.6.3	Lei dos períodos	210
5.7	Satélites: órbitas e energias	211
6	Termodinâmica	213
6.1	Equilíbrio Térmico e a Lei Zero da Termodinâmica	214
6.2	Temperatura	215
6.2.1	Termômetros	217
6.3	Dilatação Térmica	220
6.4	Temperatura e Calor	224
6.4.1	Absorção de Calor por Sólidos e Líquidos	226
6.5	Calor e Trabalho	229
6.6	A primeira lei da termodinâmica	233
6.6.1	Casos Especiais da primeira lei	234
6.7	Mecanismos de transferência de calor	237
6.7.1	Condução	237
6.7.2	Condução através de uma placa composta	239
6.7.3	Convecção	240
6.7.4	Radiação	241
7	Teoria Cinética dos Gases	243
7.1	O número de Avogadro	243
7.2	Gases Ideais	244
7.2.1	O trabalho realizado por um gás ideal à temperatura constante	245
7.2.2	Trabalho a pressão e volume constantes	246
7.3	Pressão, Temperatura e Velocidade Média Quadrática	247
7.3.1	Livre Caminho Médio	250
7.3.2	Energia Cinética de Translação	253
7.4	A distribuição de velocidade das moléculas	253
7.4.1	Valores Médios	254
7.5	Calor específico de um gás ideal	255
7.5.1	Calor específico a volume constante	256
7.5.2	Calor específico molar a pressão constante	258

7.6	Expansão adiabática de um gás ideal	259
8	Entropia e 2ª lei da termodinâmica	263
8.1	A variação da entropia	264
8.2	A entropia como uma função de estado	265
8.3	A 2ª lei de termodinâmica	266
8.4	Máquinas Térmicas	267
8.4.1	A máquina de Carnot	268
8.4.2	Entropia do ciclo de Carnot	270
8.4.3	Eficiência de uma máquina de Carnot	272
8.5	Refrigeradores	272
8.6	Eficiência de Máquinas Térmicas Reais	274

FIS0729—Fundamentos de Física II

Ezequiel C. Siqueira — Depto. de Física e Química

Ementa

Os tópicos que serão abordados na disciplina são os seguintes:

1. Rotação de corpos rígidos (cinemática, dinâmica e leis de conservação)
2. Oscilações
3. Gravitação
4. Fluidos (hidrodinâmica e hidrostática)
5. Termodinâmica (temperature, calor, leis da termodinâmica, teoria cinética dos gases e entropia)

Provas

Serão realizadas três provas e um trabalho a ser definido. A média final (M_S), será dada por:

$$M_F = 0,9 \times \left(\frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} \right) + 0,1 \times N_S$$

onde P_1 , P_2 e P_3 são as notas das provas e N_S é nota do seminário.

- 1ª Prova: 11/04/2014 — Rotação de corpos rígidos
- 2ª Prova: 30/05/2014 — Oscilações+Fluidos+Gravitação
- 3ª Prova: 27/06/2014 — Termodinâmica
- Trabalho a definir.

Referências Bibliográficas

Livros principais (usados como livros-texto)

O curso será baseado nos seguintes livros:

- HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. *Fundamentos de Física*, Rio de Janeiro-RJ, Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, v. 1 e v. 2, 6ª Edição, 2002.
- NUSSENZVEIG, H. M., *Curso de Física Básica*, Rio de Janeiro, Edgar Blucher, v.1 e v.2., 4ª Edição, 2002.

As edições podem variar, na biblioteca estão disponíveis várias versões destes livros, mas não existem mudanças drásticas de uma edição para outra.

Outros livros de mesmo nível

- ALONSO, M., FINN, E.J., *Física*, São Paulo, Addison Wesley Longman do Brasil Ltda, 1999, v.1, 936p.
- TIPLER, P.A. *Física*. 3ª Ed., Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 1995, v.1 e 2.
- CHAVES, A., *Física Básica*, Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 2007, v.1 e 2.
- YOUNG, H.D., FREEDMAN, R.A. Sears-Zemansky. *Física*. 10ª Edição, Addison Wesley, 2001. Vol. 1 e 2

livros de nível intermediário

- KITTEL, C.; KNIGHT, W.D. e RUDERMAN, M.A. *Mecânica: Curso de Física de Berkeley*. São Paulo, Editora Edgard Blucher Ltda., 1973. v.1.
- FEYNMAN R, LEIGHTON R, and SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics*, 1964, 1966, v.1 e v.2, Addison Wesley Longman.

As referências *The Feynman Lectures on Physics* e *Mecânica: Curso de Física de Berkeley* são particularmente interessantes. As leituras destes livros em paralelo podem ajudar no entendimento do conteúdo exposto em sala de aula.

livros de nível “avanzado”

Os livros a seguir **NÃO SERÃO USADOS** neste curso, mas são recomendados para aqueles que desejam se aventurar em alguma coisa mais avançada!

- THORNTON, S. T., MARION, J. B., *Classical dynamics of particles and systems*, 2004, Brooks/Cole.
- ARYA, A. P., *Introduction to Classical Mechanics*, Prentice Hall, 1998
- CALLEN, H., *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, Wiley, 1985
- BEER, F. P., JOHNSTON Jr. , RUSSELL E., EISENBERG E. R., CLAUSEN W. E. , STAAB G. H. *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics*, McGraw-Hill, 2003.

Referências Multimídia

Cursos de física básica

Fundamentals of Physics-I with Professor Ramamurti Shankar

Para quem arranha no inglês, existem alguns cursos completos em vídeo de física básica. O curso do prof. Ramamurti Shankar de Universidade de Yale é altamente recomendável. No link abaixo, é possível fazer o download do curso completo gratuitamente:

<http://oyc.yale.edu/physics/fundamentals-of-physics>

Os vídeos apresentam uma transcrição em inglês do que é dito na aula o que pode ajudar no entendimento do conteúdo.

MIT OpenCourseWare

Vários dos cursos oferecidos pelo MIT na área de física estão disponíveis em vídeo. É interessante dar uma olhada na página

<http://ocw.mit.edu/courses/physics/>

Cursos avançados

Para alguém que tenha interesse em material extra-classe e mais avançado, recomendo os cursos do Prof. Leonard Susskind de Stanford no link: <http://www.youtube.com/watch?v=pyX8kQ-JzHI>

Capítulo 1

Rotação de corpos rígidos

Iniciamos o curso de Física II através do estudo do movimento de rotação. Da mesma forma que foi feito no curso de Física I, primeiramente será considerada a *cinemática* do movimento, i.e., a descrição do movimento. Isto será feito com equações simples, análogas às desenvolvidas para descrever o movimento retilíneo dos corpos. Uma vez compreendidas as grandezas físicas envolvidas na descrição do movimento de rotação, será considerada a *dinâmica* da rotação, onde será investigado que tipo de movimento pode ocorrer numa dada situação física.

1.1 Definições

Antes de analisar o movimento de rotação propriamente dito, é necessário fazer algumas considerações iniciais. Primeiramente, devemos considerar que todos os objetos de estudo são *rígidos*, ou seja, estes objetos não deformam durante o movimento. Portanto, todas as partículas que compõem o corpo permanecem à mesma distância uma das outras independentemente do movimento. Durante todo o curso estaremos lidando apenas com corpos que têm esta propriedade. É claro que não existem corpos perfeitamente rígidos e todos apresentam algum tipo de deformação, como por exemplo o Sol, que é uma bola de gás, ou ainda, duas bolas de bilhar que colidem podem se deformar no momento do contato uma com a outra. No entanto, estamos considerando que estas deformações são tão pequenas que podem ser desprezadas.

Com a consideração de que os nossos objetos de estudo são *corpos rígidos*, podemos definir os movimentos de translação e rotação da seguinte forma:

Translação: um corpo rígido tem um movimento de translação quando todos os pontos do corpo des-

crevem trajetórias paralelas. Com isso, todos os pontos do corpo têm o mesmo deslocamento, velocidade e aceleração em todos os instantes de tempo. Com isso o movimento do corpo como um todo pode ser reduzido à descrição de apenas um ponto representativo — que pode ser convenientemente o centro de massa do corpo (veja Fig. 1.1a).

Rotação: Fixando-se dois pontos A e B de um corpo rígido, isto equivale a fixar todos os pontos da reta definida por \overline{AB} pois todos os pontos desta reta devem manter suas posições inalteradas em relação aos pontos A e B . Assim, quando o corpo gira em torno do eixo definido por A e B , todos os pontos fora do da reta \overline{AB} devem descrever círculos centrados nesse eixo (Fig. 1.1b). Assim, dizemos que \overline{AB} é um eixo de rotação em torno do qual todas as partículas são deslocadas de um mesmo ângulo em um dado intervalo de tempo.

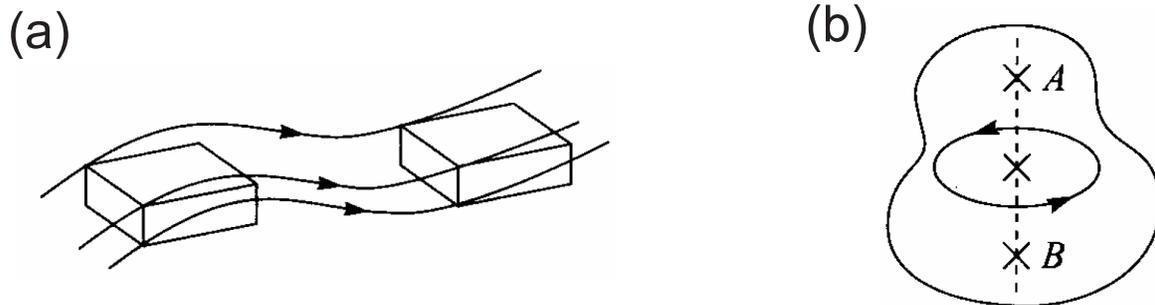


Figura 1.1: (a) Um corpo rígido executando um movimento de translação pura. Neste caso todos pontos do corpo sofrem os mesmos deslocamentos. (b) um corpo rígido em rotação pura em torno de um eixo fixo definido pelos pontos A e B . Desde que o corpo é rígido, os pontos do corpo descrevem círculos em torno do eixo de rotação \overline{AB} .

O próprio eixo \overline{AB} pode estar em movimento (de translação, rotação ou ambos), no entanto, por ora vamos considerar que o eixo de rotação está fixo de maneira que o corpo como um todo apresenta apenas movimento de rotação. Mais tarde consideraremos um caso mais geral onde o eixo descreve movimento de translação e rotação.

1.2 Variáveis de Rotação

No caso da translação, definimos posição, deslocamento, velocidade e aceleração para descrever o movimento de qualquer corpo que execute este tipo de movimento. De forma análoga, no caso de rotação definimos grandezas equivalentes que permitem determinar o movimento de um corpo.

1.2.1 Posição Angular

A figura 1.2a mostra uma linha de referência, fixa no corpo, perpendicular ao eixo z que é o eixo de rotação do corpo. Note que a linha gira acompanhando o movimento do corpo. A *posição angular* desta linha é o ângulo que ela faz com uma direção fixa, que tomamos como sendo a *posição angular nula*. Na Fig. 1.2b, a posição angular θ é medida em relação à direção positiva do eixo x . Da geometria elementar, sabemos que:

$$\theta = \frac{s}{r}. \quad (1.1)$$

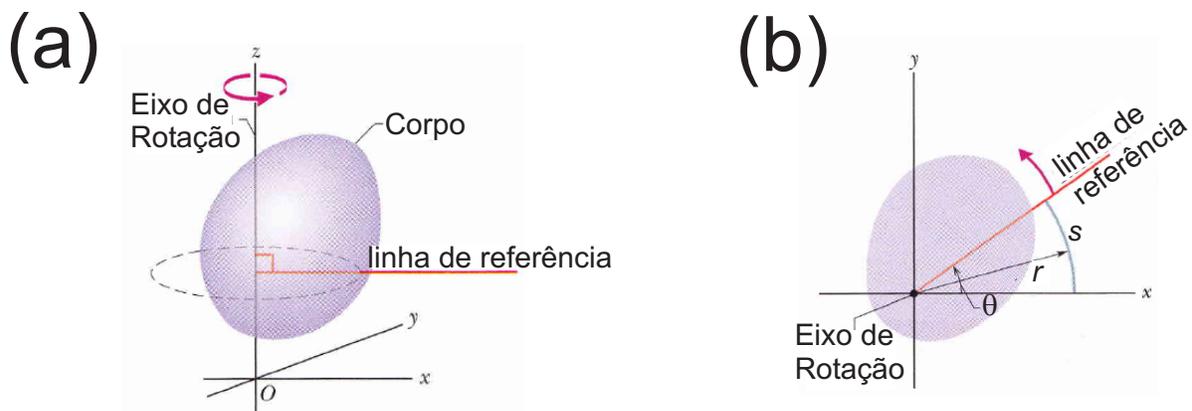


Figura 1.2: (a) Um corpo rígido qualquer executando um movimento de rotação pura em torno do eixo z . Neste caso todos pontos do corpo sofrem os mesmos deslocamentos. (b) Vista em corte do corpo no plano xy . A posição angular é medida pelo ângulo θ definido pelo eixo x e a linha de referência.

Na equação (1.1), s é o comprimento do arco do círculo definido pelo eixo x (posição angular nula) e a linha de referência; r é o raio do círculo descrito pela linha de referência. O ângulo θ definido desta forma é medido em *radianos* (rad) em vez de volta ou graus. O radiano é uma razão entre dois comprimentos e, portanto, é um número puro, adimensional. Um volta completa corresponde a 2π radianos, desde que o comprimento de uma circunferência é $2\pi r$:

$$1 \text{ volta} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad.}$$

assim, $1 \text{ rad} = 360^\circ / 2\pi = 57,6^\circ$.

Outro aspecto importante acerca da posição angular é que está não é zerada a cada volta completa da linha de referência em torno do eixo de rotação. Assim, duas voltas completas da linha de referência corresponde a $\theta = 2 \times 2\pi = 4\pi$ e assim por diante.

A descrição do movimento de rotação é completa se sabemos como a posição angular da linha de referência varia com o tempo, ou seja, se conhecemos a função $\theta(t)$. Isso é análogo ao que ocorre no movimento de translação pura em uma dimensão, onde o objetivo é determinar a posição $x(t)$ em função do tempo.

1.2.2 Deslocamento Angular

O deslocamento angular é simplesmente definido como a diferença entre duas posições angulares θ_1 e θ_2 ,

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 \quad (1.2)$$

e como o corpo é rígido, o deslocamento dado pela Eq. (1.2) é válido para todas as partículas que compõem o corpo.

O deslocamento angular pode ser positivo ou negativo, dependendo do corpo estar girando no sentido de θ crescente (anti-horário) ou de θ decrescente (sentido horário).

1.2.3 Velocidade Angular

A *velocidade angular média* é definida tomando-se a razão do deslocamento angular pelo intervalo de tempo em que este deslocamento ocorreu.

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \quad (1.3)$$

onde $\Delta\theta$ é o deslocamento angular que ocorre durante o tempo Δt .

A *velocidade angular (instantânea)* é obtida tomando-se o limite da razão (1.3) quando $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.4)$$

que é simplesmente a derivada da função $\theta(t)$ em relação ao tempo.

É importante notar que as equações (1.3) e (1.4) são válidas não só para o corpo como um todo mas também para cada partícula do corpo, desde que a posição relativa das partículas não se altera. A velocidade angular é medida em radianos por segundo (rad/s), ou revoluções por segundo (rev/s).

O sinal da velocidade segue a mesma convenção do deslocamento angular: positivo no sentido anti-horário e negativo no sentido horário.

1.2.4 Aceleração Angular

A aceleração angular é a taxa com a qual a velocidade angular varia. Definimos a *aceleração angular média* como a razão entre a variação da velocidade pelo tempo em que essa variação ocorreu

$$\alpha_{\text{méd}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad (1.5)$$

e da mesma forma que no caso da velocidade angular, definimos a *aceleração angular (instantânea)* como o limite da equação (1.5) quando $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (1.6)$$

A aceleração angular é medida em radianos por segundo ao quadrado (rad/s^2) ou revoluções por segundo ao quadrado (rev/s^2).

1.2.5 Exemplos

1. A roda da figura 1.3 abaixo tem oito raios igualmente espaçados e um diâmetro de 60 cm. Ela está montada em um eixo mecânico fixo e está girando a 2,5 rev/s. Você quer atirar uma flecha de 20cm de comprimento paralela a este eixo que atravesse a roda sem acertar nenhum dos raios. Suponha que a flecha e os raios são bem finos. (a) Qual a velocidade mínima que a flecha deve ter?

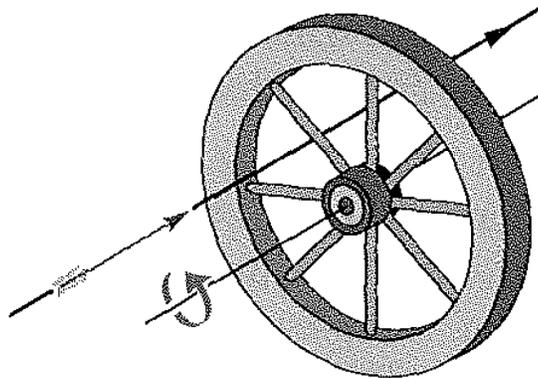


Figura 1.3: Veja Exemplo 1.

Temos que atirar a flecha com uma velocidade tal que esta percorra 20cm dentro de $1/8$ do tempo que a roda gasta para dar uma volta. Isto corresponde ao tempo gasto para a flecha passar entre dois raios. Desde que conhecemos a velocidade angular da roda $\omega = 2,5 \text{ rev/s}$ e também o deslocamento angular

$\Delta\theta = 1/8$ rev, podemos determinar o tempo:

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\frac{1}{8} \text{ rev}}{2,5 \text{ rev/s}} = 0,05 \text{ rev/s}$$

Com isso, podemos calcular a velocidade mínima, simplesmente usando a relação,

$$v_{\min} = \frac{20 \text{ cm}}{0,05 \text{ s}} = 400 \text{ cm/s} = 400 \times 10^{-2} \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

esta é a velocidade mínima que a flecha deve ter para passar através da roda.

(b) *É importante saber em que lugar você mira entre o eixo e a borda da roda? Se for, qual é o melhor lugar?*

Não. Como vimos no item acima, a velocidade mínima da flecha depende apenas de seu comprimento e da velocidade angular da roda. Assim, desde que todos os pontos da roda têm a mesma velocidade angular, tanto faz mirar perto do eixo ou perto da borda, o resultado acima nos garante que a flecha atravessará a roda sem bater dos raios.

2. *Um mergulhador de saltos ornamentais completa 2,5 voltas após saltar de uma plataforma de 10 m antes de entrar na água. Supondo que a velocidade vertical inicial seja nula, ache a velocidade angular média do mergulhador durante um salto.*

Notamos que a queda produz uma velocidade linear de queda dada pela equação de Torricelli,

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y$$

sendo $\Delta y = -10$ m, $a = g = -9,8 \text{ m/s}^2$ e $v_0 = 0$, podemos obter a velocidade final,

$$v = \sqrt{2 \cdot (-9,8) \cdot (-10)}$$

$$v = 14 \text{ m/s}$$

portanto, podemos usar a equação $\Delta v = a \cdot \Delta t$ para obter o tempo em que a velocidade variou, assim,

$$\Delta t = \frac{0 - 14 \text{ m/s}}{-9,8 \text{ m/s}^2} = 1,4 \text{ s}$$

De posse do tempo podemos determinar a velocidade angular média dada pela Eq. (1.3)

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Sendo 2,5 voltas igual a 5π rad, podemos escrever,

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{5\pi \text{ rad}}{1,4 \text{ s}} = 11 \text{ rad/s.}$$

3. Qual a velocidade angular (a) do ponteiro dos segundos (b) do ponteiro dos minutos e (c) do ponteiro das horas de um relógio analógico que está funcionando perfeitamente? Responda em radianos por segundo.

Usamos a fórmula par a velocidade angular média. Sendo uma volta igual a 2π rad, podemos escrever:

(a) ponteiro dos segundos

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{60 \text{ s}} = 0,105 \text{ rad/s.}$$

(b) ponteiro dos minutos

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{60 \times 60 \text{ s}} = 1,75 \times 10^{-3} \text{ rad/s.}$$

(c) ponteiros das horas

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60 \text{ s}} = 1,45 \times 10^{-4} \text{ rad/s.}$$

1.3 Notação Vetorial para as variáveis de rotação

Nas Eqs. (1.1) a (1.6) foram definidas as quantidades que permitem descrever o movimento de rotação de qualquer corpo rígido. A menos da menção ao sentido do movimento poder ser horário ou anti-horário, nada foi dito a respeito do caráter vetorial dessas quantidades. Como sabemos do movimento de translação, em geral faz-se necessário o uso de vetores para caracterizar um movimento em duas e três dimensões. Neste caso, é pertinente perguntar se existe uma relação equivalente no caso de rotação.

A resposta é positiva, de fato devemos recorrer a vetores para descrever um movimento geral de rotação. Aqui o termo “geral” significa que o eixo de rotação, em torno do qual o corpo gira, pode também estar se movendo. No caso particular onde o eixo de rotação está fixo em uma determinada direção, o movimento se reduz ao caso unidimensional e podemos simplesmente usar as equações na forma escalar; o sentido do movimento sendo indicado por sinais de mais e menos como no caso da translação. O valor do deslocamento neste caso particular é simplesmente obtido dando-se apenas um número: o valor de θ .

A rotação apresenta um caráter peculiar e a representação vetorial requer cuidados adicionais. De fato, para caracterizar um movimento mais geral (e.g., um pião, giroscópio, etc.), poderíamos, em princípio, associar um vetor com o deslocamento θ . Assim definiríamos um vetor θ a uma rotação de um ângulo θ , a direção deste vetor associada com a direção do eixo de rotação e seu módulo com o valor do deslocamento angular. No entanto, esta construção falha pois, apesar de ter módulo, direção e sentido, não existe comutatividade na adição de deslocamentos. De fato, como mostrado na figura 1.4, dois deslocamentos angulares consecutivos quando tomados em ordem inversa levam a diferentes posições finais do livro. Desde que a adição de vetores deve ser comutativa, então não podemos considerar deslocamentos como vetores.

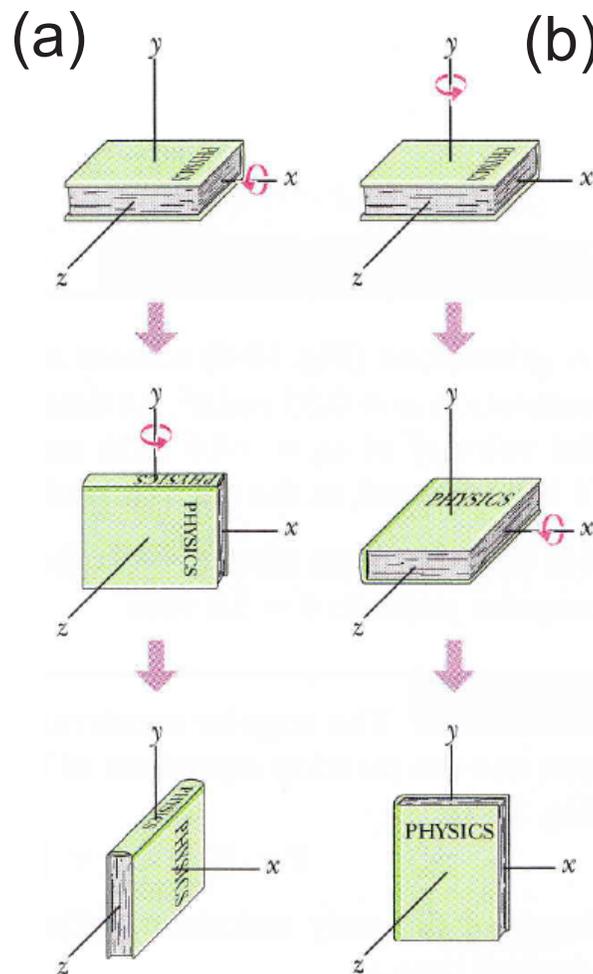


Figura 1.4: (a) um livro sofrendo dois deslocamentos angulares, primeiro em torno do eixo x e, em seguida, em torno do eixo y . (b) mesmos deslocamentos mas na ordem inversa. Podemos notar que deslocamentos angulares não apresentam a propriedade comutativa pois as posições finais do livro são diferentes nos dois casos. Portanto, não podemos representar deslocamentos angulares finitos usando vetores.

O modo de contornar essa dificuldade é trabalhar com rotações infinitesimais, as quais são comutativas e apresentam caráter vetorial. Assim, definimos um vetor $d\boldsymbol{\theta}$ cuja magnitude é o ângulo de rotação $d\theta$ e sua direção é a do eixo de rotação, veja Fig. 1.5a. Entretanto, fisicamente não há nada que permite atribuir um sentido ao vetor. Isto é feito através de uma *convenção*, chamada regra da mão direita. A regra nos instrui a curvar a mão direita com os dedos (exceto polegar) em torno da circunferência descrita pelo sistema em rotação, acompanhando o sentido da rotação. Então o dedo polegar estendido aponta na direção e sentido do vetor $d\boldsymbol{\theta}$. Uma vez estabelecida a regra da mão direita, vamos considerar agora o movimento de um corpo rígido cuja seção transversal está situada no plano xy e o eixo de rotação está na direção Oz , veja figura 1.5b. Assim, desde que qualquer partícula do corpo irá descrever o

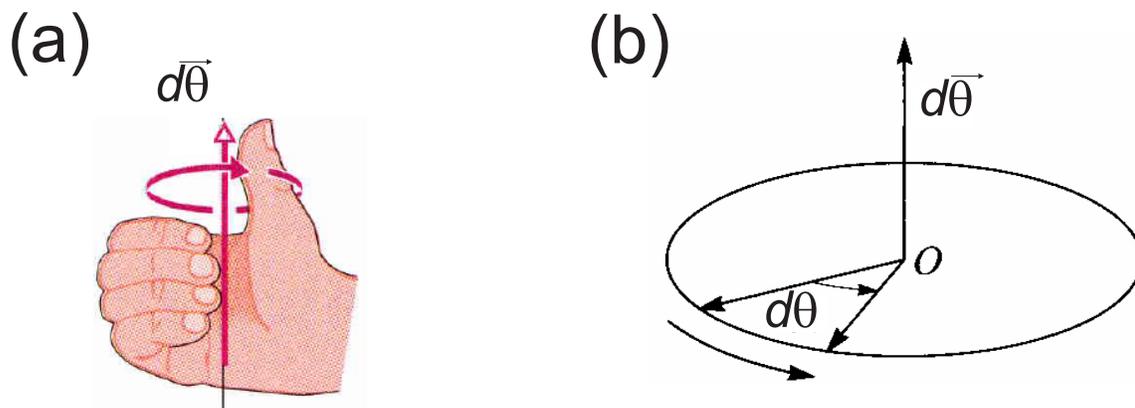


Figura 1.5: (a) Regra da mão direita: o polegar indica o sentido do vetor enquanto que os outros dedos acompanham o sentido da rotação. (b) Vetor deslocamento angular infinitesimal. Este pode ser definido pois a soma de deslocamentos infinitesimais são comutativos, diferente do que ocorre para rotações finitas.

mesmo movimento, representamos na figura a trajetória de uma dessas partículas no plano xy , veja a Fig. 1.6. Um ponto P da seção transversal, à distância r da origem, sofre um deslocamento $ds = r d\theta$ em consequência da rotação infinitesimal. Procuramos agora relacionar $\mathbf{PP}' = ds$ (que no limite infinitesimal em que trabalhamos, pode ser tomado na direção tangente ao círculo da figura) com $d\boldsymbol{\theta}$ e o vetor posição $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$. A relação entre estes três vetores é dada pelo *produto vetorial*¹:

$$ds = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}. \quad (1.7)$$

Com a Eq. (1.7) é bastante simples mostrar que deslocamentos vetoriais são comutativos e se somam como vetores. Para isso, considere duas rotações infinitesimais sucessivas dadas por $d\boldsymbol{\theta}_1$ e $d\boldsymbol{\theta}_2$, aplicadas

¹Revise a seção “Produto Vetorial” do capítulo 3 do Halliday para relembrar as propriedades deste tipo de produto.

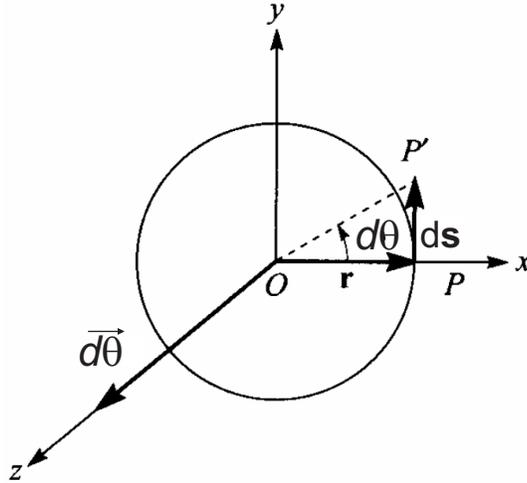


Figura 1.6: Diagrama mostrando o vetor deslocamento angular $d\theta$, deslocamento linear ds e o raio vetor \mathbf{r} . Note que ds é tangente à trajetória mas usamos ainda um triângulo retângulo formado pelos pontos OPP' .

ao ponto P cujo vetor posição é \mathbf{r} , assim, os deslocamentos correspondentes são dados por:

$$ds_1 = d\theta_1 \times \mathbf{r}$$

$$ds_2 = d\theta_2 \times \mathbf{r}$$

Desde que os deslocamentos ds_1 e ds_2 são vetores (são deslocamentos lineares), então o deslocamento resultante pode ser obtido através da soma:

$$ds = ds_1 + ds_2$$

e substituindo ds_1 e ds_2 segue que

$$ds = d\theta_1 \times \mathbf{r} + d\theta_2 \times \mathbf{r}$$

e, lembrando que o produto vetorial é distributivo, i.e., $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, podemos escrever

$$ds = (d\theta_1 + d\theta_2) \times \mathbf{r}$$

que indica que $d\theta_1 + d\theta_2 = d\theta_2 + d\theta_1$ para rotações infinitesimais.

A velocidade angular pode então ser definida da seguinte forma:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \times \mathbf{r}$$

onde a última substituição é válida pois está se tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$, ou seja $d\mathbf{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{s}$ assim, segue que

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \times \mathbf{r}$$

e definindo o *vetor velocidade angular* como

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.8)$$

obtemos finalmente:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.9)$$

desde que $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}$ veja figura 1.4.

O módulo do vetor velocidade angular² $\omega = d\theta/dt$ corresponde à velocidade angular escalar dada pela equação (1.4) e seu sentido é o mesmo do vetor $d\theta$, ou seja, definido usando-se a regra da mão direita.

1.3.1 Relacionando as variáveis lineares com as angulares

A Eq. (1.9) é uma relação envolvendo uma variável linear \mathbf{v} e uma variável angular $\boldsymbol{\omega}$. Esta equação nos diz que partículas mais distantes do eixo de rotação apresentam velocidade linear maior do que aquelas próximas do centro desde que $\boldsymbol{\omega}$ é igual para todas as partículas do corpo rígido. A direção e o sentido do vetor \mathbf{v} é sempre tangente à trajetória circular descrita pelas partículas em torno do eixo de rotação, como mostrado na figura 1.6. Aqui, como o interesse está no movimento de rotação do corpo, consideramos o caso simples em que o eixo de rotação é fixo e o vetor $\boldsymbol{\omega}$ é perpendicular ao vetor \mathbf{r} . Neste caso, o produto escalar entre estes vetores é nulo, $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$.

O que dizer da aceleração linear sofrida pelas partículas do corpo? Isto pode ser verificado aplicando-se a derivada temporal sobre a Eq. (1.9):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

aqui fazemos as identificações:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

²Os vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $d\theta$ diferem dos demais vetores encontrados até aqui porque apesar de terem módulo e direção seu sentido é definido através de uma convenção. Veja a discussão sobre vetores polares e axiais no capítulo 11 do livro do Moisés.

e, como já definido $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, podemos escrever,

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

mas como sabemos $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, assim podemos escrever

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

No segundo termo podemos aplicar a seguinte identidade vetorial,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

assim, identificando \mathbf{a} e \mathbf{b} com $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{r} com \mathbf{c} , podemos reescrever a aceleração da seguinte forma,

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}$$

e como o produto escalar $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$ é nulo, ficamos com:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$$

onde usamos o fato de que $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{\omega}| \cos 0^\circ = \omega^2$. Assim, podemos notar que a aceleração possui duas componentes uma na mesma direção que \mathbf{v} , e portanto, tangente à trajetória circular descrita pela partícula e outra componente radial, dirigida para o centro ($-\mathbf{r}$) da trajetória circular (aceleração centrípeta). Assim, escrevemos:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r \tag{1.10}$$

onde,

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r},$$

$$\mathbf{a}_r = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

Podemos identificar a componente radial \mathbf{a}_r com a aceleração centrípeta do movimento circular uniforme já estudado no curso anterior de mecânica. Como estamos considerando aqui o caso em que $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{r} são perpendiculares, então o módulo da velocidade linear \mathbf{v} , é simplesmente $v = \omega r$. Assim, definindo $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, onde $\hat{\mathbf{r}}$ é um vetor de módulo unitário podemos escrever

$$\mathbf{a}_r = -\omega^2 r \hat{\mathbf{r}}.$$

e usando $\omega = v/r$, podemos escrever ainda,

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}.$$

que é a fórmula para a aceleração centrípeta já obtida usando a segunda lei de Newton para uma partícula executando um movimento circular uniforme.

A componente tangencial também pode ser simplificada, visto que \mathbf{r} e $\boldsymbol{\alpha}$ também são perpendiculares. $\boldsymbol{\alpha}$ está na mesma direção do vetor $\boldsymbol{\omega}$, assim o produto vetorial $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ pode ser escrito da seguinte maneira,

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} = \alpha r(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \hat{\mathbf{r}})$$

onde $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ e $\hat{\mathbf{r}}$ são vetores unitários apontando na mesma direção de $\boldsymbol{\alpha}$ e \mathbf{r} , respectivamente. Assim, dado que sabemos a direção dos vetores, e que estas direções não mudam, podemos trabalhar com as equações escalares:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} \quad (1.11a)$$

$$a_t = \alpha r \quad (1.11b)$$

1.4 Rotação com aceleração angular (α) constante

Os conceitos desenvolvidos na seção 1.3 serão úteis em casos mais gerais onde o eixo de rotação está em movimento. No entanto, antes de considerar o caso mais geral, é interessante considerar o caso mais simples onde o eixo de rotação está fixo e, portanto, o movimento pode ser escrito usando-se as equações escalares dadas na seção 1.2.

A aceleração angular instantânea, representada por α , é dada pela Eq. (1.6):

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

e desde que α é constante, podemos determinar o valor de ω em função do tempo diretamente integrando-se a equação acima em relação ao tempo:

$$\int \alpha dt = \int \frac{d\omega}{dt} dt$$

e desde que $\omega = \omega(t)$ é função do tempo apenas, sabemos do cálculo diferencial e integral que $d\omega = \frac{d\omega}{dt} dt$, assim:

$$\alpha \int dt = \int d\omega$$

onde retiramos α para fora do sinal de integração devido ao fato do mesmo ser constante no tempo. A integral de uma diferencial é a própria variável, assim

$$\omega(t) = \alpha t + C \quad (1.12)$$

lembrando que cada integral, por ser indefinida, gera uma constante arbitrária. Sendo arbitrárias podemos somá-las resultando em apenas uma constante e assim a Eq. 1.12 é obtida. A constante de integração pode ser determinada a partir de uma condição inicial, ou seja, precisamos conhecer o valor de $\omega(t)$ em um determinado instante. Seja $\omega(t_0) = \omega_0$ então, substituindo na Eq. (1.12), obtemos:

$$\omega(t_0) = \omega_0 = \alpha t_0 + C$$

e isolando C obtemos:

$$C = \omega_0 - \alpha t_0$$

e substituindo o valor de C na Eq. (1.12) obtemos,

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0 - \alpha t_0$$

e rearranjando, obtemos a primeira relação importante da rotação de corpos rígidos:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \quad (1.13)$$

em geral fazemos $t_0 = 0$, assim comumente encontramos em alguns livros a mesma equação escrita na forma:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t. \quad (1.14)$$

Agora que sabemos como a velocidade angular varia com o tempo, podemos determinar a posição angular em função do tempo através da Eq. (1.4)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

e integrando no tempo, podemos escrever:

$$\int \omega(t) dt = \int \frac{d\theta}{dt} dt$$

a integral no segundo membro é bastante simples pois se reduz à diferencial de θ , assim:

$$\int \omega(t) dt = \int d\theta = \theta(t) + K_1$$

onde realizamos a integração sobre θ e K_1 é a constante de integração correspondente.

Agora resta substituir o valor de $\omega(t)$ dentro da integral do primeiro membro. Já sabemos que o seu valor é dado pela Eq. (1.13), assim segue que

$$\theta(t) + K_1 = \int [\omega_0 + \alpha(t - t_0)] dt =$$

o que pode ser escrito na forma,

$$\theta(t) + K_1 = \int \omega_0 dt + \int \alpha(t - t_0) dt$$

e resolvendo as integrais segue que:

$$\theta(t) + K_1 = \omega_0 t + K_2 + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 + K_3$$

e podemos novamente juntar todas as constantes de integração em apenas uma só, assim escrevemos $K_2 + K_3 - K_1 = K$, o que leva a,

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 + K \quad (1.15)$$

Para determinar a constante K , consideramos que no tempo inicial t_0 a posição angular seja $\theta(t_0) = \theta_0$, assim, substituindo essa condição na Eq. (1.15), segue que

$$\theta(t_0) = \omega_0 t_0 + \frac{1}{2}\alpha(t_0 - t_0)^2 + K$$

ou ainda,

$$\theta(t_0) = \omega_0 t_0 + 0 + K$$

logo,

$$K = \theta_0 - \omega_0 t_0$$

e substituindo K na Eq. (1.15), obtemos finalmente

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad (1.16)$$

e como t_0 é arbitrário, podemos fazer $t_0 = 0$, o que nos permite escrever

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2. \quad (1.17)$$

As Eqs. (1.16) a (1.17) permitem obter a variação temporal dada a velocidade e posição iniciais e a aceleração do sistema. Muitas vezes é conveniente trabalhar apenas com velocidade e posição sem considerações em relação ao tempo. Para isso, vamos considerar novamente a equação para a aceleração angular,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

o que pode ser escrito na seguinte forma, usando a regra da cadeia,

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

mas, como sabemos $d\theta/dt = \omega$, assim,

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

e novamente integrando em θ segue que

$$\int \alpha d\theta = \int \omega \frac{d\omega}{d\theta} d\theta$$

e novamente usando a diferencial de ω em relação à posição, obtemos

$$\alpha \int d\theta = \int \omega d\omega$$

ou ainda,

$$\alpha\theta + L_1 = \frac{\omega^2}{2} + L_2$$

onde L_1 e L_2 são as constantes de integração. Assim, agrupando ambas as constantes em apenas uma, obtemos

$$\alpha\theta = \frac{\omega^2}{2} + L \tag{1.18}$$

onde $L = L_1 - L_2$.

Agora resta determinar L . Considerando que para uma dada posição θ_0 a velocidade angular é ω_0 podemos escrever:

$$\alpha\theta_0 = \frac{\omega_0^2}{2} + L$$

assim,

$$L = \alpha\theta_0 - \frac{\omega_0^2}{2}$$

e substituindo novamente na Eq. (1.18) obtemos

$$\alpha\theta = \frac{\omega^2}{2} + \alpha\theta_0 - \frac{\omega_0^2}{2}$$

o que pode ser escrito na seguinte forma,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (1.19)$$

que é a equação procurada.

Existem ainda outras equações que podem ser obtidas a partir da combinação das definições de valores médios com as equações deduzidas. Retomando a Eq. (1.19), podemos escrever:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

ou ainda,

$$(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

e substituindo Eq. (1.13) no primeiro membro, obtemos ainda,

$$(\omega + \omega_0)\alpha(t - t_0) = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

e simplificando podemos escrever ainda,

$$\frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} = \frac{\omega + \omega_0}{2} \quad (1.20)$$

e notamos que o primeiro membro é simplesmente $\Delta\omega/\Delta t$ [c.f. Eq. (1.3)] que é a definição da velocidade angular média $\omega_{\text{méd}}$, assim, escrevemos finalmente:

$$\omega_{\text{méd}}(t) = \frac{\omega(t) + \omega_0}{2}. \quad (1.21)$$

A Eq. (1.20) tem a vantagem de não ser necessário o conhecimento do valor de α , basta saber os valores iniciais do tempo, velocidade e posição angulares. Outra possibilidade, seria obter uma equação sem que se necessite o valor da velocidade angular inicial, para isso, primeiramente multiplicamos a equação (1.13) por $t - t_0$, assim temos:

$$\omega(t - t_0) = \omega_0(t - t_0) + \alpha(t - t_0)^2.$$

A Eq. (1.16) relaciona a posição angular com a velocidade inicial,

$$\theta - \theta_0 = \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

e subtraindo esta equação da primeira segue que,

$$\omega(t - t_0) - (\theta - \theta_0) = 0 + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2.$$

ou ainda,

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0) - \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad (1.22)$$

que é a equação procurada.

As equações obtidas até aqui permitem a descrição completa do movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante. Este conjunto de equações é completamente análogo ao caso do movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) de translação. Na tabela abaixo, fazemos um resumo das equações obtidas e as colocamos ao lado das equações correspondentes para o caso translacional. Note que existe uma correspondência direta entre as variáveis posição, velocidade e aceleração, bastando apenas trocar os símbolos nas equações lineares para obter as suas versões correspondentes no caso angular.

Eq. Linear	Var. ausente	Var. ausente	Eq. Angular	n° da Eq.
$v = v_0 + a(t - t_0)$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$	Eq. (1.13)
$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$	Eq. (1.16)
$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$	$(t - t_0)$	$(t - t_0)$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$	Eq. (1.19)
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)(t - t_0)$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)(t - t_0)$	Eq. (1.20)
$x - x_0 = v(t - t_0) - \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0) - \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$	Eq. (1.22)

Tabela 1.1: Comparação entre as equações para translação e rotação, desenvolvidas no texto.

É importante perceber que as equações da tabela 1.1 foram obtidas a partir das definições de velocidade e aceleração impondo a condição de que a aceleração angular é constante. Assim, não existe, sob nenhuma hipótese a necessidade de memorizar as equações da tabela 1.1, bastando simplesmente aplicar as regras de derivação e integração sobre as definições de velocidade e aceleração.

1.4.1 Exemplos

Aqui consideramos alguns exemplos de aplicação das equações dadas na tabela 1.1. Outros exemplos podem ser encontrados nas referências. Recomenda-se resolver o maior número de problemas para se obter um melhor entendimento do assunto.

1. Um tambor gira em torno de seu eixo central com uma velocidade angular de 12,60 rad/s. Se o tambor então desacelera a uma taxa constante de 4,20 rad/s², (a) quanto tempo ele gasta para ficar em repouso? (b) qual o ângulo que ele descreve antes de chegar no repouso?

(a)

São dadas a velocidade angular inicial de 12,60 rad/s e a aceleração angular de 4,20 rad/s². Assim, considerando as relações dadas na tabela 1.1, escolhamos a equação (1.13), onde escolhamos $t_0 = 0$ o tempo em que a desaceleração começa a atuar no sistema. Assim, fazendo $\omega = 0$ e $\omega_0 = 12,60$ rad/s, podemos determinar o tempo em que o tambor pára:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

desde que o sistema desacelera então $\alpha < 0$, assim escrevemos:

$$0 = 12,60 \text{ rad/s} - 4,20 \text{ rad/s}^2 \times t$$

o que nos fornece:

$$t = 3 \text{ s.}$$

(b)

Agora, podemos determinar o ângulo descrito pelo tambor. Basta usar a equação (1.20)

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)(t - t_0)$$

fazendo $\theta_0 = 0$ e $t_0 = 0$ e substituindo os valores correspondentes obtemos:

$$\theta - 0 = \frac{1}{2}(12,60 \text{ rad/s} + 0)(3 \text{ s} - 0)$$

$$\theta = 18,9 \text{ rad.}$$

2. Em $t = 0$ um volante possui uma velocidade angular de 4,7 rad/s e uma aceleração angular de -0,25 rad/s², e uma linha de referência em $\theta_0 = 0$. (a) Qual o deslocamento angular máximo θ_{max} da linha de referência no sentido positivo? Em que tempo t a linha de referência estará em (b) $\theta = \theta_{max}/2$ e (c) $\theta = -10,5$ rad (considere tanto valores positivos quanto negativos de t)? faça o gráfico de θ contra t e indique as respostas dos itens (a), (b) e (c) no gráfico.

(a)

O volante apresenta uma velocidade angular inicial positiva, mas como uma aceleração angular negativa. Com isso, após um certo tempo o volante vai inverter o sentido de rotação. Portanto, o valor máximo pedido no item (a) pode ser determinado com a condição e que a velocidade angular é zero. Com estas informações, podemos usar a equação (1.19) como $\omega = 0$, $\alpha = -0,25 \text{ rad/s}^2$, $\omega_0 = 4,7 \text{ rad/s}$ e $\theta = \theta_{max}$:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$0 - (4,7 \text{ rad/s})^2 = 2 \times (-0,25 \text{ rad/s}^2)(\theta_{max} - 0)$$

portanto,

$$\theta_{max} = 44 \text{ rad.}$$

(b)

Também é pedido o tempo correspondente ao ângulo $\theta = \theta_{max}/2$. Para isso, usamos a Eq. (1.16)

$$\theta - \theta_0 = \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \quad (1.23)$$

com $t_0 = 0$. Assim, substituindo os dados anteriores podemos escrever

$$\frac{44}{2} - 0 = 4,7t + \frac{1}{2}(-0,25)t^2$$

$$22 = 4,7t + \frac{1}{2}(-0,25)t^2$$

ou ainda,

$$0,125t^2 - 4,7t + 22 = 0$$

logo,

$$t = \frac{4,7 \pm \sqrt{4,7^2 - 4 \times 0,125 \times 22}}{2 \times 0,125} = \frac{4,7 \pm 3,3}{0,25}$$

e temos duas possibilidades:

$$t_1 = 5,6 \text{ s} \quad \text{e} \quad t_2 = 32 \text{ s}$$

e vemos então que a primeira vez que a linha de referência passa por $\theta_{max}/2$ é o tempo de 5,6 s.

(c)

Agora vamos considerar que $\theta = -10,5$ rad, no lugar the θ_{max} . Assim, fazendo a troca na Eq. (1.23) segue que,

$$-10,2 - 0 = 4,7t + \frac{1}{2}(-0,25)t^2$$

ou ainda,

$$0,125t^2 - 4,7t - 10,2 = 0$$

logo,

$$t = \frac{4,7 \pm \sqrt{(-4,7)^2 + 4 \times 0,125 \times 10,2}}{2 \times 0,125} = \frac{4,7 \pm 5,21}{0,25}$$

que nos fornece duas raízes: $t_3 = -2$ s e $t_4 = 39,6$ s

O gráfico pode ser feito considerando-se a seguinte relação:

$$\theta(t) = 4,7t - 0,125t^2$$

que é a equação horária para o sistema em questão. Assim, plotando θ em função do tempo obtemos o gráfico mostrado na Fig. 1.7. Note da Fig. 1.7 que t_1 e t_2 estão dispostos simetricamente em torno do

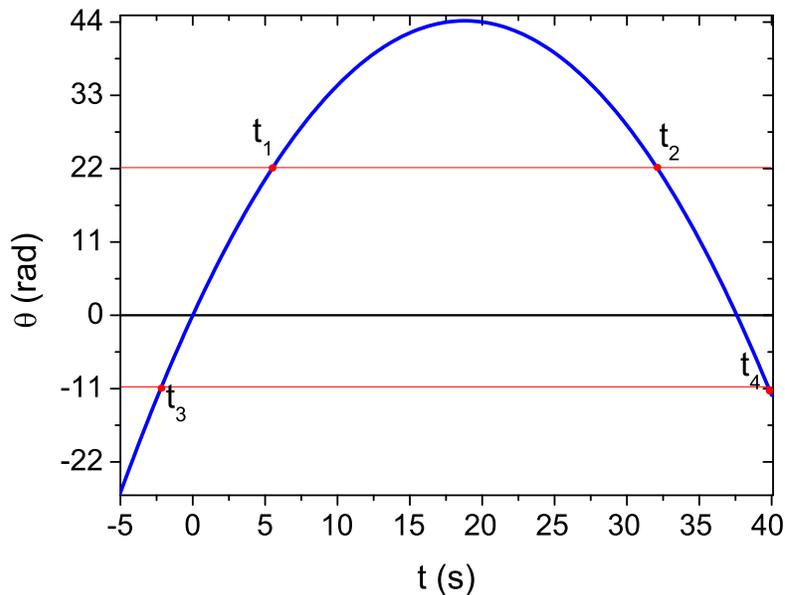


Figura 1.7: Problema 2. Gráfico da função $\theta(t) = 4,7t - 0,125t^2$. Os pontos calculados estão destacados por pontos vermelhos no gráfico.

máximo, desde que estes pontos correspondem ao valor do tempo em que a posição angular é metade do

seu valor máximo.

3. Uma roda girando em torno de um eixo fixo que passa pelo seu centro possui uma aceleração angular constante de $4,0 \text{ rad/s}^2$. Em um certo intervalo de $4,0 \text{ s}$, a roda descreve um ângulo de 80 rad . (a) Qual a velocidade angular da roda no início do intervalo de $4,0 \text{ s}$? (b) Supondo que a roda parte do repouso, há quanto tempo ela estava em movimento no início do intervalo de $4,0 \text{ s}$?

(a)

É dada a aceleração angular da roda que é $\alpha = 4,0 \text{ rad/s}^2$. Também é dada $\Delta\theta = 80 \text{ rad}$ para $\Delta t = 4,0 \text{ s}$. O que está sendo pedido é a velocidade angular inicial da roda, i.e., ω_0 . Dadas as informações que temos, podemos aplicar a Eq. (1.16)

$$\Delta\theta = \omega_1\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2$$

e substituindo os valores correspondentes, obtemos:

$$80 \text{ rad} = \omega_1(4,0 \text{ s}) + \frac{1}{2}(4,0 \text{ rad/s}^2) \times (4,0 \text{ s})^2$$

e fazendo os cálculos segue que,

$$\omega_1 = 12 \text{ rad/s}$$

que seria a velocidade angular no início do intervalo. Note que não estamos usando ω_0 pois não estamos considerando que o intervalo de 4 s seja contado do tempo inicial.

(b)

Agora sim, estamos considerando que a roda começa a se movimentar do repouso e acelera com aceleração angular igual a $\alpha = 4,0 \text{ rad/s}^2$. Assim, a roda gasta um certo tempo t desde o repouso e então chega ao início do intervalo de 4 s , considerado no item anterior. Assim, para determinar este tempo, usamos a equação (1.13), $\omega = \omega_1$ e $\omega_0 = 0$, assim segue que:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\Delta t$$

$$12 \text{ rad/s} = 0 + (4,0 \text{ rad/s}^2)\Delta t$$

assim, obtemos,

$$\Delta t = 3 \text{ s}.$$

e notamos então, que a roda se movimentou durante 3 s , antes do intervalo de 4 s que consideramos no item anterior.

1.5 Energia cinética de rotação

No caso do movimento linear, já visto no curso prévio de física, mostrou-se interessante tratar problemas de mecânica usando-se o ponto de vista da energia. Em determinadas situações, a resolução do problema pode ser facilitada em comparação com a aplicação das leis de Newton. Na realidade o ponto de vista da energia está por trás de uma formulação alternativa da mecânica chamada de *mecânica analítica* onde a 2ª lei de Newton ser obtida como um caso particular das equações da mecânica analítica. Infelizmente, o tratamento de problemas de mecânica usando esta formulação está fora do escopo do curso. Informações adicionais podem ser obtidas no livro do Marion & Thornton.

Um corpo em rotação tem energia cinética, desde que todas as partículas do corpo estão em movimento. Sendo assim, é natural perguntar como determinar a energia cinética de um corpo em rotação. Dos capítulos anteriores do Halliday, sabemos que a energia cinética de uma partícula com velocidade \mathbf{v} é dada por $mv^2/2$. Assim, no caso de um corpo rígido em rotação, a energia cinética pode ser obtida somando-se as energias cinéticas de todas as partículas do corpo:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \dots = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \quad (1.24)$$

onde m_i é a massa da i -ésima partícula e v_i a velocidade correspondente. A notação \sum_i é uma maneira abreviada de indicar a soma sobre todas as partículas do corpo. A dificuldade com a Eq. (1.24) é que as velocidades v_i são todas diferentes para cada partícula. Podemos resolver o problema considerando a Eq. (1.9)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Como estamos considerando o caso em que o eixo de rotação está fixo, podemos tomar o eixo de rotação perpendicular ao plano definindo por \mathbf{v} e \mathbf{r} , sendo assim, os três vetores são perpendiculares entre si e o módulo da velocidade é dada simplesmente por

$$v = \omega r$$

está relação é válida para todas as partículas do corpo rígido. Assim, substituindo o módulo da velocidade linear na Eq. (1.24), segue que:

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

desde que a velocidade angular é a mesma para todas as partículas do corpo, então podemos colocá-la em evidência. Assim, reescrevemos a energia cinética da seguinte forma:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1.25)$$

onde definimos,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (1.26)$$

A relação (1.25) é a expressão para a energia cinética de rotação. No caso do movimento de translação pura de um corpo rígido, a energia cinética é dada por $K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, onde M é a massa total do corpo e v_{cm} é a velocidade do centro de massa do corpo. Na versão de rotação, ω é análogo à v_{cm} enquanto que a quantidade I , chamada momento de inércia, é análoga à massa total do corpo. No entanto, o momento de inércia, medido no SI em quilogramas·metro quadrado ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$), nos informa como a massa do corpo está distribuída em torno do eixo de rotação do corpo. Desta forma, no movimento de rotação não importa apenas a massa do corpo, mas também a sua forma. Podemos perceber isso quando giramos uma haste longa e pesada (um pedaço de cano, cabo de vassoura, etc.) em torno de seu eixo central (longitudinal) e em torno de um eixo perpendicular à haste passando pelo seu centro. As duas rotações envolvem a mesma massa, a primeira rotação é muito fácil do que a segunda. A razão é que a distribuição de massa está muito mais localizada em torno do eixo no primeiro caso do que no segundo. Como resultado o momento de inércia é maior no segundo caso do que no primeiro. Isso pode ser visto diretamente da definição 1.26. No primeiro caso os valores de r_i são no máximo do tamanho do raio da haste (supondo uma haste com seção transversal circular); no segundo caso r_i pode ser no máximo metade do comprimento da haste o que gera valores mais altos de I , e como consequência, uma dificuldade maior (inércia) para o movimento.

1.5.1 Cálculo do momento de inércia

A aparência da Eq. (1.26) nos dá a impressão de ser impossível de determinar o valor do momento de inércia desde que consiste em uma soma sobre todas as partículas do corpo rígido. De fato, no limite onde as partículas são infinitesimais, teríamos um número infinito de partículas inviabilizando o cálculo. No entanto, neste limite podemos considerar o corpo contínuo e assim, substituir a soma discreta por uma integração. Assim, reescrevemos a Eq. (1.26) na forma integral,

$$I = \int r^2 dm \quad (1.27)$$

relembrando que r é a distância do elemento de massa dm do eixo de rotação.

Em geral, a solução da integral na Eq. (1.27) pode ser extremamente complicada, mas é possível determinar o momento de inércia facilmente de alguns objetos que apresentam grande simetria tais como cilindros, esferas, anéis, etc. Além disso, é necessário considerar que estes objetos são *homogêneos*, i.e., a distribuição de massa é idêntica em todas as partes do corpo. Formalmente, isso significa que a densidade de massa ρ é constante sobre o volume do corpo³. Assim, um elemento de massa dm cujo volume é dV é dado por $dm = \mu dV$, onde $\mu = \text{constante}$.

Alguns exemplos de cálculo de momento de inércia

Anel circular delgado, em torno do centro (Fig. 1.8). Vamos considerar alguns exemplos bastante elementares usando a Eq. (1.27). O primeiro exemplo é um anel de raio R e massa M que gira em torno de um eixo passando pelo seu centro. Considerando que o anel está centrado no plano xy , então o eixo de rotação é o eixo z . Assim, na aplicação da Eq. (1.27), devemos ter em mente que a distância de qualquer elemento de massa do eixo de rotação é o próprio raio do anel. Assim, $r^2 = R^2$ que é uma constante ao longo de todo o comprimento do anel, logo,

$$I_{\text{anel}} = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2 \quad (1.28)$$

onde usamos o fato de que $\int dm = M$, a soma sobre todos os elementos de massa só pode resultar na massa total do corpo.

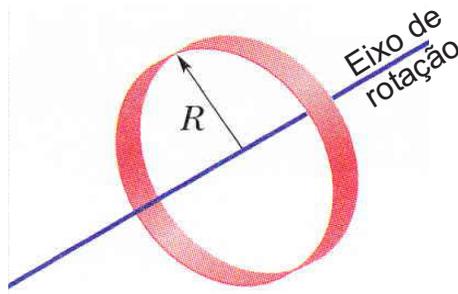


Figura 1.8: Anel delgado de massa M e raio R com momento de inércia igual a $I = MR^2$.

Disco circular em torno do centro, (Fig. 1.9). Agora consideramos em vez de um anel delgado, um disco homogêneo cujo eixo de rotação também está ao longo do eixo z como no exemplo anterior, para o anel. Observe que agora, não podemos considerar que os elementos de massa distam do mesmo

³no livro do Moysés, a densidade é denotada por μ e não ρ como no nosso caso. Ele faz isso porque usa o ρ para denotar a distância r .

comprimento como no caso do anel. Assim, devemos considerar passar a integração na massa para uma integração na área do disco usando a relação entre a densidade e a massa. Se o disco tem massa M e área igual a πR^2 , então a densidade de massa por unidade de área é simplesmente,

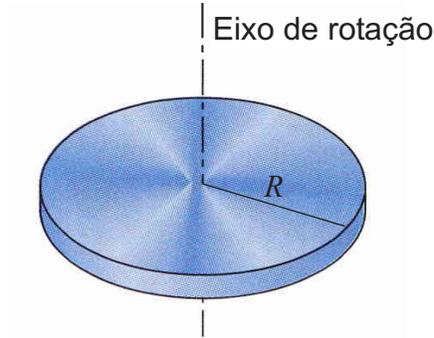


Figura 1.9: Disco de massa M e raio R com momento de inércia igual a $I = MR^2/2$.

$$\mu = \frac{M}{\pi R^2}$$

mas também temos que,

$$dm = \mu dA$$

desde que o disco é homogêneo. Assim, como $dA = 2\pi r dr$, podemos escrever ainda,

$$dm = \mu 2\pi r dr$$

onde r é uma distância qualquer entre 0 e R , o raio do disco. Substituindo μ , segue que,

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} r dr$$

Agora podemos considerar a definição integral do momento de inércia,

$$I_{\text{disco}} = \int r^2 dm$$

e substituindo dm , obtemos

$$I_{\text{disco}} = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2} r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R dr$$

logo,

$$I_{\text{disco}} = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4}$$

ou ainda,

$$I_{\text{disco}} = \frac{MR^2}{2} \quad (1.29)$$

Note que a diferença entre o disco e o anel é apenas o coeficiente na frente de MR^2 . Isto é bastante geral afinal a unidade do momento de inércia deve ser sempre a mesma. Deste modo, caso seja obtido algum resultado com M e R com expoentes diferentes, é provável que tenha sido cometido algum erro no cálculo de I .

Barra delgada, em torno do centro. Consideramos uma barra fina de comprimento L com eixo de rotação passando perpendicularmente à haste no ponto localizado no centro da haste.

Aqui novamente consideramos que a barra delgada é homogênea assim a densidade de massa é constante. A densidade de massa, é dada por,

$$\mu = \frac{M}{L}$$

e além disso temos ainda:

$$\mu = \frac{dm}{dx}, \quad dm = \frac{M}{L} dx$$

Agora consideramos a definição do momento de inércia

$$I_{\text{barra}} = \int x^2 dm$$

Considerando que a origem está situada no centro da barra, então a integração deve ser feita de $-L/2$ a $L/2$:

$$I_{\text{barra}} = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{2M}{3L} \frac{L^3}{8}$$

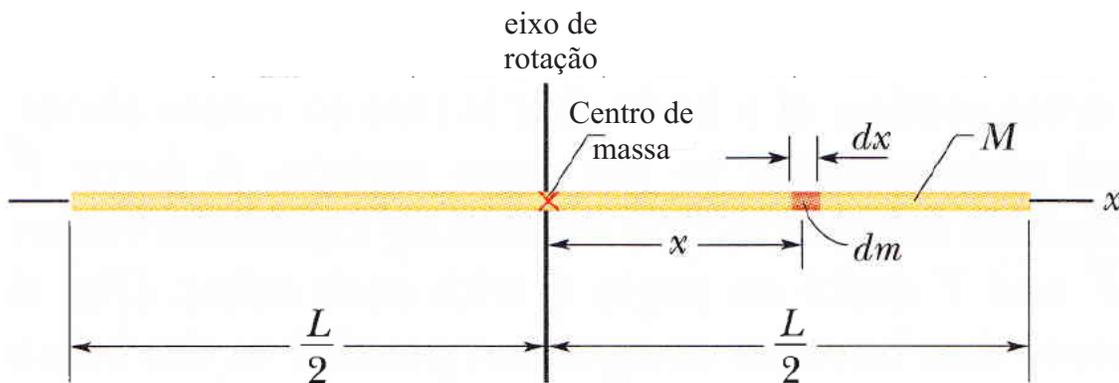


Figura 1.10: Haste de massa M e comprimento L com momento de inércia igual a $I = ML^2/12$.

e fazendo as simplificações, chegamos a

$$I_{\text{barra}} = \frac{ML^2}{12}$$

1.5.2 Teorema do eixo paralelo

Os exemplos dados acima, são aplicações da definição do momento de inércia em sistemas em que o centro de massa coincide com o eixo de rotação. É claro que poderíamos aplicar a definição para o caso em que o eixo de rotação não coincide com o centro de massa, mas em geral isso pode ser complicado. Em vez disso, vamos usar o teorema do eixo paralelo que permite a determinação do momento de inércia de um modo mais simples. O teorema diz que uma vez determinado o momento de inércia em torno de um eixo passando pelo centro de massa, que chamamos I_{cm} , o momento de inércia em torno de um eixo paralelo ao eixo do centro de massa, que está a uma distância h , é dado pela seguinte fórmula,

$$I = I_{cm} + Mh^2. \quad (1.30)$$

Prova do Teorema do eixo paralelo

A prova do teorema é realizada aplicando-se a definição do momento de inércia ao corpo de forma arbitrária mostrado em corte na figura 1.11. Escolhemos a origem do sistema de coordenadas no ponto O e definimos dois eixos paralelos perpendiculares ao plano da figura, sendo que um passa pela origem e o outro no ponto P . Sejam a e b as coordenadas x e y do ponto P , respectivamente. Considerando um elemento de massa qualquer, de coordenadas x e y , então o momento de inércia em relação ao eixo passando pelo ponto P é dado por,

$$I = \int r^2 dm = \int [(x - a)^2 + (y - b)^2] dm$$

que pode ser reescrita como,

$$I = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2) dm$$

Da definição do centro de massa, a primeira integração é simplesmente o momento de inércia em torno da origem, assim identificamos a primeira integral com I_{cm} ; a segunda e terceira integrais são proporcionais às coordenadas do centro de massa, assim identificamos estas como sendo x_{cm} e y_{cm} , respectivamente; a última integração demanda uma última manipulação desde que o integrando é uma

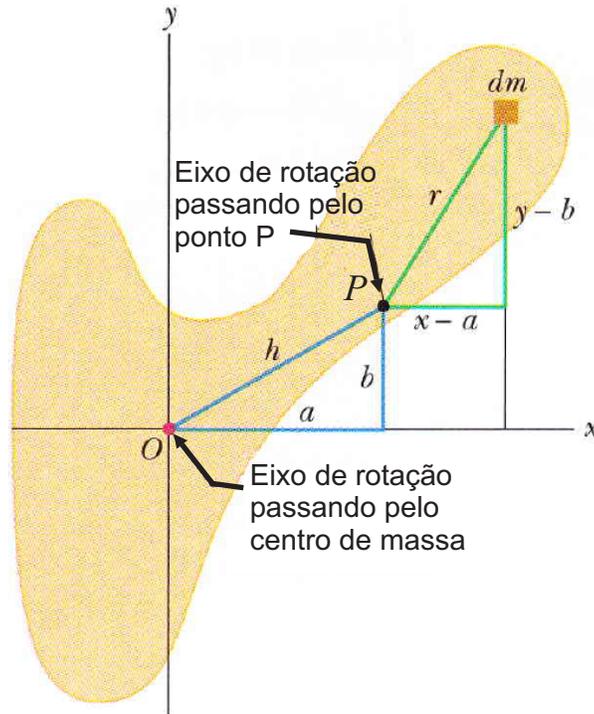


Figura 1.11: Vista em corte de um corpo rígido de forma arbitrária com centro de massa em O . O teorema do eixo paralelo permite relacionar o momento de inércia em torno de O com o momento de inércia em torno de um ponto P qualquer a uma distância h de O .

constante em relação a variável de integração então pode ser retirado de dentro da integral, logo

$$I = I_{cm} - 2aMx_{cm} - 2bMy_{cm} + (a^2 + b^2) \int dm$$

e como $\int dm = M$, podemos escrever ainda,

$$I = I_{cm} - 2aMx_{cm} - 2bMy_{cm} + (a^2 + b^2)M$$

Agora, lembramos que $x_{cm} = 0$ e $y_{cm} = 0$ pois o centro de massa está localizado na origem do centro de coordenadas. Além disso, $a^2 + b^2 = h^2$ que é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos a e b . h é também a distância entre os pontos P e O , ou seja, a distância entre os dois eixos de rotação. Assim, finalmente escrevemos a expressão final,

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

que é o resultado que queríamos provar.

Exemplo de aplicação do teorema (Fig. 1.12). Aqui vamos aplicar o teorema dos eixos paralelos para calcular o momento de inércia de duas partículas de massa m ligadas por uma haste de comprimento L e massa desprezível.

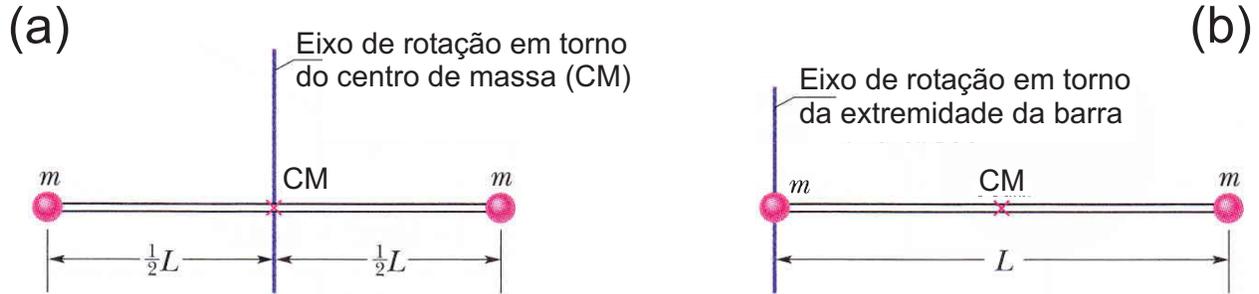


Figura 1.12: Duas massas m conectadas por uma haste de massa desprezível. (a) eixo de rotação passando pelo centro de massa (CM) da barra. (b) Eixo de rotação passando por uma das extremidades de barra.

- Qual o momento de inércia I_{cm} deste corpo em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, perpendicular à haste?

O centro de massa claramente se encontra no meio da haste, i.e., em $L/2$. Desde que temos duas massas localizadas, então podemos aplicar a versão discreta da fórmula para o cálculo do momento de inércia, assim segue que

$$I_{cm} = \sum_i m_i r_i^2 = m \left(\frac{L}{2} \right)^2 + m \left(-\frac{L}{2} \right)^2$$

onde estamos assumindo, como sempre, que a origem do sistema de coordenadas coincide com o eixo de rotação. Assim, fazendo-se a álgebra simples, obtemos

$$I_{cm} = \frac{mL^2}{2}$$

- Qual o momento de inércia I deste corpo em torno de um eixo que passa pela extremidade esquerda da haste e é paralelo ao primeiro?

Desde que o exemplo é bastante elementar, podemos resolver de duas formas: aplicando diretamente a equação para o momento de inércia ou usando o teorema do eixo paralelo.

Usando a fórmula diretamente segue que,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m(0)^2 + mL^2 = mL^2$$

a desde que uma das massas coincide com o eixo de rotação, então a sua distância é zero. A segunda massa está na segunda extremidade da barra então a distância é igual a L .

Podemos aplicar o teorema, o que leva ao mesmo resultado. De acordo com a Eq. (1.30), temos que,

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

onde h é a distância entre o centro de massa e o eixo de rotação. Essa distância é $L/2$. Além disso, a massa $M = 2m$ é a massa total do sistema. Assim, usando o resultado do item anterior para I_{cm} , escrevemos

$$I = \frac{mL^2}{2} + 2m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{mL^2}{2} + \frac{mL^2}{2} = mL^2$$

que é o mesmo resultado do item anterior. É claro que não faz sentido usar o teorema neste exemplo, mas existem casos em que o teorema pode simplificar bastante o trabalho.

1.6 Dinâmica da Rotação: Torque e Momento Angular

Até o momento havíamos considerado o movimento de corpos rígidos sem nos preocupar com o que causava tal movimento. Nos limitamos apenas à descrever o movimento através das definições de velocidade e aceleração angular. Impondo uma restrição sobre a aceleração angular, que esta deve ser constante, fomos capazes de determinar as equações de movimento para este caso particular. No entanto, no caso mais geral em que a aceleração angular não é constante mas assume uma dependência arbitrária com o tempo, se faz necessário considerar as forças que atuam no movimento de maneira a obter as equações corretas para descrevê-lo.

1.6.1 O Torque

Da mesma forma que a massa do corpo entra nas equações na forma de um momento de inércia, onde a distribuição de massa em torno do eixo de rotação é importante além da própria massa, aqui teremos um relação entre a força e o torque, que é o análogo da força no caso rotacional. De fato, uma experiência comum, que pode ilustrar como a força atua no movimento de rotação, é a abertura de uma porta. As maçanetas estão sempre localizadas o mais longe possível das dobradiças objetivando minimizar o esforço feito pela pessoa ao abrir a porta. De fato, no que se refere ao movimento de rotação, não importa apenas a intensidade da força mas igualmente importantes são a direção, sentido e a distância do eixo de rotação do corpo. Com efeito, se tentamos abrir a porta aplicando uma força perto das dobradiças teremos usar

uma intensidade de força muito maior para produzir a mesma rotação. Além disso, também podemos sentir a diferença se aplicamos uma força perpendicular ao plano da porta ou segundo qualquer outro ângulo. No primeiro caso, teríamos que fazer um esforço menor em comparação com o segundo. Assim, é necessário definir uma grandeza que tenha o mesmo papel da força no caso translacional mas que leve em conta as particularidades do movimento de rotação. Na Fig. 1.13a temos a seção transversal de um corpo que está livre para girar em torno de um eixo que passa por O e é perpendicular à seção transversal. Um força \mathbf{F} é aplicada no ponto P , cuja posição relativa ao ponto O é definida por um vetor posição \mathbf{r} . As direções dos vetores \mathbf{F} e \mathbf{r} formam entre si um ângulo ϕ . (Por simplicidade consideramos que a força \mathbf{F} está no plano da página).

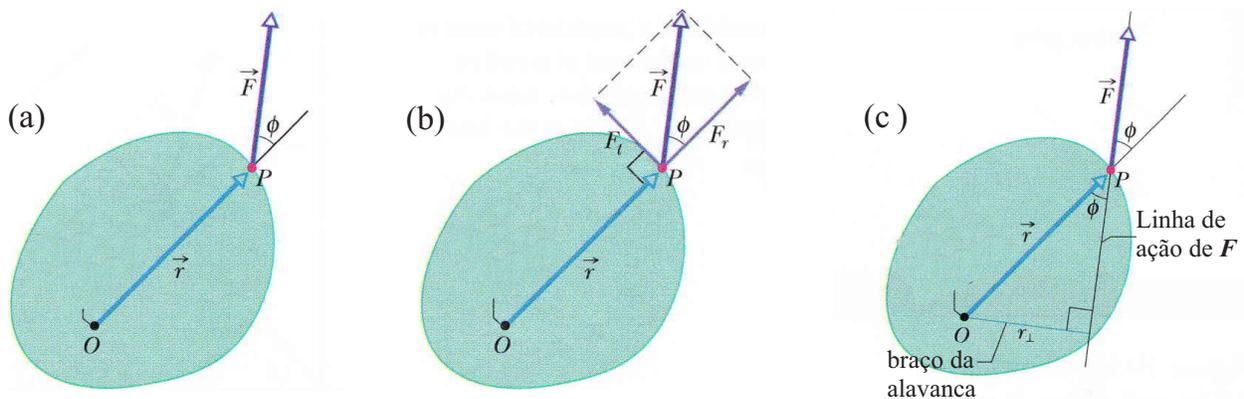


Figura 1.13: Definição do torque. (a) Uma força de módulo F é aplicada ao ponto P do corpo a uma distância r do eixo de rotação que passa por O , perpendicular ao plano da figura. No que existe um ângulo ϕ entre os vetores \mathbf{F} e \mathbf{r} . (b) Decomposição do vetor \mathbf{F} em duas direções: perpendicular e paralela ao vetor \mathbf{r} . Somente a componente F_t produz a rotação do corpo. A componente paralela F_r apenas aplica uma tração ao ponto O que é absorvida pelo ponto fixo. (c) Descrição equivalente onde o vetor \mathbf{r} é decomposto em direções paralela e perpendicular ao vetor \mathbf{F} .

Para determinar como a aplicação da força \mathbf{F} resulta na rotação do corpo, decompos \mathbf{F} em duas componentes. Uma delas é a chamada *componente radial* F_r , que aponta na direção de \mathbf{r} . Esta componente não causa a rotação pois atua ao longo de uma linha que passa por O . (No caso da porta se a puxamos em um direção paralela ao seu plano, não conseguimos girá-la). Em outras palavras, a componente radial apenas exerce uma tração (ou compressão, conforme o sentido) sobre o ponto fixo O que deve ser absorvida pelo mesmo. A outra componente, chamada *componente tangencial* F_t , é perpendicular a \mathbf{r} e possui intensidade $F_t = F \sin \theta$, veja a Fig. 1.13b. Esta componente é que causa a rotação. A capacidade da força girar a porta depende não apenas da intensidade de sua componente tangencial mas

também da distância ao ponto O em que a força é aplicada. Assim, para incluir estes fatores definimos a *intensidade de torque*, τ da seguinte forma:

$$\tau = rF_t = Fr \sin \theta \quad (1.31)$$

que é o produto da componente tangencial pela distância do ponto de aplicação da força ao eixo de rotação. Conforme mostrado na figura, podemos escrever o torque na forma alternativa

$$\tau = r_{\perp}F = Fr \sin \theta \quad (1.32)$$

onde decompos o vetor \mathbf{r} em componentes paralela ($r_{\parallel} = r \cos \phi$) e perpendicular ($r_{\perp} = r \sin \phi$) à direção da força aplicada (veja a Fig. 1.13c). A componente r_{\parallel} é chamada de *linha de ação* de \mathbf{F} e a componente perpendicular r_{\perp} é chamada *braço de alavanca* de \mathbf{F} . Quanto maior o braço da alavanca maior o torque produzido pela força.

A grandeza definida nas Eqs. (1.31) e (1.32) é análoga à magnitude da força F no caso da translação. Porém, sabemos que a força é uma grandeza vetorial e, então devemos escrever o torque como um vetor. As Eqs. (1.31) e (1.32) são dadas pelo produto do módulo de dois vetores \mathbf{F} e \mathbf{r} multiplicados pelo seno do ângulo entre eles. Isto sugere o uso do produto vetorial desde que o módulo do torque pode ser escrito na forma:

$$\tau = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| \quad (1.33)$$

e o vetor torque pode ser escrito, portanto, como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1.34)$$

que é a definição do torque sofrido por um corpo sob a ação de uma força \mathbf{F} aplicada em um ponto P a uma distância r do eixo de rotação.

Na figura 1.14, uma haste está em movimento em um plano formado pelos vetores \mathbf{F} e \mathbf{r} e o vetor $\boldsymbol{\tau}$, perpendicular ao plano, aponta na direção do eixo de rotação em torno do qual a haste gira. O sentido de $\boldsymbol{\tau}$ é positivo (para cima) quando o movimento está no sentido anti-horário e negativo no caso inverso. Note que o produto vetorial já fornece a direção e o sentido do torque dados os vetores \mathbf{F} e \mathbf{r} .

A dimensão do torque é o N.m (Newton-metro) que são as mesmas dimensões do trabalho. Convém notar, entretanto, que são grandezas completamente diferentes. Em particular, o torque é um vetor ao passo que o trabalho é um escalar. Além disso, o trabalho pode ser expresso em Joules, o que **nunca** deve ser feito com as unidades do torque.

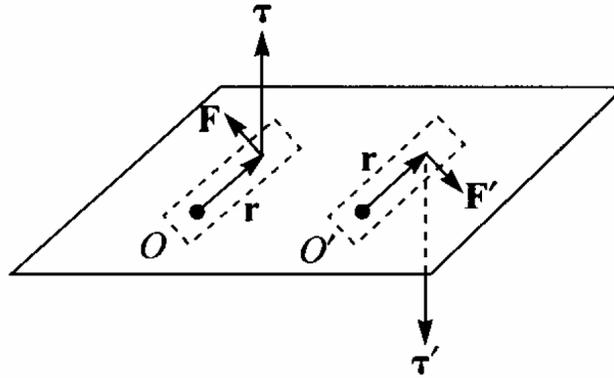


Figura 1.14: Exemplo de uma haste em movimento rotacional onde o vetor torque aponta para cima quando o movimento está sentido anti-horário (figura da esquerda) e aponta para baixo quando o movimento está no sentido horário (figura da direita).

Torques obedecem ao princípio da superposição da mesma forma que ocorre para as forças. Desta forma, quando vários torques atuam sobre o mesmo corpo, o **torque resultante** (τ_{res}) é dado pela soma dos torques individuais.

1.6.2 O Momento Angular & 2ª lei de Newton para a rotação

No caso translacional, enunciamos a segunda lei de Newton que relaciona a força resultante atuando em um sistema com a variação do momento linear $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (também chamado de quantidade de movimento) deste sistema. De fato, a segunda lei de Newton é escrita na forma:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.35)$$

No caso rotacional também podemos escrever a segunda lei de Newton de maneira análoga ao movimento de translação. No entanto, para isso precisamos encontrar a quantidade correspondente ao momento linear. Assim, nesta seção vamos definir o chamado momento angular, que é um dos conceitos mais fundamentais em física. Para isso, considere a derivada temporal do produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Relembrando que a derivada temporal do vetor posição \mathbf{r} é simplesmente a velocidade podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

e identificando a derivada temporal do vetor momento linear como sendo a própria força de acordo com a Eq. (1.35), podemos escrever ainda,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Desde que $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, temos ainda,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

E como o produto vetorial de vetores paralelos é zero (verifique isso!), o primeiro termo é nulo, assim:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e pela Eq. (1.34) o segundo membro é o próprio torque logo,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1.36)$$

Como $\boldsymbol{\tau}$ é o análogo da força, então comparando as Eqs. (1.36) e (1.35), vemos que o produto vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ deve ser a quantidade análoga ao momento linear. Assim, definimos:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.37)$$

como o *momento angular* de uma partícula girando em torno de uma origem O .

A segunda lei de Newton na forma angular pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}. \quad (1.38)$$

Momento Angular para um corpo rígido em torno de um eixo fixo

A definição do momento angular dada pela Eq. (1.37) é para uma partícula com movimento de rotação. A definição do torque vale para o corpo rígido como um todo, pois envolve o vetor posição do ponto onde a força atua e a força externa. No caso do momento angular do corpo rígido temos que considerar a soma sobre todas as partículas que compõem o corpo. Assim, escrevemos:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i$$

onde chamamos o momento angular do corpo rígido de \mathbf{L} e \mathbf{l}_i é o momento angular da i -ésima partícula do corpo. Usando a definição do momento angular para uma partícula, podemos escrever

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

e usando a definição do momento linear temos ainda,

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

Mas já deduzimos anteriormente que,

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$$

e substituindo na equação para o momento angular, segue que

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

Podemos novamente desenvolver o produto triplo vetorial usando a identidade vetorial,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Logo,

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i [(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i)\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_i].$$

e desde que $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = r_i^2$, podemos escrever ainda

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i [r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_i].$$

e vemos que o momento angular apresenta uma componente na direção do vetor velocidade angular e outra em uma direção dada pela soma sobre os vetores posição de todas as partículas do corpo.

Da mesma forma que fizemos anteriormente, consideramos o caso simplificado em que o *eixo de rotação está fixo* de modo que podemos considerar que o movimento das partículas descreve um círculo em um plano perpendicular ao vetor velocidade angular. Com isso, temos que $\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, e assim, ficamos com:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega}$$

e lembrando da definição do momento de inércia,

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{1.39}$$

e vemos que o momento angular está na mesma direção do vetor velocidade, que por sua vez está na mesma direção do eixo de rotação, que está fixo. Assim, desde que a direção do eixo não muda, é mais conveniente trabalhar com quantidades escalares. Assim, podemos escrever

$$L = I\omega \tag{1.40}$$

E, substituindo na 2ª lei de Newton para o caso rotacional, temos ainda,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

$$\frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

e como o momento de inércia é constante, podemos escrever

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

e lembrando a definição da aceleração angular, temos ainda,

$$I\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\tau}$$

Como no caso do eixo fixo, a direção dos vetores está na direção do eixo de rotação que é fixo, então podemos trabalhar com quantidades escalares,

$$\tau = I\alpha. \quad (1.41)$$

1.6.3 Exemplos

1. Na figura 1.15, o volante A de raio $r_A = 10 \text{ cm}$ está acoplado pela correia B ao volante C de raio $r_C = 25 \text{ cm}$. Aumenta-se a velocidade angular do volante A a partir do repouso a uma taxa constante de $1,6 \text{ rad/s}^2$. Determine o tempo para que o volante C alcance uma velocidade de rotação de 100 rpm, supondo que a correia não deslize.

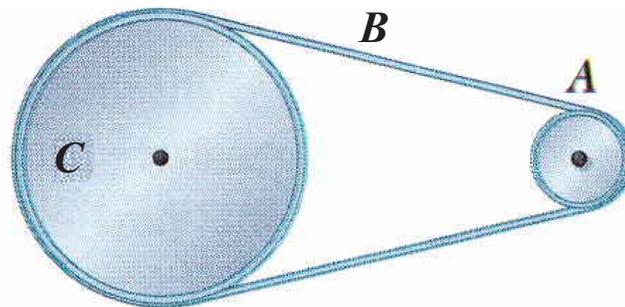


Figura 1.15: Exemplo 1. dois volantes conectados por uma correia. Veja enunciado do Exemplo 1.

A velocidade tangencial deve ser a mesma ao longo da correia, assim $v_A = v_C$. Mas como r_A e r_C são perpendiculares a velocidade angular, então temos que:

$$\omega_C r_C = \omega_A r_A.$$

A aceleração angular do volante A é constante e, da mesma forma, consideramos que aceleração do volante C também é constante, assim supomos que ω_C varia de acordo com a equação:

$$\omega_C(t) = \omega_C(0) + \alpha_C t$$

onde $\omega_C(0) = 0$. Das velocidades tangenciais, podemos escrever,

$$\alpha_C r_C = \alpha_A r_A.$$

e substituindo α_C pela relação acima, podemos escrever

$$\omega_C(t) = \alpha_A \frac{r_A}{r_C} t$$

e isolando o tempo na equação acima, podemos escrever

$$t = \frac{r_C}{r_A \alpha_A} \omega_C(t).$$

E, substituindo a velocidade de rotação de 100 rpm, $\alpha_A = 1,6 \text{ rad/s}^2$ e os raios dos volantes, podemos escrever

$$t = \frac{25 \text{ cm}}{10 \text{ cm} \times 1,6 \text{ rad/s}^2} \times 100 \text{ rpm} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ volta}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}$$

e fazendo os cálculos, obtemos o resultado final:

$$t = 16 \text{ s}.$$

2. A figura 1.16 mostra um disco uniforme de massa $M = 2,5 \text{ kg}$ e raio $R = 20 \text{ cm}$, montado sobre um eixo mecânico horizontal fixo. Um bloco de massa $m = 1,2 \text{ kg}$ está pendurado na extremidade de uma corda de massa desprezível que está enrolada em torno da borda do disco. Determine a aceleração do bloco em queda, a aceleração angular do disco e a tração na corda. A corda não escorrega no disco e não há atrito no eixo mecânico.

Na figura 1.16a é mostrada uma figura do sistema. A idéia aqui é relacionar as variáveis de rotação com as variáveis do movimento linear de maneira a obter a aceleração do bloco em queda e a aceleração

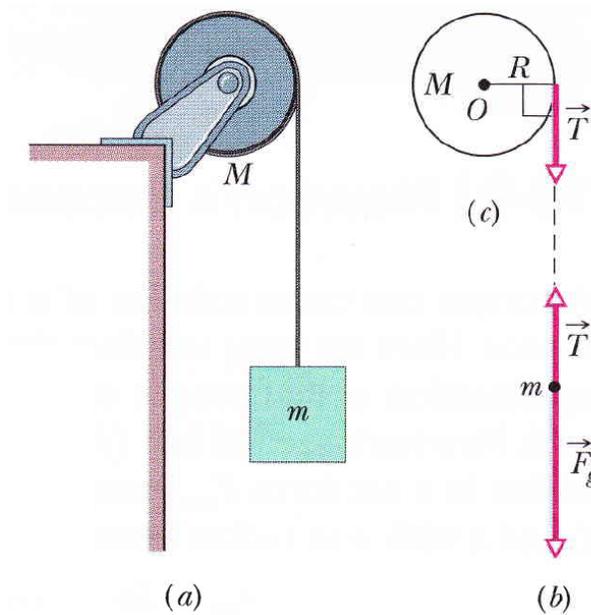


Figura 1.16: Exemplo 2. (a) o bloco em queda provoca a rotação do disco. (b) diagrama de corpo livre para o bloco. (c) diagrama de corpo livre para o disco.

angular do disco. Para isso, consideramos os dois sistemas (bloco e o disco) separadamente. Aplicando a 2ª lei de Newton para o diagrama de corpo livre para o bloco, mostrado na Fig. 1.16b, segue que,

$$ma = T - F_g = T - mg \quad (1.42)$$

onde a e m são a aceleração e massa do bloco, respectivamente. Esta aceleração é determinada pela diferença entre a força peso atuando no bloco e a força de tração na corda. Note que não estamos usando vetores porque o movimento do bloco é unidimensional. A Eq. (1.42) não tem solução uma vez que desconhecemos a tração T e a aceleração a . O próximo passo, portanto, consiste na determinação da tração obtida na corda. Para isso consideramos o diagrama de corpo livre do disco. Vemos que a força que produz o torque no disco é a própria tração na corda. Assim, podemos aplicar a segunda lei de Newton na forma rotacional para relacionar a tração com o movimento de rotação do disco, assim, considerando que o braço da alavanca é o raio do disco R que é perpendicular à força de tração podemos escrever:

$$\tau = -TR$$

onde o sinal menos aparece porque a tração gira o disco no sentido horário. Pela 2ª lei de Newton, temos ainda que,

$$\tau = I_{\text{disco}}\alpha$$

onde I_{disco} é o momento de inércia do disco e α a sua aceleração angular. Substituindo o valor do torque temos ainda,

$$TR = -I_{\text{disco}}\alpha$$

O valor de I_{disco} foi determinado nos exemplos resolvidos quando discutimos o momento de inércia. O valor encontrado é dado pela Eq. (1.29):

$$I_{\text{disco}} = \frac{MR^2}{2}$$

e substituindo na segunda lei de Newton segue que

$$TR = -\frac{MR^2}{2}\alpha$$

e simplificando os raios que aparecem em ambos os membros, temos ainda

$$T = -\frac{MR}{2}\alpha \quad (1.43)$$

Agora precisamos determinar a aceleração angular e tentar relacionar esta aceleração com a Eq. (1.42). Para isso, lembramos que a aceleração angular está relacionada à aceleração tangencial a_t dada pela Eq. (1.11b), i.e.,

$$a = \alpha R$$

e substituindo na Eq. (1.43), segue que

$$T = -\frac{M}{2}a. \quad (1.44)$$

E temos então a segunda relação procurada envolvendo a aceleração e a tração. Assim, combinando as Eqs. (1.42) e (1.44), obtemos então:

$$ma = T - mg$$

ou seja,

$$ma = -\frac{1}{2}Ma - mg$$

e isolando a aceleração, obtemos finalmente:

$$a = -\frac{2m}{2m + M}g \quad (1.45)$$

e substituindo os valores das massas e da aceleração da gravidade $g = -9,8 \text{ m/s}^2$, segue que,

$$a = -4,8 \text{ m/s}^2 \quad (1.46)$$

que é menor do que a aceleração da gravidade.

Substituindo Eq. (1.45) em (1.44), obtemos a tração na corda

$$T = -\frac{M}{2} \left(-\frac{2m}{2m+M}g \right)$$

ou seja,

$$T = \frac{mM}{2m+M}g. \quad (1.47)$$

e substituindo-se os valores, obtemos ainda

$$T = 6,0 \text{ N}. \quad (1.48)$$

A aceleração angular do disco, é determinada via $a = \alpha R$, assim segue que,

$$\alpha = \frac{a}{R} = -\frac{2m}{R(2m+M)}g \quad (1.49)$$

e substituindo os valores, obtemos ainda,

$$\alpha = -24 \text{ rad/s}^2. \quad (1.50)$$

3. Para derrubar um oponente de 80 kg com um golpe básico de judô, uma derrubada pelos quadris, você deve puxar o quimono dele com uma força \mathbf{F} tendo um braço de alavanca $d_1 = 0,30 \text{ m}$ medido a partir de um ponto de giro (eixo de rotação) no lado direito do seu quadril (Fig. 1.17). Sua intenção é girá-lo em torno do ponto de giro com uma aceleração angular α de $-6,0 \text{ rad/s}^2$ — ou seja, com uma aceleração angular no **sentido horário** na figura. Suponha que o momento de inércia I do seu oponente, relativa ao ponto de giro seja igual a $15 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

(a) Qual deve ser a intensidade de \mathbf{F} se, antes de derrubá-lo, você dobrar o seu oponente para a frente, trazendo o centro de massa dele para o seu quadril? (Fig. 1.17a)

Para determinar a intensidade da força consideramos que ao aplicarmos o golpe, causamos uma aceleração angular dada por $\alpha = \tau_{res}/I$ onde I é o momento de inércia do corpo do oponente. Levando em conta ainda que você aplica a força com um braço de alavanca igual a d_1 , então o torque aplicado por você é dado por $\tau = -d_1F$, onde F é a intensidade da força e o sinal de menos indica que o movimento resultante é no sentido horário. Agora, considerando que eixo de rotação coincide com o centro de massa

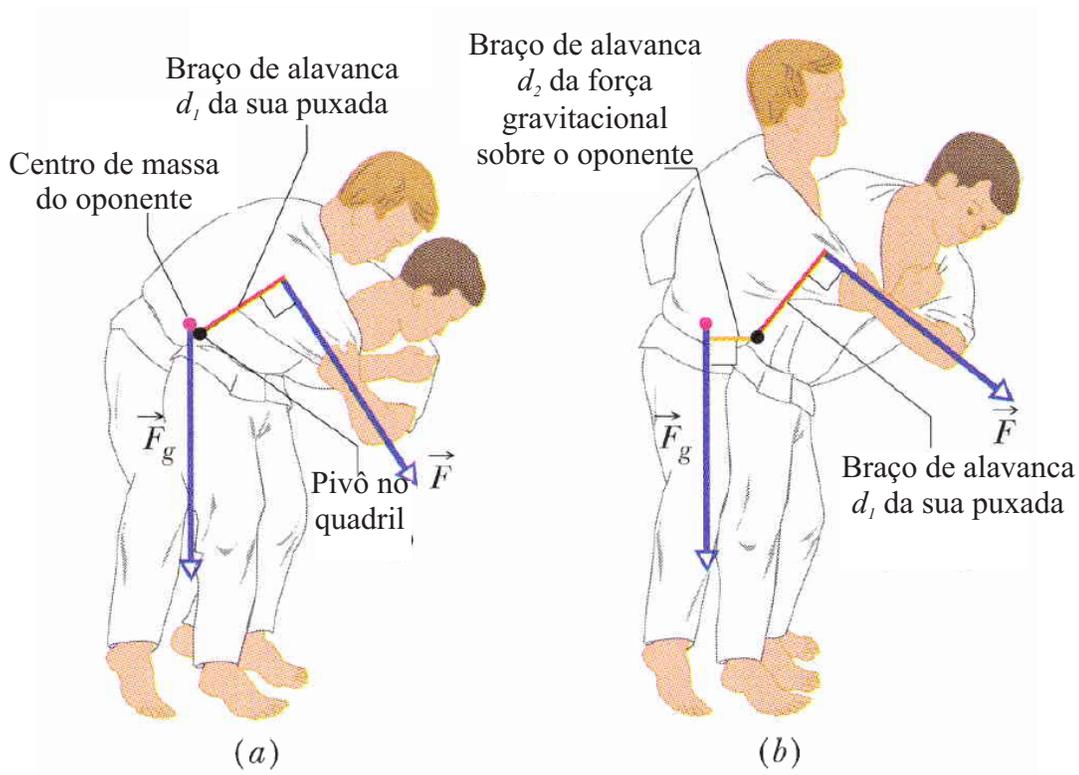


Figura 1.17: Exemplo 3. Uma derrubada pelo quadris numa luta de judô. (a) executada corretamente e (b) executada de forma incorreta.

do corpo do oponente, então a força aplicada por você é a única atuando desde que a força gravitacional \mathbf{F}_g e a normal \mathbf{N} exercida por você atuam no centro de massa do corpo do oponente.

Assim, o braço de alavanca destas duas forças é zero e assim, o torque resultante é simplesmente dado por $\tau_{res} = -d_1 F$. Desde que $\tau_{res} = I\alpha$, segue que,

$$I\alpha = -d_1 F$$

o que nos permite escrever

$$F = -\frac{I\alpha}{d_1}$$

e substituindo $I = 15 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $\alpha = -6,0 \text{ rad/s}^2$ e $d_1 = 0,30 \text{ m}$, obtemos

$$F = 300 \text{ N}.$$

(b) Qual deve ser a intensidade da força \mathbf{F} se o seu oponente permanecer de pé antes de você derrubá-lo, de modo que \mathbf{F}_g tenha um braço de alavanca $d_2 = 0,12 \text{ m}$ medido a partir do ponto de giro (Fig. 1.17b)?

Considerando agora que a força gravitacional tenha um braço de alavanca não-nulo então temos dois torques contribuindo para o movimento do oponente. Lembramos que a força normal, continua não contribuindo pois esta atua no ponto de contato entre você e o oponente. Assim, seu braço de alavanca é nulo novamente pois o ponto de contato coincide com o ponto de giro. Assim, $I\alpha$ deve ser igual à soma dos torques produzidos por você e pela força gravitacional. Desde que está última provocaria um movimento no *sentido anti-horário*, então o torque correspondente deve ser positivo. Assim, temos:

$$I\alpha = -Fd_1 + mgd_2$$

resolvendo para F , obtemos

$$F = -\frac{I\alpha}{d_1} + mg\frac{d_2}{d_1}$$

e vemos então que a força gravitacional tende a aumentar o valor de F proporcionalmente à razão d_2/d_1 . Ou seja, quanto maior a distância entre o centro de massa e o ponto de aplicação, maior será o esforço para derrubar o oponente. Substituindo os valores de $d_2 = 0,12$ m e $m = 80$ kg, podemos escrever

$$F = 610 \text{ N}$$

que é praticamente o dobro do esforço do caso anterior.

4. O corpo da Fig. 1.18 está pivotado em O . Três forças agem sobre o corpo nas direções mostradas: $F_A = 10$ N no ponto A , a $8,0$ m de O ; $F_B = 16$ N no ponto B , a $4,0$ m de O ; e $F_C = 19$ N no ponto C , a $3,0$ m de O . Qual o torque resultante em torno de O ?

A determinação do torque resultante pode ser feita simplesmente decompondo as forças em componente paralela e perpendicular às linhas de ação que ligam os pontos A , B e C à origem O . Assim, conforme já discutido, o módulo do torque é igual à componente perpendicular à linha de ação da força (componente tangencial). Vamos considerar estas componentes separadamente.

Para a força $F_A = 10$ N, temos que:

$$F_{At} = F_A \sin(180^\circ - 135^\circ) = F_A \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}F_A}{2} = 7,1 \text{ N}$$

Para a força $F_B = 16$ N, temos que:

$$F_{Bt} = F_B \sin(90^\circ) = F_B = 16 \text{ N}$$

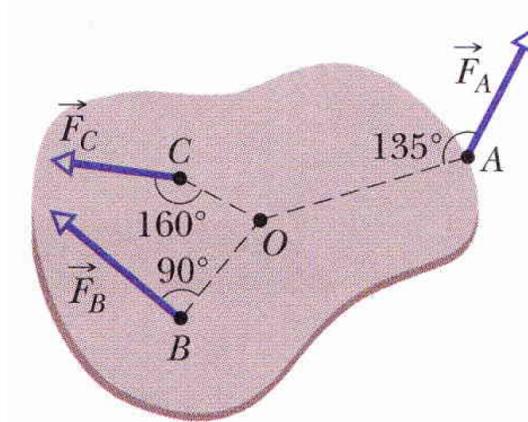


Figura 1.18: Exemplo 4. Corpo de forma arbitrária onde três forças exercem um torque em torno do eixo que passa por O

e finalmente, a componente tangencial de $F_C = 19 \text{ N}$ é dada por

$$F_{Ct} = F_C \text{sen}(180^\circ - 160^\circ) = F_C \text{sen} 20^\circ = 6,5 \text{ N}$$

O torque resultante é dado pelo produto da componente tangencial e o braço da alavanca de cada uma das forças. O braço da alavanca é simplesmente as distâncias entre os pontos e a origem, assim, temos que o torque resultante é dado por:

$$\tau_{res} = F_A r_A - F_B r_B + F_{Ct} r_C$$

onde o sinal negativo do termo central é devido ao torque produzido por F_B causar um movimento no sentido horário. Assim, substituindo as distâncias dadas, segue que:

$$\tau_{res} = 7,1 \text{ N} \times 8,0 \text{ m} - 16 \text{ N} \times 4,0 \text{ m} + 6,5 \text{ N} \times 3,0 \text{ m} = (56,8 - 64 + 19,5) \text{ N.m}$$

$$\tau_{res} = 12,3 \text{ N.m}$$

5. A figura 1.19 mostra duas massas m , penduradas nas extremidades de uma haste rígida de massa desprezível e de comprimento $L_1 + L_2$, onde $L_1 = 20 \text{ cm}$ e $L_2 = 80 \text{ cm}$. A haste é mantida na horizontal sobre o ponto de apoio e depois é solta. Quais as intensidades das acelerações iniciais (a) do bloco mais próximo do apoio e (b) do outro bloco?

As acelerações dos blocos devem ser iguais à componente tangencial da aceleração $a_t = \alpha r$, onde r é o braço da alavanca. Assim, a força da gravidade atuando em cada massa, provoca um torque na barra

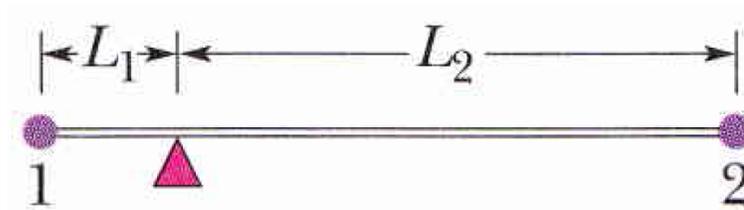


Figura 1.19: Veja enunciado do exemplo resolvido nº 5.

em reação ao apoio. O torque devido à massa que se encontra a uma distância L_2 em relação ao apoio é negativo enquanto que o torque devido à massa à esquerda, a uma distância L_1 é positivo. Assim, segue que,

$$mgL_1 - mgL_2 = I\alpha$$

Onde I é o momento de inércia do sistema formado pela haste e as massas presas nas extremidades. Assim, aplicando a definição do momento de inércia temos que,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = mL_1^2 + mL_2^2$$

E substituindo na equação para a aceleração angular da barra, segue que

$$mgL_1 - mgL_2 = (mL_1^2 + mL_2^2)\alpha$$

e resolvendo para α , obtemos:

$$\alpha = g \frac{L_1 - L_2}{L_1^2 + L_2^2}$$

e substituindo os valores de L_1 e L_2 e da aceleração da gravidade, obtemos:

$$\alpha = 9,8 \text{ m/s}^2 \left[\frac{0,2 \text{ m} - 0,8 \text{ m}}{(0,2 \text{ m})^2 + (0,8 \text{ m})^2} \right] = -8,64 \text{ rad/s}^2$$

Como é pedida a intensidade da aceleração, isto significa que é pedido o módulo das acelerações. Assim, usando a relação $a_t = \alpha R$, escrevemos:

$$a_1 = |\alpha|L_1 = 8,64 \text{ rad/s}^2 \times 0,2 \text{ m} = 1,728 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = |\alpha|L_2 = 8,64 \text{ rad/s}^2 \times 0,8 \text{ m} = 6,912 \text{ m/s}^2$$

1.7 Leis de Conservação

1.7.1 Teorema trabalho-energia cinética

Com a definição do momento angular e o do torque, conseguimos escrever a 2ª lei de Newton na forma angular. Com isso, podemos descrever movimentos mais gerais do que aqueles em que a aceleração angular é constante. O torque modifica o estado de movimento do corpo produzindo uma aceleração angular. Sendo assim, podemos dizer que o torque introduz uma variação na energia cinética do corpo, através da realização de um trabalho. Vejamos como o trabalho aparece no caso rotacional. Para isso, consideramos a 2ª lei de Newton:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

e aplicando o produto escalar com o vetor $d\boldsymbol{\theta}$ e integrando em ambos os lados segue que:

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

e desde que $L = I\omega$ para um corpo rígido podemos escrever:

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = I \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

o que pode ser escrito da seguinte maneira

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = I \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} dt.$$

Observe que a posição angular θ_i é a posição do instante t_i e a posição θ_f corresponde ao tempo t_f . Quando trocamos a diferencial na integração precisamos fazer o mesmo com os limites de integração. Agora lembrando a definição da velocidade angular instantânea, temos ainda,

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = I \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} dt$$

e lembrando ainda que $d\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} dt$ podemos escrever ainda,

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = I \int_{\omega_i}^{\omega_f} \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\omega}$$

Desde que $\boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \omega d\omega$ pois estes vetores são paralelos e considerando que para um dado θ_i temos uma velocidade angular ω_i e para um dado θ_f temos uma velocidade angular ω_f , podemos escrever:

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = I \int_{\omega_i}^{\omega_f} \omega d\omega$$

e fazendo a segunda integral, temos ainda,

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = K_f - K_i \quad (1.51)$$

onde a última igualdade foi obtida comparando o resultado da integração com a definição da energia cinética de rotação.

Assim, desde que o segundo membro é a variação da energia cinética de rotação, definimos a integral no primeiro membro como sendo o trabalho realizado pelo torque externo:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} \quad (1.52)$$

no de caso de uma variação angular de θ_i a θ_f .

Considerando o caso simples em que o eixo está fixo e o torque está na mesma direção do vetor $d\boldsymbol{\theta}$, então podemos escrever a equação acima na seguinte forma:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \quad (1.53)$$

Também podemos definir o trabalho de maneira genérica usando uma integral indefinida:

$$W = \int \tau d\theta \quad (1.54)$$

Substituindo-se Eq. (1.53) em (1.51), podemos escrever,

$$W = K_f - K_i = \Delta K \quad (1.55)$$

que é o teorema trabalho-energia cinética no caso rotacional. Note que você já viu uma relação equivalente no caso translacional⁴.

Note que a Eq. (1.53) pode ser simplificada no caso em que o torque é constante durante o movimento:

$$W = \tau \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \tau(\theta_f - \theta_i) = \tau\Delta\theta. \quad (1.56)$$

Potência para torque constante

Podemos determinar uma fórmula simples para potência devido a um torque constante. Para isso, vamos retomar a definição (1.54) derivá-la em relação tempo:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int \tau d\theta \right) = \frac{d}{dt} \left(\tau \int d\theta \right) = \tau \frac{d}{dt} (\theta + C) = \tau \frac{d\theta}{dt} + 0$$

⁴Veja Halliday, Resnick & Walker, "Fundamentos de Física", 6ª ed, v.1 — capítulo 7, pg. 116.

onde C é uma constante de integração. Com isso, temos finalmente:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

A potência P é definida como a derivada temporal do trabalho, assim, escrevemos finalmente:

$$P = \tau\omega. \quad (1.57)$$

1.7.2 Conservação do momento angular

A próxima lei de conservação que vamos considerar é a conservação do momento angular. A 2ª lei de Newton,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

relaciona os torques externos com a variação no tempo do momento angular. Quando o torque externo é zero $\boldsymbol{\tau} = 0$, então a derivada do momento angular é nula,

$$0 = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad \therefore \quad \mathbf{L} = \text{constante}. \quad (1.58)$$

o que implica que o momento angular é constante. Assim, escrevemos que o momento angular em dois instantes de tempo t_f e t_i são iguais:

$$\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_i \quad (1.59)$$

Assim, vemos que se o torque externo resultante que atua sobre o sistema é nulo, o momento angular \mathbf{L} do sistema permanece constante, não importando que mudanças ocorrem dentro do sistema. As Eqs. (1.58) e (1.59) são equações vetoriais, como tais, elas são equivalentes a três equações escalares para cada uma das componentes do momento angular. Dependendo da direção da direção dos torques que atuam sobre o sistema, o momento angular pode ser conservado em uma ou duas direções mas não nas três direções. Sendo assim, se a componente do torque externo resultante ao longo de uma certa direção for nula, então a componente do momento angular ao longo deste eixo não irá variar, ou seja, a componente do momento angular será conservada.

Para um eixo qualquer, a lei de conservação do momento angular em relação a este eixo será dada por,

$$L_i = L_f$$

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad \therefore \quad \omega_f = \frac{I_i}{I_f} \omega_i \quad (1.60)$$

A Eq. (1.60) se refere a uma situação onde um corpo em rotação em torno de um eixo fixo, sofre uma redistribuição de massa modificando seu momento de inércia. Neste caso, se o momento de inércia I_f após esta redistribuição é maior do que o momento de inércia inicial I_i então a Eq. (1.60) garante que a velocidade angular será alterada para um valor $\omega_f > \omega_i$.

Existem vários exemplos deste tipo de situação. Dentre estes exemplos citamos o caso de um voluntário sentado em um banco que pode girar livremente em torno de um eixo vertical (veja a Fig. 1.20). O voluntário, em rotação segura dois halteres em seus braços abertos. O seu vetor momento angular está ao longo do eixo de rotação vertical, apontando para cima. Quando o voluntário fecha os braços, trazendo os halteres para junto do corpo, este causa uma redução do seu momento de inércia pois a massa agora está mais concentrada em torno do eixo de rotação. Como resultado, observamos um aumento da velocidade angular do voluntário. Note que o vetor momento angular deve permanecer o mesmo nas duas situações desde que não existem torques externos.

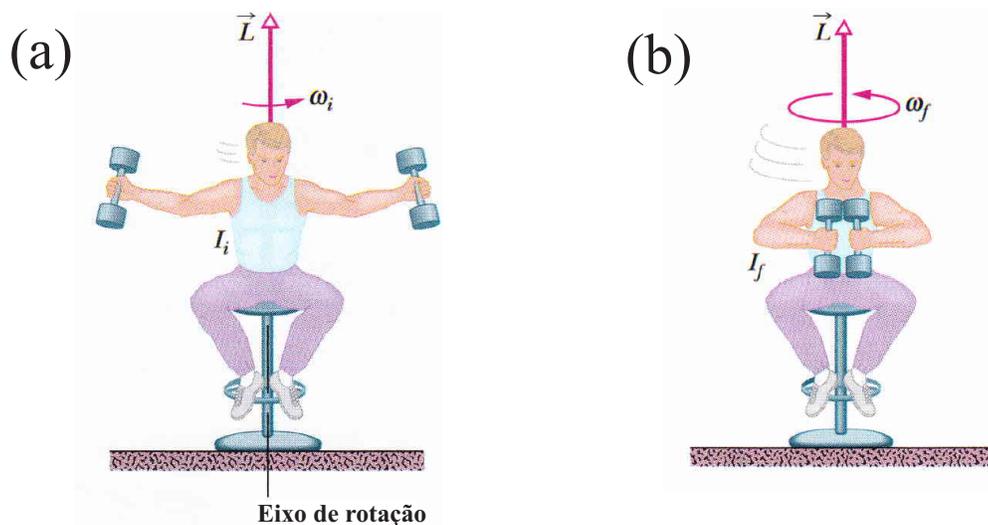


Figura 1.20: (a) O voluntário está sentado em um banco giratório segurando dois halteres com os braços esticados. Seu momento de inércia é grande devido à distribuição de massa estar distante do eixo vertical de rotação. (b) O estudante coloca os halteres próximo ao corpo reduzindo o momento de inércia. Como resultado observamos um aumento da velocidade angular que compensa a redução do momento de inércia. Com isso o momento angular do sistema é o mesmo para os dois casos.

Um segundo exemplo de conservação de momento angular é o salto um trampolim. Na figura 1.21 temos um desenho de uma mergulhadora dando um salto mortal e meio para a frente. Como é de se esperar o centro de massa da mergulhadora segue uma trajetória parabólica. Ela parte do salto com um

momento angular bem definido, em torno de um eixo que passa por seu centro de massa, representado por um vetor \vec{L} que penetra no plano da página. Quando a mergulhadora traz os braços e pernas para perto do corpo, reduz seu momento de inércia e aumenta a sua velocidade angular do mesmo modo que no caso anterior.

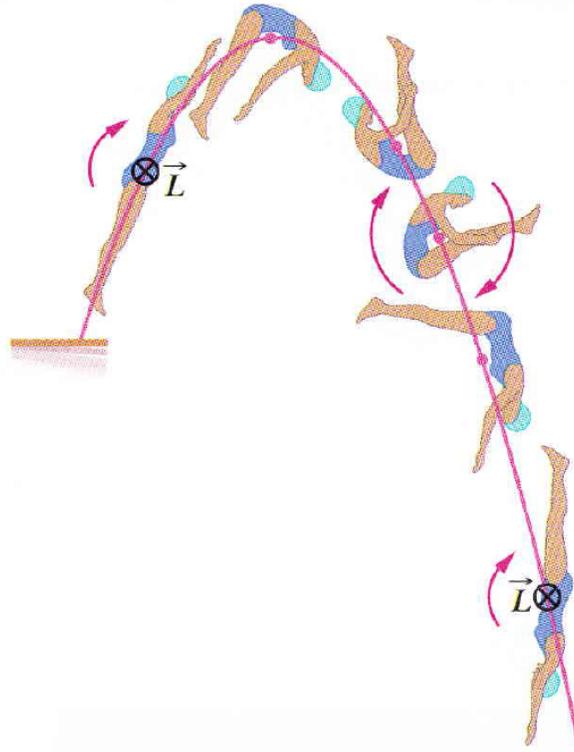


Figura 1.21: Mergulhadora traz os braços e pernas para perto do corpo, diminuindo seu momento de inércia e aumentando a velocidade angular devido à conservação do momento angular.

Outros exemplos de conservação do momento angular podem ser apreciados no livro do Halliday e do Moysés. A seguir, consideramos alguns exemplos ilustrativos de aplicação das leis de conservação apresentadas nesta seção.

1.7.3 Exemplos

1. (a) Se $R = 12 \text{ cm}$, $M = 400 \text{ g}$ e $m = 50 \text{ g}$ na Fig. 1.16, determine a velocidade do bloco depois de ele ter descido 50 cm partindo do repouso. Resolva o problema usando princípios de conservação da energia.
- (b) Repita o item (a) com $R = 5,0 \text{ cm}$.

(a)

A conservação da energia nos diz que a variação na energia potencial gravitacional do bloco de massa

m é igual a energia cinética de rotação do disco mais a energia cinética de translação do bloco. Assim, considerando que o bloco desce uma distância h , escrevemos:

$$mgh = \frac{1}{2}I_{\text{disco}}\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Note que o termo mgh é o trabalho executado pela força gravitacional sobre o bloco. Como $v = \omega R$ temos ainda:

$$mgh = \frac{1}{2R^2}I_{\text{disco}}v^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

e isolando a velocidade do bloco, temos ainda,

$$mgh = \left(\frac{1}{2R^2} \frac{MR^2}{2} + \frac{1}{2}m \right) v^2$$

ou ainda,

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{M + 2m}}$$

e substituindo os valores segue que

$$v = \sqrt{\frac{4 \times 50 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 50 \times 10^{-2} \text{ m}}{400 \times 10^{-3} \text{ kg} + 2 \times 50 \times 10^{-3} \text{ kg}}}$$

$$v = 1,4 \text{ m/s}$$

que é a resposta final.

(b)

Este item fornece a mesma resposta visto que a velocidade do bloco não depende do raio do disco.

2. *Uma casca esférica uniforme de massa M e raio R gira em torno de um eixo vertical sobre mancais sem atrito. Uma corda de massa desprezível passa ao redor do equador da casca, gira uma roldana com inércia à rotação I e raio r e está presa a um pequeno objeto de massa m . Não há atrito no eixo da roldana e a corda não desliza sobre a roldana. Qual a velocidade escalar do objeto após cair uma distância h partindo do repouso? Use considerações gerais.*

Da mesma forma que foi feito no exemplo anterior, consideramos que toda a perda de energia potencial (mgh) é transformada em energia cinética, isso é correto desde que não consideramos atrito no eixo da roldana e a corda não desliza. Assim, temos que:

$$mgh = \frac{1}{2}I_{\text{casca}}\omega_{\text{casca}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{roldana}}\omega_{\text{roldana}}^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Desde que a corda não desliza, então a velocidade linear do bloco deve ser a mesma ao longo de toda a corda. Assim, podemos trocar as velocidades angulares da casca e da roldana pela razões $\omega_{\text{roldana}} = v/r$ e $\omega_{\text{casca}} = v/R$, assim, segue que:

$$mgh = \frac{1}{2}I_{\text{casca}} \frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}I_{\text{roldana}} \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2$$

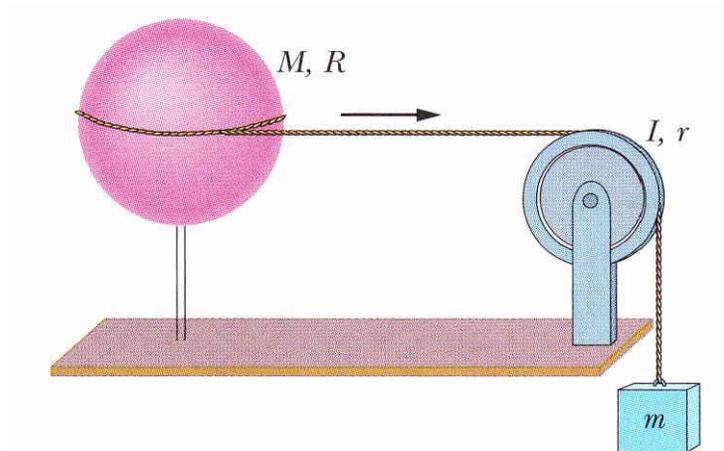


Figura 1.22: Veja exemplo 2.

Considerando que os momentos de inércia da casca e da roldana são dados por:

$$I_{\text{roldana}} = I$$

$$I_{\text{casca}} = \frac{2}{3}MR^2$$

e substituindo estes dados na equação de conservação, segue que

$$mgh = \frac{1}{2} \frac{2}{3} MR^2 \frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} mv^2$$

$$mgh = \frac{1}{3} Mv^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} mv^2$$

e resolvendo para v , obtemos:

$$v = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{3}M + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2} + \frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{2M}{3m} + \frac{I}{mr^2} + 1}}$$

que é o resultado final. Note que quando I e $M = 0$ obtemos o resultado $v = \sqrt{2gh}$ que é o resultado que seria obtido quando o bloco está em queda livre.⁵

Antes de encerrar este problema, é ilustrativo demonstrar o cálculo do momento de inércia da casca esférica que foi usado na resolução deste problema. Da mesma forma que nos casos anteriores, consideramos que a casca esférica tem distribuição de massa homogênea. Isso nos permite escrever o elemento diferencial de massa em termos do elemento de área dA da seguinte forma:

$$dm = \mu dA \quad \therefore \quad dm = \frac{M}{4\pi R^2} dA$$

Supomos que a casca esférica está centrada na origem do sistema de coordenadas de modo que o eixo de rotação é o eixo z . O elemento de área da casca esférica de raio R é simplesmente $dA = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$, onde θ é o ângulo entre o eixo z e o raio vetor ligando um elemento de área à origem. Este ângulo varia de 0 a π . Assim, desde que a distância r entre o elemento de área e o eixo de rotação é dada por $r = R \sin \theta$. Com isso, o momento de inércia da casca esférica pode ser escrito na forma,

$$I_{\text{casca}} = \int_M r^2 dm = \mu \int_A r^2 dA = \frac{M}{4\pi R^2} \int_0^\pi r^2 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{M}{4\pi R^2} \int_0^\pi R^2 \sin^2 \theta 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

ou ainda,

$$I_{\text{casca}} = \frac{MR^2}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{MR^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{MR^2}{2} \left[\int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right]$$

$$I_{\text{casca}} = \frac{MR^2}{2} \left([-\cos \theta]_0^\pi + \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \right)$$

$$I_{\text{casca}} = \frac{MR^2}{2} \left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right] = \frac{MR^2}{2} \frac{4}{3}$$

⁵Isso é facilmente visto considerando a Eq. de Torricelli,

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y$$

e considerando que o bloco parte do repouso então $v_0 = 0$. Além disso, $a = -g$ e $\Delta y = -h$, assim, temos:

$$v^2 = 0 - 2g(-h) \quad \therefore \quad v = \sqrt{2gh}.$$

$$I_{\text{casca}} = \frac{2}{3}MR^2$$

que é o resultado que gostaríamos de demonstrar.

3. Um corpo rígido é formado por três hastes finas idênticas cada uma com comprimento L , fixadas umas às outras na forma de uma letra **H** (Fig. 1.23). O corpo tem a liberdade de girar em torno de um eixo que passa por todo o comprimento de uma das pernas do **H**. Permite-se que o corpo caia do repouso a partir de uma posição na qual o plano do **H** está na horizontal. Qual a velocidade angular do corpo quando o plano do **H** estiver na vertical?

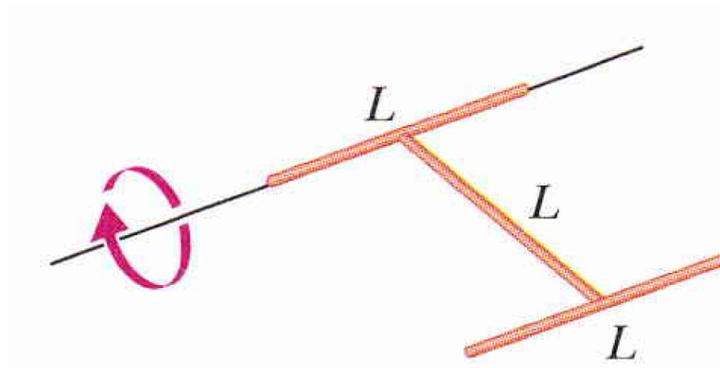


Figura 1.23: Veja exemplo 3.

Aqui novamente aplicamos o princípio da conservação da energia. Quando o corpo cai, ocorre uma perda de energia potencial gravitacional e um ganho correspondente na energia cinética de rotação. A soma destas duas contribuições deve permanecer a mesma, assim, assumindo que o zero da energia potencial está na posição horizontal, então temos que:

$$-\frac{MgL}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2 = 0$$

onde consideramos o fato de que o centro de massa do corpo que fica situado no meio da haste horizontal, cai a uma distância de $-L/2$ onde L é o comprimento da haste. Isolando ω podemos determinar o valor da velocidade angular do corpo quando o plano do **H** estiver na vertical. No entanto, ainda precisamos determinar o momento de inércia do corpo em torno do eixo de rotação. Temos duas contribuições a barra perpendicular e a barra paralela a uma distância L da barra por onde passa o eixo de rotação. Considerando que o corpo todo tem massa M , então se esta massa está distribuída uniformemente sobre

todo o corpo, cada haste contribui com $M/3$ da massa total. Assim, para a haste paralela temos:

$$I_{\text{paral}} = \int r^2 dm = \frac{M}{3L} \int r^2 dx$$

onde a densidade linear de massa é igual a $\mu = M/3L$. A distância entre o elemento de massa e o eixo de rotação é constante e igual a L , assim, podemos escrever:

$$I_{\text{paral}} = \int r^2 dm = \frac{M}{3L} L^2 \int dx = \frac{M}{3L} L^2 L = \frac{1}{3} ML^2$$

Agora precisamos determinar o momento de inércia da haste perpendicular ao eixo de rotação. Para isso, usamos o teorema do eixo paralelo, onde consideramos um eixo passando pelo centro de massa da haste que fica no seu ponto médio. Assim,

$$I_{\text{perp}} = I_{cm} + \frac{M}{3} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M}{3} \frac{L^2}{12} + \frac{ML^2}{12}$$

ou ainda,

$$I_{\text{perp}} = \left(\frac{1}{3} + 1\right) \frac{ML^2}{12}$$

$$I_{\text{perp}} = \frac{ML^2}{9}$$

Assim, o momento de inércia total, será a soma destas duas contribuições:

$$I = I_{\text{paral}} + I_{\text{perp}} = \frac{ML^2}{3} + \frac{ML^2}{9} = \frac{4}{9} ML^2$$

e substituindo este valor do momento de inércia na equação para a conservação da energia, segue que:

$$-\frac{MgL}{2} + \frac{1}{2} \frac{4}{9} ML^2 \omega^2 = 0$$

ou ainda,

$$\omega = \sqrt{\frac{9g}{4L}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

4. Uma pista de trenzinhos é montada em cima de uma roda grande que pode girar livremente com atrito desprezível em torno de um eixo vertical. (veja Fig. 1.24). Um trem de brinquedo é colocado na pista e, com o sistema inicialmente em repouso, liga-se a corrente elétrica. O trem alcança uma velocidade v em relação à pista. Qual a intensidade da velocidade angular da roda se sua massa for M e seu raio for R . (Trate a roda como um aro, e despreze a massa dos raios e do cubo da roda.)

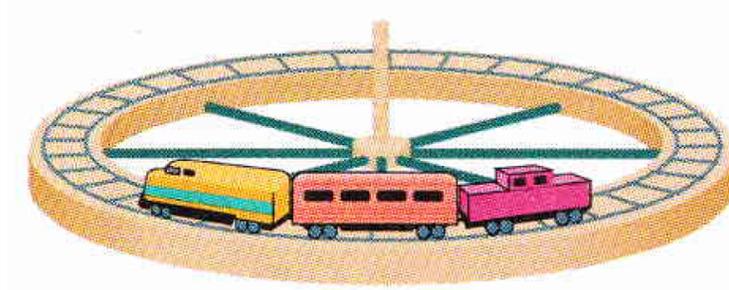


Figura 1.24: *Veja exemplo 3.*

Devemos usar a conservação do momento angular. Assim, como o trem parte do repouso e não há torques externos, então o momento angular inicial é nulo e deve também ser o valor do momento angular final, constituído por uma soma do momento angular do trenzinho de brinquedo e o momento angular da roda. Além disso, observamos que o momento angular está dirigido ao longo da direção vertical. Considerando que o momento angular do trenzinho de brinquedo é positivo, segue que:

$$L_{\text{trem}} + L_{\text{roda}} = 0.$$

ou,

$$mv'R - I\omega = 0.$$

onde ω é a velocidade angular da roda que se movimenta no sentido horário em relação a um observador parado. v' é a velocidade do trem em relação ao observador parado. O enunciado do problema nos diz que o trem tem uma velocidade v em relação à roda, assim, precisamos escrever v' em relação a este referencial. A velocidade v' é nula quando as velocidades da roda e do trem são iguais, assim, escrevemos:

$$v' = v - \omega R$$

esta expressão nos diz que a velocidade em relação à roda é maior do que em relação ao observador parado porque a roda está se movendo em sentido contrário. Substituindo este valor na equação de conservação do momento angular, segue que

$$m(v - \omega R)R - I\omega = 0.$$

ou ainda,

$$mvR - m\omega R^2 - I\omega = 0.$$

O momento de inércia da roda já foi determinado anteriormente, desde que estamos considerando que o mesmo pode ser aproximado por um aro de raio R e massa M . Assim, dos resultados anteriores temos:

$$I = MR^2$$

assim, obtemos:

$$mvR - m\omega R^2 - MR^2\omega = 0.$$

e resolvendo para ω segue que:

$$\omega = \frac{mvR}{(m + M)R^2}$$

ou

$$\omega = \frac{m}{m + M} \left(\frac{v}{R} \right).$$

5. Uma haste uniforme de 0,50 m de comprimento e massa igual a 4 kg pode girar em um plano horizontal em torno de um eixo vertical passando pelo seu centro. A haste está em repouso quando uma bala de 3,0 g se deslocando no plano horizontal da haste é disparada para dentro de uma extremidade da haste. Quando vista de cima, a direção do vetor velocidade faz um ângulo de 60° com a haste (veja a figura 1.25). Se a bala ficar alojada na haste e a velocidade angular da haste for de 10 rad/s imediatamente após a colisão, qual será o módulo da velocidade da bala imediatamente antes do impacto?

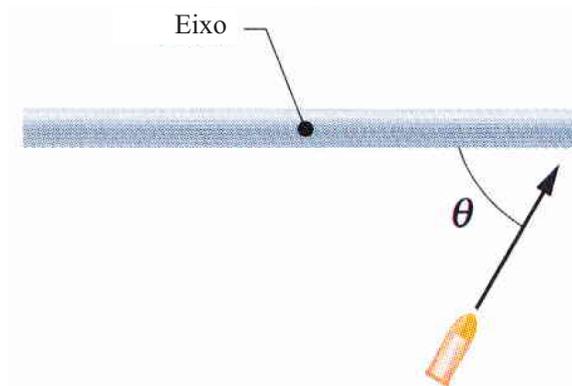


Figura 1.25: Veja exemplo 3.

Novamente, como não temos torques externos, podemos então usar a conservação do momento angular neste problema. Aqui precisamos lembrar do que foi dito a respeito do momento angular no início desta

seção. Para determiná-lo precisamos da sua definição para uma partícula com momento \mathbf{p} movendo-se em torno de um ponto, assim:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

e considerando a origem do sistema de coordenadas coincidindo com o eixo de rotação da barra, podemos decompor o momento da seguinte forma

$$\mathbf{p} = p \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + p \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$$

e o vetor posição, neste caso é dado por

$$\mathbf{r} = \frac{S}{2} \hat{\mathbf{x}}$$

que aponta no ponto de impacto da bala, note que estamos considerando que a barra tem um comprimento S . Assim, no momento do impacto temos o momento angular da bala:

$$\mathbf{L} = \frac{S}{2} \hat{\mathbf{x}} \times (p \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + p \sin \phi \hat{\mathbf{y}})$$

e assim, fazendo o produto vetorial, ficamos com

$$\mathbf{L} = \frac{S}{2} mv \sin \phi \hat{\mathbf{z}}$$

onde trocamos $p = mv$ o módulo do momento linear da bala. Vemos então que o momento angular é dirigido ao longo do eixo de rotação, saindo do plano do papel. Assim, como o movimento está restrito ao plano podemos trabalhar apenas com as grandezas escalares.

Quando a bala atinge a barra todo o momento angular da bala é transferido para a barra que começa a girar. Assim, se o momento angular da barra é $I\omega$, então escrevemos:

$$\frac{S}{2} mv \sin \phi = I\omega$$

onde I é o momento de inércia da barra em torno do eixo perpendicular ao seu centro mais a contribuição da bala que está alojada na barra. De acordo com a definição do momento de inércia, o momento angular da bala é simplesmente $m \frac{S^2}{4}$. Assim, desde que $I_{\text{barra}} = MS^2/12$, podemos escrever,

$$\frac{S}{2} mv \sin \phi = \left(m \frac{S^2}{4} + \frac{MS^2}{12} \right) \omega$$

ou ainda,

$$6mv \sin \phi = (3mS + MS)\omega$$

e resolvendo para v obtemos ainda,

$$v = \frac{(3m + M)\omega S}{6m \sin \phi} = 1,29 \times 10^3 \text{ m/s}$$

1.8 Movimento de Rolamento

1.8.1 Rolamento como uma combinação de translação e rotação

Até o momento consideramos, para simplificar o estudo da rotação, que os nossos objetos de estudo tinham apenas movimento rotacional, considerando que o eixo de rotação é fixo. Agora vamos relaxar esta restrição e considerar que o eixo de rotação está em movimento. Neste caso, podemos ter movimentos mais complicados e um deles é o movimento de rolamento. O movimento de rolamento é composto por um movimento de translação do centro de massa (cm) e um movimento de rotação do corpo em torno de cm . Isso pode ser observado na Fig. 1.26 ilustrando o movimento de uma roda. O cm localizado no centro da roda tem uma velocidade v_{cm} enquanto a roda gira de um ângulo de θ . Note que a distância linear percorrida pela roda é s . Também observamos que o ponto P de contato entre a roda e a superfície também percorre a mesma distância s . A relação entre este deslocamento linear e o deslocamento angular é dado por:

$$s = R\theta \quad (1.61)$$

onde R é o raio da roda e θ é o ângulo descrito pela mesma.

A velocidade linear da roda v_{cm} é definida como a derivada do deslocamento linear em relação ao tempo, i.e., ds/dt . A velocidade angular ω da roda é $d\theta/dt$. Assim, derivando Eq. (1.61), segue que:

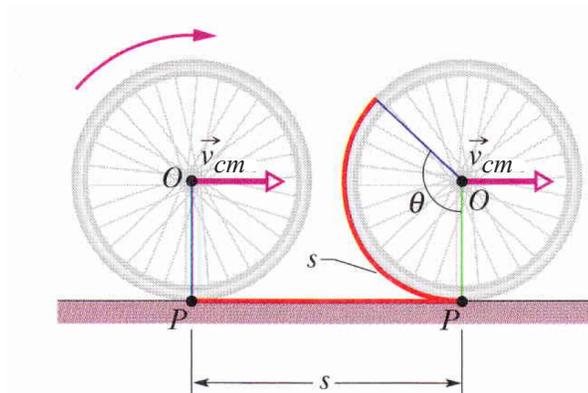


Figura 1.26: O centro de massa O de uma roda percorre uma distância s com velocidade v_{CM} enquanto que a roda gira de um ângulo θ . O ponto P de contato entre a roda e a superfície na qual está rolando também percorre uma distância s .

$$v_{cm} = \omega R \quad (1.62)$$

A Fig. 1.27 mostra que o movimento de rolamento é uma combinação de um movimento puro de translação com um movimento puro de rotação. A Fig. 1.27a mostra o movimento puro de rotação (como se o eixo de rotação estivesse estacionário): todos os pontos da roda giram com velocidade angular ω em torno do centro. Todos os pontos na periferia da roda apresentam uma velocidade linear de módulo v_{cm} dada pela Eq. (1.62) com sentido tangente à circunferência da roda (este é o movimento que temos discutido até agora). A Fig. 1.27b mostra o movimento de translação pura, onde todos os pontos da roda apresentam velocidade iguais a v_{cm} , com sentido e direção também iguais. É como se a roda estivesse escorregando sobre a superfície sem atrito. A combinação dos movimentos apresentados nas Figs. 1.27a e 1.27b é o rolamento da roda mostrado na Fig. 1.27c. Observe que nesta combinação de movimentos, a velocidade na extremidade inferior da roda no ponto P é zero enquanto que na parte superior da roda, no ponto T , a velocidade é o dobro da velocidade da velocidade no centro de massa. Este ponto tem a maior velocidade do que qualquer outro ponto na roda. Qualquer movimento de rolamento pode ser decomposto como a soma de um movimento de rotação e outro de translação como foi feito na Fig. 1.27.

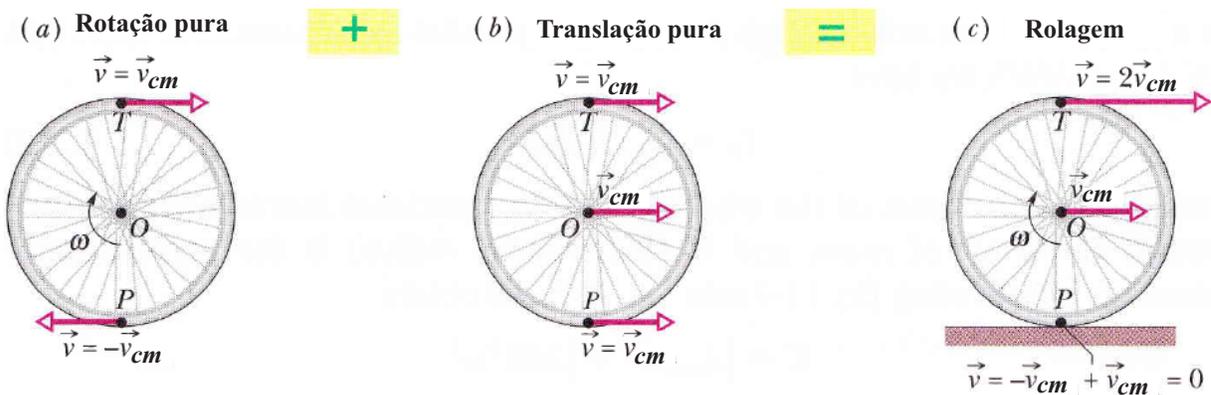


Figura 1.27: O movimento de rolamento de uma roda como uma combinação de um movimento de rotação pura e um movimento de translação pura. (a) Movimento de rotação pura: todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade angular ω . Todos os pontos da borda da roda se movem com a mesma velocidade linear $v = v_{cm}$. São mostradas as velocidades lineares de dois destes pontos, na borda de cima (T) e na borda de baixo (P) da roda. (b) Movimento de translação pura: todos os pontos da roda se movem para a direita com a mesma velocidade linear v_{cm} . (c) O movimento de rolamento da roda é uma combinação de (a) com (b).

1.8.2 Rolamento como uma Rotação Pura

Outra maneira de descrever o movimento de rolamento é através de uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto de contato da roda com a superfície sobre a qual a roda está rolando, conforme

mostra a Fig. 1.28.

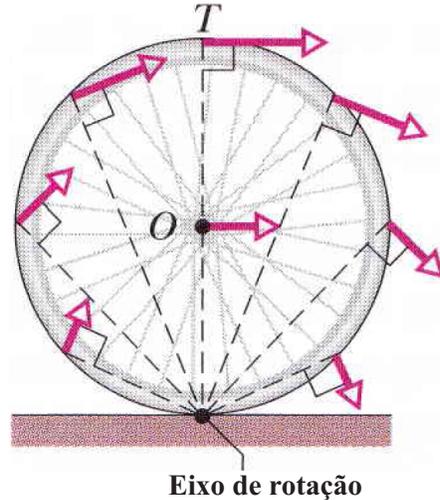


Figura 1.28: O rolamento pode ser visto como uma rotação pura, com velocidade angular ω , em torno de um eixo que sempre passa por P . Os vetores mostram as velocidades lineares instantâneas de pontos escolhidos da roda. Estes vetores podem ser obtidos combinando os movimentos de translação e rotação como na Fig. 1.27.

Para mostrar que de fato o movimento pode ser visto desta forma, podemos determinar a velocidade linear v_T no topo da roda, no ponto T . Assim, escrevemos,

$$\mathbf{v}_T = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_T$$

e como todos os vetores são perpendiculares, podemos simplesmente escrever,

$$v_T = \omega r_T$$

onde r_T é módulo do vetor saindo da origem, que está em P , até o ponto T . Assim, $r_T = 2R$, logo,

$$v_T = 2\omega R = 2v_{cm}$$

em concordância com a Fig. 1.27b.

1.8.3 Energia Cinética de Rolamento

Vamos determinar a energia cinética para a roda em rolamento do ponto de vista de um observador estacionário. Quando consideramos o rolamento como uma rotação pura em torno do ponto P , então a energia cinética é dada por,

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

onde I_P é o momento de inércia em torno de um eixo passando pelo ponto P e ω é a velocidade angular da roda. Pelo teorema do eixo paralelo, podemos determinar o momento de inércia I_P :

$$I_P = I_{cm} + Mh^2$$

onde I_{cm} é o momento de inércia em torno de um eixo passando pelo centro de massa da roda, M é a massa total da roda e h é a distância entre os eixos passando por P e pelo centro de massa. Assim, como a distância entre os eixos é igual ao raio da roda, temos então:

$$I_P = I_{cm} + MR^2$$

e substituindo na equação para a energia cinética, segue que:

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

e como $\omega R = v_{cm}$ pela Eq. (1.62), temos ainda:

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \quad (1.63)$$

E vemos então que a energia cinética é composta de duas parcelas: a primeira correspondendo ao movimento de rotação pura em torno do centro de massa e a segunda devido ao movimento de translação pura, como se a roda fosse uma partícula de massa M com velocidade v_{cm} .

1.8.4 As forças do Rolamento

Se a roda da Fig. 1.27 rola com velocidade constante não há deslizamento no ponto de contato da roda com a superfície sobre a qual ela rola, o ponto P no desenho da roda na a Fig. 1.27c. No entanto, se tentamos acelerar a roda, o que significa aumentar a velocidade do centro de massa no sentido do movimento, também tendemos a aumentar a velocidade de rotação o que implica em uma aceleração angular. Neste caso, a roda tende a deslizar sobre a superfície no ponto P . Podemos ver isso facilmente aumentando a velocidade de uma bicicleta em uma superfície com pouco atrito, “a bicicleta patina” quando tentamos colocá-la em movimento. No caso geral, uma força de atrito aparece no ponto P que se opõe à tendência de deslizar da roda. Assim, como não há movimento, esta força de atrito, é uma força de atrito estático. Nesta condição, é bastante simples determinar qual é a relação entre a aceleração \mathbf{a}_{cm} do centro de massa e a aceleração angular da roda α . Para isso, basta derivar a Eq. (1.62) em relação ao tempo, mantendo-se R constante, assim:

$$\frac{dv_{cm}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$$

ou seja,

$$a_{cm} = \alpha R \quad (1.64)$$

válida somente quando o rolamento é suave, ou seja, sem deslizamento.

Na figura 1.29a temos uma ilustração de uma roda em um plano horizontal, onde o centro de massa da roda sofre uma aceleração para a direita. Note que aparece uma força de atrito estático f_s dirigida para a direita. Isso ocorre porque o aumento da velocidade no ponto de contato da roda é dirigida para a esquerda e o deslizamento também seria neste sentido.

Rolamento em uma rampa

A Fig. 1.29b mostra um corpo redondo e uniforme descendo uma rampa de inclinação dada pelo ângulo θ . Queremos obter uma expressão para a aceleração do centro de massa objeto ao longo da direção, paralela à rampa. Para isso, precisamos determinar as forças que estão atuando no sistema. Primeiramente, devido à massa M do objeto, temos a contribuição da força gravitacional \mathbf{F}_g dirigida na direção vertical para baixo. Esta força é decomposta em duas componentes: perpendicular à rampa ($F_g \cos \theta$), que é equilibrada pela força de reação normal \mathbf{F}_N à rampa e uma segunda, $F_g \sin \theta$, que tende a acelerar o corpo no sentido negativo do eixo x . Além disso, temos a força de atrito estático que suprime o deslizamento que poderia ocorrer no sentido negativo do eixo x . Assim, esta força aponta no sentido positivo do eixo x .

A soma das forças na direção x deve ser equivalente à aceleração do centro de massa, assim escrevemos:

$$f_s - Mg \sin \theta = Ma_{cm} \quad (1.65)$$

onde $F_g = Mg$ é o módulo da força gravitacional. Ainda não podemos determinar a aceleração do centro massa porque não conhecemos a força de atrito estático. No entanto, ainda podemos aplicar a 2ª lei de Newton na forma angular, desde que temos o movimento de rotação. Para isso, usamos a lei de Newton na seguinte forma:

$$\tau_{\text{res}} = I\alpha$$

onde τ_{res} é o torque resultante sobre o objeto. Temos então que analisar as diversas contribuições para o torque. O primeiro requisito para a existência do torque é que a força precisa ter um braço de alavanca

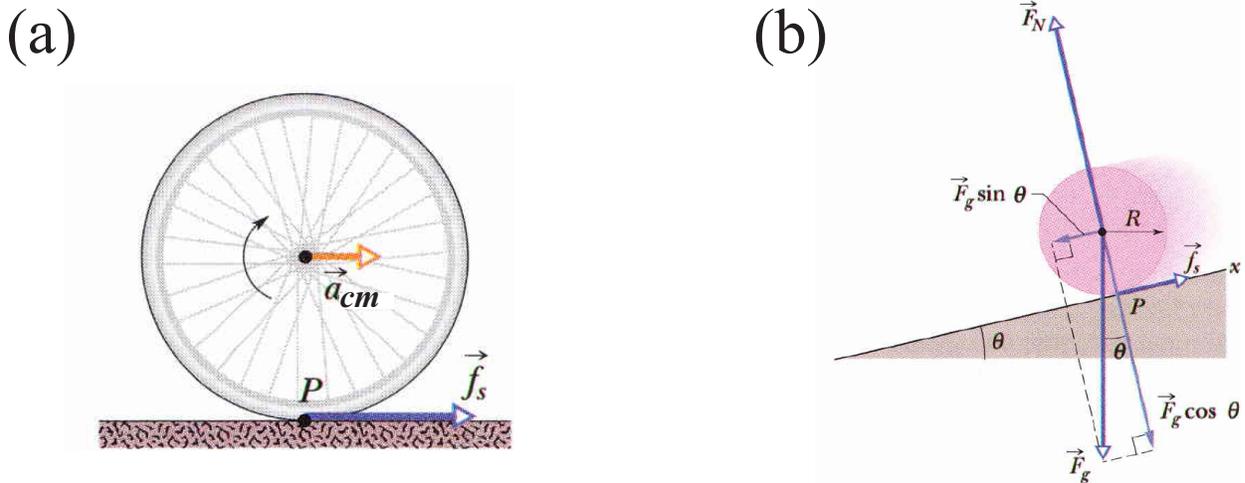


Figura 1.29: (a) Uma roda rola horizontalmente sem deslizar com uma aceleração linear a_{cm} . Uma força de atrito estático f_s atua sobre a roda em P , impedindo o deslizamento. (b) Um corpo redondo uniforme de raio R rola para baixo em uma rampa. As forças que agem sobre ele são a força gravitacional \mathbf{F}_g , a força normal \mathbf{F}_N e a força de atrito f_s , que aponta para cima ao longo da rampa. (Para maior clareza o vetor \mathbf{F}_N foi deslocado ao longo de sua linha de ação até sua origem coincidir com o centro do corpo.)

em relação ao centro de massa, desde que o eixo de rotação está situado no centro de massa. Assim, vemos que as componentes da força gravitacional, não exercem torque pois atuam diretamente sobre o centro de massa. O mesmo ocorre com a normal, que embora atue no ponto de contato, possui linha de ação passando pelo centro de massa. Assim, a única força restante é o atrito que tem um braço de alavanca igual ao raio do objeto, assim, como esta atua perpendicularmente e produz um movimento no sentido anti-horário, temos:

$$\tau_{\text{res}} = f_s R$$

e substituindo na 2ª lei de Newton, obtemos:

$$f_s R = I_{cm} \alpha$$

Mas como estamos considerando movimento com rolamento suave, então a Eq. (1.64) se aplica neste caso, mas com uma diferença de sinal, desde que a_{cm} aponta no sentido negativo de x e α é positivo desde que o objeto gira no sentido anti-horário⁶. Assim, segue que:

$$\alpha R = -a_{cm}$$

⁶e como $a_{cm} < 0$ com o menos na frente α fica positivo.

e substituindo 2ª lei de Newton, escrevemos,

$$f_s = -I_{cm} \frac{a_{cm}}{R^2} \quad (1.66)$$

onde isolamos a força de atrito estático passando o R para o segundo membro. Assim, substituindo (1.66) em (1.65) segue que:

$$-\frac{I_{cm}}{R^2} a_{cm} - Mg \sin \theta = Ma_{cm}$$

ou ainda,

$$-\frac{I_{cm}}{MR^2} a_{cm} - g \sin \theta = a_{cm}$$

e isolando a aceleração do centro de massa, vamos obter:

$$a_{cm} = -\frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I_{cm}}{MR^2}} \quad (1.67)$$

A Eq. (1.67) permite determinar a aceleração do centro de massa de qualquer objeto rolando em um plano inclinado de um ângulo θ .

O movimento de um Ioiô

Um ioiô apresenta um movimento similar ao caso do plano inclinado, exceto que o movimento se dá ao longo da corda que faz 90° com a direção horizontal, veja a Fig. 1.30. Além disso, a força de tração na corda faz as vezes da força de atrito se opondo ao deslizamento do ioiô quando este desce a corda. Assim, aplicando a 2ª lei de Newton para o centro de massa, temos:

$$T - Mg = Ma_{cm}$$

onde M é a massa do ioiô. Aplicando agora a segunda lei de Newton na forma angular, lembrando que apenas a força de tração produz um torque com braço de alavanca R_0 , temos então:

$$\tau = I_{cm} \alpha \quad \therefore \quad TR_0 = -I_{cm} \frac{a_{cm}}{R_0} \quad \text{logo,}$$

$$T = -I_{cm} \frac{a_{cm}}{R_0^2}.$$

Note que a última igualdade envolve o raio do eixo onde está enrolado o fio. Isto porque quando o ioiô dá uma volta o deslocamento é $s = R_0 \theta$, ou de maneira equivalente, o comprimento do fio desenrolado é dado pelo perímetro do eixo onde o fio está enrolado.

Substituindo a tração na primeira equação, obtemos finalmente:

$$a_{cm} = -\frac{g}{1 + I_{cm}/MR_0^2}. \quad (1.68)$$

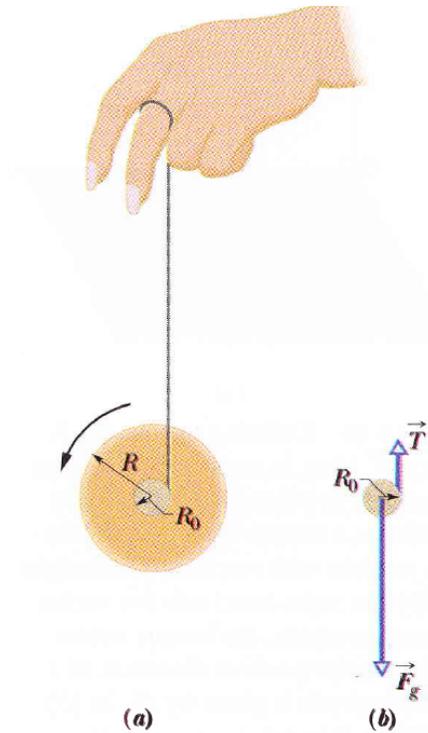


Figura 1.30: O rolamento pode ser visto como uma rotação pura, com velocidade angular ω , em torno de um eixo que sempre passa por P . Os vetores mostram as velocidades lineares instantâneas de pontos escolhidos da roda. Estes vetores podem ser obtidos combinando os movimentos de translação e rotação como na Fig. 1.27.

1.8.5 Exemplos

1. Na Fig. 1.31, uma bola de massa M e raio R rola suavemente, a partir do repouso, descendo uma rampa e passando por uma pista circular com $0,48\text{ m}$ de raio. A altura inicial da bola é $h = 0,36\text{ m}$. Na parte mais baixa da curva o módulo da força normal que a pista exerce sobre a bola é $2,00Mg$. A bola é formada por uma casca esférica externa (com uma certa densidade uniforme) e uma esfera central com uma densidade uniforme diferente. O momento de inércia da bola é dado pela expressão geral $I = \beta MR^2$, mas β não é igual a $0,4$, como no caso de uma bola de densidade uniforme. Determine o valor de β .

Do princípio de conservação de energia temos que,

$$Mgh = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

desde que a bola perde energia potencial gravitacional ganhando energia cinética tanto de translação quanto de rotação. Quando a bola está na parte mais baixa da curva, a força normal exercida pela superfície sobre a bola, provoca uma aceleração centrípeta do centro de massa, $a_{cm} = Mv^2/r$, onde r é o raio da trajetória e v a velocidade do centro de massa. Além disso, temos que considerar o peso da bola

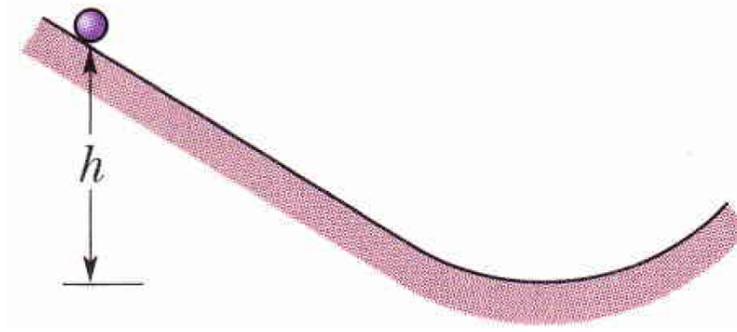


Figura 1.31: *Veja Exemplo 1.*

devido à gravidade, assim equacionando estas forças, segue que:

$$Ma_{cm} = F_N - Mg = M \frac{v^2}{r}$$

Desde que o movimento é de rolamento suave, temos uma relação entre a velocidade linear v e a velocidade angular ω dada pela Eq. (1.62): $v_{cm} = v = \omega R$. Além disso, de acordo com o enunciado do problema, $F_N = 2Mg$, assim substituindo na 2ª lei de Newton, obtemos:

$$Mg = M \frac{\omega^2 R^2}{r}$$

o que nos permite escrever a velocidade angular como:

$$\omega^2 = \frac{gr}{R^2}$$

logo,

$$v^2 = \omega^2 R^2 = gr$$

e substituindo v e ω na Eq. para conservação da energia, obtemos:

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{cm} \frac{gr}{R^2} + \frac{1}{2} Mgr$$

ou ainda,

$$2MhR^2 = I_{cm}r + MrR^2$$

e isolando I_{cm} , obtemos ainda:

$$I_{cm} = \frac{2hMR^2}{r} - MR^2$$

e escrevendo $I_{cm} = I = \beta MR^2$, obtemos ainda:

$$\beta MR^2 = \frac{2hMR^2}{r} - MR^2$$

logo,

$$\beta = \frac{2h}{r} - 1$$

que é uma relação que permite determinar o momento de inércia da bola. Substituindo os valores da altura h e do raio r , obtemos:

$$\beta = \frac{2 \times 0,36 \text{ m}}{0,48 \text{ m}} - 1 = 0,50$$

2. Um cilindro maciço de raio 10 cm e massa de 12 kg parte do repouso e rola para baixo uma distância $L = 6,0 \text{ m}$ sem deslizar, em um teto inclinado de um ângulo de 30° . (a) Qual é a velocidade angular do cilindro em relação ao seu centro ao deixar o teto? (b) A borda do teto está a uma altura $H = 5,0 \text{ m}$. A que distância horizontal da borda do teto o cilindro atinge o chão?

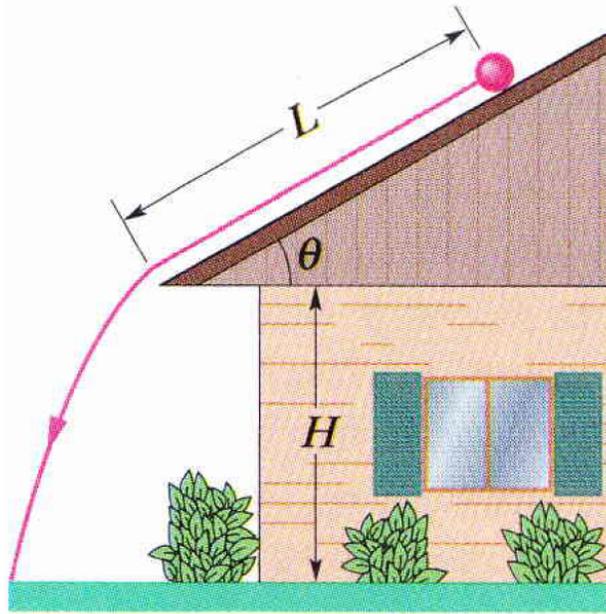


Figura 1.32: Veja Exemplo 2.

(a)

Para determinar a velocidade angular do cilindro quando este deixa o telhado é necessário determinar primeiramente a aceleração do centro de massa através da Eq. (1.67):

$$a_{cm} = -\frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I_{cm}}{MR^2}}$$

onde $I_{cm} = MR^2/2$, assim segue que:

$$a_{cm} = -\frac{g \sin \theta}{1 + \frac{MR^2}{2MR^2}} = -\frac{2}{3}g \sin \theta$$

Considerando rolamento suave, podemos determinar a aceleração angular:

$$a_{cm} = \alpha R$$

logo,

$$\alpha = -\frac{a_{cm}}{R} = \frac{2}{3R}g \sin \theta$$

Agora precisamos determinar o tempo que o cilindro gasta para deixar o telhado. Podemos fazer isso usando a equação:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

e substituindo a pela aceleração do centro de massa a_{cm} , segue que:

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \frac{2}{3} g \sin \theta t^2$$

e considerando que o cilindro parte do repouso, então $v_0 = 0$, logo,

$$x = x_0 - \frac{1}{3} g \sin \theta t^2$$

além disso, supondo que o cilindro parte da origem $x_0 = 0$ e deixa o telhado na posição $x(t) = -L$, temos:

$$-L = 0 - \frac{1}{3} g \sin \theta t^2$$

o que nos permite determinar o tempo que o cilindro gastou para sair do telhado:

$$t = \sqrt{\frac{3L}{g \sin \theta}}$$

Com este tempo determinado, podemos calcular a velocidade angular do cilindro neste instante:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

e como o cilindro parte do repouso então $\omega_0 = 0$, logo, substituindo o tempo t e a aceleração angular α , obtemos:

$$\omega(t) = \frac{2}{3R} g \sin \theta \times \sqrt{\frac{3L}{g \sin \theta}}$$

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{4}{3} g L \sin \theta}$$

Agora, substituimos os valores correspondentes:

$$\omega = \frac{1}{10 \times 10^{-2} \text{ m}} \sqrt{\frac{4}{3} \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 6,0 \text{ m} \times \sin 30^\circ}$$

ou seja,

$$\omega = 62,6 \text{ rad/s.}$$

(b)

Agora temos que determinar a distância horizontal da borda do teto onde cilindro atinge o chão. Para isso, notamos primeiro que se trata de um problema de lançamento de projéteis. Assim, o cilindro se desloca na direção horizontal com velocidade constante e na direção vertical com aceleração constante e igual a $-9,8 \text{ m/s}^2$. Primeiramente notamos que a velocidade inicial com que o cilindro deixa o telhado é simplesmente o valor final da velocidade do percurso da rampa, assim,

$$v_0 = R\omega = 10 \times 10^{-2} \text{ m} \times 62,6 \text{ rad/s} = 6,3 \text{ m/s.}$$

A velocidade inicial deve ser decomposta nas direções x e y , assim, temos:

$$v_{0x} = -v_0 \cos 30^\circ = 5,4 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = -v_0 \sin 30^\circ = 3,1 \text{ m/s}$$

As equações para os movimentos nas direções x e y são dadas por:

$$x(t) = -v_{0x}t$$

$$y(t) = -v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

onde o sinal menos em v_{0x} indica que a velocidade está dirigida para a esquerda e em v_{0y} indica que esta está dirigida para baixo. Para determinar a distância que o cilindro percorre na direção x devemos determinar o tempo que o cilindro leva para cair a altura H , assim, trocando y por $-H$ (para baixo y é negativo) na equação acima, obtemos:

$$-H = -v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

e resolvendo para t , obtemos:

$$t = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 4 \frac{g}{2} H}}{2 \times \frac{g}{2}}$$

ou ainda,

$$t = \frac{-v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gH}}{g}$$

note que desprezamos a raiz negativa, pois o tempo negativo aqui seria um instante anterior ao início da contagem do tempo e portanto, não faz sentido pois o cilindro está no telhado e não no chão. Substituindo este tempo em $x(t)$ segue que:

$$x(t) = -v_{0x}t$$

ou ainda,

$$x(t) = \frac{v_{0x}v_{0y} - v_{0x}\sqrt{v_{0y}^2 + 2gH}}{g}$$

que é a relação procurada. Substituindo os valores correspondentes, vamos obter:

$$x(t) = \frac{5,4 \text{ m/s} \times 3,1 \text{ m/s} - 5,4 \text{ m/s} \times \sqrt{(3,1 \text{ m/s})^2 + 2 \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 5,0 \text{ m}}}{9,8 \text{ m/s}^2}$$

ou ainda,

$$x(t) = -4,0 \text{ m.}$$

Esta é posição do cilindro, a distância é módulo da posição que é igual a 4,0 m à esquerda da casa.

3. Na figura 1.33 uma força horizontal constante \mathbf{F}_{app} de módulo 10 N é aplicada a uma roda de massa de 10 kg e raio 0,30 m. A roda rola suavemente na superfície horizontal, e o módulo da aceleração do centro de massa é 0,60 m/s². (a) Em termos dos vetores unitários, qual é força de atrito que age sobre a roda? (b) Qual é o momento de inércia da roda em relação ao eixo de rotação que passa pelo centro da massa?

(a)

Este item é bastante simples, basta aplicar a 2ª lei de Newton no centro de massa. Temos duas forças atuando, a primeira é a força aplicada $\mathbf{F}_{app} = F_{app}\hat{\mathbf{x}}$ e a segunda é a força de atrito que atua no ponto de

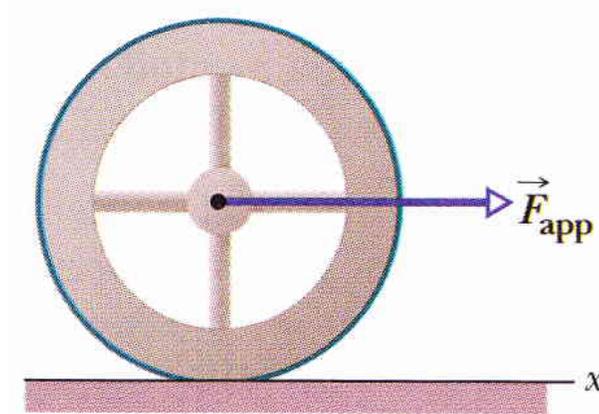


Figura 1.33: Veja Exemplo 3.

contanto da roda com a superfície. A roda tende a deslizar no sentido positivo do eixo x devido à força F_{app} . Assim, a força de atrito está apontando no sentido negativo do eixo x , logo temos que $\mathbf{f}_s = -f_s \hat{\mathbf{x}}$. A soma destas forças deve ser igual à aceleração do centro de massa da roda, logo:

$$F_{app} \hat{\mathbf{x}} - f_s \hat{\mathbf{x}} = m a_{cm} \hat{\mathbf{x}}$$

de onde podemos determinar o módulo da força de atrito estático:

$$f_s = |m a_{cm} - F_{app}| = |10 \text{ kg} \times 0,60 \text{ m/s}^2 - 10 \text{ N}|$$

ou seja,

$$f_s = |-4 \text{ N}| = 4 \text{ N}$$

e na forma vetorial,

$$\mathbf{f}_s = -4 \text{ N} \hat{\mathbf{x}}$$

(b)

O momento de inércia da roda pode ser determinado lembrando-se que o torque é igual ao produto do momento de inércia pela aceleração angular. Esta última pode ser determinada a partir da aceleração do centro de massa supondo rolamento suave, assim escrevemos:

$$\tau = I \alpha$$

mas $\tau = -R f_s$, desde que a força aplicada não produz torque porque atua no eixo de rotação. Logo, temos:

$$I = \frac{\tau}{\alpha} = -\frac{R f_s}{\alpha}$$

onde o sinal de menos aparece porque o torque produz uma rotação no sentido horário. Agora considerando a aceleração angular, temos que:

$$\alpha = -\frac{a_{cm}}{R}$$

onde o sinal indica que a aceleração é no sentido horário. Substituindo na relação para I , obtemos:

$$I = \frac{R^2 f_s}{a_{cm}}$$

e substituindo os valores correspondentes, obtemos:

$$I = \frac{(0,30 \text{ m})^2 4 \text{ N}}{0,60 \text{ m/s}^2} = 0,60 \text{ kg.m}^2$$

4. Um ioiô possui momento de inércia de 950 g.cm^2 e uma massa de 120 g . O raio do seu eixo é $3,2 \text{ mm}$ e sua corda tem 120 cm de comprimento. O ioiô rola, a partir do repouso, até a extremidade da corda. (a) Qual é o módulo da aceleração da linear do ioiô? (b) Quanto tempo ele leva para chegar à extremidade da corda? Ao chegar à extremidade da corda, qual é a (c) velocidade linear, (d) a energia cinética de translação, (e) a energia cinética de rotação e (f) a velocidade angular?

(a)

A aceleração pode ser determinada facilmente usando-se a equação deduzida para a aceleração do centro de massa:

$$a_{cm} = -\frac{g}{1 + I/MR_0^2} = -\frac{9,8 \text{ m/s}^2}{1 + 950 \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2 / [120 \times 10^{-3} \text{ kg} \times (3,2 \times 10^{-3} \text{ m})^2]}$$

e calculando obtemos:

$$a_{cm} = -\frac{g}{1 + I/MR_0^2} = -\frac{9,8 \text{ m/s}^2}{1 + 950 \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2 / [120 \times 10^{-3} \text{ kg} \times (3,2 \times 10^{-3} \text{ m})^2]}$$

$$a_{cm} = -0,125 \text{ m/s}^2$$

(b)

O ioiô se movimenta como se fosse uma partícula caindo, assim, podemos usar a fórmula:

$$y = 0 + 0 - \frac{1}{2} a_{cm} t^2$$

onde y deve ser negativo. Assim para determinar o tempo basta trocar y pelo comprimento da corda de $1,2 \text{ m}$, obtemos:

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 1,2 \text{ m}}{0,125 \text{ m/s}^2}} = 4,38 \text{ s}$$

este é o tempo procurado.

(c)

A velocidade pode ser obtida simplesmente usando:

$$v = -a_{cm}t = -0,125 \text{ m/s}^2 \times 4,38 \text{ s} = -0,548 \text{ m/s}$$

(d)

A energia cinética de translação é simplesmente,

$$K_{trans} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 120 \times 10^{-2} \text{ kg} \times (-0,548 \text{ m/s})^2 = 1,8 \times 10^{-2} \text{ J.}$$

(e)

A energia cinética rotacional, pode ser obtida através da relação:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I \left(\frac{v}{R_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \times 950 \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2 \left(\frac{-0,548 \text{ m/s}}{3,2 \times 10^{-3} \text{ m}} \right)^2 = 1,4 \text{ J.}$$

(f) a velocidade angular é dada por,

$$\omega = \frac{|v|}{R_0} = 0,548 \text{ m/s} / 3,2 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,7 \times 10^2 \text{ rad/s.}$$