Assunto: Análise Combinatória
Professor: José Marcos Lopes
Data: novembro de 2004

V - ARRANJOS COM REPETIÇÃO

Objetivo: Sistematizar o conceito de arranjo com repetição.

Da mesma forma que feito anteriormente, o conceito combinatório será sistematizado após a resolução de vários problemas.

Problema 31. Quantos números de 5 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Comentários e sugestões para o professor.

Deve-se explorar inicialmente alguns resultados possíveis. Por exemplo, os números 12345, 55555, 66555, 99876 são permitidos. Observar que o número (agrupamento ordenado de 5 algarismos) 12345 é diferente do número 12354. Uma mudança na posição dentro do agrupamento altera o agrupamento, assim a **ordem** é importante dentro do agrupamento e neste caso podemos **repetir** algarismos.

Uma possível solução é apresentada da seguinte forma: denotando a posição das dezenas de milhar por P1, a posição dos milhares por P2, a posição das centenas por P3, a posição das dezenas por P4 e a posição das unidades por P5, devemos escolher algarismos para estas cinco posições. Assim

9	9	9	9	9	Resultados possíveis
P1	P2	P3	P4	P5	Posição no número

Para cada uma das cinco posições podemos utilizar qualquer um dos 9 algarismos. Assim pelo **Princípio Multiplicativo**, podemos formar $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$ números de 5 algarismos se escolhemos entre os 9 algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Usar a árvore de possibilidades ou tentar descrever todos os números possíveis é impraticável para este problema.

Problema 32. Numa urna foram colocadas 5 bolas de cores diferentes: vermelha, preta, amarela, cinza e branca. De quantas maneiras distintas podemos retirar 3 bolas consecutivamente, repondo cada bola na urna antes da retirada da próxima bola?

Comentários e sugestões para o professor.

Considerando V= vermelho, P = preto, A = amarelo, C = cinza e B = branco; alguns resultados possíveis para a retirada das três bolas são: VVV, AAV, AVA, CCC, BBC, ABC e etc.; observar que os resultados AAV e AVA são distintos, pois a segunda bola retirada não é a mesma para os dois casos. Assim a **ordem** é importante dentro do agrupamento e neste caso podemos ter cores **repetidas**.

Uma possível solução é dada por:

5	5	5	Número de possibilidades
1ª bola	2ª bola	3ª bola	Retirada das bolas

Logo pelo **Princípio Multiplicativo**, podemos ter 5 x 5 x 5 = 5^3 = 125 maneiras diferentes de retirar as três bolas desta urna.

Problema 33. Sejam A = $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e B = $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$. Quantas são as funções $f:A \to B$?

Comentários e sugestões para o professor.

Este problema é análogo ao *problema 15*. Observe que neste caso repetições poderão ocorrer. Assim algumas possíveis 4-uplas de imagens são: (b_7, b_7, b_3, b_4), (b_1, b_4, b_5, b_7), (b_3, b_4, b_6, b_7) e (b_3, b_3, b_7, b_6) onde para a primeira função $f(a_1) = b_7$, $f(a_2) = b_7$, $f(a_3) = b_3$ e $f(a_4) = b_4$. Observe que se mudamos a **ordem** na 4-upla mudamos também a função.

Indicando as posições nas 4-uplas de imagens por P1, P2, P3 e P4 temos:

7	7	7	7	Resultados possíveis
P1	P2	P3	P4	Posição na imagem

Assim pelo **Princípio Multiplicativo** existem 7 x 7 x 7 x 7 = 7^4 = 2401 funções $f : A \to B$.

Após o trabalho com vários problemas do tipo dos problemas 31, 32 e 33, o professor pode sistematizar o conceito de arranjos com repetição através da seguinte definição:

Definição: Chama-se arranjo com repetição (ou completo) de ordem k, de n objetos distintos, toda seqüência de k objetos, selecionados entre os n objetos dados.

Notação: $AR_{n,k}$.

Observações: 1-Costuma-se dizer também arranjo com repetição de n objetos tomados k a k.

2- Duas seqüências $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ e $(P_1', P_2', \ldots, P_k')$ serão iguais se e somente se $P_1 = P_1', P_2 = P_2', \ldots, P_k = P_k'$.

Teorema: O número de arranjos com repetição de n elementos distintos tomados k a k é dado por n^k.

Prova:

Acontecimentos	**Número de possibilidades**
Escolha de um elemento para a posição P_1	n
Escolha de um elemento para a posição P_2, após a escolha para P_1	n
⋮	⋮
Escolha de um elemento para a posição P_k, após a escolha para $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$	n

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos n^k seqüências com k elementos, ou seja $AR_{n,k} = n^k$.

□

Depois de sistematizado o conceito de Arranjos com repetição podemos utilizar a fórmula para resolver alguns problemas.

Problema 34. Com os dígitos 2, 5, 6, e 7, quantos números formados por 3 dígitos distintos ou não são divisíveis por 5?
Resposta: $AR_{4,2} = 4^2 = 16$.

Problema 35. Com os algarismos 1, 2, 3, ... ,9, quantos números de quatro algarismos existem, em que pelo menos dois algarismos são iguais?
Resposta: $AR_{9,4} - A_{9,4} = 9^4 - 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3537$.

Problema 36. Em um concurso há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato. De quantos modos os votos podem ser distribuídos?
Resposta: $AR_{3,5} = 3^5 = 243$.

Problema 37. As placas de automóveis são formadas por três letras do alfabeto de 26 letras seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?
Resposta: $AR_{26,3} \times AR_{10,4} = 26^3 \times 10^4$.

VI - PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

Objetivo: Sistematizar o conceito de permutação com repetição.

Problema 38. Quantos anagramas possui a palavra ANA?

Comentários e sugestões para o professor.

Neste momento o aluno já conhece o conceito de permutação simples. Assim se as duas letras A fossem distintas teríamos $P_3 = 3! = 6$ anagramas, a saber:

$$ANA^*, A^*NA, AA^*N, A^*AN, NAA^*, NA^*A$$

observe entretanto que o primeiro e o segundo anagramas são iguais, o terceiro e o quarto anagramas são iguais e também o quinto e o sexto anagramas são iguais.

Na verdade podemos formar apenas $\frac{3!}{2} = 3$ anagramas com a palavra ANA, a saber:

ANA , AAN , NAA.

Problema 39. Quantos anagramas possui a palavra CASA?
Comentários e sugestões para o professor.

Podemos resolver este problema com o mesmo raciocínio usado no *problema 38*. A solução pode também ser obtida através da árvore de possibilidades. Indicando as posições das letras no anagrama por (P1, P2, P3, P4) temos:

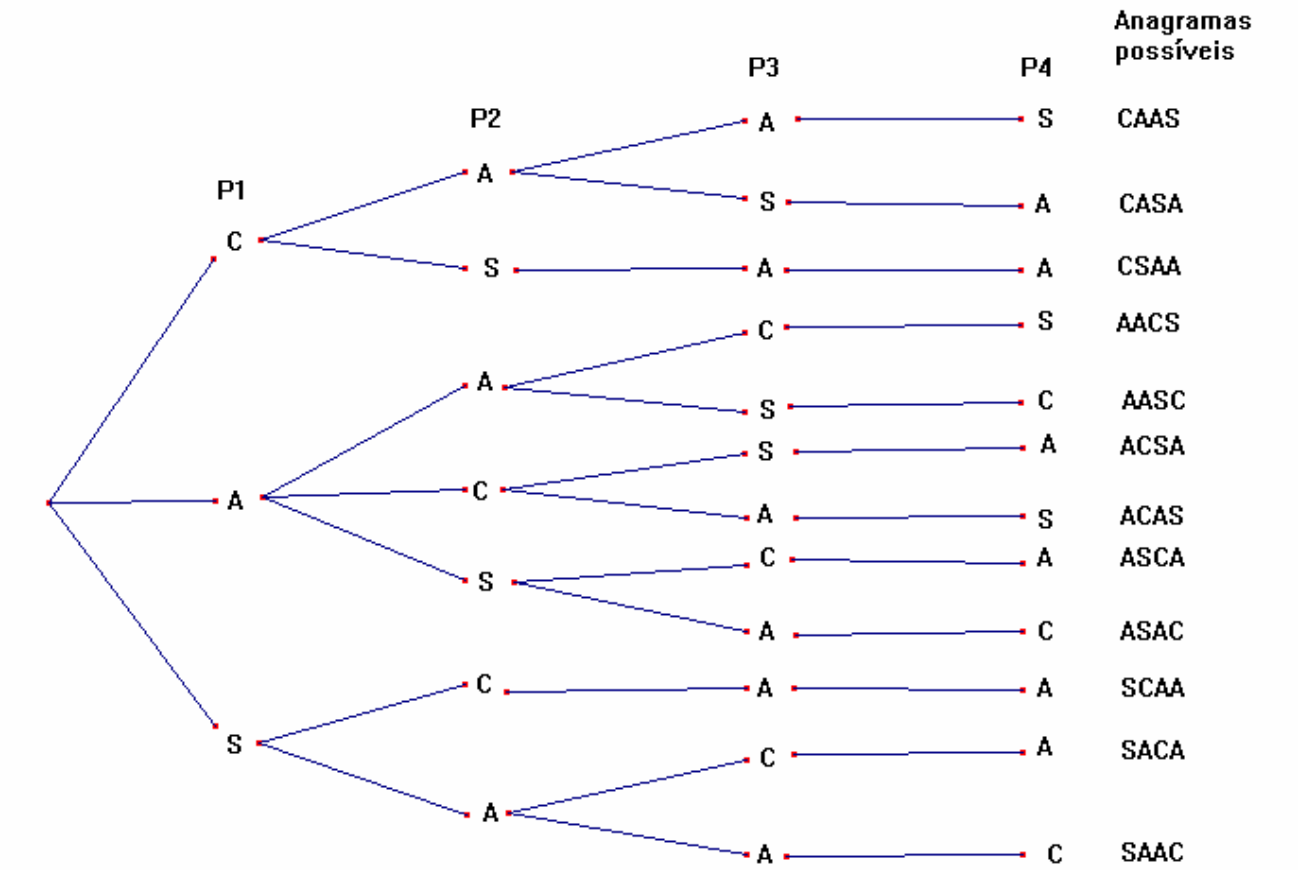

Figura 8. Anagramas da palavra CASA.

Podemos formar assim 12 anagramas utilizando as letras da palavra CASA.

Outra Solução: Das quatro posições que existem no anagrama, vamos escolher duas posições, para colocar as letras distintas {C, S}. Existem $C_{4,2}$ maneiras de escolher estas duas posições. Para cada posição escolhida, existem P_2 modos como estas letras podem ser colocadas (a ordem altera o anagrama). Logo existem $C_{4,2}$ x P_2 formas de dispormos as letras distintas no anagrama.

Colocadas as duas letras distintas, existe uma única maneira de colocarmos as duas letras A, assim o número de anagramas é dado por:

$$C_{4,2} \text{ x } P_2 \text{ x } 1 = \frac{4!}{2!x2!} \text{ x } 2! = \frac{4!}{2!} = 12.$$

Problema 40. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 2 amarelas. Elas são extraídas uma a uma sem reposição. Quantas seqüências de cores podemos observar?

Comentários e sugestões para o professor.

O conceito combinatório envolvido neste problema é o de permutação. Todos os elementos serão utilizados e a **ordem** em que as bolas são retiradas define seqüências diferentes. A solução pode ser apresentada neste caso através da árvore de possibilidades.

Vamos utilizar aqui o mesmo raciocínio usado no *problema 38*. Se as 3 bolas vermelhas fossem substituídas por bolas de cores diferentes então teríamos 3! novas

permutações; se as bolas amarelas fossem substituídas por bolas de cores diferentes teríamos 2! novas permutações. Assim pelo **Princípio Multiplicativo**

$$(\textit{número de seqüências}) \text{ x } 3! \text{ x } 2! = P_5 = 5!$$

Ou seja; o *número se seqüências* = $\dfrac{5!}{3! \text{ x } 2!} = 10.$

Após o trabalho com vários problemas do tipo dos problemas 38, 39 e 40, o professor pode sistematizar o conceito de permutação com repetição através da seguinte definição:

Definição: Seja E um conjunto de n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2, ... , n_r são iguais a a_r com $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. Permutação com elementos repetidos é qualquer agrupamento ordenado de todos os elementos deste conjunto.

Notação: $P_n^{n_1, n_2, ..., n_r}$

Teorema: Seja E um conjunto de n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2, ... , n_r são iguais a a_r com $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. O número de permutações com repetição é dado por $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \, ... \, n_r!}$.

Prova:

Se os n_1 elementos iguais a a_1 forem substituídos por elementos distintos então teremos $n_1!$ novas permutações, idem para n_2 com $n_2!$ novas permutações e para n_r com $n_r!$ novas permutações. Agora quando todos os elementos são distintos, o número de permutações é $P_n = n!$, logo pelo Princípio Multiplicativo temos que

$$P_n^{n_1, n_2, ..., n_r} \text{ x } n_1!\, n_2! \, ... \, n_r! = P_n = n!$$

ou seja

$$P_n^{n_1, n_2, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \, ... \, n_r!} .$$

□

Depois de sistematizado o conceito de Permutações com Repetição podemos utilizar a fórmula para resolver alguns problemas.

Problema 41. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?
Resposta: $P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = 151\,200.$

Problema 42. Quantos são os anagramas da palavra URUGUAI que começam e terminam por vogal?
Resposta: $4P_5^{2,1,1,1} + 2P_5^{3,1,1} + P_5 = 400.$

Problema 43. Um homem, estando no ponto (x , y) de um sistema cartesiano ortogonal, pode mover-se para o ponto (x+1 , y) ou para o ponto (x , y+1).

a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando a origem ao ponto (6,5)?

b) Quantos desses trajetos passam pelo ponto (4,4)?

Resposta: (a) $P_{11}^{6,5} = 462$. (b) $P_8^{4,4}$ x $P_3^{2,1} = 210$.

Problema 44. Uma classe tem a meninas e b meninos. De quantas formas eles podem ficar em fila, se as meninas devem ficar em ordem crescente de peso e os meninos também? (Suponha que 2 pessoas quaisquer não tenham o mesmo peso).

Resposta: $P_{a+b}^{a,b} = \dfrac{(a+b)!}{a!\,x\,b!}$.

Problema 45. Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de quantas formas podemos permutá-los de modo que os números ímpares fiquem sempre em ordem crescente?

Resposta: $P_7^{4,1,1,1} = 210$.

Problema 46. Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6 000 000, podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8?

Resposta: $P_6^{2,2,1,1} + P_6^{3,1,1,1} = 300$.

Problema 47. (Concurso SEPEB-II – 2003) A razão entre o número de anagramas das palavras COSSENO e SECANTE é:

a) 1/2 b) 2/3 c) 1/4 d) 3/4 e) 4/5

VII - COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

Objetivo: Sistematizar o conceito de combinação com repetição.

O número de combinações com repetição de n elementos tomados k a k será denotado por $CR_{n,k}$.

Problema 48. Quantos produtos podemos formar se tomarmos 2 fatores escolhidos entre 2, 3, 5 e 7?

Comentários e sugestões para o professor.

Este problema é semelhante ao *problema 24*, observar que neste caso poderão ocorrer **repetições,** ou seja, podemos utilizar fatores iguais e que a **ordem** dos fatores não altera o produto. Assim o conceito combinatório envolvido neste problema é o de combinação com elementos repetidos. Como exemplo, o fator 4 é possível pois 4 = 2 x 2.

A solução através da árvore de possibilidades será dada por:

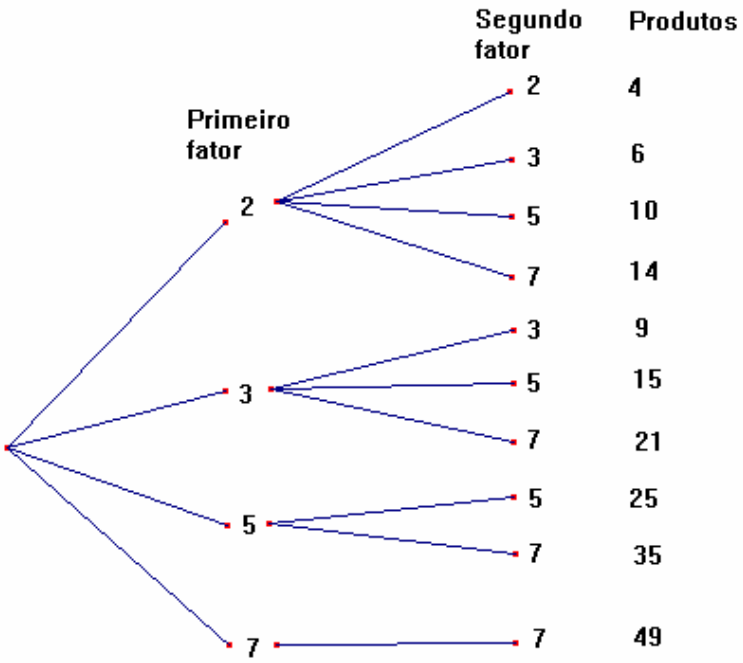

Figura 9. Produtos formados pela utilização de dois fatores escolhidos entre 2, 3, 5 e 7.

Da árvore de possibilidades concluímos que podemos formar 10 produtos se tomarmos 2 fatores escolhidos entre 2, 3, 5 e 7. Neste caso escrevemos $CR_{4,2} = 10$.

Problema 49. De quantos modos diferentes é possível comprar 2 sorvetes em uma sorveteria que os oferece em 4 sabores?

Comentários e sugestões para o professor.

Utilizando a árvore de possibilidades podemos mostrar que existem 10 modos possíveis de comprar 2 sorvetes em uma sorveteria que os oferece em 4 sabores. Observar que poderão ocorrer **repetições** de sabores e a **ordem** não altera o agrupamento. Assim se compramos um sorvete de abacaxi e um outro de limão é a mesma coisa que comprar um sorvete de limão e um outro de abacaxi. Ainda, podemos adquirir os dois sorvetes do mesmo sabor.

Podemos interpretar $CR_{4,2}$ do seguinte modo. Para efetuar a compra devemos escolher valores para as variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 onde x_1 é a quantidade que vamos comprar de sorvete do sabor S_1, x_2 é a quantidade que vamos comprar de sorvete do sabor S_2 e assim sucessivamente.

É claro que x_1, x_2, x_3 e x_4 devem ser inteiros não negativos (isto é, maiores ou iguais a zero) e que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

Logo comprar 2 sorvetes em uma sorveteria que os oferece em 4 sabores é tomar uma solução em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

As soluções possíveis (inteiras não negativas) para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ são:

(x_1, x_2, x_3, x_4)	Combinações
1- (2 , 0 , 0 , 0)	dois sorvetes do sabor S_1
2- (1 , 1 , 0 , 0)	um sorvete do sabor S_1 e um do sabor S_2
3- (1 , 0 , 1 , 0)	
4- (1 , 0 , 0 , 1)	
5- (0 , 2 , 0 , 0)	⋮
6- (0 , 1 , 1 , 0)	
7- (0 , 1 , 0 , 1)	
8- (0 , 0 , 2 , 0)	
9- (0 , 0 , 1 , 1)	um sorvete do sabor S_3 e um do sabor S_4
10-(0 , 0 , 0 , 2)	dois sorvetes do sabor S_4

O valor de $CR_{4,2}$ pode ser calculado usando um esquema chamado *bola-traço*. Devemos determinar todas as soluções inteiras e não negativas para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$. No esquema abaixo, cada bola representa uma unidade no valor da incógnita x_i e cada traço é usado para separar duas incógnitas. Algumas soluções possíveis são:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	0	0
• |	• |	|	
1	0	0	1
• |	|	|	•
0	2	0	0
|	•• |	|	

Assim para cada solução devemos ter 2 bolas e 3 traços. Agora o número de modos de fazer isto é

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = C_{5,2}$$

ou seja,

$$CR_{4,2} = C_{4+2-1,2} = C_{5,2} = 10.$$

A definição formal do conceito combinação com repetição é apresentada abaixo.

Definição: Dado um conjunto E com n elementos distintos, combinação com repetição (ou completa) desses elementos, tomados k a k, é o número de modos de selecionar k elementos, distintos, ou não, entre os n elementos dados.
Notação: $CR_{n,k}$

De maneira geral, $CR_{n,k}$ é o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ em inteiros não negativos. O número de combinações com repetição neste caso é dado pelo teorema a seguir:

Teorema: Seja E um conjunto com n elementos distintos. O número de combinações com repetição desses n elementos tomados k a k é dado por $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Prova:

Para calcular o número de combinações com repetição de n elementos tomados k a k, devemos determinar o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$. Assim usando o esquema *bola-traço* teríamos k bolas e n-1 traços.

Portanto,

$$CR_{n,k} = P_{n+k-1}^{k,n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} .$$

Observação: Do teorema acima temos que:

$$CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1,k} .$$

Problema 50. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação x + y + z + t = 8?
Resposta: $CR_{4,8} = 265$.

Problema 51. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da inequação $x+y+z \leq 5$?
Resposta: $CR_{3,5} + CR_{3,4} + CR_{3,3} + CR_{3,2} + CR_{3,1} + CR_{3,0} = 56$.
Outra solução: O número de soluções inteiras não-negativas da inequação $x+y+z \leq 5$ é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $x+y+z+t = 5$ que é igual a $CR_{4,5} = 56$.

Problema 52. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação x + y + z = 20 nas quais nenhuma incógnita é inferior a 2?
Resposta: Fazer $x = 2 + a$, $y = 2 + b$, $z = 2 + c$. A equação x + y + z = 20 transforma-se em a + b + c = 14. A resposta é então dada por $CR_{3,14} = 120$.

Problema 53. Uma pastelaria vende pastéis de carne, queijo e palmito. De quantas formas uma pessoa pode comer 5 pastéis?
Resposta: $CR_{3,5} = 21$.

Problema 54. Uma confeitaria vende 5 tipos de doces. Uma pessoa deseja comprar 3 doces. De quantas formas isso pode ser feito?
Resposta: $CR_{5,3} = 35$.

Problema 55. Quantos são os anagramas da palavra PIRACICABA que não possuem duas letras A juntas?
Solução: (Morgado et alli, 1991)

Coloquemos inicialmente no anagrama as letras A (1 modo),

$$\underset{1}{___}\ A\ \underset{2}{___}\ A\ \underset{3}{___}\ A\ \underset{4}{___}\ .$$

Agora devemos decidir quantas letras colocamos em cada um dos 4 espaços. Seja x_i o número de letras que será colocado no i-ésimo espaço. Devemos assim determinar as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, com $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 1$, pois duas letras A não podem aparecer juntas. Fazendo

$$x_2 = 1 + y_2 \quad \text{e} \quad x_3 = 1 + y_3$$

temos o problema equivalente de determinar o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 5$, o qual é dado por $CR_{4,5}$.

Tendo determinado quantas letras irão ocupar cada espaço, por exemplo

$$_\ A\ _\ _\ A\ _\ _\ A\ _\ _$$

devemos agora colocar as letras P, R, B, I, I, C, C nessas posições, o que pode ser feito de $P_7^{2,2,1,1,1}$ modos. A resposta será então

$$1 \times CR_{4,5} \times P_7^{2,2,1,1,1} = 70\ 560.$$

Problema 56. Quantas peças tem um jogo de dominó?
Resposta: $CR_{7,2} = 28$.

Problema 57. Quantos números inteiros entre 1 e 100 000 têm soma dos algarismos igual a 6?
Resposta: $1 + CR_{2,5} + CR_{3,5} + CR_{4,5} + CR_{5,5} = 210$.

Problema 58. De quantos modos podemos colocar em fila 7 letras A, 6 letras B e 5 letras C de modo que não haja duas letras B juntas?
Resposta: $CR_{7,2} \times P_{12}^{7,5} = 1\ 359\ 072$.

VIII – PERMUTAÇÕES CIRCULARES

Objetivo: Sistematizar o conceito de permutação circular.

Nesta seção estamos interessados em determinar de quantos modos podemos dispor n objetos distintos em n lugares em torno de um círculo. A cada disposição possível chamamos de ***Permutação Circular***. O número de permutações circulares de n objetos é indicado por PC_n. Duas permutações circulares são consideradas idênticas se, e somente se, quando percorremos a círculo no sentido anti-horário a partir de um mesmo elemento das duas permutações, encontramos elementos que formam seqüências iguais.

Problema 59. De quantas formas 4 pessoas podem se sentar ao redor de uma mesa circular?
Comentários e sugestões para o professor.

A solução através da árvore de possibilidades é dada por:

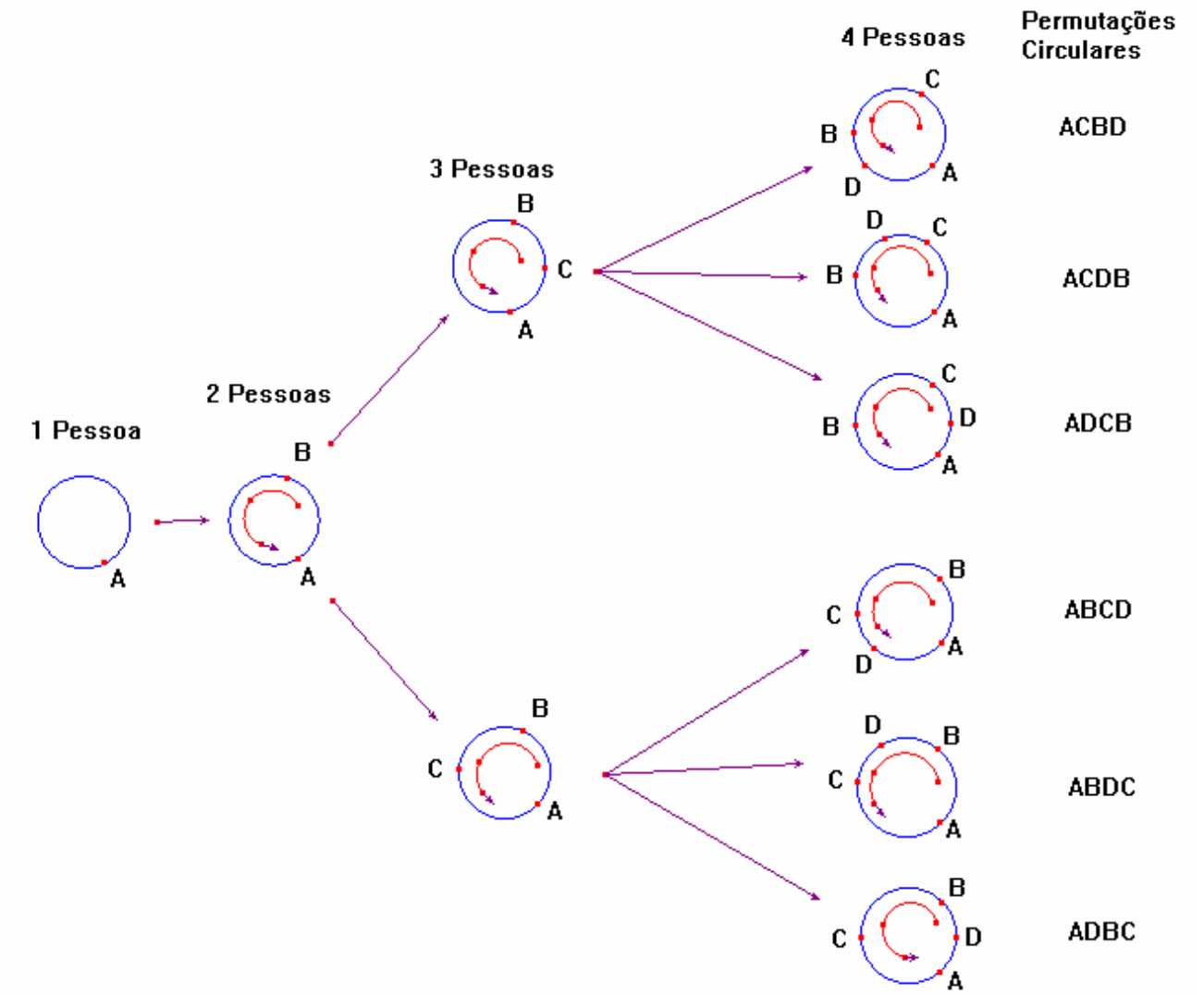

Figura 9. Permutações circulares de 4 elementos.

Da árvore de possibilidades temos que 4 pessoas podem se sentar ao redor de uma mesa circular de 6 modos diferentes, ou seja, $PC_4 = 6$.

Teorema: O número de permutações circulares é dado por $PC_n = (n-1)!$

Prova:

Como o que importa é a posição relativa dos objetos, há 1 modo de colocar o 1º objeto no círculo (onde quer que o coloquemos, ele será o único objeto no círculo); há 1 modo de colocar o 2º objeto (ele será o objeto imediatamente após o primeiro); há 2 modos de colocar o 3º objeto (imediatamente após o primeiro ou imediatamente após o segundo elemento); há 3 modos de colocar o 4º objeto (imediatamente após o primeiro ou imediatamente após o segundo ou imediatamente após o terceiro) e assim sucessivamente; existem n-1 modos de colocarmos o n-ésimo elemento. Portanto,

$$PC_n = 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) = (n-1)!$$

Problema 60. Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 5 crianças?
Resposta: $PC_5 = 4! = 24$.

Problema 61. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?
Solução: (Morgado et alli,1991)

Vamos supor que as crianças A e B não podem ficar juntas. Podemos formar $PC_5 = 4!$ Rodas com as outras cinco crianças. Veja a figura 10.

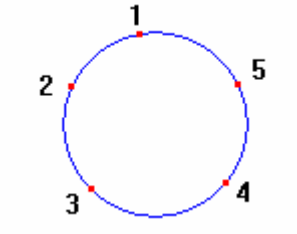

Figura 10. Uma possível roda formada por 5 crianças.

Existem agora 5 modos de colocarmos a criança A na roda. Entre as crianças 1 e 2, entre as crianças 2 e 3 e etc.Veja a figura 11.

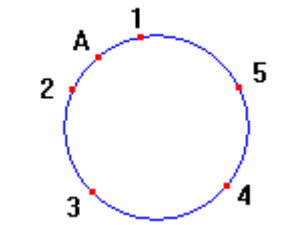

Figura 11. Uma possível roda formada por 6 crianças.

Existem agora 4 modos de colocarmos a criança B na roda sem coloca-la junto a criança A. A resposta é então $4! \times 5 \times 4 = 480$.

Problema 62. Temos 5 meninos e 5 meninas. De quantas formas eles podem formar uma roda, de modo que os meninos e as meninas se alternem?
Resposta: $PC_5 \times P_5 = 4! \times 5! = 2\,880$.

Problema 63. De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda de modo que duas dessas crianças permaneçam juntas?
Resposta: $2 \times PC_4 = 2 \times 3! = 12$.

Problema 64. De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher?
Resposta: $2^n \times PC_n = 2^n \times (n-1)!$

Problema 65. De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher e que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?
Resposta: $2 \times PC_n = 2 \times (n-1)!$

IX – PROBLEMAS DIVERSOS

Problema 66. O número de anagramas da palavra ALUNO que têm as vogais em ordem alfabética é:
a) 20 b) 30 c) 60 d) 80 e) 100

Problema 67. Um navio transmite sinais luminosos para a costa através de seis lâmpadas brancas e seis vermelhas, colocadas nos vértices de um hexágono regular, tendo cada vértice duas lâmpadas de cores diferentes. Considerando que cada vértice não deve ter mais de uma lâmpada acessa e que o número de vértices iluminados deve ser de no mínimo três, determine quantos sinais podem ser transmitidos.

Problema 68. (Concurso SEPEB-II – 2003) Um banco ofereceu a seus clientes um novo tipo de senha para acesso da conta corrente, composta por quatro dígitos. A senha deve ser formada a partir dos conjuntos das 26 letras do alfabeto e dos algarismos do sistema decimal (0 a 9), sem repetição. As letras e os algarismos devem ser intercalados, ou seja, não pode haver duas letras juntas ou dois algarismos juntos. O número máximo de senhas que podem ser criadas neste sistema é:
a) 67 600 b) 98 500 c) 109 512 d) 117 000 e) 135 200

Problema 69. (Concurso P-III/93 – SEE) Em quantos subconjuntos de A = {1, 3, 5, 7, 9} a soma dos elementos é impar?
a) 1 b) 5 c) 6 d) 16 e) 32

Problema 70. (VUNESP-96) A diretoria de uma empresa compõe-se de n dirigentes, contando o presidente. Considere todas as comissões de três membros que poderiam ser formadas com esses n dirigentes. Se o número de comissões que incluem o presidente é igual ao número daquelas que não o incluem, calcule o valor de n.

Problema 71. (FUVEST-80) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:
a) 24 b) 48 c) 96 d) 120 e) 144

Problema 72. (ITA-SP) Se colocarmos em ordem crescente todos os números de 5 algarismos distintos obtidos com 1, 3, 4, 6 e 7, que posição ocupa o número 61 473?

Problema 73. (FUVEST-SP) Calcule quantos números múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com 2, 3, 4, 6 e 9.

Problema 74. (Concurso P-III/93 – SEE) Para uma seleção brasileira de futebol foram convocados 2 jogadores para cada uma das 11 posições. De quantas maneiras a seleção poderia ser escalada, respeitando-se a posição de cada jogador?
a) 11^2 c) 2^{11} c) 22 d) 22^2 e) 2^{22}

Problema 75. (Concurso SEPEB-II – 2003) Em um tabuleiro de xadrez (tabuleiro 8x8), o total de possibilidades de escolher um quadrado preto e um quadrado branco de forma que os dois **não** pertençam à mesma linha ou à mesma coluna é igual a:
a) 1024 b) 932 c) 800 d) 768 e) 576

Problema 76. Um químico possui 10 (dez) tipos de substâncias. De quantos modos possíveis poderá associar 6 (seis) dessas substâncias se, entre as dez, duas somente não podem ser juntadas porque produzem mistura explosiva?

Problema 77. Quantas diagonais, não das faces, têm um prisma cuja base é um polígono de n lados?

Problema 78. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 20$ nas quais $x > y$?

Problema 79. Quantos divisores positivos têm o número 288?

Problema 80. Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, quantos arranjos simples desses dígitos tomados 4 a 4 têm o dígito 1 antes do 4?

RESPOSTAS – PROBLEMAS DIVERSOS

66) 20; 67) 656; 68) 117 000; 69) 16; 70) 6; 71) 48; 72) 76ª ; 73) 72; 74) 2^{11} ; 75) 768; 76) 140; 77) n(n-3); 78) 825; 79) 18; 80) 72.

X - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, *Proposta Curricular para o ensino de Matemática – segundo grau,* 3ª edição, CENP, Secretaria de Estado da Educação, São Paulo(SP), 1992.
- Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática, Ensino Médio, MEC/SEF, 1999.
- Onuchic, L.R., *Ensino-Aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas*, in Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas, Editora UNESP, São Paulo(SP), 1999.
- PCN+, Ensino Médio, MEC/SEF, 1999.
- Hazzan, S., *Fundamentos de Matemática Elementar* – vol. 5, Editora Atual, São Paulo(SP), 1996.
- Morgado, A. C. O. et alli, *Análise Combinatória e Probabilidade*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro(RJ), 1991.