unesp

Fundunesp
Fundação para o Desenvolvimento da UNESP

Governo do Estado de São Paulo
Secretaria de Estado da Educação

Projeto Teia do Saber: Fundamentando uma Prática de Ensino de Matemática
Utilização do Computador no Desenvolvimento do Conteúdo Matemática do Ensino Médio Geometria

Ernandes Rocha de Oliveira

16 de outubro de 2004

Geometria e medidas
- Um entendimento sobre a Matemática
- Sobre o método
- Algumas questões

Posições relativas

Prismas e Cilindros
- Elementos de um prisma
- Classificação
- Noção intuitiva de volume
- Volume do paralelepípedo retângulo

Pirâmides e Cones
- Elementos de uma pirâmide
- Seção paralela à base

Volume de uma pirâmide

Volume da Esfera

Área da Superfície Esférica

Um pouco sobre o que diz os PCNEM

" A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços.

Um pouco sobre o que diz os PCNEM

" A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços.
No ensino médio, trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas: **geometrias plana**, **espacial**, **métrica** *e* **analítica***".*

Dois modos de ver a Geometria

"As propriedades de que a Geometria trata são de dois tipos:

Dois modos de ver a Geometria

"As propriedades de que a Geometria trata são de dois tipos: associadas à posição relativa das formas e associadas às medidas.

Dois modos de ver a Geometria

"As propriedades de que a Geometria trata são de dois tipos: associadas à posição relativa das formas e associadas às medidas. Isso dá origem a duas maneiras diferentes de pensar em Geometria, a primeira delas marcada pela identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas e a segunda, que tem como foco quantificar comprimentos, áreas e volumes".

Um primeiro objetivo

"Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas".

Um primeiro objetivo

"Parte do trabalho com Geometria está estritamente ligada às medidas que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. No entanto, o ensino das propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido que não pode ignorar as relações geométricas em si".

Um primeiro objetivo

"Para desenvolver esse raciocínio de forma mais completa, o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos".

No ensino fundamental

"O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas".

No ensino médio

" Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares".

No ensino médio

"Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática".

A verdade em Matemática

"Afirmar que algo é verdade em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma conseqüência lógica de outras proposições provadas previamente. O processo de provar em Matemática seria uma tarefa impossível de marchar para trás indefinidamente, a não ser que se estabelecesse um ponto de partida. Esse ponto inicial deve conter um certo número de afirmações, chamadas de postulados ou axiomas, que devem ser aceitas como verdadeiras e para as quais não se exige nenhuma prova. Toda vez que um campo do conhecimento se organiza a partir de algumas verdades eleitas, preferivelmente poucas, simples e evidentes, então se diz que esse campo está apresentado de forma axiomática. Esse é o caso, por exemplo, da geometria clássica."

O ensino de Geometria

" A Geometria, na perspectiva das medidas, pode se estruturar de modo a garantir que os alunos aprendam a efetuar medições em situações reais com a precisão requerida ou estimando a margem de erro. Os conhecimentos sobre perímetros, áreas e volumes devem ser aplicados na resolução de situações-problema.
A composição e a decomposição de figuras devem ser utilizadas para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes relacionados a figuras planas ou espaciais. Assim, os problemas que envolvem figuras inscritas ou circunscritas podem ser propostos aos alunos no sentido de aplicação do que aprenderam sobre as diversas medidas".

O ensino de Geometria

"Relembrando as competências eleitas por esta proposta, é importante destacar que este tema estruturador pode desenvolver no aluno todas as habilidades relativas a medidas e grandezas, mas pode fazê-lo também avançar na percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático, e é especialmente adequado para mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da Geometria com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana."

A Resolução de Problemas

Ainda continuando nossa leitura sobre o PCN+:
"Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado".

Algumas questões

- Que visão o professor tem sobre Matemática e o ensino de Geometria?

Algumas questões

- Que visão o professor tem sobre Matemática e o ensino de Geometria?
- Como conciliar Resolução de Problemas com o Método Axiomático?

Algumas questões

- Que visão o professor tem sobre Matemática e o ensino de Geometria?
- Como conciliar Resolução de Problemas com o Método Axiomático?
- Qual a fonte para problemas?

Algumas questões

- Que visão o professor tem sobre Matemática e o ensino de Geometria?
- Como conciliar Resolução de Problemas com o Método Axiomático?
- Qual a fonte para problemas?
- Como a "história" entra no ensino?

Posições relativas

Postulado

Por dois pontos distintos do espaço é possível traçar uma e somente uma reta.

Posições relativas

Postulado

Por dois pontos distintos do espaço é possível traçar uma e somente uma reta.

Postulado

Por três pontos distintos e não colineares do espaço é possível construir um e somente um plano.

Posições relativas

Postulado

Por dois pontos distintos do espaço é possível traçar uma e somente uma reta.

Postulado

Por três pontos distintos e não colineares do espaço é possível construir um e somente um plano.

Postulado

Em qualquer plano, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.

Posições relativas

Postulado

Por dois pontos distintos do espaço é possível traçar uma e somente uma reta.

Postulado

Por três pontos distintos e não colineares do espaço é possível construir um e somente um plano.

Postulado

Em qualquer plano, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.

Postulado

Se duas retas distintas possuem um ponto em comum, então existe

Posições relativas

Observação

Ao se estudar posições relativas entre retas, entre retas e planos e entre planos e planos, é importante considerar a nomenclatura.

Posições relativas

Observação

Ao se estudar posições relativas entre retas, entre retas e planos e entre planos e planos, é importante considerar a nomenclatura.

Observação

Lembrando que duas retas distintas podem no máximo ter um ponto em comum, teremos

Posições relativas

Observação

Ao se estudar posições relativas entre retas, entre retas e planos e entre planos e planos, é importante considerar a nomenclatura.

Observação

Lembrando que duas retas distintas podem no máximo ter um ponto em comum, teremos

Definição

Se duas retas possuem exatamente um ponto em comum, diremos que elas são **concorrentes**.

Posições relativas

Observação

Ao se estudar posições relativas entre retas, entre retas e planos e entre planos e planos, é importante considerar a nomenclatura.

Observação

Lembrando que duas retas distintas podem no máximo ter um ponto em comum, teremos

Definição

Se duas retas possuem exatamente um ponto em comum, diremos que elas são **concorrentes**.

Observação

Quando duas retas são concorrentes elas determinam um (único)

Posições relativas

Observação

Retas que não possuem pontos em comum podem ou não estar em um mesmo plano.

Posições relativas

Observação

Retas que não possuem pontos em comum podem ou não estar em um mesmo plano.

Definição

Diremos que duas retas são reversas se elas não pertencem a um mesmo plano.

Posições relativas

Observação

Retas que não possuem pontos em comum podem ou não estar em um mesmo plano.

Definição

Diremos que duas retas são reversas se elas não pertencem a um mesmo plano.

Observação

Retas que não possuem pontos em comum mas que estão num mesmo plano são chamadas retas paralelas.

Posições relativas

Observação

Diz-se que uma reta está contida em um plano se ela possuir dois de seus pontos no plano.

Posições relativas

Observação

Diz-se que uma reta está contida em um plano se ela possuir dois de seus pontos no plano.

Definição

Se uma reta possuir apenas um ponto em comum com um plano, diremos que essa reta é secante ao plano. Se uma reta não possuir pontos de interseção com um plano diremos que essa reta é paralela ao plano.

Posições relativas

Observação

Diz-se que uma reta está contida em um plano se ela possuir dois de seus pontos no plano.

Definição

Se uma reta possuir apenas um ponto em comum com um plano, diremos que essa reta é secante ao plano. Se uma reta não possuir pontos de interseção com um plano diremos que essa reta é paralela ao plano.

Postulado

Se dois planos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos uma reta em comum.

Tarefa

Proponha problemas para cada elemento teórico descrito anteriormente

Prismas e Cilindros

Consideremos uma **região poligonal convexa** R, que daqui por diante chamaremos apenas de **polígono**, isto é, uma figura situada num plano α formada pela reunião de um **polígono convexo** com seu **interior**.

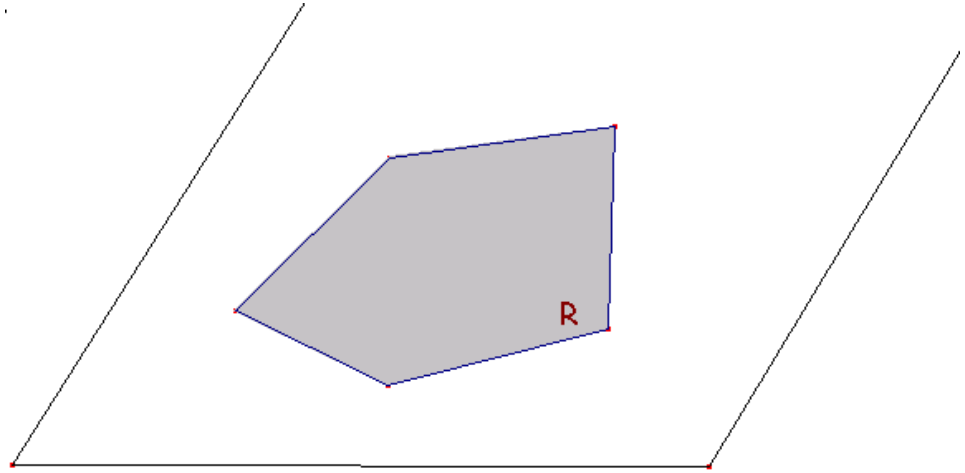


Figura: **polígono num plano** α

Consideremos também, um plano β paralelo a α e uma reta r **transversal** a α mas que não intercepta R. **Para cada ponto** P de R levantamos um segmento de reta $\overline{PP'}$ paralelo a r com P' no plano β.

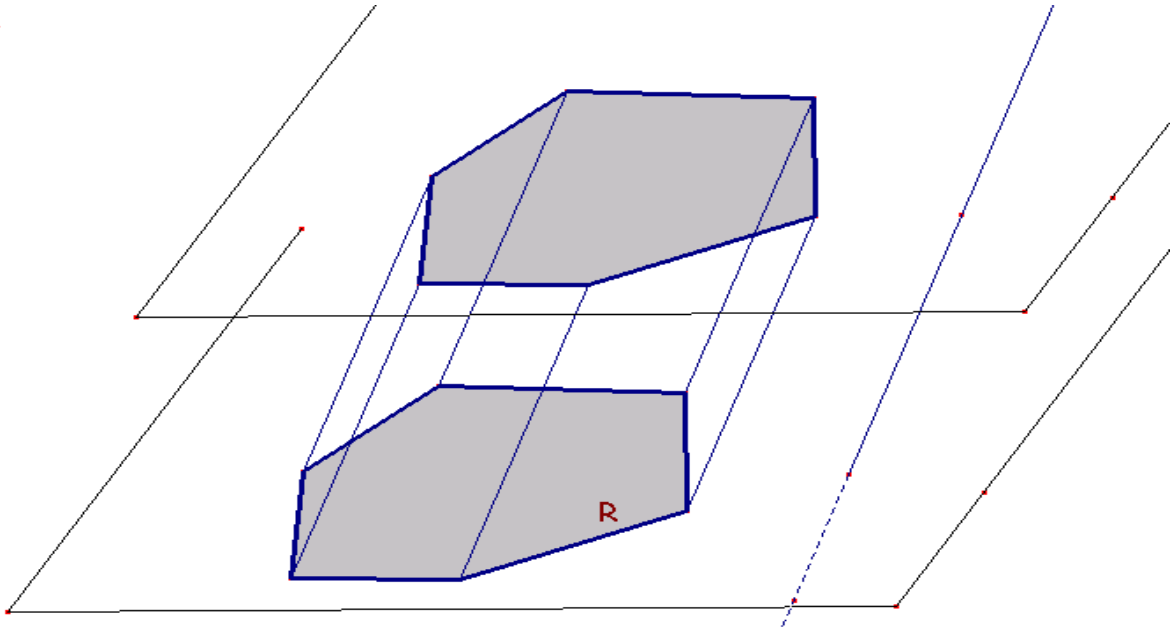


Figura: **Um prisma de base hexagonal**

A reunião de todos esses segmentos é chamada **prisma convexo**, ou simplesmente prisma, de **base** R e cuja **altura** é, por definição, a **distância entre os planos** α e β.

Observação

A região R' no plano β é **congruente** *à região R. A reta r é chamada* **reta geratriz**.

Elementos de um prisma

- 2 **bases congruentes** os polígonos R e R'.

Elementos de um prisma

- 2 **bases congruentes** os polígonos R e R'.
- n **faces laterais**, que sempre são **paralelogramos**.

Elementos de um prisma

- 2 **bases congruentes** os polígonos R e R'.
- n **faces laterais**, que sempre são **paralelogramos**.
- $n + 2$ **faces** que são as faces laterais mais as bases.

Elementos de um prisma

- 2 **bases congruentes** os polígonos R e R'.
- n **faces laterais**, que sempre são **paralelogramos**.
- $n + 2$ **faces** que são as faces laterais mais as bases.
- n **arestas laterais** e $2n$ **arestas da base**.

Elementos de um prisma

- 2 **bases congruentes** os polígonos R e R'.
- n **faces laterais**, que sempre são **paralelogramos**.
- $n + 2$ **faces** que são as faces laterais mais as bases.
- n **arestas laterais** e $2n$ **arestas da base**.
- $3n$ **arestas** que são as arestas laterais mais as da base.

Elementos de um prisma

- 2 **bases congruentes** os polígonos R e R'.
- n **faces laterais**, que sempre são **paralelogramos**.
- $n + 2$ **faces** que são as faces laterais mais as bases.
- n **arestas laterais** e $2n$ **arestas da base**.
- $3n$ **arestas** que são as arestas laterais mais as da base.
- $2n$ **vértices**.

Elementos de um prisma

- 2 **bases congruentes** os polígonos R e R'.
- n **faces laterais**, que sempre são **paralelogramos**.
- $n + 2$ **faces** que são as faces laterais mais as bases.
- n **arestas laterais** e $2n$ **arestas da base**.
- $3n$ **arestas** que são as arestas laterais mais as da base.
- $2n$ **vértices**.
- **Superfície lateral**: é a reunião de todas as **faces laterais**.

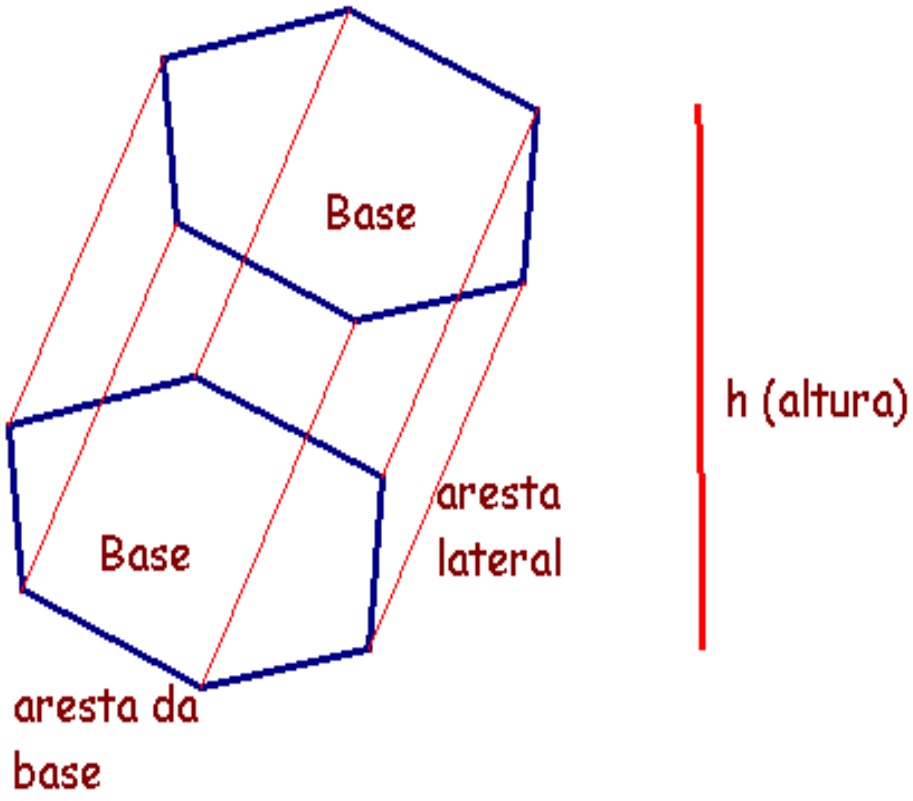
Elementos de um prisma

- 2 **bases congruentes** os polígonos R e R'.
- n **faces laterais**, que sempre são **paralelogramos**.
- $n + 2$ **faces** que são as faces laterais mais as bases.
- n **arestas laterais** e $2n$ **arestas da base**.
- $3n$ **arestas** que são as arestas laterais mais as da base.
- $2n$ **vértices**.
- **Superfície lateral**: é a reunião de todas as **faces laterais**.
- **Superfície total**: é a reunião da **superfície lateral com as bases**.

Elementos de um prisma

- 2 **bases congruentes** os polígonos R e R'.
- n **faces laterais**, que sempre são **paralelogramos**.
- $n + 2$ **faces** que são as faces laterais mais as bases.
- n **arestas laterais** e $2n$ **arestas da base**.
- $3n$ **arestas** que são as arestas laterais mais as da base.
- $2n$ **vértices**.
- **Superfície lateral**: é a reunião de todas as **faces laterais**.
- **Superfície total**: é a reunião da **superfície lateral com as bases**.
- Vale a **relação de Euler**: **V**értices - **A**restas +**F**aces =2

Elementos de um prisma



Classificação

- **Prisma reto**: Se a reta **geratriz é perpendicular** ao plano da base.

Classificação

- **Prisma reto**: Se a reta **geratriz é perpendicular** ao plano da base.
- **Prisma regular**: é um prisma reto cuja base é um polígono regular.

Classificação

- **Prisma reto**: Se a reta **geratriz é perpendicular** ao plano da base.
- **Prisma regular**: é um prisma reto cuja base é um polígono regular.
- **Paralelepípedo**: é um prisma cuja base é um **paralelogramo**.

Classificação

- **Prisma reto**: Se a reta **geratriz é perpendicular** ao plano da base.
- **Prisma regular**: é um prisma reto cuja base é um polígono regular.
- **Paralelepípedo**: é um prisma cuja base é um **paralelogramo**.
- **Paralelepípedo retângulo**: é um paralelepípedo reto cuja base é um retângulo.

Classificação

- **Prisma reto**: Se a reta **geratriz é perpendicular** ao plano da base.
- **Prisma regular**: é um prisma reto cuja base é um polígono regular.
- **Paralelepípedo**: é um prisma cuja base é um **paralelogramo**.
- **Paralelepípedo retângulo**: é um paralelepípedo reto cuja base é um retângulo.
- **Cubo**: é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.

Classificação

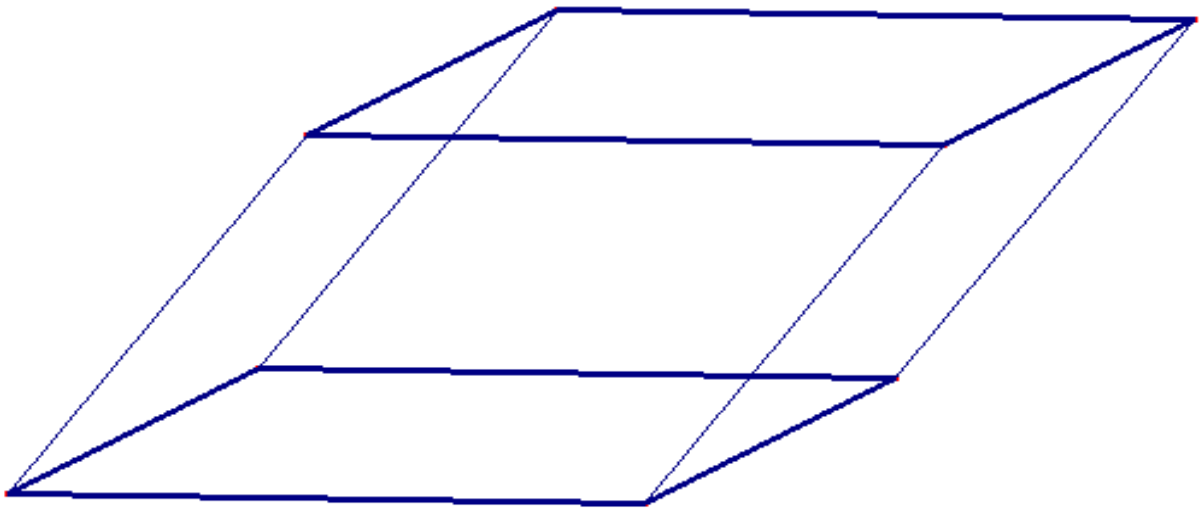


Figura: **prisma retangular**

Observação

Chama-se **diagonal** *de um prisma, qualquer segmento que une dois vértices não pertencentes à mesma face. Assim, para cada vértice teremos* $n - 3$ *diagonais e daí, todo prisma possui* $n(n-3)$ **diagonais**.

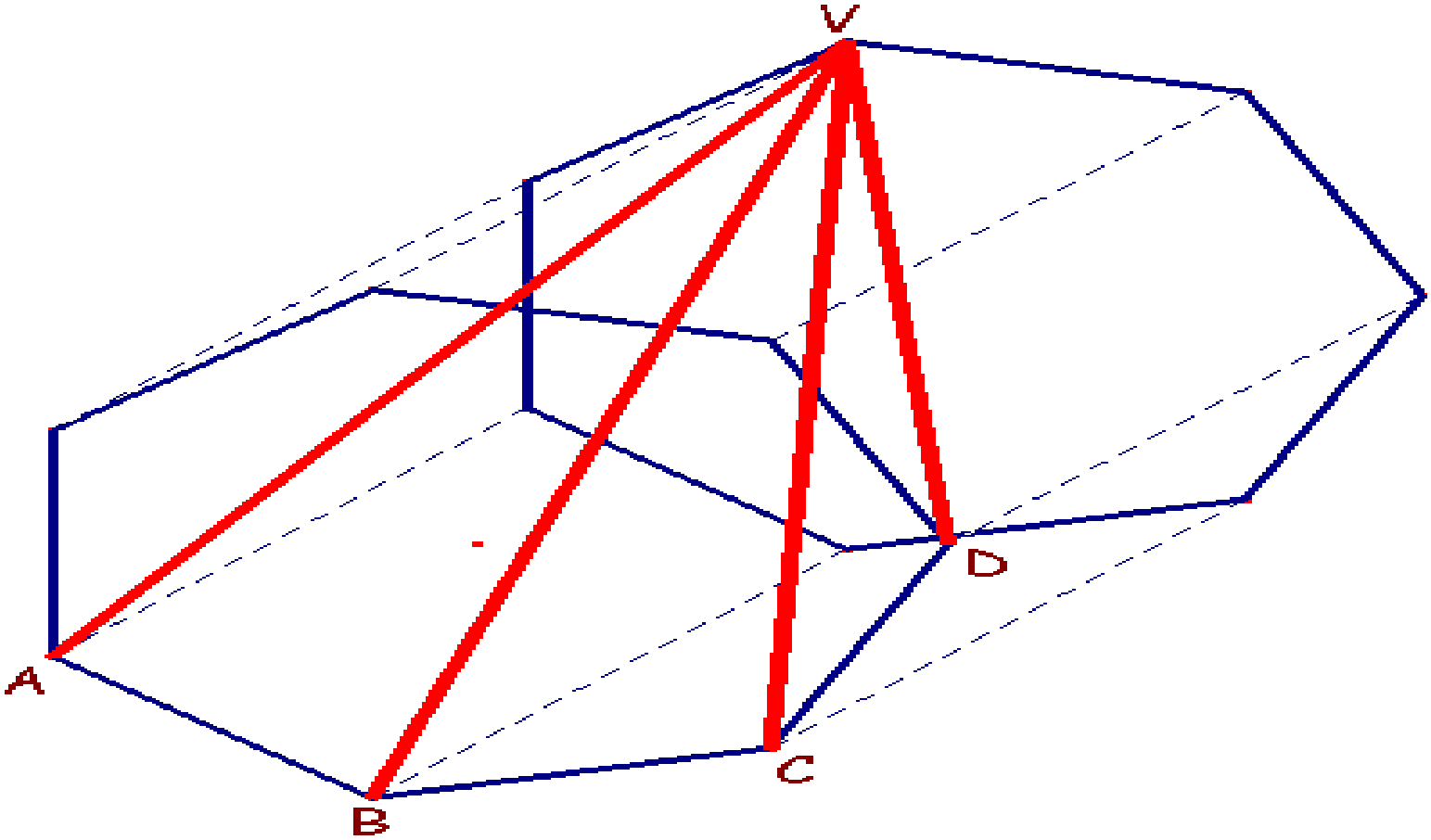


Figura: **diagonais de um prisma**

Observação

Uma **seção transversal** *de um prisma é a interseção do prisma com um plano paralelo ao plano da base.*

Teorema

Todas as seções transversais de um prisma são congruentes à base.

Corolário

Todas as seções transversais de um prisma têm a mesma área.

A **área lateral** de um prisma qualquer é igual à soma das áreas das faces laterais. A **área total** de um prisma qualquer é a soma da área lateral com as áreas das bases.

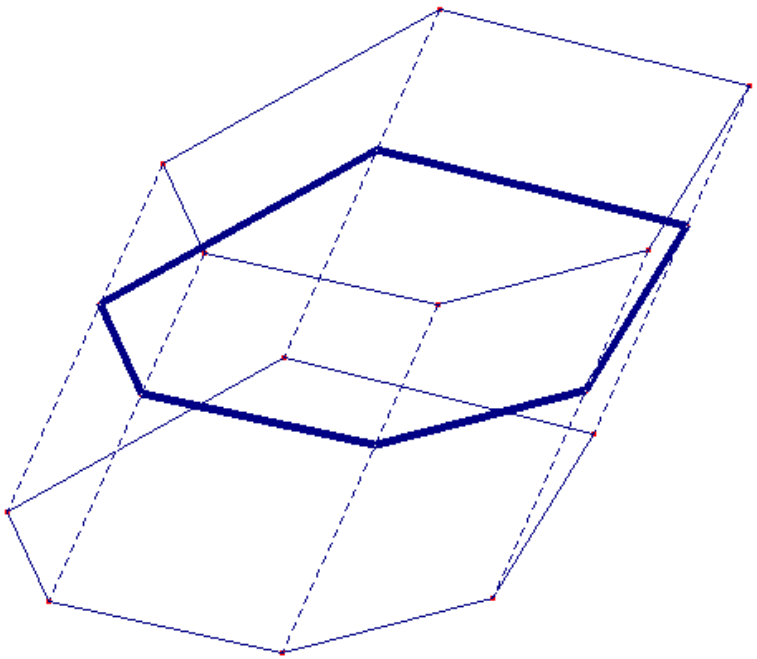


Figura: **seções de um prisma**

Teorema

A área lateral do **prisma reto** *é igual ao produto do perímetro da base pela* **altura do prisma** *(que neste caso coincide com o comprimento de suas arestas laterais)*

Consideremos um prisma P cuja base seja um polígono regular de lado L e tal que a geratriz faça um ângulo α, $0 < \alpha \leq 90^{\circ}$ com o plano da base. Seja n o número de lados da base, a o comprimento de cada aresta lateral e B a área da base, então, a área lateral de P será dada por

$$A_{\text{lateral}} = n \cdot a \cdot L \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

e a área total de P será dada por

$$A_{\text{total}} = n \cdot a \cdot L \cdot \operatorname{sen} \alpha + 2B$$

Noção intuitiva de volume

Intuitivamente o volume de um corpo é a quantidade de espaço por ele ocupado.

- Para medir a grandeza "volume" devemos compará-la com uma unidade e o resultado dessa comparação será um número: **a medida do volume**.

Noção intuitiva de volume

Intuitivamente o volume de um corpo é a quantidade de espaço por ele ocupado.

- Para medir a grandeza "volume" devemos compará-la com uma unidade e o resultado dessa comparação será um número: **a medida do volume**.
- Um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento chama-se **cubo unitário** e por definição seu **volume** é 1 u.v., ou simplesmente 1.

Teorema

Um cubo de aresta n tem volume n^3. Um cubo de aresta $\frac{1}{q}$ tem volume $\frac{1}{q^3}$. Um cubo de aresta racional $\frac{p}{q}$ tem volume $\frac{p^3}{q^3}$.

Volume do paralelepípedo retângulo

Teorema

O volume do paralelepípedo retângulo de **dimensões lineares** a, b *e* c *é*

$$V = a.b.c$$

Para a determinação de **fórmulas** úteis para o cálculo de certos volumes, o seguinte princípio é de grande importância essencialmente ele reduz o problema de cálculo de volumes ao da determinação de áreas.

Princípio de Cavalieri

Postulado

Sejam A e B dois sólidos. Se existe um plano α tal que todo plano β, paralelo a α, que corta A e B, secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então é verdade que

$$vol(A) = vol(B)$$

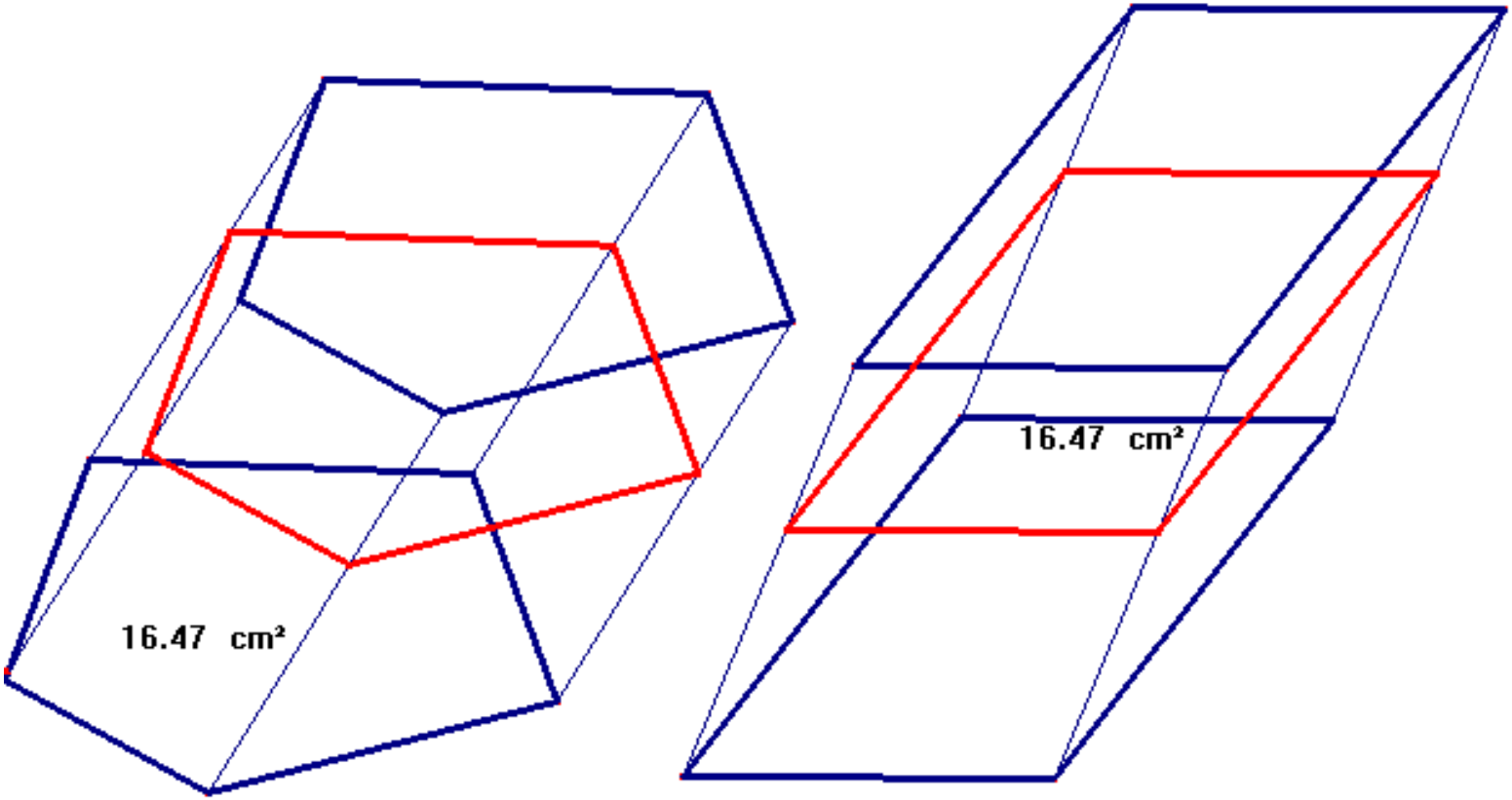


Figura: seções de mesma área

Observação

O **Princípio de Cavalieri**, *que no segundo grau é um* **axioma**, *é na verdade um teorema demonstrado nos cursos de Cálculo Diferencial ou de Teoria da Integração (que é a teoria mais adequada para o estudo de áreas e volumes).*

Teorema

O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área de sua base por sua altura.

Observação

As idéias anteriores podem ser generalizadas, para fornecer a fórmula para o volume de um **cilindro**.

Consideremos uma **figura plana** F (não necessariamente um polígono), num plano α, não entraremos muito em detalhes sobre o que vem a ser rigorosamente uma figura plana, e que chamaremos **base do cilindro**.

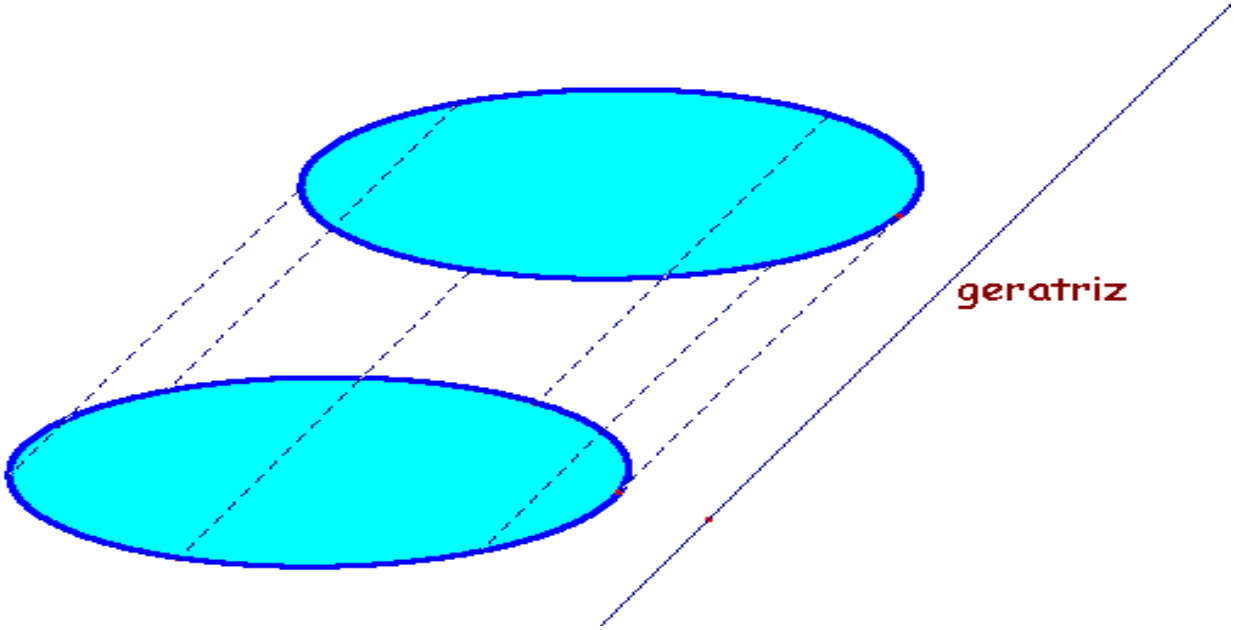


Figura: cilindro

Consideremos também um plano β paralelo a α e uma reta r, chamada **geratriz**, transversal a α mas que não intercepta F. Para cada ponto P de F levantamos um segmento de reta $\overline{PP'}$ paralelo a r com P' no plano β. A reunião de todos esses segmentos é chamada **cilindro** de base F e cuja **altura** é, por definição, a *distância entre os planos* α e β.

Observação

Observe a semelhança entre as definições de cilindro e de prisma, na verdade um **prisma convexo é um cilindro** *cuja base é um polígono convexo.*

Observação

Se a base do cilindro é um **círculo** *então o cilindro é chamado* **cilindro circular**.

Teorema

O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura.

Observação

Intuitivamente, a **área lateral** *de um cilindro pode ser obtida cortando-se o cilindro ao longo de uma geratriz e o planificando, assim, para o cilindro circular, teríamos*

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi rh$$

onde r é o raio da base e h a altura do cilindro.

Pirâmides e Cones

Consideremos um polígono R num plano α e S um ponto qualquer não pertencente a α. Para cada ponto P de R consideramos o segmento $\overline{PS}$ ligando P a S. A reunião de todos esses segmentos é chamada **pirâmide de base** R e **vértice** S. A **altura** de uma pirâmide é, por definição, a distância do vértice S ao plano α.

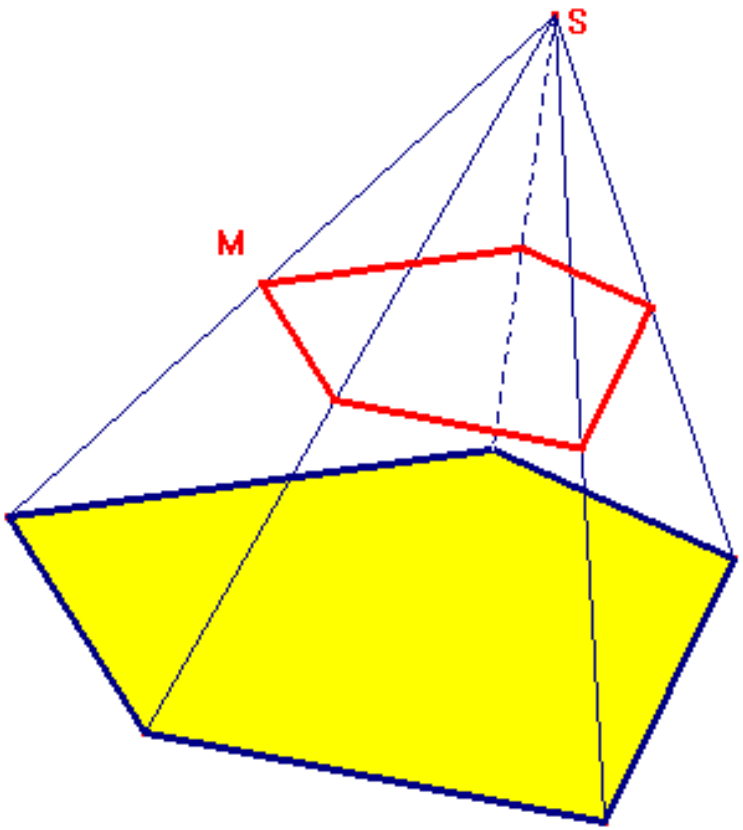


Figura: Pirâmide

Elementos de uma pirâmide

- 1 base e $n+1$ **vértices** (aqui incluímos os vértices da base)

Elementos de uma pirâmide

- 1 base e $n+1$ **vértices** (aqui incluímos os vértices da base)
- n **faces laterais**(que são triângulos).

Elementos de uma pirâmide

- 1 base e $n+1$ **vértices** (aqui incluímos os vértices da base)
- n **faces laterais**(que são triângulos).
- $n+1$ **faces**.

Elementos de uma pirâmide

- 1 base e $n+1$ **vértices** (aqui incluímos os vértices da base)
- n **faces laterais**(que são triângulos).
- $n+1$ **faces**.
- n **arestas laterais**.

Elementos de uma pirâmide

- 1 base e $n+1$ **vértices** (aqui incluímos os vértices da base)
- n **faces laterais**(que são triângulos).
- $n+1$ **faces**.
- n **arestas laterais**.
- $2n$ **arestas**.

Elementos de uma pirâmide

- 1 base e $n+1$ **vértices** (aqui incluímos os vértices da base)
- n **faces laterais**(que são triângulos).
- $n+1$ **faces**.
- n **arestas laterais**.
- $2n$ **arestas**.
- **Superfície lateral**: é a reunião de todas as **faces laterais**.

Elementos de uma pirâmide

- 1 base e $n+1$ **vértices** (aqui incluímos os vértices da base)
- n **faces laterais**(que são triângulos).
- $n+1$ **faces**.
- n **arestas laterais**.
- $2n$ **arestas**.
- **Superfície lateral**: é a reunião de todas as **faces laterais**.
- **Superfície total**: é a reunião da superfície lateral com a base.

Elementos de uma pirâmide

- 1 base e $n+1$ **vértices** (aqui incluímos os vértices da base)
- n **faces laterais**(que são triângulos).
- $n+1$ **faces**.
- n **arestas laterais**.
- $2n$ **arestas**.
- **Superfície lateral**: é a reunião de todas as **faces laterais**.
- **Superfície total**: é a reunião da superfície lateral com a base.
- Vale a **relação de Euler: Vértice -Arestas + Faces =2**

- **Pirâmide regular**: É uma pirâmide cuja base é um **polígono regular** e tal que a **projeção ortogonal** do vértice sobre a base é o *centro do polígono*.

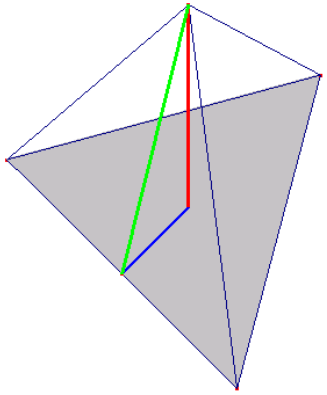


Figura: Tetraedro regular, apótema, altura e apótema da base

- **Pirâmide regular**: É uma pirâmide cuja base é um **polígono regular** e tal que a **projeção ortogonal** do vértice sobre a base é o *centro do polígono*.
- **Apótema**: Apótema de uma **pirâmide regular** é a altura de uma face lateral, observe que neste caso todas as faces são triângulos isósceles congruentes

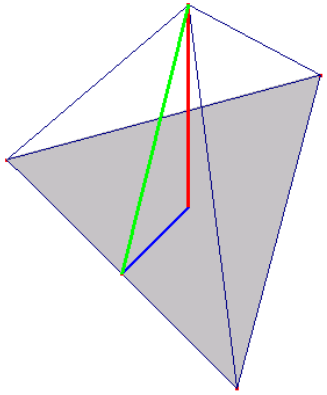


Figura: Tetraedro regular, apótema, altura e apótema da base

- **Tetraedro**: É uma pirâmide cuja base é um triângulo.

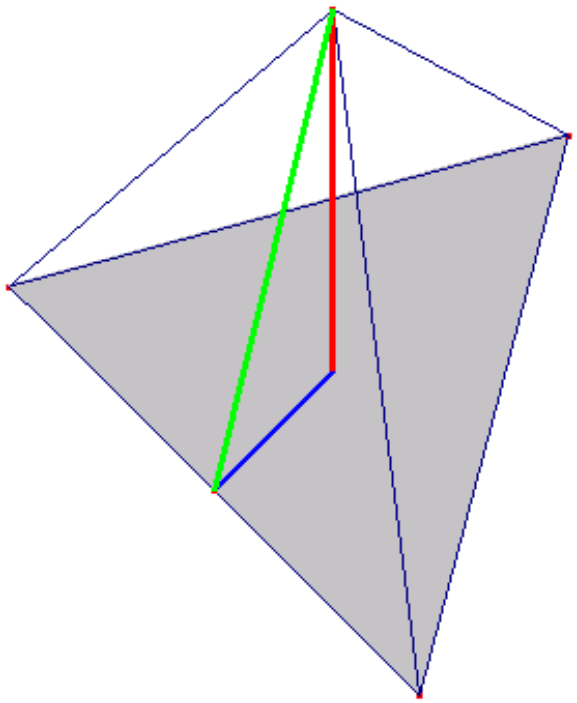


Figura: Pirâmide de base triangular

Seção paralela à base

Consideremos uma pirâmide cuja base é um polígono de n lados. Quando tomamos a interseção da pirâmide com um plano paralelo ao plano da base obtemos uma **seção** da pirâmide.

Seção paralela à base

Consideremos uma pirâmide cuja base é um polígono de n lados. Quando tomamos a interseção da pirâmide com um plano paralelo ao plano da base obtemos uma **seção** da pirâmide.

Teorema

Todas as seções de uma pirâmide são **polígonos semelhantes** *à base. Além disso, se a altura fica dividida em segmentos de razão k, então k é a razão de semelhança entre os polígonos, portanto k^2 é a razão entre as áreas dessas seções .*

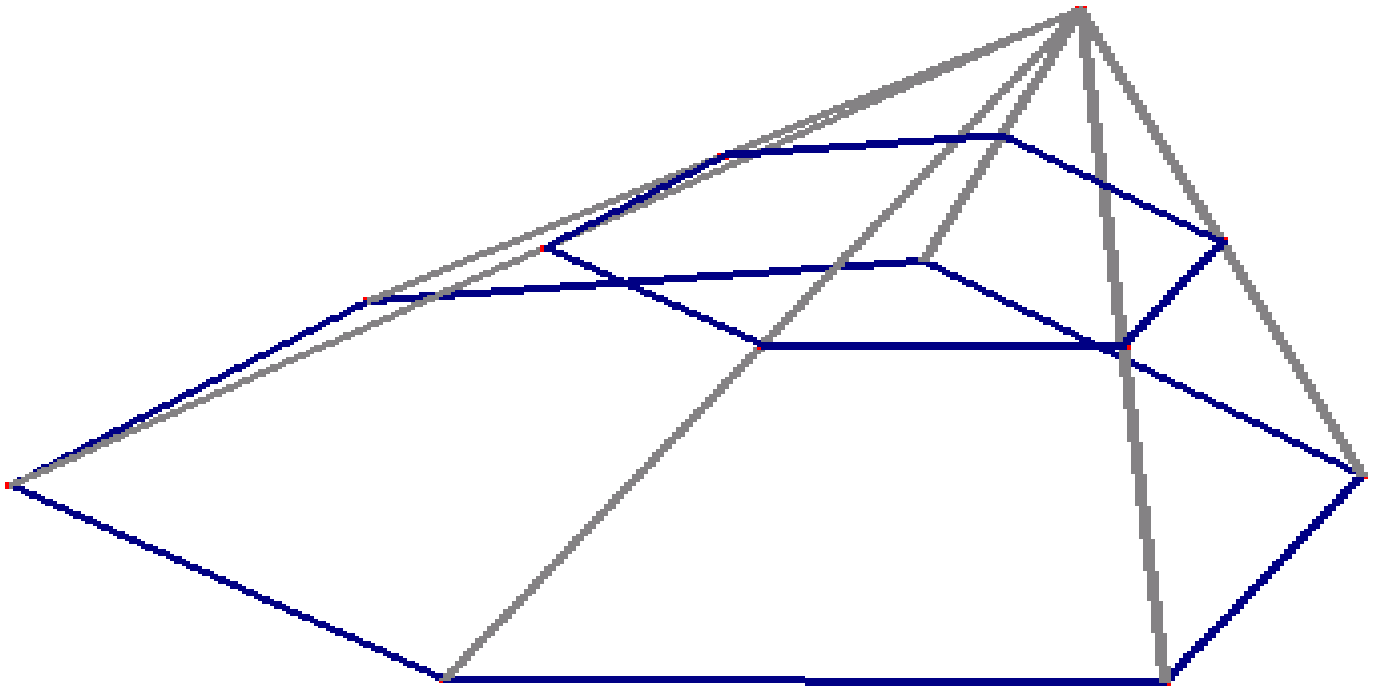


Figura: seção de uma pirâmide

Teorema

A área lateral de uma **pirâmide regular** *é igual ao produto do* **semi-perímetro** *da base pelo* **apótema**.

Teorema

A área lateral de uma **pirâmide regular** *é igual ao produto do* **semi-perímetro** *da base pelo* **apótema**.

Teorema

Toda pirâmide pode ser decomposta em $n - 2$ **tetraedros** *de mesma altura.*

Volume de uma pirâmide

Como *toda pirâmide pode ser decomposta* em $n - 2$ tetraedros, basta que encontremos uma fórmula para o cálculo do volume de um tetraedro para obtermos uma fórmula para o volume de qualquer pirâmide. Além disso, o **Princípio de Cavalieri** nos diz que duas pirâmides que possuem a mesma altura e bases com áreas iguais necessariamente terão o mesmo volume.

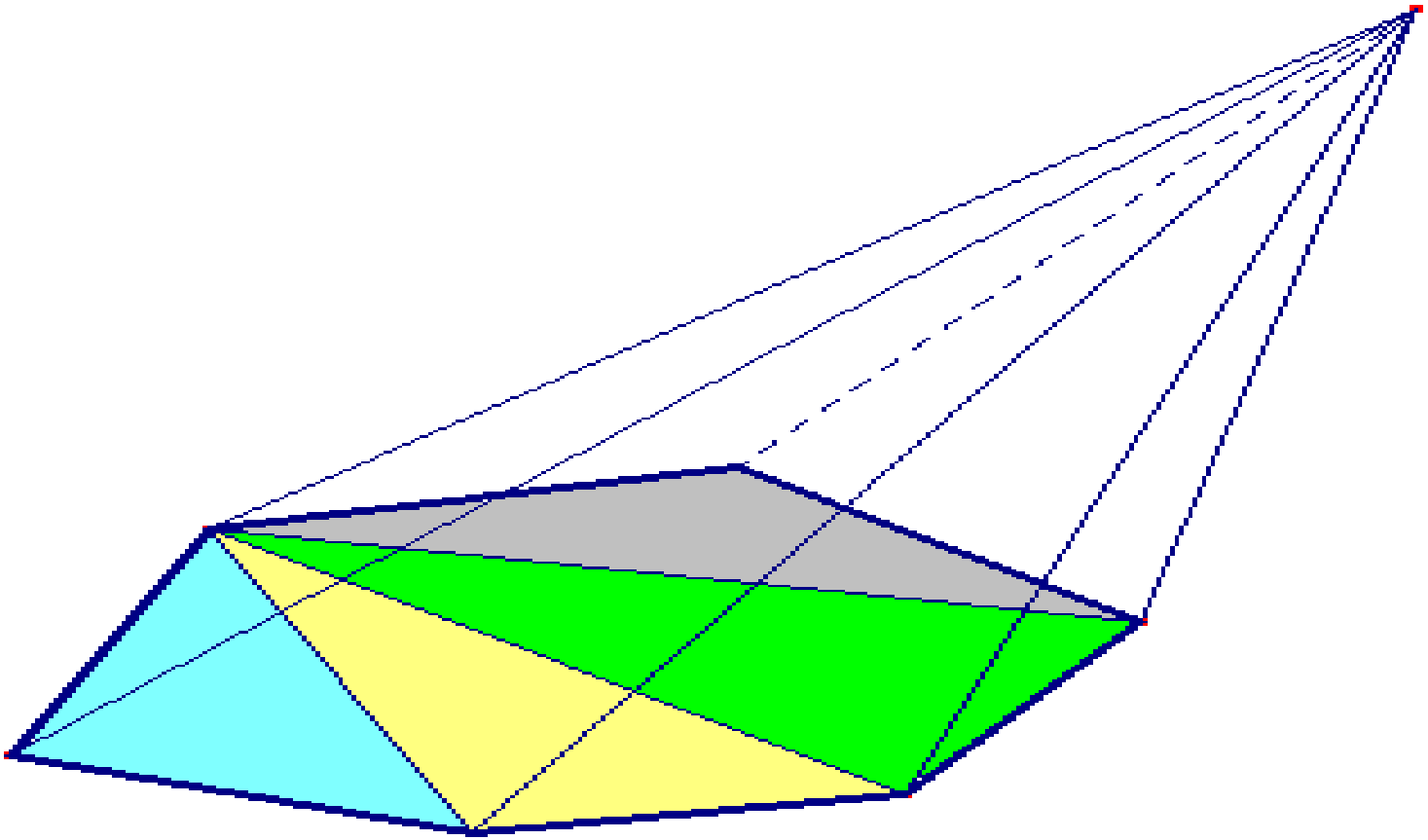
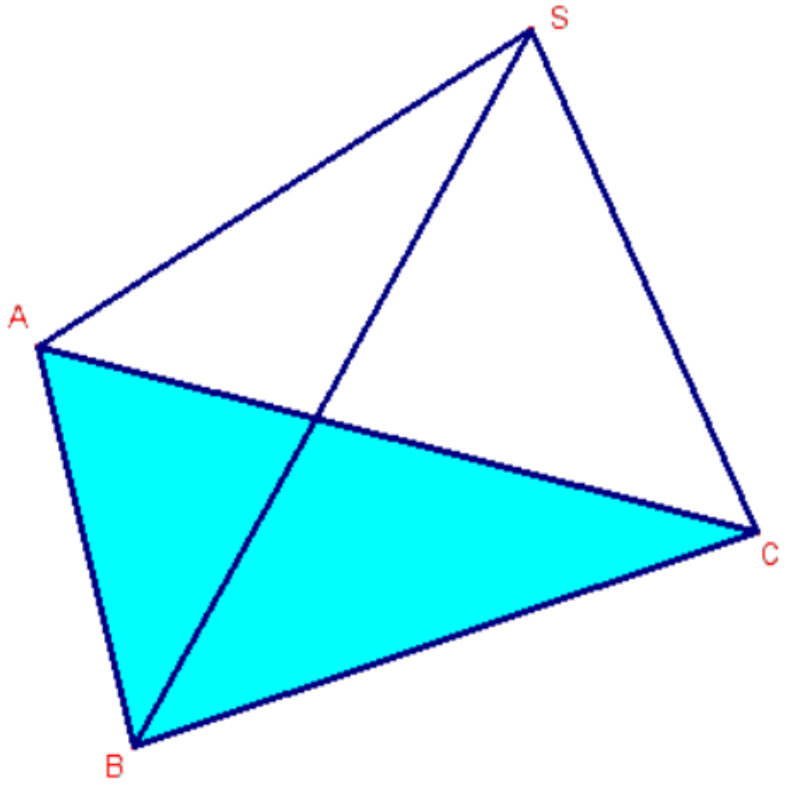


Figura: Decomposição de uma pirâmide em tetraedros

Teorema

O volume de um tetraedro é igual ao produto da área da base pela altura do tetraedro.



prova:

Seja T um tetraedro cuja base é um triângulo ABC e com vértice S. Construímos um outro tetraedro com a mesma base e cujo vértice B' é tal que sua projeção ortogonal no plano da base coincide com o vértice B do triângulo ABC e ainda o segmento BB' é igual à altura do tetraedro dado. Os dois tetraedros possuem o mesmo volume. Tome os segmentos AA' e CC', perpendiculares ao plano da base ABC, com comprimentos iguais ao de BB'. Obtemos então um prisma de base triangular cujo volume é igual ao produto da área de sua base (que é ABC) pela altura (que é BB').

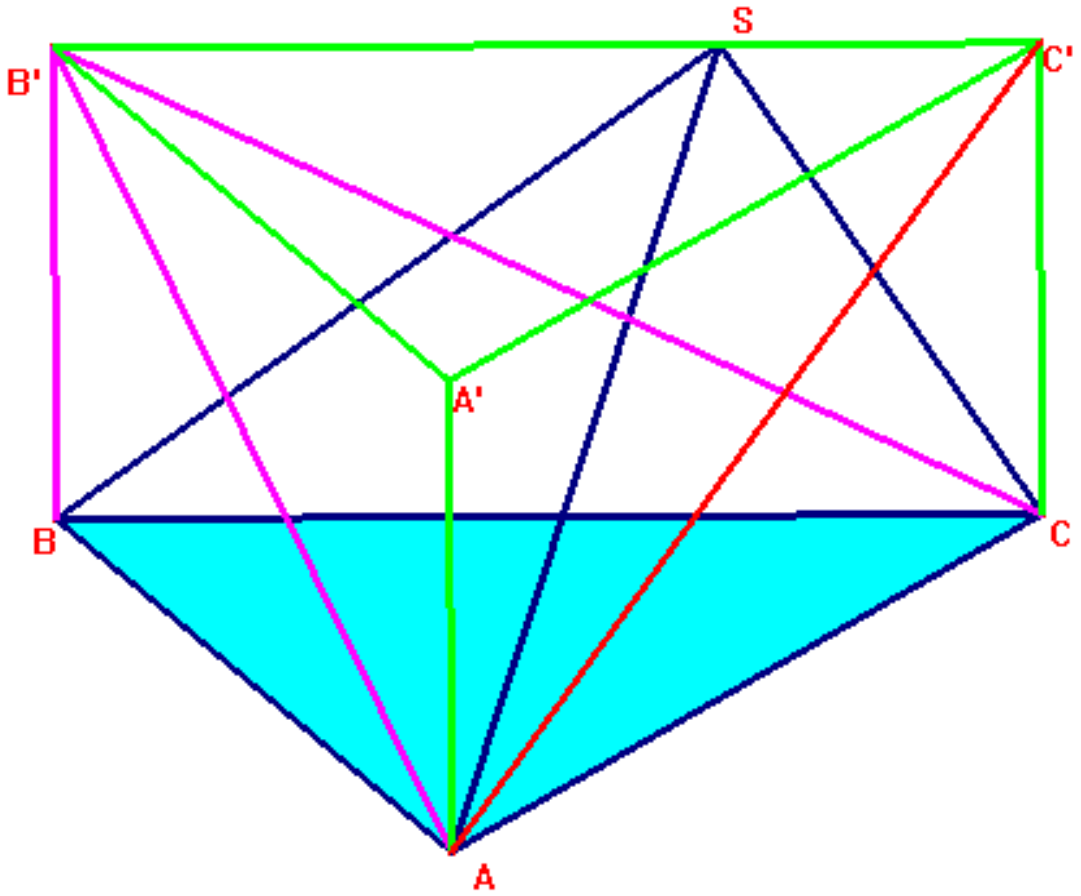


Figura: Observe o prisma $AA'B'C'CB$

Além disso, esse prisma obtido é composto de **três tetraedros de mesmo volume**: $ABCB'$, $AA'C'B'$ e $ACC'B'$ cuja base ACC' é congruente à base $AA'C'$ do segundo e cuja altura é igual a altura do segundo tetraedro. Portanto

$$3.\ vol(T) = \text{ área de } ABC \ \times \ \text{comprimento } \ BB'$$

Teorema

O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida de sua altura.

Teorema

O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida de sua altura.

Observação

As idéias anteriores podem ser generalizadas, para fornecer a fórmula para o volume de um **cone**.

Consideremos uma **figura plana** F, num plano α e que chamaremos de **base do cone**. Seja S um ponto não pertencente a α, que chamaremos de **vértice do cone**.

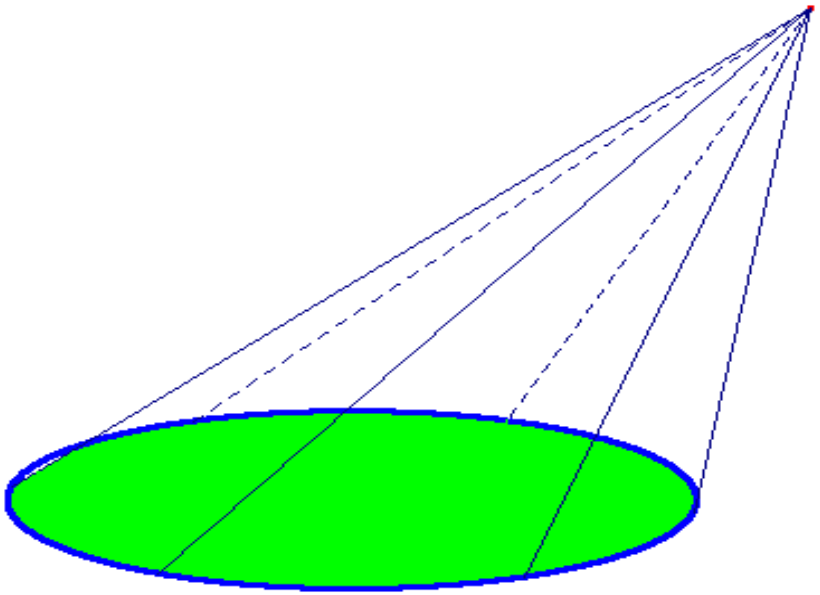


Figura: cone

Para cada ponto P de F consideramos o segmento $\overline{PS}$ ligando P a S. A reunião de todos esses segmentos é chamado **cone de base** F **e vértice** S.

Para cada ponto P de F consideramos o segmento $\overline{PS}$ ligando P a S. A reunião de todos esses segmentos é chamado **cone de base** F **e vértice** S.

Observação

Observe a semelhança entre as definições de cone e de pirâmide, na verdade uma **pirâmide é um cone cuja base é um polígono convexo**.

Para cada ponto P de F consideramos o segmento $\overline{PS}$ ligando P a S. A reunião de todos esses segmentos é chamado **cone de base** F **e vértice** S.

Observação

Observe a semelhança entre as definições de cone e de pirâmide, na verdade uma **pirâmide é um cone cuja base é um polígono convexo**.

Observação

Se a base do cone é um **círculo** *então o cone é chamado* **cone circular**.

Usando o **Princípio de Cavalieri**

Teorema

O volume de um cone é igual a um terço do produto da área de sua base pela altura.

Usando o **Princípio de Cavalieri**

Teorema

O volume de um cone é igual a um terço do produto da área de sua base pela altura.

Observação

Intuitivamente, a **área lateral** *de um cone pode ser obtida cortando-se o cone ao longo de um segmento de reta unindo um ponto da fronteira da base F ao vértice S e o planificando, assim, para o* **cone circular reto**, *teríamos*

$$A_{lateral} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

onde r é o raio do círculo da base e h é a altura do cone.

Volume da Esfera

Uma **esfera** de **centro** num ponto O e **raio** R é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância ao ponto O é **menor ou igual** a R.

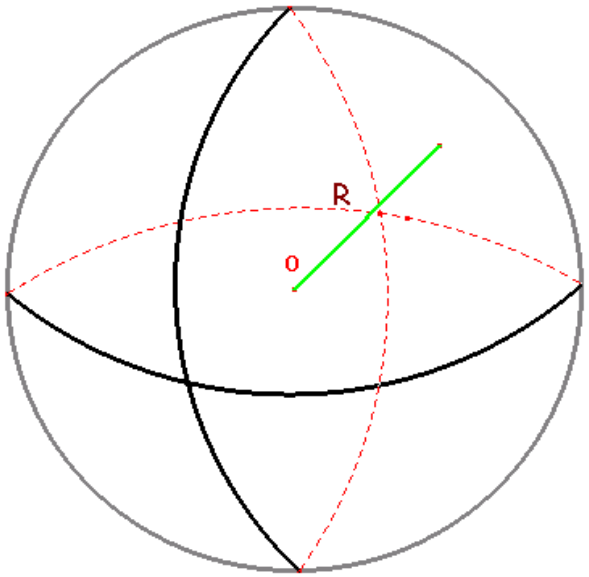


Figura: Esfera

Teorema

O volume de uma esfera de raio R é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$

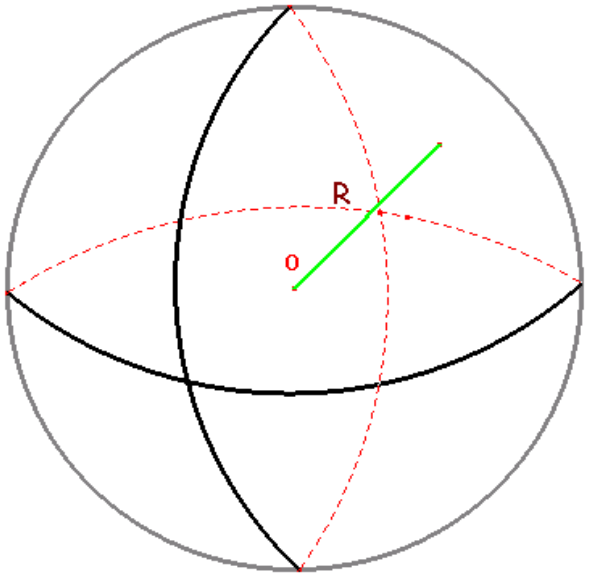


Figura: Esfera

Prova.
A idéia é ainda usar o **Princípio de Cavalieri** e para isso devemos construir uma sólido cujas seções paralelas tenham a mesma área que as correspondes na esfera. Imaginemos então que a esfera dada repouse sobre um plano horizontal α. Tomamos um cilindro circular reto cuja base, no plano α, tenha raio R e cuja altura seja $2R$. Deste cilindro vamos **cortar** dois cones do seguinte modo: Consideramos o segmento que liga os centros das bases do cilindro e tomamos seu ponto médio. Este ponto será **o vértice comum aos dois cones** cada um tendo como base uma das bases do cilindro.

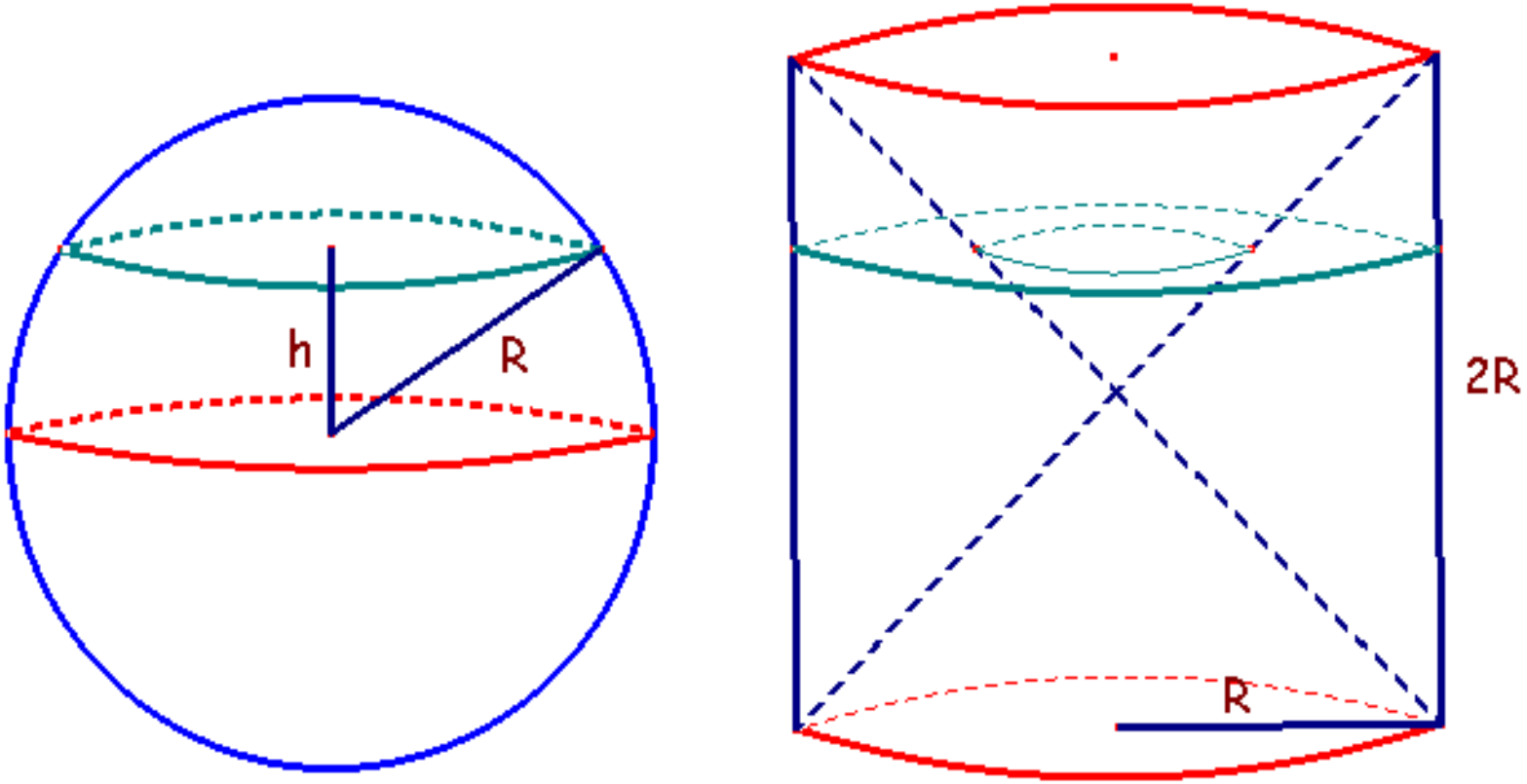


Figura: Esfera e o sólido T construído com mesmo volume

Vamos calcular o volume do sólido T obtido: esse volume é igual ao volume do cilindro menos o volume dos dois cones retirados, isto é:

$$vol(T) = \pi R^2.2R - 2.(\frac{1}{3}\pi R^2.R) = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Assim, o teorema estará demonstrado se provarmos que o volume da esfera é igual ao volume do sólido T. Para isso vamos considerar um plano β qualquer, paralelo a α e a uma distância h do **centro da esfera** (que também é o vértice dos cones) cortando os dois sólidos.

A seção obtida na esfera é um círculo de raio $\sqrt{R^2 - h^2}$ enquanto a seção obtida em T é uma coroa circular de raio interno h e raio externo R, logo a área das duas seções é $\pi(R^2 - h^2)$ e agora pelo Princípio de Cavalieri, segue-se que os dois sólidos têm o mesmo volume.

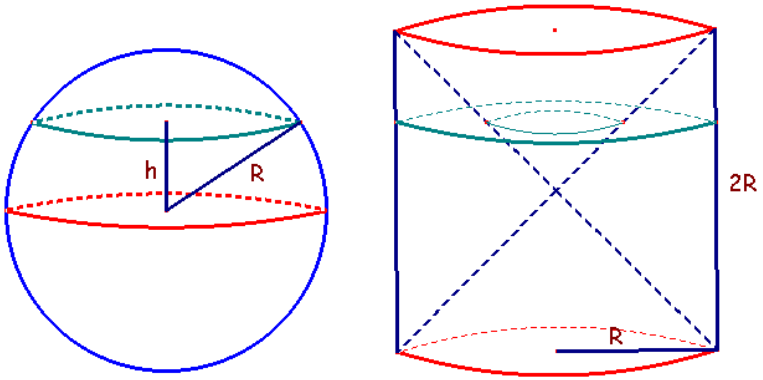


Figura: Esfera e o sólido T

Área da Superfície Esférica

Para obtermos a área da **superfície esférica** não podemos proceder como fizemos com o cilindro e com o cone, isto é, não podemos fazer um corte na superfície e planificá-la sem que seja necessário esticá-la. Por isso, para calcular a área de uma superfície esférica é necessário um método diferente.

A idéia intuitiva é a seguinte: imaginamos a superfície esférica coberta por uma fina camada de tinta (uniforme) tanto por dentro quanto por fora, de espessura h.

A camada externa tem raio $R + h$ e a camada interna raio $R - h$. A região entre as duas esferas contém a nossa superfície esférica de raio R e, se imaginarmos que h possa ser tomado tão pequeno quanto desejarmos a diferença entre os dois volumes é tão próxima quanto desejarmos da área da superfície esférica vezes $2h$. Assim, se S representar a área da superfície esférica,

$$2hS \approx \frac{4}{3}\pi(R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi(R-h)^3$$

ou seja

$$2hS \approx \frac{4}{3}\pi\left[6R^2h + 2h^3\right]$$

ou ainda $2hS \approx 4\pi R^2 + \dfrac{4\pi h^2}{3}$

Fazendo então h "tender" a zero devemos ter,

$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

Esta é a área da superfície esférica.

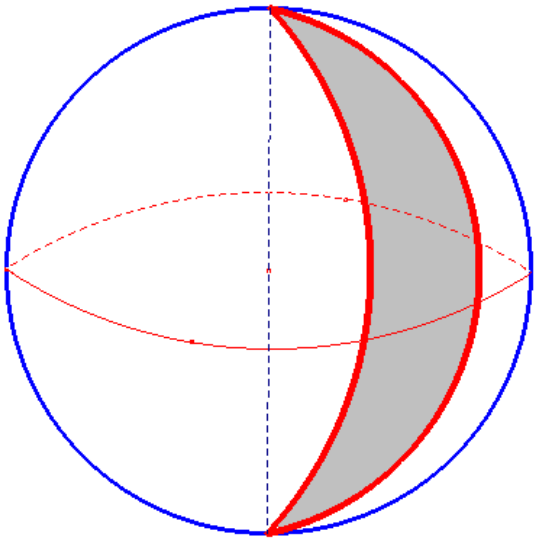


Figura: Fuso Esférico

Observação

Consideremos um **fuso esférico** *de ângulo α rd e denotemos por A sua área. A área desse fuso está para a área da semi-esfera assim como o comprimento de arco do setor está para a semi-circunferência, ou seja,*

$$\frac{A}{2\pi R^2} = \frac{\alpha R}{\pi R} \Longrightarrow A = 2\alpha R^2$$

Se o ângulo α é medido em **graus**, *teremos*

$$A = \frac{\pi \alpha R^2}{90}$$