Caderno de Geometria Analítica

Ernandes Rocha de Oliveira

07-10-2004

Teia do Saber
Fundamentando uma Prática de Ensino de Matemática
Utilização do Computador no Desenvolvimento do Conteúdo Matemática do Ensino Médio

Patrocínio UNESP-SEESP

Docente : Ernandes Rocha de Oliveira

Geometria Analítica

Conteúdo Programático

(1) Estudo do ponto e da reta: distância entre dois pontos; equações da reta; perpendicularismo e paralelismo entre retas; distância entre ponto e reta e área de triângulo.

(2) Estudo da circunferência. Posições relativas entre pontos, retas e circunferências.

Capítulo 1

Coordenadas retangulares no plano

1.1 Introduzindo coordenadas no plano

O material que se segue foi em grande parte retirado de [3], [1] e [2].

Consideremos no plano duas retas perpendiculares Ox e Oy as quais chamaremos *eixos coordenados* fig. 1 e cujo ponto de interseção denotaremos por O e chamaremos *origem do sistema de coordenadas* ou simplesmente a *origem*.

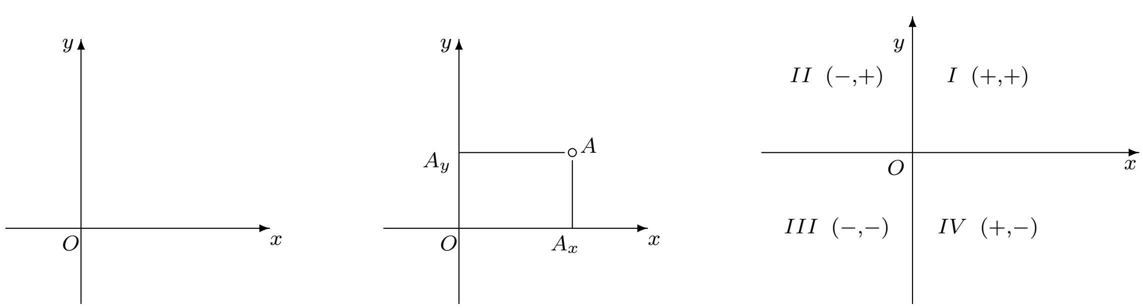


Figura 1:

A origem divide cada um dos eixos em dois semi-eixos: um semi-eixo cuja direção indicada pela seta é considerada positiva e um semi-eixo negativo.

Cada ponto A do plano é especificado por um par de números reais, chamado *coordenadas do ponto*, a coordenada x (abscissa) e a coordenada y (ordenada) de acordo com a seguinte regra.

Através do ponto A construímos uma reta paralela ao *eixo das ordenadas* (Oy) que intercepta o *eixo das abscissas* (Ox) num ponto A_x. A **abscissa** do ponto A é um número real x cujo valor absoluto é igual à distância medida de O a A_x, sendo essa abscissa positiva se A_x encontra-se à direita do ponto O e negativa se A_x encontra-se à esquerda de O. Se o ponto A_x coincide com a origem então a coordenada x é definida como sendo 0.

Construindo por A uma reta paralela ao *eixo das abscissas* (Ox) essa reta intercepta o eixo das ordenadas num ponto A_y e desse modo definimos a ordenada y de A como um número real cujo valor absoluto é igual à distância de A_y à origem. A ordenada y será positiva se A_y estiver acima de O e negativa se A_y estiver abaixo de O (ver fig. 1). Caso A_y coincida com O poremos a coordenada y igual a 0.

Usaremos a notação $A(x, y)$ para denotar as coordenadas do ponto A.

Observe que os eixos coordenados dividem o plano em quatro ângulos retos, chamados *quadrantes* I, II, III, IV . Dentro de cada quadrante os sinais das coordenadas são mostrados na figura 1.

Observação 1.1 *Os pontos que pertencem ao eixo-x (isto é, pertencem a eixo das abscissas) são precisamente aqueles que possuem coordenada y igual a zero. De modo semelhante, os pontos que pertencem ao eixo-y são precisamente aqueles que possuem coordenada x igual a zero. A origem é o único ponto que possui ambas as coordenadas iguais a zero.*

Quando introduzimos as coordenadas x e y num plano como fizemos acima é costume chamar esse plano de plano cartesiano ou plano xy.

Quando não queremos atribuir um nome a um ponto, então apenas especificamos sua coordenada por um par

$$(x, y)$$

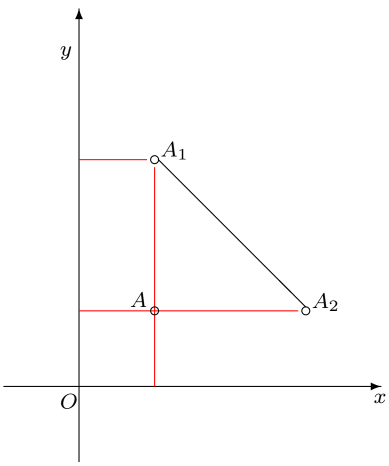
Tudo o que fizemos acima pode ser resumido no seguinte

Teorema 1.2 *Fixado um plano qualquer, existe uma correspondência bijetora entre esse plano e o conjunto de pares ordenados*

$$\mathbb{R}^2 = \{\ (x, y)\ /\ x \in \mathbb{R}\ ,\ \ y \in \mathbb{R}\ \}$$

1.2 Distância entre pontos

Sejam dados dois pontos no plano xy: A_1 com coordenadas (x_1, y_1) e A_2 com coordenadas (x_2, y_2). Queremos expressar a **distância entre os pontos** A_1 e A_2 *em termos de suas coordenadas.*



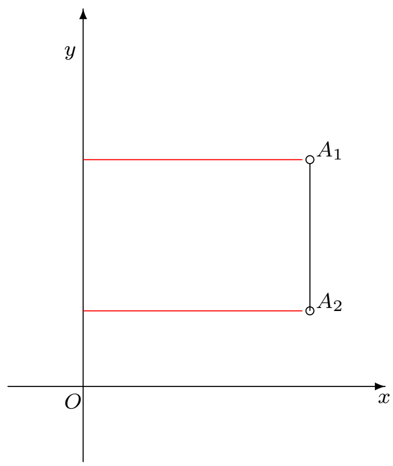


Figura 2:

Inicialmente vamos supor que

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{e} \quad y_1 \neq y_2$$

Passando pelos pontos A_1 e A_2 traçamos retas paralelas aos eixos coordenados (ver fig. 2).

A distância entre os pontos A e A_1 é igual a

$$\text{dist}(A, A_1) \ = |y_1 - y_2|$$

e a distância entre os pontos A e A_2 é igual a

$$\text{dist}(A, A_2) \ = |x_1 - x_2|$$

Aplicando o **Teorema de Pitágoras** ao triângulo A_1AA_2, obtemos

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2$$

com d sendo a **distância** entre os pontos A_1 e A_2. Assim podemos escrever

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{1.1}$$

Embora a fórmula 1.1 para a determinação da distância entre tenha sido obtida supondo que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ ela também é verdadeira para os outros casos.

1.3 Dividindo um segmento de reta numa dada razão

Sejam dados, no plano xy, dois pontos **diferentes** $A_1(x_1, y_1)$ e $A_2(x_2, y_2)$. Queremos encontrar as coordenadas x e y de um ponto A que divide o segmento de reta A_1A_2 na razão $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Vamos supor que o segmento A_1A_2 não seja paralelo ao eixo-x.

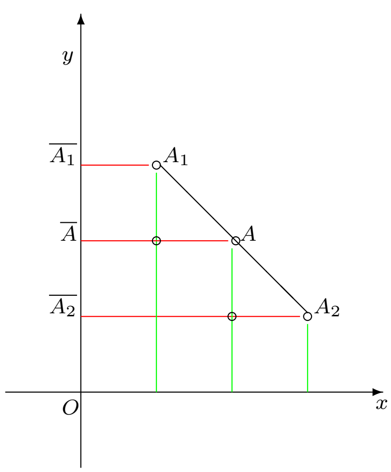


Figura 3:

Projetando os pontos A_1, A e A_2 sobre o eixo-y e usando semelhança de triângulos, resulta (ver fig. 3)

$$\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{\overline{A_1}\,\overline{A}}{\overline{A}\,\overline{A_2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Como os pontos $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ e $\overline{A}$ possuem as mesmas ordenadas dos pontos A_1, A_2 e A sobre o eixo-y, obtemos

$$\overline{A_1}\,\overline{A} = |y_1 - y| \,, \qquad \overline{A}\,\overline{A_2} = |y - y_2|$$

conseqüentemente,

$$\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Como $\overline{A}$ está entre $\overline{A_1}$ e $\overline{A_2}$, segue-se que $y_1 - y$ e $y - y_2$ têm o mesmo sinal. Portanto

$$\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

da segunda igualdade obtemos

$$y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{1.2}$$

Agora, se o segmento A_1A_2 for paralelo ao eixo-x, então

$$y_1 = y_2 = y$$

e esse mesmo resultado está contido na fórmula 1.2, a qual fica assim verdadeira quaisquer que sejam as localizações dos pontos A_1 e A_2.

De modo semelhante, mas considerando as projeções sobre o eixo-x, obtemos que a abscissa do ponto A é determinada pela fórmula

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{1.3}$$

Exemplo 1.3 *Quando o ponto A é ponto médio do segmento A_1A_2 então a razão é 1 e portanto*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad e \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 1.4 *Como exemplo vamos determinar as coordenadas do baricentro de um triângulo* ABC *com* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ *e* $C(x_3, y_3)$

Recordemos que o **baricentro** de um triângulo é a interseção das **medianas** que por sua vez são as retas que ligam cada vértice do triângulo ao **ponto médio** do lado oposto. Consideremos então no triângulo ABC as medianas AM e BN (ver fig. 4) e seja $G(x, y)$ o baricentro.Denotemos as coordenadas de M e N por $M(x_m, y_m)$ e $N(x_n, y_n)$. É claro que

$$x_m = \frac{x_2 + x_3}{2} \ , \qquad y_m = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

e

$$x_n = \frac{x_1 + x_3}{2} \ , \qquad y_n = \frac{y_1 + y_3}{2}$$

Agora, os triângulos ABG e MNG são **semelhantes**. Portanto

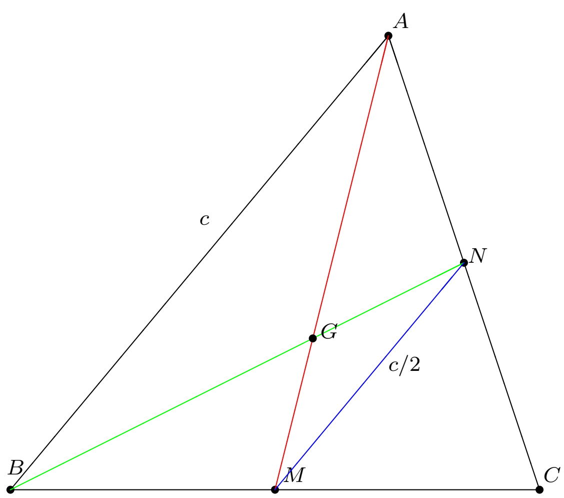


Figura 4:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{AB}{MN} = \frac{c}{c/2} = 2$$

isto é, G divide a mediana AM na razão 2:1. Então, usando as fórmulas 1.2 e 1.3 obtemos

$$x = \frac{x_1 + 2x_m}{1+2} = \frac{x_1 + 2\dfrac{x_2 + x_3}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

e

$$y = \frac{y_1 + 2y_m}{1+2} = \frac{y_1 + 2\frac{y_2+y_3}{2}}{3} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

portanto

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

Podemos então concluir que *as coordenadas do baricentro de um triângulo são as médias aritméticas das coordenadas dos vértices.*

1.4 Condição de alinhamento de três pontos

Suponha dados três pontos no plano, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ e $A(x, y)$, queremos determinar uma relação entre suas coordenadas de modo a garantir que esses três pontos estão sobre uma mesma reta. É claro que podemos supor que os três pontos são diferentes um do outro.

Vamos inicialmente supor que estamos com uma situação semelhante à figura 3. Ora, por semelhança de triângulos obtemos

$$\frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{x_1 - x}{x - x_2} \tag{1.4}$$

ou seja

$$(y_1 - y)(x - x_2) = (x_1 - x)(y - y_2) \tag{1.5}$$

É fácil verificar, usando semelhança de triângulos, que se três pontos possuem coordenadas que verificam a relação 1.5 então necessariamente esses pontos são colineares (para uma prova disso consulte [1, p.20]).

Capítulo 2

Estudo da reta

Vamos agora iniciar a descrição de certas curvas no plano cartesiano. A mais simples, mas nem por isso menos importante, é a reta.

2.1 Equação geral

Inicialmente consideremos uma dada reta r no plano.

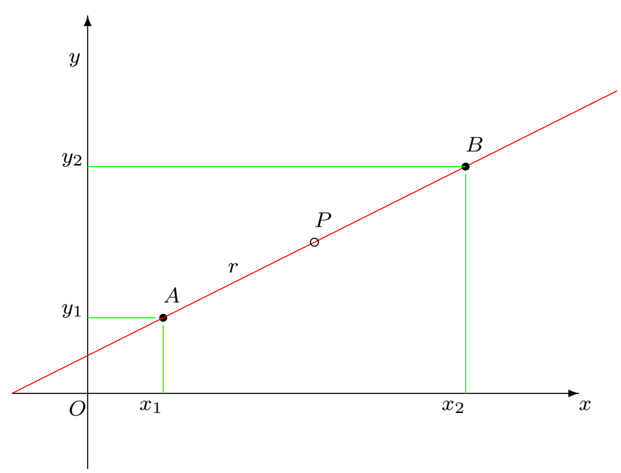


Figura 1:

Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ dois pontos distintos que definem a reta r. Tomemos agora um ponto $P(x, y)$ qualquer de r. Ora, sendo A, B e P **colineares** segue-se que vale a relação 1.5, isto é

$$(y_1 - y)(x - x_2) = (x_1 - x)(y - y_2) \tag{2.1}$$

Desenvolvendo os produtos indicados resulta

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \tag{2.2}$$

Fazendo

$$y_1 - y_2 = a\ ,\ \ x_2 - x_1 = b\ \text{ e }\ x_1 y_2 - x_2 y_1 = c$$

podemos escrever

$$ax + by + c = 0 \tag{2.3}$$

A equação 2.3 é chamada **equação geral** da reta r.

Observação 2.1 *A equação 2.3 serve para representar* **qualquer** *reta no plano. Como casos particulares temos*

- *Se $a = 0$ então* **quaisquer dois pontos** *sobre r possuem a mesma ordenada y, logo a reta r é* **paralela** *ao eixo-x.*
- *Se $b = 0$ então* **quaisquer dois pontos** *sobre r possuem a mesma abscissa x, logo a reta r é* **paralela** *ao eixo-y.*
- *Os números a e b* **não podem** *ser iguais a zero* **ao mesmo tempo**, *pois neste caso* **não** *teríamos reta alguma.*

O seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista em [1, p.30] mostra a recíproca do que vimos acima

Teorema 2.2 *Se $a^2 + b^2 \neq 0$, então toda equação da forma*

$$ax + by + c = 0$$

representa uma reta no plano.

Existe um modo muito simples de memorizar a equação (2.2) que é utilizando um esquema chamado determinante (mais tarde voltaremos para justificar esse nome). A configuração

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

é chamado um determinante de ordem 3 e é equivalente a

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) \tag{2.4}$$

Assim, podemos representar (2.2) por

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0 \tag{2.5}$$

2.2 Posições relativas de duas retas

Consideremos duas retas r e s cujas equações são:

$$(S) \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (r) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (s) \end{cases} \tag{2.6}$$

Ora, duas retas no plano podem ocupar apenas três posições uma em relação a outra (veja a fig. 2):

r e s são **concorrentes**, isto é, possuem apenas um ponto em comum.

r e s são **paralelas**, isto é não possuem pontos em comum.

r e s são **coincidentes**.

Cada uma dessas posições relativas corresponde a um **conjunto solução** distinto para o **sistema** de equações (S). Vamos então estudar esse sistema de modo a descobrir que

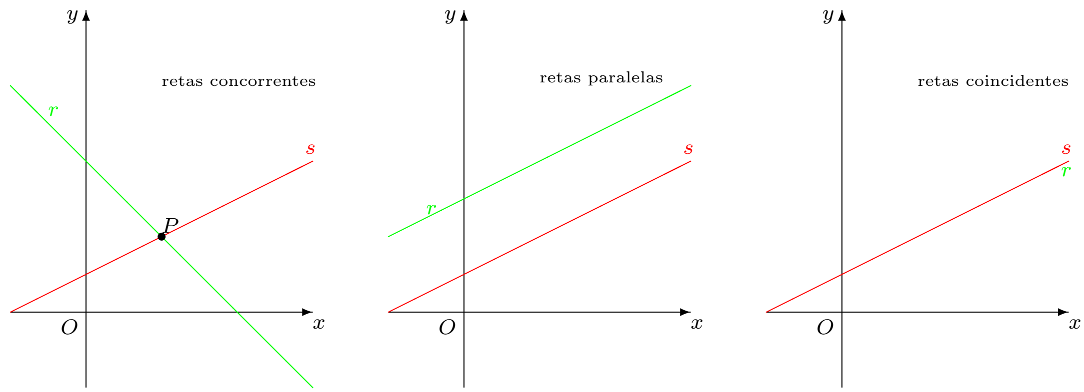


Figura 2:

relações devem existir entre os **coeficientes** das equações para que possamos decidir, dadas as equações de duas retas, em que caso classificá-las.

Multiplicando a primeira equação por a_2 e a segunda equação por a_1 obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} a_2a_1x + a_2b_1y = a_2c_1 & (r) \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 & (s) \end{cases} \tag{2.7}$$

Agora, fazendo a primeira equação em (2.7) menos a segunda equação, resulta

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2 \tag{2.8}$$

daí, se

$$a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$$

podemos escrever

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

Por outro lado, voltando ao sistema (2.6), multiplicando a primeira equação por b_2, a segunda por b_1 e subtraindo as equações resultantes obtemos

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2 \tag{2.9}$$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

portanto

Teorema 2.3 *Considerando o sistema* (S) *em (2.6), se*

$$a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$$

então as duas retas são **concorrentes** *num ponto* (x, y) *com coordenadas dadas por*

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad e \;\; y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

o número

$$D = a_1b_2 - a_2b_1$$

é chamado **determinante** *do sistema e simbolicamente representado pelo arranjo*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

É claro que as outras duas possibilidades devem ser caracterizadas pelo fato de $D = 0$, isto é,

$$a_1b_2 = a_2b_1$$

Observando as relações (2.8) e (2.9) e usando as notações

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \;\; \text{e} \;\; D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

podemos concluir que

Teorema 2.4 *Se* $D = 0$ *então teremos*

- *Caso* $D_1 = 0$ *e* $D_2 = 0$ *as retas são* **coincidentes**

- *Caso* $D_1 = 0$ *e* $D_2 \neq 0$ *as retas são* **paralelas**

- *Caso* $D_1 \neq 0$ *e* $D_2 = 0$ *as retas são* **paralelas**

Observação 2.5 *Vamos supor que os coeficientes das duas equações são* **diferentes de zero**. *Assim* $D = 0$ *é equivalente a*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

- $D_1 = 0$ *e* $D_2 = 0$ *são equivalentes a*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- *Se pelo menos um dentre* D_1 *ou* D_2 *for diferente de zero então*

$$\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

2.3 Coeficiente angular

Voltemos agora ao procedimento que nos levou da condição de alinhamento entre três pontos à equação geral da reta no plano cartesiano. Vimos que dados **dois pontos quaisquer** $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ a equação geral da reta que contém A e B é

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = c$$

com c constante.

Vimos também que a equação geral de uma reta

(a) paralela ao eixo-x é

$$y = c$$

(b) paralela ao eixo-y é

$$x = c$$

Antes de mais nada vamos estabelecer uma convenção com relação ao sentido (ou direção) de percurso numa dada reta.

Consideremos uma reta r num plano cartesiano que não seja paralela a nenhum dos eixos coordenados. Fixemos um ponto qualquer $A = (x_1, y_1)$ sobre r e tomemos um outro ponto $B = (x_2, y_2)$ sobre r de modo que

$$x_1 < x_2$$

Diremos que o segmento AB define sobre r a **direção** (ver figura 3)

(a) **positiva** se $y_2 > y_1$

(b) **negativa** se $y_2 < y_1$

Observação 2.6 *Caso a reta r seja paralela a algum dos eixos coordenados, sua direção positiva é a mesma do eixo que ela é paralela.*

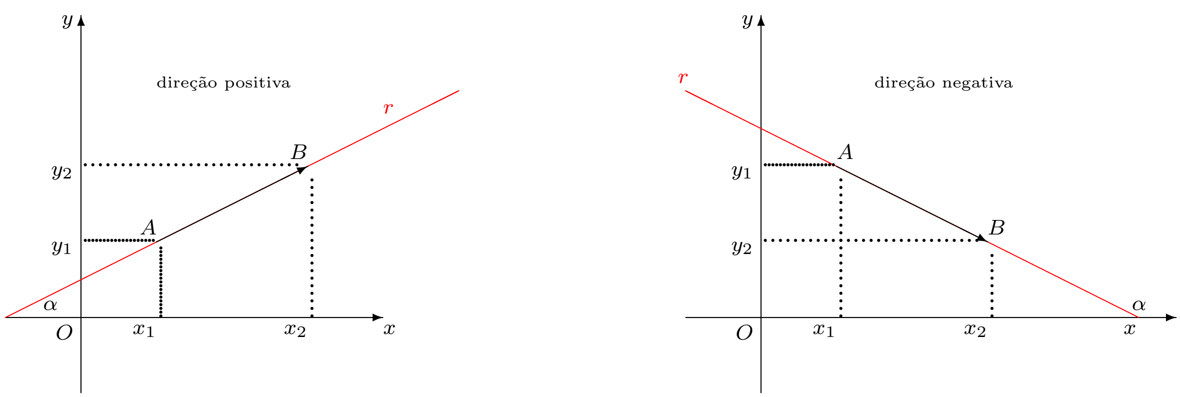


Figura 3:

Voltando então à equação geral da reta, e supondo que **não seja paralela** ao eixo-y,

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = c \tag{2.10}$$

podemos escrever

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x + b$$

pondo $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ teremos

$$y = mx + b \tag{2.11}$$

O número m na equação (2.11) é chamado **coeficiente angular** da reta r e o número b é chamado **coeficiente linear** da reta r.

Observação 2.7 *A quantidade*

$$|m| = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|}$$

não depende *dos pontos escolhidos A e B sobre a reta r, portanto o coeficiente angular estabelece uma* **propriedade** *da reta r.*

Definição 2.8 *Definimos o* **ângulo** *α que uma reta r faz com o eixo-x do seguinte modo:*

(a) *Se r é* **paralela** *ao eixo-x pomos*

$$\alpha = 0$$

(b) *Se r* **não** *é paralela ao eixo-x então o ângulo α é definido assim: seja C o ponto de interseção de r com o eixo Ox, então α é o ângulo definido pelas semi-retas com origem em C definidas pelas direções* **positivas** *de r e de Ox (veja a figura 3).*

Em qualquer caso teremos

$$0 \leq \alpha < \pi$$

além disso, o **coeficiente angular** m de r verifica

$$m = \operatorname{tg} \alpha \quad , \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \tag{2.12}$$

Observação 2.9 *Retas perpendiculares ao eixo-x* **não** *possuem coeficiente angular. O* **coeficiente linear** *b da reta r (ver equação (2.11)) corresponde à ordenada do ponto de interseção de r com o eixo-y.*

2.4 Ângulo entre retas

Consideremos duas retas concorrentes r e s no plano cartesiano (ver figura 4) . Seja C o ponto de interseção dessas retas. O **ângulo** entre as retas r e s é definido como o ângulo com vértice C e cujos lados correspondem às semi-retas de origem em C e que definem a direção positiva das retas r e s . No caso da figura 4 (a) o ângulo entre r e s é θ_1

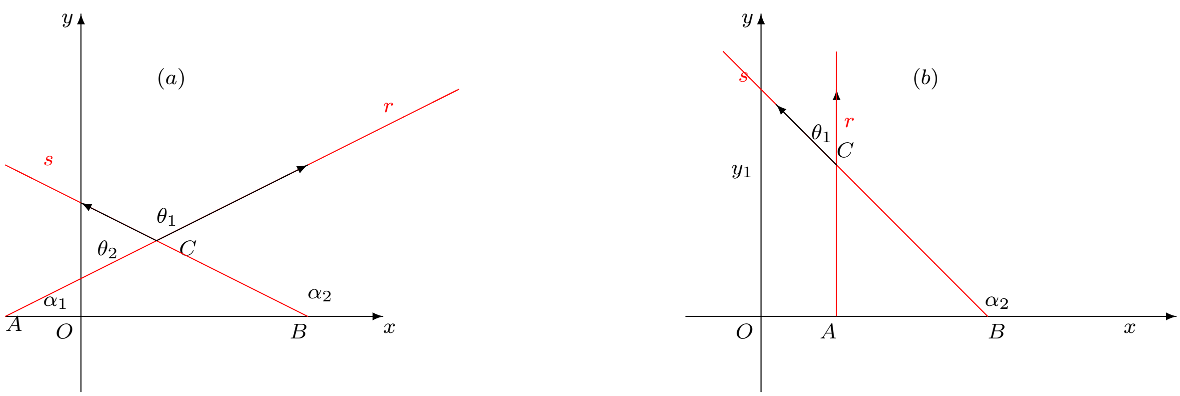


Figura 4:

Consideremos inicialmente o caso em que **nenhuma** das retas é perpendicular ao eixo-x (figura 4 (a)). Sejam m_r e m_s os coeficientes angulares das retas r e s respectivamente.

Temos que

$$m_r = \operatorname{tg} \alpha_1 \ \text{ e } \ m_s = \operatorname{tg} \alpha_2$$

Agora, observando o triângulo ABC temos

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta_1$$

logo

$$\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1)$$

recordando as relações trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\alpha_2-\alpha_1) = \operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_1 - \operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2$$

e

$$\cos(\alpha_2-\alpha_1) = \cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2$$

teremos, supondo que $\cos(\alpha_2-\alpha_1)\neq 0$,

$$\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_2-\alpha_1)}{\cos(\alpha_2-\alpha_1)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_1 - \operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2}$$

portanto

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_1 - \operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2}$$

dividindo o numerador e o denominador por $\cos\alpha_2\cos\alpha_1$ obtemos

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}$$

ou seja

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{m_s-m_r}{1+m_sm_r} \tag{2.13}$$

Observação 2.10 *A relação (2.13) foi obtida supondo-se que*

$$\cos(\alpha_2-\alpha_1)\neq 0$$

O caso em que

$$\theta_1 = \alpha_2-\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$$

nos diz que as duas retas r e s são **perpendiculares** *daí,*

$$\cos(\alpha_2-\alpha_1) = \cos\alpha_2\cos\alpha_1 + sen\,\alpha_1\,sen\,\alpha_2 = 0$$

ou seja

$$\cos\alpha_2 \cos\alpha_1 = -\,sen\,\alpha_1\, sen\,\alpha_2$$

portanto

$$tg\,\alpha_1\, tg\,\alpha_2 = -1$$

Logo a condição para que duas retas r e s sejam **perpendiculares** é

$$m_r m_s = -1 \tag{2.14}$$

Observação 2.11 *Se as retas r e s são* **paralelas** *é claro que elas fazem com o eixo-x um mesmo ângulo, ou seja,*

$$m_r = m_s$$

e essa é a condição para que duas retas sejam paralelas.

Como exercício, verifique que no caso em que um das retas é perpendicular ao eixo-x (ver figura 4 (b)) tem-se

$$\operatorname{tg}\theta_1 = -\frac{1}{m_r}$$

2.5 Distância entre ponto e reta

Consideremos uma reta r com equação geral

$$ax + by + c = 0$$

Inicialmente vamos calcular a distância d entre essa reta e a origem. Podemos supor, que r não contém a origem (caso contrário $d = 0$) conforme indica a figura 5.

É claro que a distância entre uma reta e um ponto que não pertence a reta é a medida do segmento de reta perpendicular à reta passando pelo ponto. Consideremos então a reta s passando pela origem e perpendicular a r (ver figura 5). A equação geral da reta s é

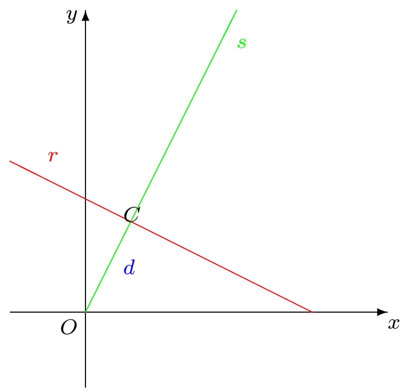


Figura 5:

$$bx - ay = 0$$

Seja C o ponto de interseção de r com s. Então d é igual a distância de C a origem O.

$$d = \text{dist}(C, O)$$

Seja $C = (x_0, y_0)$ a expressão de C no sistema de coordenadas. Como C pertence a r e a s então suas coordenadas são (a única) solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} ax_0 + by_0 = -c \\ bx_0 - ay_0 = 0 \end{array} \right. \tag{2.15}$$

É claro que

$$d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

assim, elevando ao quadrado as duas equações em (2.15) teremos

$$a^2x_0^2 + 2abx_0y_0 + b^2y_0^2 = c^2$$

e

$$b^2x_0^2 - 2abx_0y_0 + a^2y_0^2 = 0$$

agora, somando essas duas equações obtemos

$$(a^2+b^2)x_0^2+(a^2+b^2)y_0^2=c^2$$

ou seja

$$(a^2+b^2)(x_0^2+y_0^2)=c^2$$

portanto

$$d^2=x_0^2+y_0^2=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

no que resulta em

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{2.16}$$

Vamos agora considerar o caso de calcular a distância entre um ponto A qualquer do plano e uma reta r que não contenha A (ver figura 6).

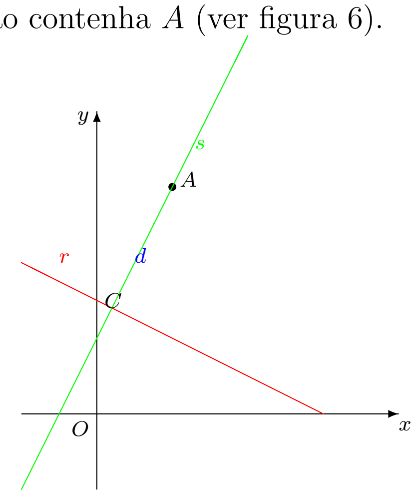


Figura 6:

Consideramos a reta s perpendicular a r e passando por A. Seja C o ponto de interseção de r e s. Sejam $C=(x_0,y_0)$ e $A=(x_1,y_1)$ as coordenadas de C e de A. É claro que

$$d=\ \mathrm{dist}(A,C)\ =\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

Podemos repetir o procedimento anterior, somente tendo mais trabalho nas simplificações, mas vamos tomar um outro caminho. Vamos pensar um pouco sobre a fórmula deduzida acima. A fórmula (2.16) é válida sempre que o ponto A seja a **origem** de um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Ora, porque então não considerar um novo sistema ortogonal de coordenadas $x'y'$ no qual as coordenadas de A sejam $(0,0)$ e daí aplicar a fórmula (2.16)? É isso o que faremos.

Consideremos o sistema de coordenadas $x'y'$ com origem em A. Se um ponto P do plano tem coordenadas $P = (x, y)$ no sistema anterior e coordenadas $P = (x', y')$ no novo vamos então ver como essas coordenadas se relacionam (ver figura 7).

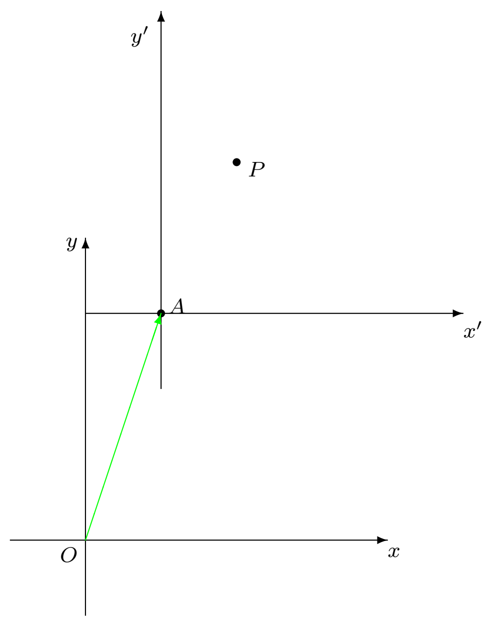


Figura 7:

Sendo as coordenadas de $A = (x_1, y_1)$ no sistema xy e $A = (0,0)$ no sistema $x'y'$, pela figura 7 apenas **transladamos** a origem O para o ponto A. Assim temos

$$\begin{cases} x' = x - x_1 \\ y' = y - y_1 \end{cases} \tag{2.17}$$

Assim (2.17) é a relação que procuramos. Como fica a equação da reta r no novo sistema de coordenadas? Bom, temos a equação de r no sistema xy

$$ax + by + c = 0$$

fazendo a mudança

$$x = x' + x_1 \quad \text{e} \quad y = y' + y_1$$

obtemos

$$a(x' + x_1) + b(y' + y_1) + c = 0$$

daí resulta

$$ax' + by' + \underbrace{(ax_1 + by_1 + c)}_{c'} = 0$$

usando agora a fórmula (2.16) (observe que a distância entre A e C **não** muda com a mudança de coordenadas)

$$d = \frac{|c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e usando a expressão que define c',

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.18}$$

A fórmula (2.18) dá a distância de um ponto $A = (x_1, y_1)$ a uma reta r de equação $ax + by + c = 0$ que não contém A.

Capítulo 3

A Circunferência

Vamos agora estudar a circunferência e suas propriedades usando sistemas de coordenadas. Antes de mais nada recordemos a definição dessa curva

Definição 3.1 *Uma* **circunferência** *é o conjunto de todos os pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo. Esse ponto fixo é chamado* **centro** *da circunferência e a distância de cada ponto da circunferência ao centro é chamada* **raio** *da circunferência.*

Vamos então fixar um sistema de coordenadas ortogonal no plano e procurar caracterizar uma circunferência por meio de uma equação.

Fixemos um ponto $C = (x_0, y_0)$ do plano e seja $r > 0$ um dado número real. Se $P = (x, y)$ é um ponto da circunferência de centro C e raio r então, da própria definição temos

$$\text{dist}(P, C) \ = r$$

ou seja

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

ou ainda

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{3.1}$$

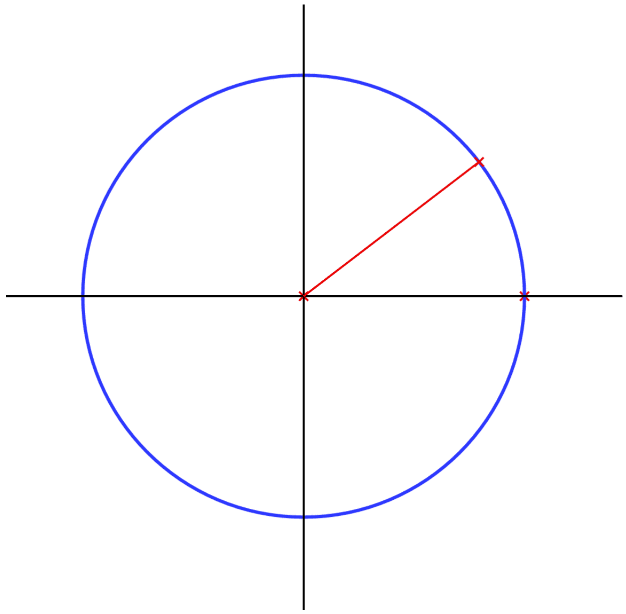


Figura 1: Circunferência com centro na origem

Assim, a equação (3.1) é a equação da circunferência de centro em $C = (x_0, y_0)$ e raio r. No caso particular do centro ser a origem $(0,0)$ do plano (3.1) é escrita

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Vamos agora desenvolver a equação (3.1):

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2) = r^2$$

essa equação é da forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.2}$$

com

$$D = -2x_0 \ , \ E = -2y_0 \ , \ F = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

observe que

$$D^2 + E^2 - 4F = r^2 > 0 \tag{3.3}$$

Vamos agora considerar a seguinte questão: quando é que uma equação do segundo grau em x e y

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

representa uma circunferência? Bom, comparando essa equação com a equação (3.2) vemos que, após dividirmos a equação por A, devemos ter

- $A = B$
- $C = 0$
- $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

É claro que sempre que $A = B$ podemos supor que $A = B = 1$. Assim a forma mais geral em que aparece uma equação de uma circunferência é a (3.2) desde que seus coeficientes verifiquem a relação (3.3). Agora, dada uma equação na forma (3.2) como encontrar o centro e o raio da circunferência? Isso é simples, basta usarmos um procedimento chamado de "completar quadrados" para reescrever a equação na forma (3.1). De fato

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é equivalente a

$$(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

daí

- Centro:
$$C = (-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$$
- Raio:
$$r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$$

3.1 Tangente à circunferência

Consideremos uma dada circunferência

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

queremos determinar a equação de uma reta que seja **tangente** a circunferência. Esse problema pode ser resolvido de duas formas: na primeira usamos os fatos já conhecidos da Geometria de que a tangente a uma circunferência é uma reta que possui **apenas** um ponto de **interseção** com a circunferência e que é **perpendicular** ao raio da circunferência que passa por esse ponto comum. Vamos ver isso de forma "analítica ".

Seja $P = (x_1, y_1)$ um ponto da circunferência

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.4}$$

e vamos supor que

$$y_1 \neq 0$$

se

$$y - y_1 = m(x - x_1) \ \text{ ou } \ y = mx - mx_1 + y_1 \tag{3.5}$$

é a equação da reta tangente à circunferência no ponto P então tudo o que nos resta a fazer é determinar o coeficiente angular m. Como P é o único ponto em comum entre a circunferência e a reta, ao substituirmos (3.5) em (3.4) obtemos

$$x^2 + (mx - mx_1 + y_1)^2 + Dx + E(mx - mx_1 + y_1) + F = 0$$

isto é

$$x^2+m^2x^2-2m^2xx_1+m^2x_1^2+2mxy_1-2mx_1y_1+y_1^2+Dx+Emx-Emx_1+Ey_1+F=0$$

que após coletarmos os termos semelhantes se torna

$$(m^2+1)x^2+(2my_1-2m^2x_1+D+Em)x+(m^2x_1^2-2mx_1y_1+y_1^2-Emx_1+Ey_1+F)=0$$

que é uma equação do segundo grau que, pela unicidade da solução P, **tem discriminante** igual a zero. Logo

$$(2my_1 - 2m^2x_1 + D + Em)^2 - 4(m^2+1)(m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 + y_1^2 - Emx_1 + Ey_1 + F) = 0$$

e resolvendo essa equação encontramos o valor de m procurado. Isto é devemos resolver

$$(E^2 - 4Dx_1 - 4F - 4x_1^2)m^2 + (4Dy_1 + 2DE + 8x_1y_1 + 4Ex_1)m + (D^2 - 4y_1^2 - 4Ey_1 - 4F) = 0$$

Capítulo 4

A Parábola

Vamos agora estudar uma outra curva plana importante e cujo estudo fica muito mais facilitado quando feito com coordenadas.

Definição 4.1 *Dados uma reta d e um ponto F, não pertencente à d, seja p a distância de F a d. Uma* **parábola** *com* **foco** *em F e* **diretriz** *d é o conjunto de todos os pontos do plano que são equidistantes de F e d.*

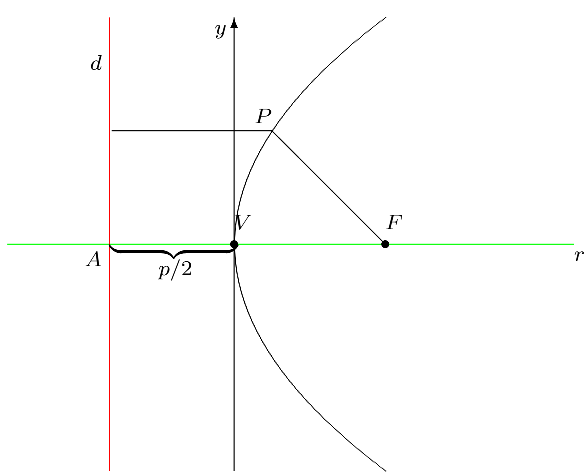


Figura 1: Ilustração de uma parábola com eixo de simetria o eixo-x

Consideremos a reta r que passa por F e é **perpendicular** a d. Essa reta é chamada **eixo** da parábola. Seja A o ponto de interseção do eixo da parábola com sua diretriz (ver figura 1). O ponto médio do segmento AF será denotado por V. Sendo a distância de V a F igual à distância de V a d, segue-se que V é um ponto da parábola. V é chamado **vértice** da parábola.

Vamos agora escrever uma equação que descreva a parábola.

Consideremos uma reta perpendicular ao **eixo** da parábola passando por seu **vértice** V. Vamos inicialmente fazer a seguinte *escolha*: tomamos como eixo-x o eixo da parábola e como eixo-y a reta perpendicular ao eixo passando por V. Assim, nesse sistema de coordenadas $V = (0,0)$ e $F = (\frac{p}{2}, 0)$. Além disso a equação de d é $x = -\frac{p}{2}$. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola. Então da própria definição teremos

$$\text{dist}(P, F) \;=\; \text{dist}(P, d)$$

logo

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = |x + p/2|$$

elevando ao quadrado os dois lados resulta

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$$

que desenvolvendo nos dá

$$y^2 = 2px \tag{4.1}$$

A equação (4.1) representa uma parábola com vértice na origem eixo coincidindo com o eixo dos x e distância do foco à diretriz igual a p.

Se tivéssemos feito uma outra escolha para os eixos, por exemplo, tomando para eixo-y o eixo da parábola e para eixo-x a reta perpendicular ao eixo passando por V, a equação que obteríamos seria

$$x^2 = 2py \tag{4.2}$$

A forma (4.2) é a mais divulgada

$$y = ax^2$$

e ela decorre apenas de uma **escolha conveniente** do sistema de coordenadas.

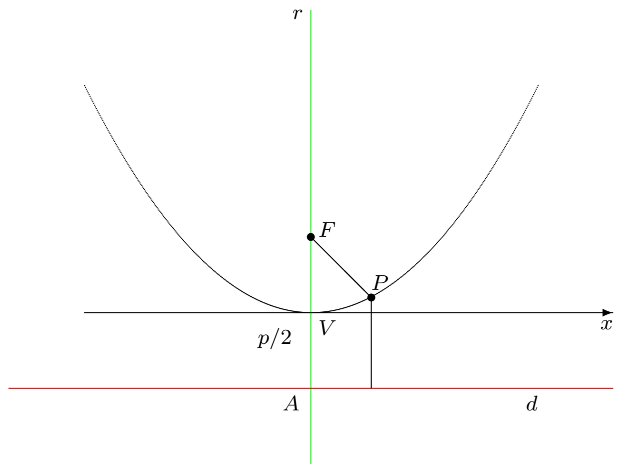


Figura 2: Ilustração de uma parábola com eixo de simetria o eixo-y

As duas equações obtidas são chamadas **formas canônicas** da equação da parábola.

Vamos agora estudar o seguinte caso: é dado um sistema de coordenadas ortogonal e nesse sistema o vértice de uma parábola tem coordenadas $V = (a, b)$, além disso, o eixo de simetria da parábola é **paralelo** a um dos eixos coordenados. Escrever a equação da parábola.

Vamos apenas estudar o caso em que o eixo da parábola é paralelo ao eixo-y.

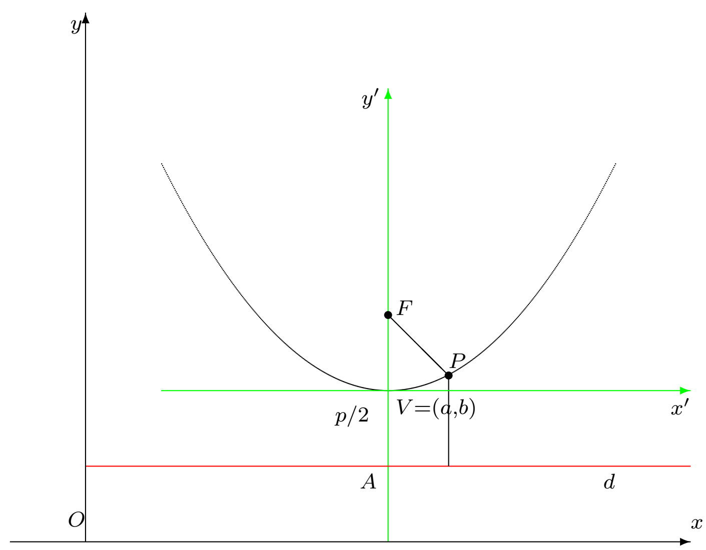


Figura 3: Ilustração de uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo-y

Ora, no sistema de coordenadas $x'y'$, no qual as coordenadas do vértice são $V = (0, 0)$, a equação da parábola é

$$2py' = (x')^2$$

agora, a relação entre os dois sistemas de coordenadas é

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \tag{4.3}$$

Portanto, a equação no sistema xy é

$$2p(y - b) = (x - a)^2$$

que desenvolvendo fica

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{a}{p}x + \frac{a^2}{2p} + 2pb \tag{4.4}$$

A equação (4.4) é da forma

$$y = Ax^2 + Bx + C \tag{4.5}$$

Observação 4.2 *Caso o eixo de simetria fosse paralelo ao eixo-x a equação teria a forma*

$$(y - b)^2 = 2p(x - a)$$

ou ainda

$$x = Ay^2 + By + C$$

Folha de problemas

Problema 1: José e Maria decidiram "mapear" sua pequena cidade, de modo a poder localizar melhor seus amigos e ainda utilizar os conceitos de coordenadas aprendidos na escola. Munidos de uma bússola, construída na aula de Ciências, resolveram tomar como ponto de referência a pequena praça da cidade. Lá traçaram, num ponto central da praça, um par de segmentos de reta perpendiculares e assinalaram os pontos cardeais, além disso imaginaram esses segmentos prolongados indefinidamente em ambas as direções de modo que na verdade contavam com um par de retas perpendiculares. Para facilitar, usaram em suas anotações apenas as iniciais dos nomes de seus amigos. Montaram então a seguinte tabela, na qual usaram como unidade de medida de distâncias metade do lado do quarteirão da escola.

Amigo	N	L	S	O
A	9			4
B	6			7
C	0			4
D			4	5
E	6	7		
F		7	3	

(a) Localize precisamente, no mapa feito por José e Maria, cada um dos amigos dos dois.

(b) Em linha reta, qual dos amigos mora mais longe do centro da praça? E mais perto?

(c) Tomando como referência o centro do quarteirão da escola,e considerando em linha reta, qual dos amigos mora mais longe da escola? E mais perto?

Problema 2 Para simplificar um pouco mais seu modo de anotar as "coordenadas" de seus amigos, Maria sugeriu o seguinte: Ora, a cidade ficou dividida em *quatro quadrantes*, o quadrante Norte-Leste, Norte-Oeste, Leste-Sul e Oeste-Sul e dois pares de retas perpendiculares que " definem "esses quadrantes. Assim podemos usar apenas um **par de números com sinais** para localizar as pessoas. De acordo com a convenção: para o Norte é $+$, para o Sul é $-$, para o Leste é $+$ e para o Oeste é $-$. Quem mora sobre uma das retas terá uma das coordenadas 0.

- Norte-Leste : $(+,+)$
- Norte-Oeste : $(-,+)$
- Leste-Sul : $(+,-)$
- Oeste-Sul : $(-,-)$
- Mora sobre a reta Sul-Norte : $(0,.)$
- Mora sobre a reta Oeste-Leste : $(.,0)$

Com o sistema acima, Maria escreve a localização de A do seguinte modo: $A(-4,+9)$ e a de F como $F(+7,-3)$.

Problema 3 Explique como Maria está usando sua convenção de notação e complete a descrição das coordenadas dos outros amigos.

Problema 4 Localize os seguintes pontos no sistema de Maria: $T(-2,-2)$; $Q(0,3)$; $W(5,0)$; $R(3,-5)$

Problema 5 Sempre em linha reta, calcule a distância entre os seguintes pares de pontos: A e B; Q e C; D e R. Obtenha uma fórmula que permita calcular a distância entre quaisquer dois pontos.

Problema 6 Que tipo de triângulo é formado pelos pontos $Y(3,1)$, $U(4,-4)$ e $I(-2,2)$? Calcule seu perímetro e sua área.

Problema 7 Sabe-se que $S(x,y)$ eqüidista de $A(-4,9)$ e $B(-9,6)$. Que tipo de relação deve verificar x e y ?

Maria resolveu " batizar"as retas que definem as direções com os seguintes nomes: a reta Sul-Norte terá o nome de **eixo das ordenadas ou eixo** Oy e a reta Oeste-Leste terá o nome de **eixo das abscissas** ou eixo Ox.

Problema 8 Determine o ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, sabendo que é eqüidistante dos pontos $A(2,-1)$ e $B(3,5)$. Qual seria a resposta se P pertencesse ao eixo das ordenadas?

Problema 9 Sabe-se que $D(x,y)$ é um ponto que eqüidista de $C(-4,0)$, $Q(0,3)$ e $G(3,2)$. Quais as coordenadas de D?

Problema 10 Obter as coordenadas do ponto médio do segmento que liga os pontos $A(7,-1)$ e $B(-3,11)$. Obter uma fórmula que permita determinar as coordenadas do ponto médio de qualquer segmento dadas as coordenadas de suas extremidades.

Problema 11 Sabe-se que os pontos A, B e C formam um triângulo. São dados o vértice $A(2,4)$, o ponto médio M do lado AB, $M(1,2)$, e o ponto médio N do lado BC, $N(-1,1)$. Calcule o perímetro do triângulo ABC.

Problema 12 Dados os pontos $Q(4,3)$ e $R(0,7)$, determine uma relação entre as coordenadas de um ponto $P(x,y)$ de modo que este esteja sobre a reta QR.

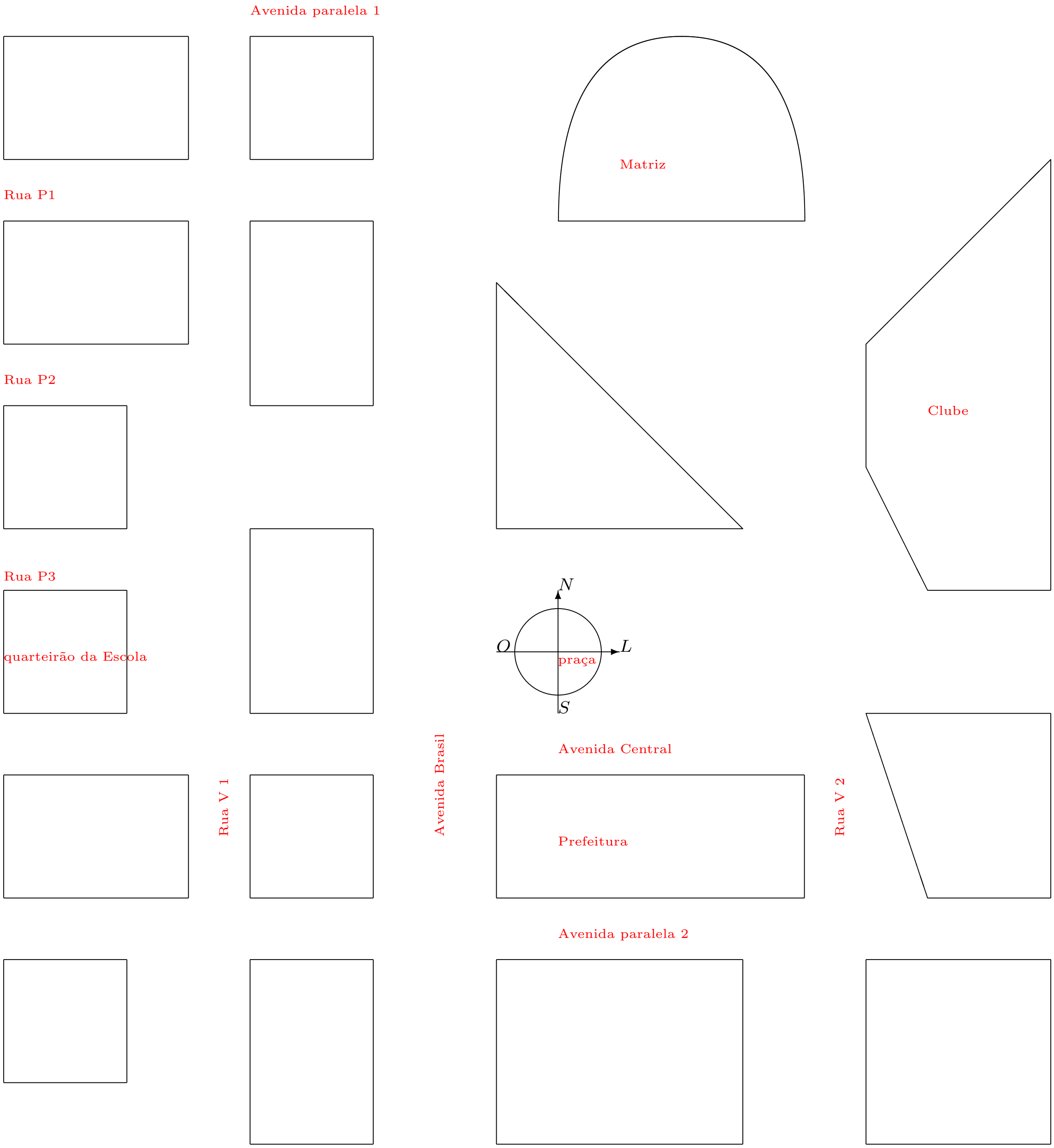
Problema 13 Determine a equação da reta definida pelos pontos $A(\frac{5}{4},\frac{3}{4})$ e $B(\frac{-3}{4},\frac{-5}{4})$

Problema 14 Determine a interseção das retas $r = AB$ e $s = CD$ com $A(-4,9)$, $B(-9,6)$, $C(-4,0)$ e $E(7,6)$

Problema 15 Discuta a posição relativa das retas

- $(r)(m-1)x + my - 1 = 0$
- $(s)(1-m)x + (m+1)y + 1 = 0$

Problema 16 Obtenha uma reta paralela a $(r)2x+y=0$ e que define junto com os eixos de coordenadas um triângulo cuja área é 16.



Avenida paralela 1
Matriz
Rua P1
Rua P2
Clube
Rua P3
N
O
L
quarteirão da Escola
praça
S
Avenida Central
Rua V 1
Avenida Brasil
Rua V 2
Prefeitura
Avenida paralela 2

Folha de problemas

Problema 1 Calcule a área do quadrado que tem $A = (4, 8)$ e $B = (-2, 2)$ como vértices opostos.

Problema 2 Dois vértices de um quadrado estão nos pontos $A(3, -4)$ e $B(9, -4)$. Calcule a soma das abscissas dos outros dois vértices.

Problema 3 Calcule a área do quadrado cujos vértices são os pontos médios dos lados do quadrado $ABCD$, sabendo que $A = (1, 2)$ e $B = (4, 2)$.

Problema 4 Quantos pontos do plano xy satisfazem a propriedade de serem eqüidistantes dos eixos coordenados e ao mesmo tempo terem distância 1 (um) da origem?

Problema 5 Determine o ponto de interseção da reta da figura 4 com o eixo das abscissas.

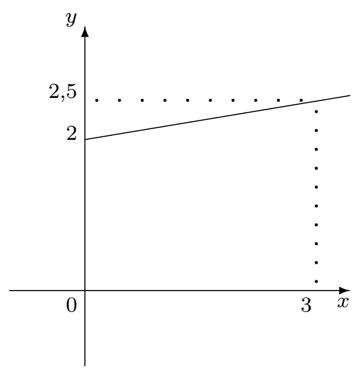


Figura 4:

Problema 6 Determine o ponto de interseção das retas da figura 5

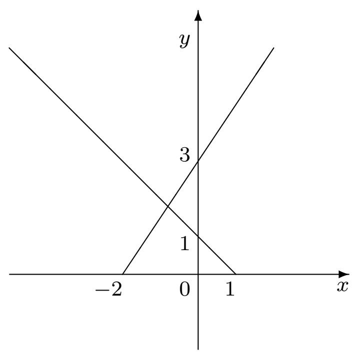


Figura 5:

Problema 7 Determinar a equação da reta pontilhada r da figura 6

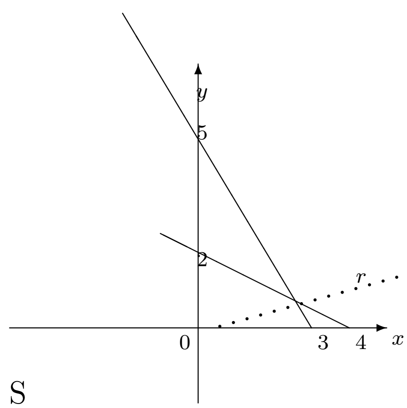


Figura 6:

Problema 8 Dois professores estão discutindo seu critério de distribuição de notas. Ambos realizam duas provas; o primeiro calcula a média final de seus alunos tomando a média aritmética entre as notas das duas provas. O segundo atribui peso 4 à primeira prova e peso 6 à segunda. Em cada prova a nota máxima é 10 e a nota para aprovação é 5. Com qual dos critérios um aluno teria mais chance de ser aprovado? As notas de um aluno nas provas seriam suficientes para que fosse aprovado com média 5 nos dois critérios. Quais foram essas notas? Se um outro professor tem o critério de atribuir peso 3 à primeira prova e peso 7 à segunda, faça a comparação desse critério com os outros.

Problema 9 As retas r e s são perpendiculares e têm interseção no ponto (2,4). A reta s passa pelo ponto (0,5). Determine uma equação para r.

Problema 10 Considere as circunferências que passam pelos pontos (0,0) e (2,0) e que são tangentes à reta $y = x + 2$.

(a) Determine as coordenadas dos centros dessas circunferências.

(b) Determine os raios dessas circunferências.

Problema 11 Um nadador, disputando a prova dos 400 metros, nado livre, completou os primeiros 300 metros em 3 minutos e 51 segundos. Se esse nadador mantiver a mesma velocidade média nos últimos 100 metros, em quanto tempo completará a prova?

Problema 12 Uma reta determina, no primeiro quadrante do plano cartesiano, um triângulo isósceles, cujos vértices são a origem e os pontos onde a reta corta os eixos x e y. Se a área desse triângulo é 18, encontre uma equação para a reta.

Problema 13 Uma reta passa pelo ponto $P = (3,1)$ e é tangente à circunferência de centro $C = (1,1)$ e raio 1 num ponto T. Determine a medida do segmento PT.

Problema 14 Seja $y = ax + b$, onde a e b são números reais tais que $a < 0$ e $b > 0$. Faça uma representação gráfica dessa reta.

Problema 15 Observe a figura 7 e diga qual é a ordenada do ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas.

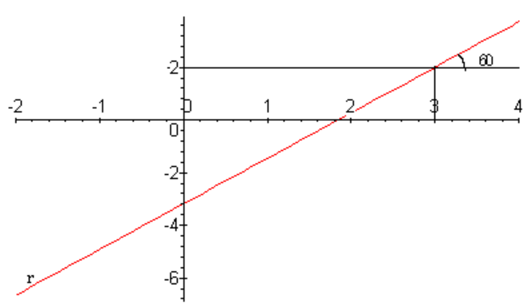


Figura 7:

Problema 16 Uma reta determina no terceiro quadrante do plano cartesiano, um triângulo retângulo isósceles, cujos vértices são a origem e os pontos onde a reta corta os eixos x e y. Determine uma equação para essa reta sabendo que ela passa pelo ponto $P = (2, 1)$.

Problema 17 Sejam a , b, c e d números reais positivos tais que os pontos $A = (9a, 3b)$, $B = (-c, d)$ e $C = (c, -d)$ são os vértices de um triângulo **equilátero**. Determine uma equação para a reta r que é paralela ao lado BC e passa pelo **incentro** do triângulo ABC.

Problema 18 Que relação deve existir entre m e n para que as retas de equações $2x - my + 1 = 0$ e $nx + 3y + 5 = 0$ sejam paralelas?

Problema 19 Determine uma equação para a reta r perpendicular à reta de equação $x + 3y - 5 = 0$ e que passa pelo ponto $(1, 1)$.

Problema 20 Determine o ponto simétrico do ponto $(-1, 1)$ em relação à reta $y = 2x$.

Problema 21 Os vértices de um triângulo são os pontos $A = (-1, 2)$, $B = (5, 1)$ e $C = (3, 6)$. Determine o coeficiente **linear** da reta que passa por C e pelo **ortocentro** do triângulo.

Problema 22 Determine o valor do ângulo agudo formado pelas retas $x - y + 2 = 0$ e $3x + y + 1 = 0$

Problema 23 Calcule a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta de equação $2x + 12y - 3 = 0$

Problema 24 Considere as retas de equações $y = -3x + 3$ e $y = -\dfrac{x}{2} + 2$. Calcule a área da região cuja fronteira é formada por essas retas e pelos eixos coordenados.

Problema 25 Encontre uma equação para a reta bissetriz do ângulo agudo que a reta

$$y = mx \ , \qquad m \neq 0$$

forma com o eixo dos x.

Folha de problemas

Problema 1 Determine a equação da circunferência de centro (-3, 4) e que tangencia o eixo-x.

Problema 2 Qual é o ponto da circunferência $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 4$ que tem ordenada máxima?

Problema 3 Encontre uma equação para uma circunferência que passa pela origem, tem raio 2 e cujo centro C encontra-se na reta $y = 2x$.

Problema 4 Encontre o centro e o raio da circunferência que passa pelos pontos $A = (2, 2)$, $B = (3, 3)$ e $C = (3, 2)$.

Problema 5 Encontre o raio da circunferência de centro em $C = (a, b)$ sabendo-se que $a + b = 6$.

Problema 6 Determine o ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 28 = 0$ que tem ordenada máxima.

Problema 7 Seja C a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$. Considere em C a corda AB cujo ponto médio é $M = (2, 2)$. Calcule a medida de AB.

Problema 8 Com relação a três circunferências no plano, com centros não colineares, podemos afirmar que

(a) sempre existe um ponto comum às três circunferências.

(b) existe no máximo um ponto comum às três circunferências.

(c) podem existir dois pontos comuns às três circunferências.

(d) nunca existe ponto comum às três circunferências.

(e) existem exatamente três pontos comuns às três circunferências

Problema 9 Quantas soluções possui o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 62 \\ x^2 - y^2 + x - y == 50 \end{cases}$$

Problema 10 Sejam A e B os pontos de interseção da reta definida por $y = -x + 1$ com a circunferência de centro $O = (1, 2)$ e raio 2. Determine a área do triângulo ABO.

Problema 11 O segmento AB é diâmetro da circunferência $x^2+y^2 = 10y$. Se $A = (3, 1)$ determine as coordenadas do ponto B.

Problema 12 A reta $y = mx$ com $m > 0$, é tangente à circunferência $(x-4)^2+y^2 = 4$. Determine o seno do ângulo que a reta forma com o eixo-x.

Problema 13 Encontre a equação da circunferência de centro $C = (2, -1)$ e que é tangente à reta de equação $y = -x + 4$.

Referências Bibliográficas

[1] Gelson Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica*, volume 7. Atual Editora, 1996.

[2] Charles H. Lehmann. *Geometria Analítica*. Ed. Globo, 1974.

[3] A. V. Pogorélov. *Geometry*. Ed. Mir, 1987.