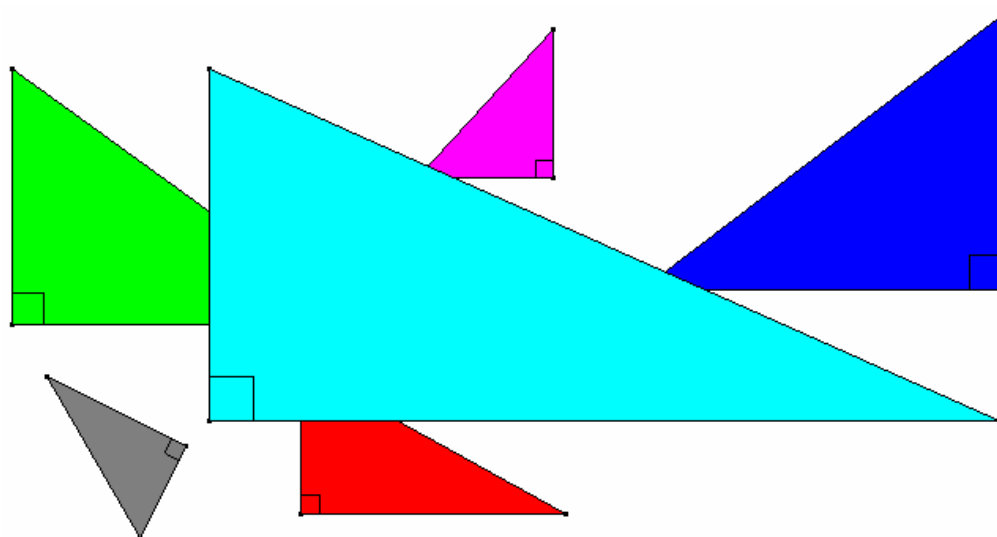




Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
FEIS – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Teia do Saber 2004

Trigonometria no Triângulo Retângulo



Orientadora :

Prof^a Dr^a Dalva Maria de Oliveira Villarreal

Componentes:

Ana Clarice Caldato Araújo

Eloíza Leiko Saito Yamasaki

Luciane Rossini Leão

Márcia Regina Rodrigues da Costa Medeiros

Vanessa Aparecida Palomo

Estagiários:

Fabiola Fernanda Fatareli;

Marcos Vinicius dos Santos.

Índice

1. Introdução.....	1
2. Um pouco da história.....	1
3. Relações da Trigonometria com conhecimentos de outras áreas.....	2
4. Trigonometria e suas aplicações.....	3
5. A trigonometria do triângulo retângulo.....	3
6. Construindo triângulos retângulos semelhantes.....	3
7. Relacionando lados e ângulos.....	5
8. Relações Trigonométricas.....	6
9. Fazendo Descobertas.....	7
9.1 Para introduzir o conceito de seno.....	7
9.2 Descobrindo seno, cosseno e tangente.....	8
10. Software “Cabri-Géomètre” e a “Trigonometria no Triângulo Retângulo”.....	9
11. Atividade Extra-Classe.....	12
11.1 Atividade desenvolvida: Medindo a largura da rua.....	13
12. Aplicações das relações trigonométricas.....	16
13. Atividade desenvolvida com uma maquete.....	26
14. Conclusão.....	28
15. Referências bibliográficas.....	29

1. Introdução

Este trabalho foi desenvolvido no curso “Teia do Saber – 2004”, tem como tema “Trigonometria no Triângulo Retângulo” e destina-se a professores, futuros professores e, eventualmente, a alunos.

Trabalhamos este tema com o objetivo de auxiliar os nossos colegas, fornecendo um material de apoio e propostas a serem utilizadas, quer na **sala de aula**, quer no **exterior da sala**, assim como no **laboratório de informática**, sempre visando despertar o interesse e cativar a atenção dos alunos.

Aconselhamos também os estudantes a utilizar este trabalho, como instrumento de autoformação e de apoio; exploração de figuras manipuláveis, para verificar as fórmulas de definição e regras apresentadas; como lista de tarefas que são propostas, podendo encontrar também um breve histórico sobre o desenvolvimento da trigonometria; além de sua aplicabilidade no cotidiano.

Apresentamos atividades a serem desenvolvidas com o software “Cabri-Géomètre”, para que através do movimento o aluno possa tirar conclusões.

Esperamos que após o desenvolvimento dessas atividades, a utilização das fórmulas trigonométricas no triângulo retângulo fique clara, de forma a evitar a mecanização das mesmas.

2. Um pouco da história

Embora a origem da Trigonometria é incerta, sabe-se que é anterior a era Cristã.

Os egípcios e os babilônios usavam as relações existentes entre os lados e ângulos dos triângulos para resolver problemas ligados a resolução de situações de medição de terrenos ou determinação de medidas sobre a superfície da terra. Mas foi o fascínio pelos movimentos dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria.

O famoso astrônomo grego, o conhecido “pai da trigonometria”, Hiparco de Nicéia, por volta de 180 a 125 a.C., construiu a primeira tabela trigonométrica, provavelmente para usá-la em seus estudos de astronomia, pois facilitaria o cálculo de distâncias inacessíveis.

Hiparco utilizou a trigonometria para fazer medições, prever eclipses, fazer calendários e na navegação.

Mas foi no século II da era Cristã, que Ptolomeu escreveu uma coleção de livros conhecida como “Amajesto”, que significa “o mais”, onde aparece uma tabela trigonométrica mais completa que a de Hiparco.

No século XVI, Viète, aplicou a trigonometria à resolução de problemas algébricos, estabelecendo assim resultados importantes.

Para a evolução da trigonometria até os dias de hoje, foram muitas as contribuições, como de Euler (século XVIII), que ao usar sistematicamente o círculo trigonométrico de raio um introduziu o conceito de seno, cosseno e de tangente como números ou razões ou coordenadas de pontos e as notações atualmente utilizadas.

A Trigonometria necessita da Aritmética para estabelecer as tabelas, da Álgebra para estabelecer fórmulas, e da Geometria, uma vez que a Trigonometria é considerada uma extensão da Geometria.

A palavra Trigonometria vem do grego TRI - três, GONO - ângulos e METRIEN - medida, significando Medidas de Triângulos, entretanto, estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo [1] [2].

3. Relações da Trigonometria com conhecimentos de outras áreas

Atualmente a trigonometria não se limita a estudar os triângulos. Encontramos aplicações na mecânica, eletricidade, acústica, música, astronomia, engenharia, medicina, enfim, em muitos outros campos da atividade humana.

Há métodos atuais de análise em medicina, onde são enviadas ondas ao coração, de forma que efetuem interações seletivas com os tecidos a observar.

Geodésia: estudo da forma e dimensão da Terra.

Método do momento elétrico para cálculo de linhas de transporte de energia elétrica: permite calcular com grande sensibilidade a potência de transporte de linhas, as perdas e a distância a que ela poderá ser transportada.

Estudo da intensidade luminosa: calcula-se a intensidade luminosa irradiada por uma fonte luminosa para uma determinada direção.

Instrumentos de medidas de ângulos: topografia, ciência náutica e cartografia.

Trigonometria nas teclas de um telefone digital. O som produzido pelas teclas de telefones digitais é a soma de dois tons dados por: $Y = \sin 2\pi L T$ e $Y = \sin 2\pi H T$, onde L e H são baixa e alta frequência respectivamente.

Numa pesquisa realizada em 1997, com engenheiros que atuam em empresas de grande porte da região da Serra Gaúcha, foi constatado que a trigonometria é o conceito de matemática básica mais utilizado por eles no seu cotidiano [1].

4. Trigonometria e suas aplicações

A trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas. Desde a antiguidade já se usava da trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns.

Algumas aplicações da trigonometria são:

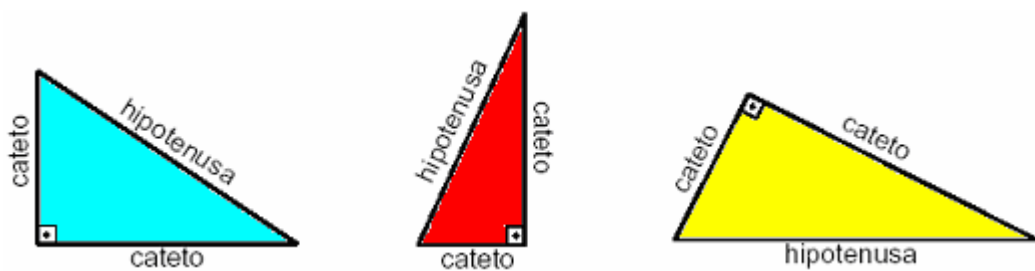
- Determinação da altura de um certo prédio;
- Os gregos determinaram a medida do raio de terra, por um processo muito simples;
- Seria impossível medir a distância da Terra à Lua, porém com a trigonometria se torna simples;
- Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos;

- Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a trigonometria ele demoraria anos para desenhar um mapa.

Tudo isto é possível calcular com o uso da trigonometria do triângulo retângulo [5].

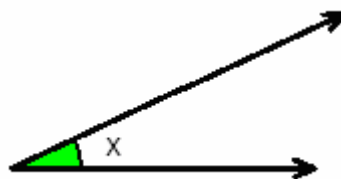
5. Trigonometria no triângulo retângulo

Triângulo retângulo é qualquer triângulo que possua um ângulo reto [4]. Por exemplo:

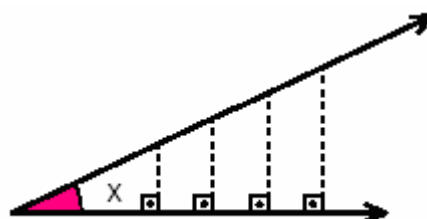


6. Construindo triângulos retângulos semelhantes

Dado um ângulo agudo qualquer. É possível desenhar um triângulo retângulo?



Sim, podemos desenhar, na verdade, uma infinidade de triângulos retângulos.



Para todos eles, um dos ângulos mede x . Então todos eles possuem os mesmos ângulos. Podemos concluir que: todos estes triângulos retângulos são semelhantes. Se são semelhantes, então seus lados são proporcionais.

Fixado um ângulo agudo, todos os triângulos retângulos, construídos com esse ângulo serão semelhantes e, portanto, terão lados proporcionais. Observe que há uma relação entre ângulos agudos e lados de um triângulo retângulo.

Precisamos verificar como podemos enunciar essa relação mais claramente, usando linguagem matemática [4].

Observe a figura 1:

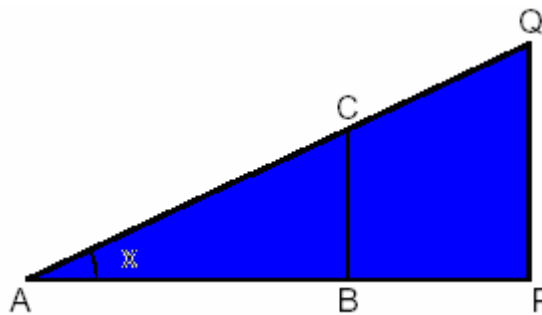


Figura 1

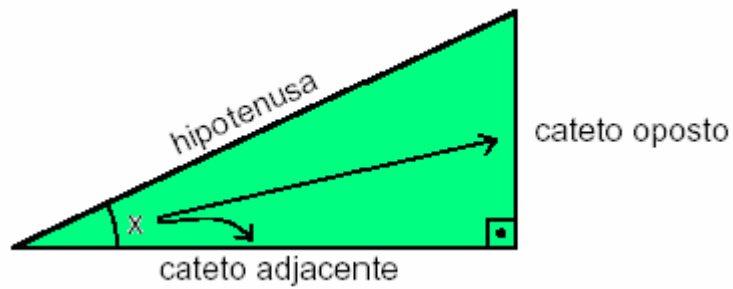
Os triângulos ABC e APQ são semelhantes. Como seus lados são proporcionais, podemos escrever.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ} \text{ ou } \frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{AQ} \text{ ou } \frac{BC}{AB} = \frac{PQ}{AP}.$$

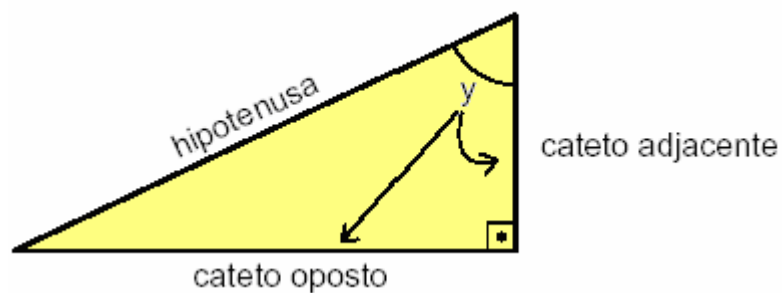
7. Relacionando lados e ângulos

Em todo triângulo retângulo, os lados são chamados hipotenusa (o maior lado) e catetos (lados perpendiculares). Em função do ângulo, diferenciamos a nomenclatura dos catetos.

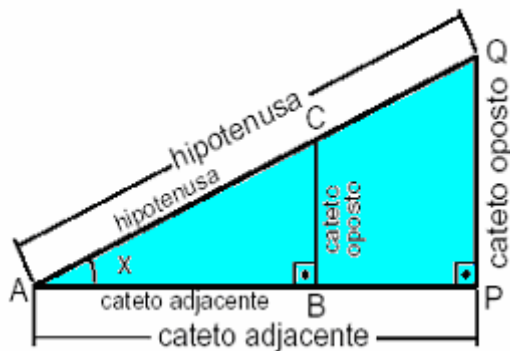
O cateto que fica “em frente” ao ângulo agudo que estamos utilizando chama-se cateto oposto, e o cateto que estão sobre um dos lados desse ângulo chama-se cateto adjacente [4].



Se o ângulo do problema for o outro ângulo agudo do triângulo, a nomenclatura oposta e adjacente troca de posição, pois depende do ângulo utilizado.



Vamos então, reescrever as proporções obtidas usando essa nomenclatura. Em relação ao ângulo x, temos:



$$\frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{AQ} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{PQ}{AP} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

8. Relações Trigonométricas

As relações que acabamos de generalizar são chamadas relações trigonométricas e recebem nomes especiais [4].

A primeira é chamada seno do ângulo x e escreve-se:

$$\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

A segunda é chamada cosseno do ângulo x e escreve-se:

$$\text{cos } x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

A última denomina-se tangente do ângulo x e escreve-se:

$$\text{tg } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

9. Fazendo Descobertas

Diante das dificuldades em introduzir os conceitos trigonométricos, sugerimos algumas atividades para que os alunos construam seu próprio conhecimento, visando a não mecanização dos mesmos.

9.1 Para introduzir o conceito de seno

Das atividades apresentadas abaixo esperamos que os seus alunos façam importantes descobertas das relações existentes entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo [5], [6].

Procedimento

Atividade 1

1- Construa um triângulo retângulo em que um dos ângulos meça 23° .

Qual a medida do cateto oposto ao ângulo de 23° ?

Qual a medida da hipotenusa?

Qual a razão entre a medida desse cateto e a medida da hipotenusa?

2- Construa outro triângulo retângulo em que um dos ângulos meça 23° , mas cujos lados sejam diferentes do primeiro.

Qual a medida do cateto oposto ao ângulo de 23° ?

Qual a medida da hipotenusa?

Qual a razão entre a medida desse cateto e a medida da hipotenusa?

Atividade 2

1- Construa agora um triângulo retângulo em que um dos ângulos meça 30° .

Qual a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° ?

Qual a medida da hipotenusa?

Qual a razão entre a medida desse cateto e a medida da hipotenusa?

2- Construa outro triângulo retângulo em que um dos ângulos meça 30° , mas cujos lados sejam diferentes do primeiro.

Qual a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° ?

Qual a medida da hipotenusa?

Qual a razão entre a medida desse cateto e a medida da hipotenusa?

Analisando os resultados das atividades acima, o que podemos concluir?

Para o professor: introduzir o conceito de seno. Se achar necessário leve os alunos a construir outros triângulos com ângulos diferentes.

Para refletir e responder:

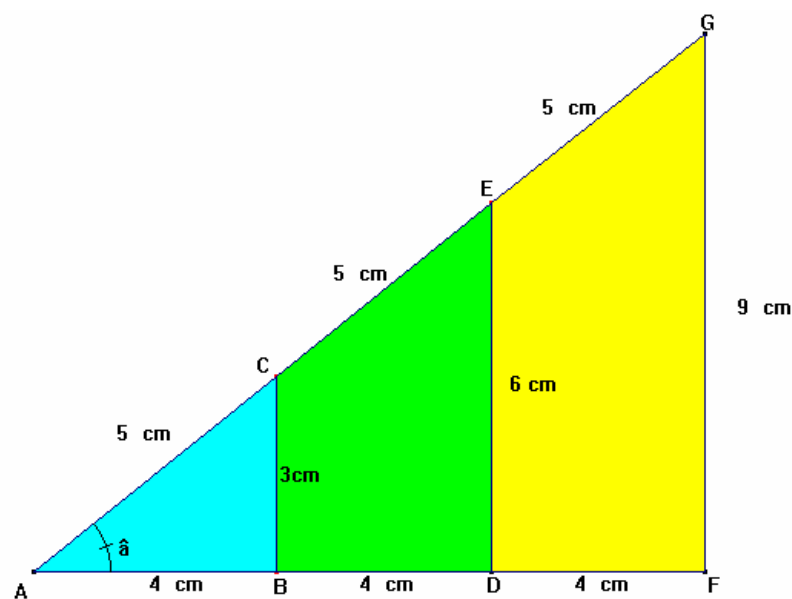
O valor do seno de um ângulo varia de acordo com as medidas dos lados do triângulo ou com as medidas dos ângulos?

9.2 Descobrindo seno, cosseno e tangente

Procedimento:

1º Passo

- Traçar em uma folha de sulfite um segmento A B de 4cm
- Na extremidade B, traçar uma perpendicular e marcar um segmento BC e 3 cm
- Ligar o ponto A ao ponto C
- Calcule através do Teorema de Pitágoras o segmento AC
- Marcar o ângulo $\hat{a}$
- Obtenha a razão BC/AC
- Prolongar o segmento AB por mais 4cm e marcar o ponto D
- Passando por D traçar uma perpendicular
- Prolongar o segmento AC até interceptar a Perpendicular marcando o ponto E
- Medir o segmento DE
- Obtenha a razão DE/AE
- Prolongar o segmento AD por mais 4cm e marcar o ponto F
- Passando por F traçar uma perpendicular
- Prolongar o segmento AE até interceptar a Perpendicular marcando o ponto G
- Medir o segmento FG
- Obtenha a razão FG/AG



Comparando as razões o que você observa?

(Professor) Concluir que são iguais e que esta razão é chamada seno de $\hat{a} = \sin \hat{a}$

2º Passo

- Obtenha as razões AB/AC , AD/AE , AF/AG , e compare-as.

(Professor) Concluir que são iguais e que esta razão é chamada cosseno de $\hat{a} = \cos \hat{a}$

3º Passo

- Obtenha as razões BC/AB , DE/AD , FG/AF , e compare-as.

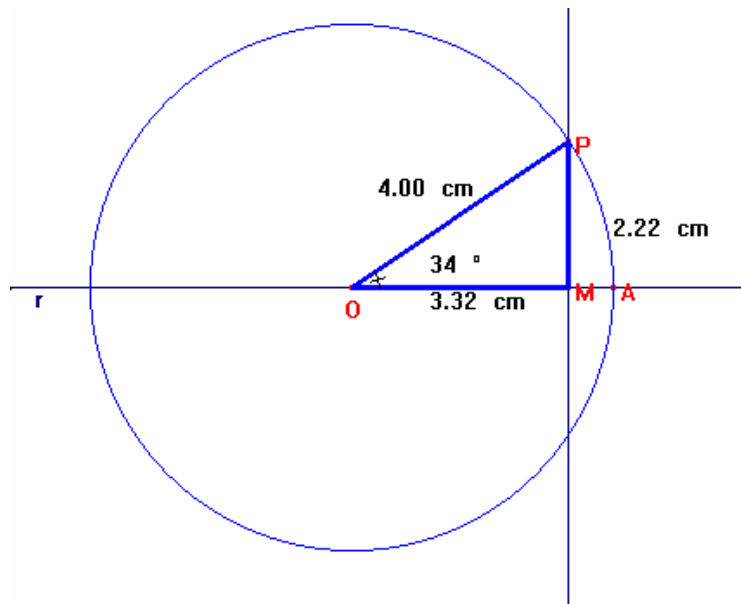
(Professor) Concluir que são iguais e que esta razão é chamada tangente de $\hat{a} = \tan \hat{a}$

10. Software “Cabri-Géomètre” e a “Trigonometria no Triângulo Retângulo”.

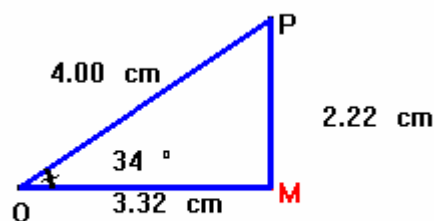
Ainda podemos abordar o tema de uma maneira mais atrativa e agradável, utilizando o software Cabri-Géomètre, onde através dos movimentos da figura e uso da calculadora o aluno poderá tirar conclusões em relação ao seno, cosseno e tangente de cada ângulo e confeccionar sua própria tabela trigonométrica.

Atividade 1: Descobrindo o seno e o cosseno e tangente de um ângulo agudo.

- Crie uma reta horizontal r
- Obtenha um ponto O sobre a reta.
- Trace uma perpendicular a r pelo ponto O .
- Obtenha um ponto A na reta r a direita de O .
- Crie uma circunferência de raio AO
- Obtenha um ponto P na circunferência e no 1º quadrante.
- Trace uma reta perpendicular a r pelo ponto P . Nomeie de M a intersecção das duas retas.
- Crie os segmentos OP , OM e MP e meça-os.
- Marque o ângulo $\hat{POM}$ e meça-o.

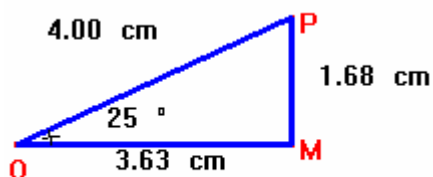


- Vá ao ícone esconder/ mostrar e esconda as retas, a circunferência deixando a apenas o triângulo e as medidas.



- Com o auxílio da calculadora, calcule o seno, cosseno e tangente do ângulo que você construiu.

$\text{seno } 25^\circ = 0.419$
 $\text{cosseno } 25^\circ = 0.908$
 $\text{tangente } 25^\circ = 0.462$



Atenção: ao usar a calculadora tenha o seguinte procedimento:

- Ative a calculadora
- Clique nos valores encontrados no desenho, para determinar o seno.
- Arraste o resultado encontrado para a tela.
- Tenha o mesmo procedimento para calcular o cosseno e a tangente.

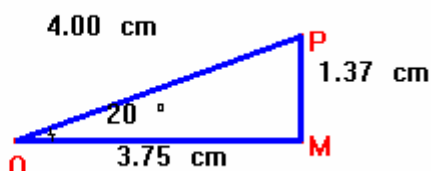
Atividade 2: construção da tabela de razões trigonométricas

- Construa uma tabela
- No desenho que você construiu movimente o ponto P e observe os valores do seno, cosseno e tangente.
- O que você observa?
- Movimente o ponto P a fim de encontrar os ângulos desejados.

$$\text{seno } 20^\circ = 0.343$$

$$\text{cosseno } 20^\circ = 0.939$$

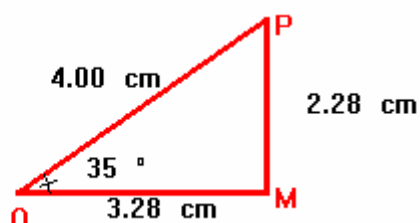
$$\text{tangente } 20^\circ = 0.366$$



$$\text{seno } 35^\circ = 0.571$$

$$\text{cosseno } 35^\circ = 0.821$$

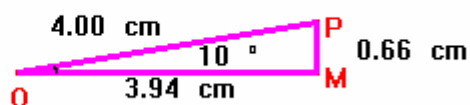
$$\text{tangente } 35^\circ = 0.696$$



$$\text{seno } 10^\circ = 0.165$$

$$\text{cosseno } 10^\circ = 0.986$$

$$\text{tangente } 10^\circ = 0.168$$



- Anote os valores do seno, cosseno e tangente de cada ângulo na sua tabela.

ÂNGULO	SENO	COSSENO	TANGENTE
5°	0,09	1,00	0,09
20°	0,34	0,94	0,36
30°	0,5	0,86	0,58
31°	0,51	0,85	0,60
35°	0,57	0,82	0,7
45°	0,70	0,70	1
60°	0,86	0,5	1,73
80°	0,98	1,17	5,67

11. Atividade Extra-Classe

A atividade extra-classe, apresentada em 11.1, faz com que o aluno empregue a teoria na prática. Fazendo estimativas através de uma situação problema [6].

Atividade: Medindo a largura do rio

Forme grupo com mais de dois alunos.

O rio pode ser a rua ou o pátio de sua escola se preferir.

Mas atenção: para medir a largura do rio não vale atravessá-lo.

Procedimento:

- Marque um ponto imaginário no lado oposto da rua ou do pátio que está representando o rio.
- Marque dois pontos A e B, no chão. Ao fazê-los deve-se conseguir um ângulo reto em A. Com mira (transferidor com canudinho) mede-se o ângulo B. Com a fita métrica mede-se a distância AB.
- Com esses dados e usando a trigonometria no triângulo retângulo, calcula-se a distância do rio.
- Depois, se quiser conferir, meça a largura do rio diretamente com a trena.
- Faça um relatório do qual devem constar uns desenhos esquemáticos da situação, a descrição do processo, os dados obtidos, os cálculos e o resultado.

11.1 Atividade desenvolvida: Medindo a largura da rua

Atividade desenvolvida por um grupo de seis alunos da 1ª série do Ensino Médio, da E.E. Juventino Nogueira Ramos, na cidade de Guaraçai, S.P., coordenada por uma equipe de professoras de Matemática como parte de um projeto do curso “Teia do Saber- 2004”.

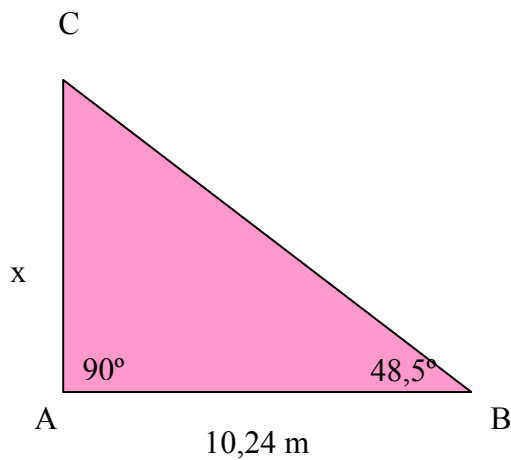
O objetivo da atividade é uma proposta diferente para dar aulas mais interessantes, com o intuito de mostrar que com apenas uma trena e um instrumento chamado teodolito (feito de canudinho e transferidor), é possível medir a largura de uma rua, de um pátio, de um rio,...; e utilizando-se da tabela e das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) os alunos possam perceber como determinados profissionais usam-se desses conceitos em benefícios para a humanidade.

Desenvolvimento da atividade

Dois alunos foram posicionados num mesmo lado da rua, alinhados, considerando um deles o vértice A (ângulo reto em A) e o outro o vértice B. Com o teodolito o aluno do vértice B mediu o ângulo de abertura entre ele e um outro aluno que foi posicionado no lado oposto da rua (vértice C), perpendicular em relação ao vértice A; formando assim, um triângulo retângulo.

Obtiveram as seguintes medidas, segundo o ângulo de observação:

Primeiro experimento:

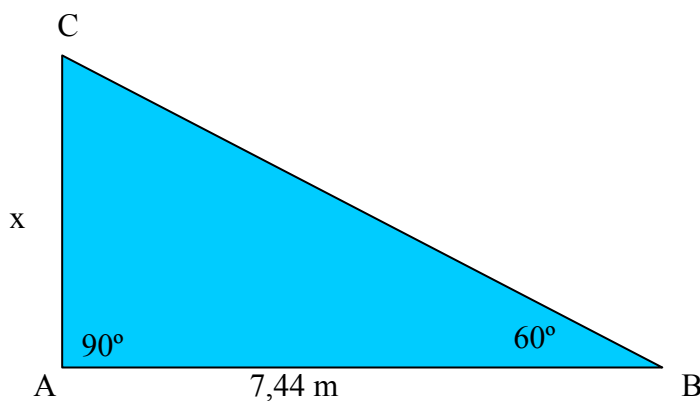


$$\operatorname{tg} 48,5^{\circ} = \frac{x}{10,24}$$

$$1,130 = \frac{x}{10,24}$$

$$x = 11,57 \text{ m}$$

Segundo experimento:

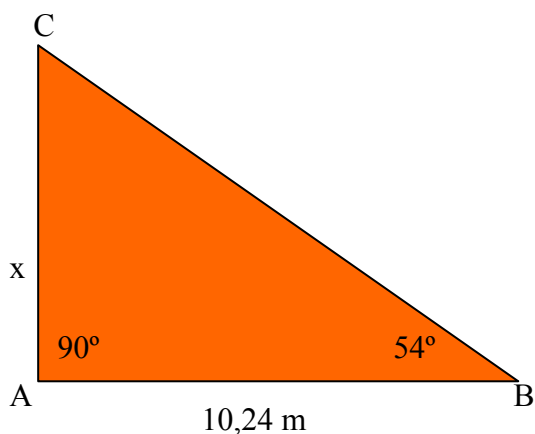


$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{x}{7,44}$$

$$1,732 = \frac{x}{7,44}$$

$$x = 13,88 \text{ m}$$

Terceiro experimento:



$$\operatorname{tg} 54^{\circ} = \frac{x}{10,24}$$

$$1,376 = \frac{x}{10,24}$$

$$x = 14,09$$

Conclusão: Os alunos notaram que, a razão trigonométrica “tangente” solucionava o que eles estavam procurando “a largura da rua”.

Para confirmar os cálculos efetuados os alunos com a trena mediram a largura da rua, registrando o resultado de 14,47 m. E diante dos resultados apresentados, o terceiro experimento atingiu uma melhor aproximação da largura da rua.

Através dessa experiência observou-se uma grande expectativa dos alunos diante dos resultados encontrados e do resultado real.

Fotos dos alunos realizando os experimentos



Figura 2: Alunos utilizando o teodolito (canudinho) para medir o ângulo do “triângulo imaginário” e conseqüentemente a largura da rua sem atravessá-la.



Figura 3: Alunos medindo a largura do ponto A ao ponto B.

12. Aplicações das relações trigonométricas

A seguir, são apresentados alguns problemas ilustrados para serem analisados e resolvidos aplicando os conhecimentos adquiridos de trigonometria [1], [2], [3].

Problemas:

1. Uma cegonha tem o ninho num poste de alta tensão com 20 metros de altura (onde foi colocada uma placa especial para a cegonha não correr nenhum risco). Vê um alimento no chão e voa em direção a ele numa inclinação de 35° como mostra a figura 4.

Qual a extensão do voo da ave?

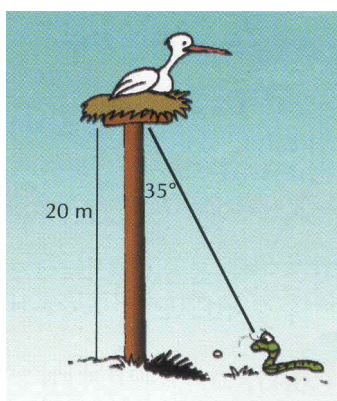
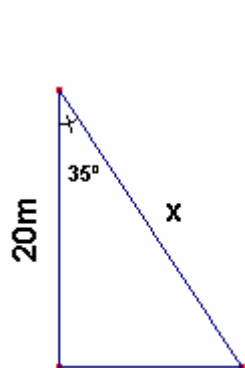


Figura 4

Solução:

No desenho, observamos um triângulo retângulo conforme mostra a figura 5.



Temos:

altura do poste (cateto adjacente) = 20 m

ângulo de inclinação do vôo até o chão = 35 °

extensão do vôo da árvore (hipotenusa) = x

$$\text{Sabemos que } \cos 35^\circ = \frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip}} \Rightarrow 0,82 = \frac{20}{x} \Rightarrow 0,82x = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cong 24,4\text{m}$$

Figura 5

Logo a extensão do vôo é de aproximadamente 24,4 metros.

2. Qual o ângulo de elevação da Lua quando numa noite de lua cheia, a uma certa hora, a sombra de uma pessoa com 1,80 m mede 3 metros? Observe a figura 6.

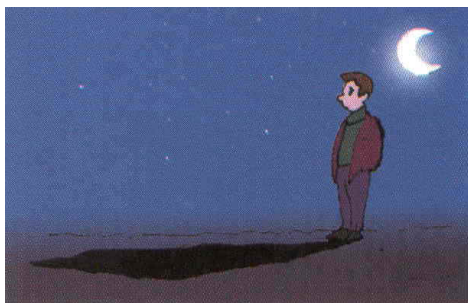


Figura 6

Solução:

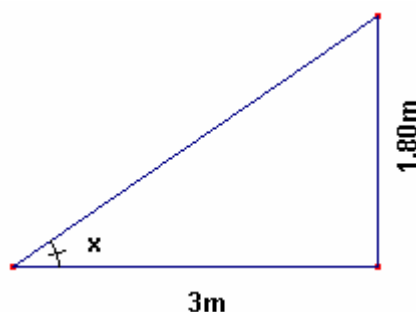
No desenho, observamos um triângulo retângulo conforme mostra a figura 7.

Temos:

altura de uma pessoa (cateto oposto) = 1,80 m

ângulo de elevação da Lua = x

comprimento da sombra (cateto adjacente) = 3 m



$$\text{Sabemos que } \text{tg } x = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.adj.}} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{1,80}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{tg } x = 0,6 \Rightarrow x = \text{arctg } 0,6 \Rightarrow x \cong 31^\circ$$

Portanto o ângulo de elevação da lua é de aproximadamente 31°.

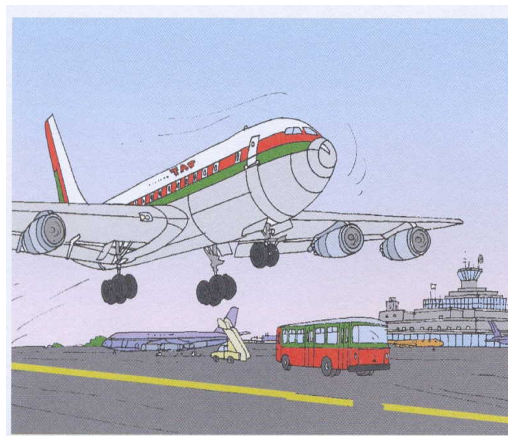


Figura 8

Você observou um avião a levantar vôo? Quando o avião levanta vôo, conforme a figura 8, faz um ângulo de 20° com a linha do solo. Em 5 segundos percorre 400m. Que altura atinge ao fim deste tempo?

Solução:

No desenho, observamos um triângulo retângulo conforme mostra a figura 9.

Temos:

distância percorrida pelo avião em 5 segundos (hipotenusa) = 400 m

ângulo formado ao levantar vôo = 20°

altura do avião aos 5 segundos (cateto oposto) = X

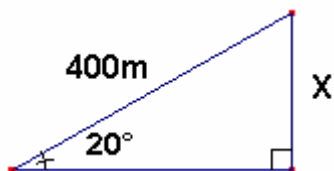


Figura 9

Sabemos que $\sin 20^\circ = \frac{X}{400}$ e que $\sin 20^\circ = 0,342$

(consultar tabela de razões trigonométricas)

Então: $0,342 = \frac{X}{400}$, logo $X = 136,8$

Portanto, a altura do avião ao fim dos 5 segundos é de aproximadamente 136,80 metros.

4 - A Palmeira e o Coco

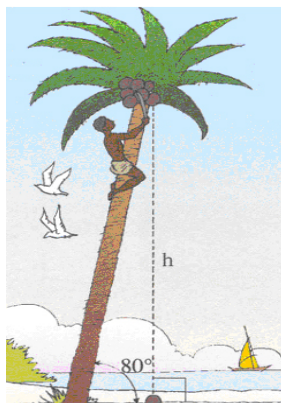


Figura 10

O coco cai a 1,5m de distância da palmeira, como mostra a figura 10. A que altura se encontrava o coco antes de cair?

Solução:

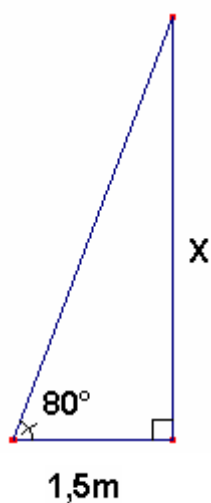


Figura 11

No desenho, observamos um triângulo retângulo conforme mostra a figura 11.

Temos:

distância da palmeira (cateto adjacente) = 1,5 m

ângulo formado com o coqueiro e o chão = 80°

altura do coco antes de cair (cateto oposto) = X

Sabemos que $\text{tg } 80^\circ = \frac{X}{1,5}$ e que $\text{tg } 80^\circ = 5,671$ (consultar tabela de razões trigonométricas)

Então: $5,671 = \frac{X}{1,5}$, logo $X = 8,50$

Portanto, o coco se encontrava a aproximadamente 8,50 metros do chão antes de cair.

5. O Papagaio:

O vento conserva o fio esticado e fazendo 60° com a horizontal. Quando se desenrolaram 70 m de fio a que altura estava o papagaio?

NOTA: As mãos do rapaz estão a 1,80 metros do chão, aproximadamente. Observe a figura 12.

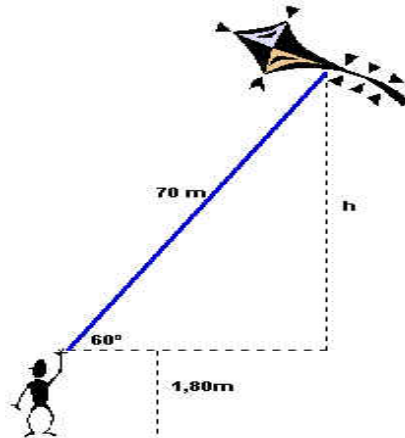


Figura 12

Solução:

No desenho, observamos um triângulo retângulo conforme mostra a figura 13.

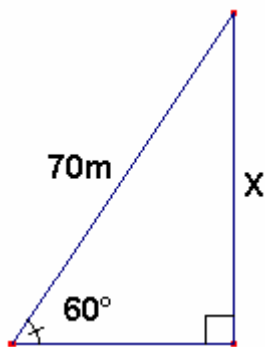


Figura 13

Temos:

medida do fio (hipotenusa) = 70 m

ângulo do fio com a horizontal = 60°

altura do papagaio sem considerar a altura do rapaz (cateto oposto) = X

Sabemos que $\sin 60^\circ = \frac{X}{70}$ e que $\sin 60^\circ = 0,866$

(consultar tabela de razões trigonométricas)

Então: $0,866 = \frac{X}{70}$, logo $X = 60,62$ m

Sabendo-se que, a altura do rapaz com a mão levantada é de 1,80 metros.

Concluimos então que o papagaio estava a 64,42 metros de altura quando se desenrolaram os 70 metros de fio.

6. O ângulo de elevação do pé de uma árvore, a 50 m da base de uma encosta, ao topo da encosta é de 60° , como mostra a figura 14. Que medida deve ter um cabo para ligar o pé da árvore ao topo da encosta?

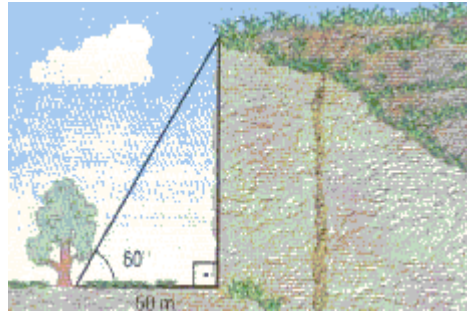


Figura 14

Solução:

No desenho, observamos um triângulo retângulo conforme mostra a figura 15.

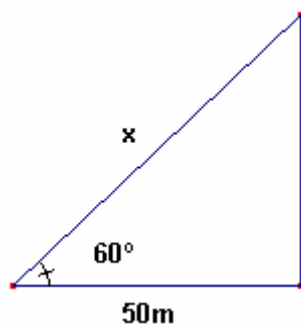


Figura 15

Temos:

distância da árvore a encosta (cateto adjacente) = 50m.

ângulo de visão do solo = 60°

distância do cabo(hipotenusa) = x

Sabemos que $\cos 60^\circ = \frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}} \Rightarrow 0,5 = \frac{50}{x} \Rightarrow x = \frac{50}{0,5}$
 $\Rightarrow x = 100\text{m}.$

Portanto a medida do cabo é de 100 metros.

7. Do alto da torre de uma plataforma marítima de petróleo, de 45 m de altura, o ângulo de depressão em relação à proa de um barco é de 60° , como mostra a figura 16. A que distância o barco está da plataforma?

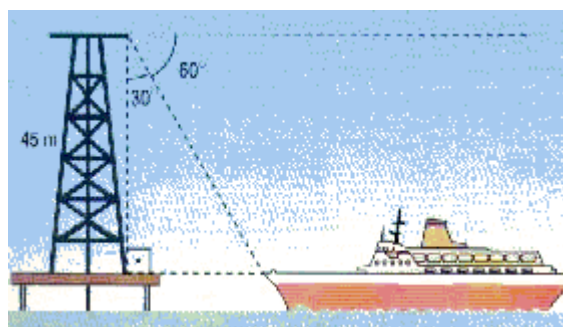


Figura 16

Solução:

No desenho, observamos um triângulo retângulo conforme mostra a figura 17:

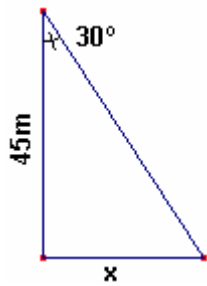


Figura 17

Temos:

altura da plataforma(cateto adjacente) = 45m

ângulo de depressão = 60°, então o ângulo adjacente ao outro cateto é de 30°

distância do barco à plataforma (cateto oposto) = x

$$\text{Sabemos que } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.adj.}} \Rightarrow 0,58 = \frac{x}{45} \Rightarrow x \cong 26\text{m}$$

Portanto a distância do barco até a plataforma é de aproximadamente 26 metros.

8. De um ponto A uma pessoa enxerga o topo de um obelisco, segundo um ângulo de 45°. Ao se aproximar 50m do obelisco ele passa a ver o topo sob um ângulo de 60°, como mostra a figura 18. Qual é a altura desse obelisco?

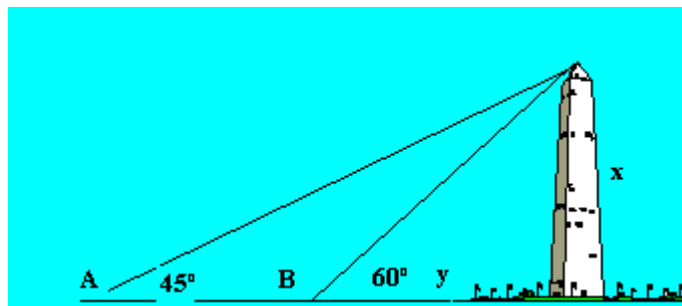


Figura 18

Solução:

No desenho, observamos três triângulos retângulos conforme mostra a figura 19:

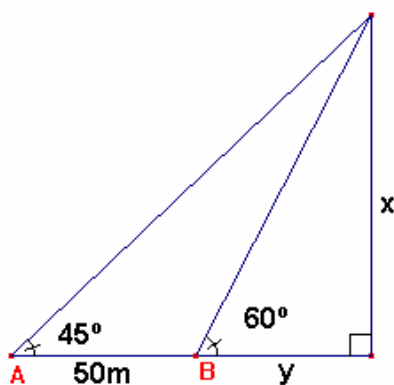


Figura 19

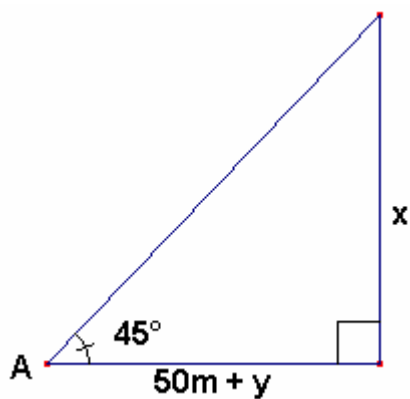
Temos:

ponto A - 1º ponto de observação, sob um ângulo de 45°

ponto B - 2º ponto de observação, sob um ângulo de 60°

y - distância do ponto atual (após andar 50m) ao pé do obelisco

x - altura do obelisco

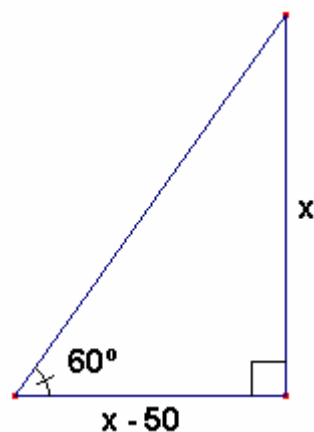
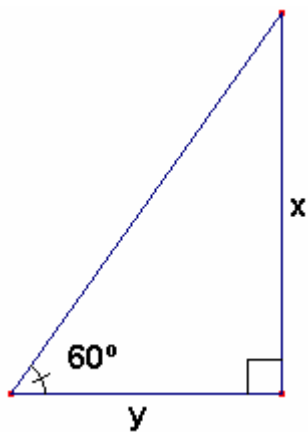


Temos que:

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{x}{50 + y} \text{ e } \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$$

$$\text{logo } 1 = \frac{x}{50 + y} \text{ ou } 50 + y = x, \text{ ou melhor } y = x - 50$$

Substituindo y por $x - 50$, temos:



$$\text{Logo } \operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{x}{x - 50} \text{ e } \operatorname{tg} 60^{\circ} = 1,732$$

$$\text{Então: } 1,732 = \frac{x}{x - 50}$$

Portanto, a altura do obelisco é de aproximadamente 118 metros.

9. Uma estação espacial que gira numa órbita estacionária afastada 600km da superfície da Terra avista um OVNI (objeto voador não identificado) numa direção perpendicular à linha imaginária de distância à Terra. Sabendo-se que a estação terrestre avista o mesmo objeto sob um ângulo de 30° desta linha imaginária, como mostra a figura 20, pergunta-se: a que distância o OVNI encontra-se da Terra?

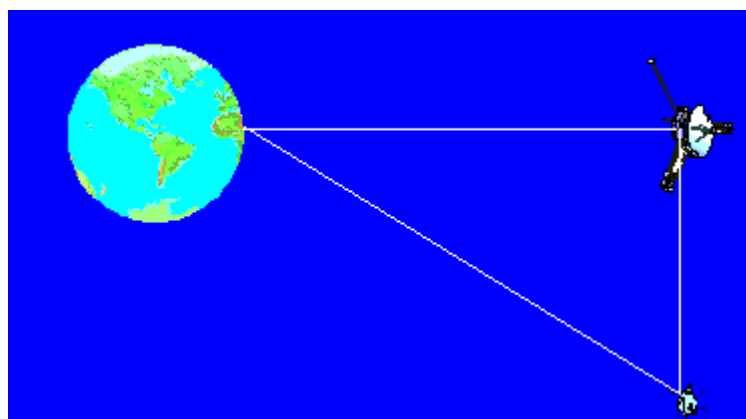


Figura 20

Solução:

No desenho, observamos um triângulo retângulo conforme mostra a figura 21:

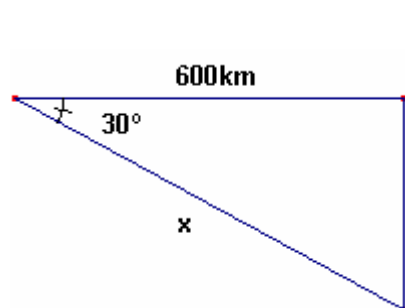


Figura 21

Temos:

distância da estação orbital à Terra (cateto adjacente) = 600 km

ângulo de visão da estação terrestre = 30°

distância do OVNI à Terra (hipotenusa) = X

$$\text{Sabemos que } \cos 30^\circ = \frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}} \Rightarrow 0,86 = \frac{600}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cong 698\text{km}$$

Portanto a distância da Terra até o OVNI é de aproximadamente 698 quilômetros.

10. Uma escada apoiada em uma parede, num ponto distante 4m do solo, forma com essa parede um ângulo de 60° , como mostra a figura 22. Qual é o comprimento da escada em m?

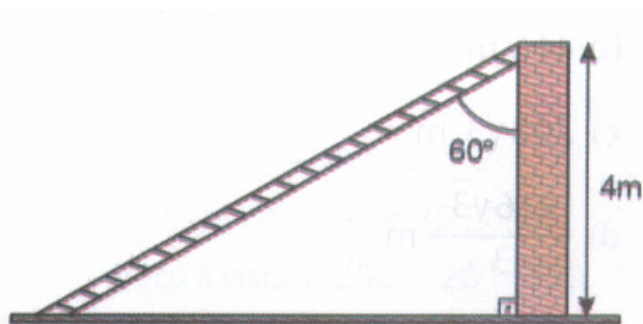
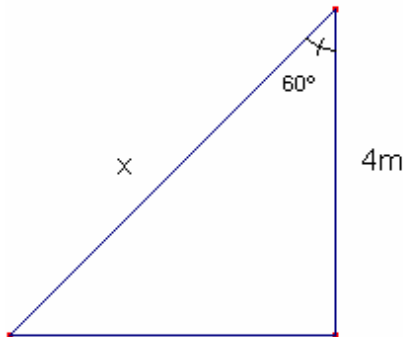


Figura 22

Solução:



Temos:

4m: distância do solo até o apoio da escada na parede.

60°: ângulo formado da escada com a parede.

X: o comprimento da escada (o que deve ser determinado).

Utilizando a relação trigonométrica, temos:

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x=8$$

Portanto a escada tem comprimento de 8m

11. Do topo de um farol de 80m de altura, avistou-se um barco à deriva segundo um ângulo de depressão de 30°. Observe a figura 23.

Deseja-se saber:

- Qual é o ângulo de elevação (α) que o tripulante deste barco avista o topo de farol neste mesmo instante?
- Qual é a distância x da base do farol ao barco, neste momento em que foi avistada?

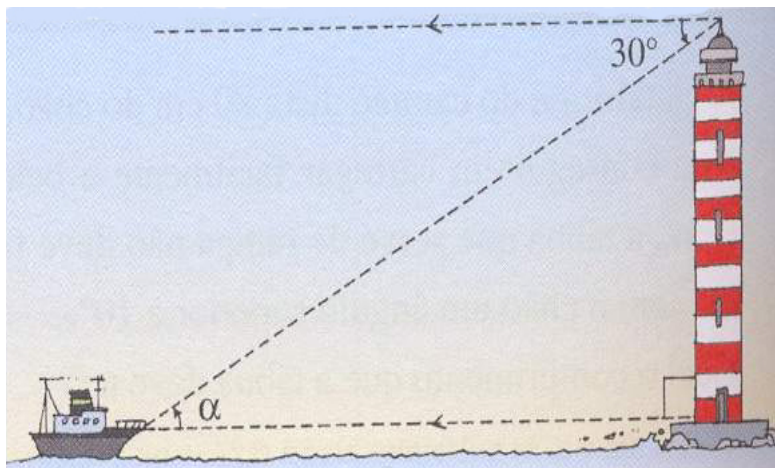
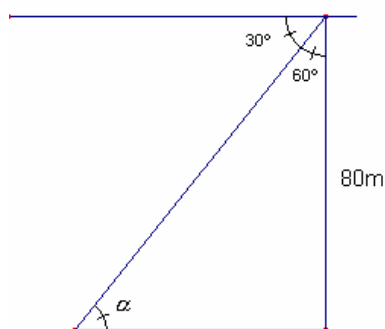


Figura 23

Solução:



Temos:

30°: ângulo de depressão, no momento em que avistou-se do farol um barco.

80m: altura do farol.

α : ângulo de elevação, no momento em que o tripulante do barco avistou o topo do farol (deve ser determinado).

x: distância do barco à base do farol (deve ser determinado).

a) Como sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° temos que:

Um ângulo desse triângulo é 60°, pois, $60^\circ + 30^\circ$ (ângulo de depressão) = 90° .

Como o outro ângulo desse triângulo corresponde ao ângulo formado pelo farol e a base desse farol, temos então um ângulo de 90° .

Assim, temos:

$$90^\circ + 60^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Portanto o ângulo que o tripulante avista o topo do farol é de 30° .

b) Utilizando a relação trigonométrica, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{80}{x} \Rightarrow \sqrt{3} x = 240 \Rightarrow x = \frac{240}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{240}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{240\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 80\sqrt{3} \text{ m.} \end{aligned}$$

Portanto a distância do barco ao farol é de aproximadamente $80\sqrt{3}$ m ou 138 m

13. Atividade desenvolvida com uma maquete

Para melhor representar alguns problemas relacionados no item 12, foi confeccionado uma maquete que permite ao aluno um contato maior com a situação problema através da visualização e manipulação.

Os problemas abordados na maquete estão ilustrados nas figuras 24, 25 e 26 que veremos a seguir:

Apresentação da maquete:

a) barco à deriva



Figura 24

b) altura da escada



Figura 25

c) decolagem do avião



Figura 26

As ilustrações apresentadas na maquete representam os problemas 3, 10 e 11 propostos e resolvidos na seção 12.

14. Conclusão

Ao desenvolver este trabalho foi grande a experiência adquirida na área da pesquisa.

Pesquisa esta direcionada a nós professores, levando sempre em conta a falta de tempo e oportunidade para realizarmos trabalhos tão significativos e importantes como este.

Podemos dizer que este trabalho constitui material de apoio para o professor, oferecendo-lhe sugestões de trabalho, comentários de atividades, indicação de recursos didáticos e de referências bibliográficas, sem tirar-lhe a liberdade de criação.

Todas as atividades desenvolvidas foram pesquisadas, selecionadas e preparadas de forma a permitir ao aluno a investigação, a reflexão, levando-o a compreensão e a aplicação das teorias aqui abordadas sobre a trigonometria sem a mera mecanização.

Utilizamos uma maquete para ilustrar alguns problemas de maneira que o aluno possa manipular e se envolver com a situação. Deixando a idéia para ser utilizada aos demais.

Considerando os obstáculos que serão encontrados para o desenvolvimento das atividades extra classe e com a confecção da maquete esperamos que este projeto seja útil e utilizado por você “professor”.

Referências bibliográficas

- [1] www.edu.fc.ul.pt
- [2] www.educar.sc.usp.br/licenciatura/1999/
- [3] www.mscabral.sites.uol.com.br/mauro/práticas/trigo.htm
- [4] www.bibvirt.futuro.usp.br
- [5] www.pessoal.sercomtel.com.br/matematica
- [6] Construindo conhecimento em matemática - editora moderna Bianchini e Miami.
- [7] Matemática Imenes e Lellis 8ª série – editora Scipione.
- [8] Descobrindo o Cabri Géomètre caderno de atividades
Profº Vinanzo Bongiovani .
Profº Dra. Tânia M.M. Campos.
Profº Dr. Saddy A . Almonlond (F T D).
- [9] Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Ensino Médio