Funções

Linear

Quadrática

Exponencial

Mitiko Nakamura Nagai

Cristiane Aparecida Stuqui Monzani

Cláudia San Miguel Marcello

Edmilson Teixeira Lopes

Celso Zini

Cristiano Pansanato(Estagiário)

Agradecimentos

Não podíamos deixar de agradecer a todos que contribuíram para a realização deste projeto em especial aos nossos professores e a direção e coordenação da E.E. Dona Noêmia Dias Perotti pelo apoio e orientação no desenvolvimento do mesmo, colocando a nossa disposição materiais e toda a estrutura da escola.

ÍNDICE

1 – Introdução..... 4

2 – Função..... 6

2.1 – Por que estudar função é importante?..... 6

2.2 – Representação da função..... 6

2.3 - Como desenhar geometricamente os números de um movimento?..... 7

3 – Função linear..... 8

3.1 – Função constante..... 10

3.2.1 – Gráfico no Sistema Cartesiano Ortogonal..... 14

3.2.2 – Proporcionalidade e função linear..... 14

3.3 – Função afim..... 16

4 – Função quadrática..... 20

5 – Função exponencial..... 23

6 – Conclusão..... 25

7 – Bibliografia..... 26

1 - INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática tem sido objeto de preocupação no Mundo todo e no Brasil não é diferente, com a agravante de não termos aqui uma tradição nesta área visto que produzimos pouquíssimos matemáticos.

As razões de tal insucesso se devem, muito provavelmente, a vários fatores como a nossa tendência ao imediatismo que nos leva a buscar respostas rápidas e para o momento, com o sacrifício da perseverança, uma exigência do aprendizado como um todo incluindo o de Matemática . Deve-se destacar o desenvolvimento tecnológico que afeta o mundo todo e estabelece , sem dúvida, uma gama de conseqüências inevitáveis, mas contornáveis com a mudança de objetivos e o estabelecimento de condições didáticas propícias a um contínuo aprendizado. Tal pensamento se alicerça no fato de que até algum tempo atrás se ensinava Matemática para o uso dos insubstituíveis, na época, lápis e papel, ou seja, preparava-se alguém para as necessidades do armazém de secos e molhados que não diferia muito das da caixa do banco ou das do escritório de engenharia. Nesse aspecto perdemos o "maior trunfo" do ensino de matemática – a necessidade do cálculo manual. As necessidades de conhecimentos matemáticos não mudaram em sua essência, mas se ampliaram com o desenvolvimento econômico e social. Por outro lado ampliaram-se os recursos para o cálculo, como a tão presente nos lares e tão distante das salas de aula e plenamente acessível a todos "maquininha de calcular".

O fato é que nossa Escola tem privilegiado o ensino de matemática baseado muito mais no treinamento para a "confecção" de algoritmos de modos repetitivos em detrimento do raciocínio lógico-matemático promovendo assim um distanciamento do aluno em função, talvez, da falta de perspectiva de uso prático do que lhe "ensinamos". É preciso mudar esse quadro e estabelecer uma nova estratégia que, tendo como ponto de partida o cotidiano do aluno, não perder de vista as necessidades gerais da vida moderna e recursos, além dos humanos, existentes, o que requer coragem para rever posições e quebrar paradigmas. O não gostar da Matemática tem sido uma marca entre alunos e, em muitos casos se estabelece um círculo vicioso – não gostam porque não entendem e não entendem porque não gostam- e no confronto com outras áreas a Matemática surge como o vilão. O fato é que entender História ou Geografia, por exemplos deve ser tão difícil quanto entender Matemática. A forma de se avaliar pode ser a grande diferença, que, enquanto na matemática se cobra soluções para problemas inéditos, algumas áreas exigem que o aluno retorne exatamente o que ele leu. É justamente na formação de recursos humanos que a Matemática, integrada as mais diversas áreas do conhecimento humano, assume o seu maior papel, pois o maior recurso é, pelo menos ainda, o humano. E vamos além, na busca de se formar o cidadão e qualificá-lo para o trabalho, como consta na Constituição Federal, em seu artigo 205 e nos que dele derivam, a Matemática exerce papel preponderante pois, de algum modo, é a alavanca para o progresso de outras áreas como Economia, Astronomia, etc.

Problemas enfrentados como a displicência dos alunos e a alta dependência que eles, regra geral, tem do professor, revelam a dificuldade de leitura e interpretação de textos e que, por sua vez, se configura como a maior habilidade a se conseguir. Há também a dificuldade que os alunos tem de trabalhar em grupos – reflexo do individualismo- e a não disposição em partilhar os trabalhos. Um aspecto a ser considerado é a satisfação que eles têm com a simples resposta, sem nenhuma indagação de como se chegou a ela. Cabe a nós professores, cremos, o papel de

principal agente provocador das mudanças que se fazem necessárias. Mudanças que podem estar num modelo de ensino de Matemática que considere a Educação como um projeto social de longo prazo, que deve atingir também as primeiras séries e a pré-escola, buscando colocar o aluno como co-responsável pelo seu próprio aprendizado e descaracterizar a disciplina, de que tanto reclamamos hoje, como uma imposição do professor e da Escola e ser vista sim, como uma necessidade do coletivo. Para isso, o envolvimento da família e da sociedade se faz necessário e se traduz como o alicerce da nova Escola cujo principal papel não deve ser levar o aluno a algum lugar e, sim, ensiná-lo a andar.

Tais considerações não esgotam o assunto "como ensinar matemática", por sua necessária dinâmica, mas significa uma preocupação com o problema e uma tentativa de indicar soluções.

Abordaremos nesse trabalho as funções lineares, quadráticas e exponenciais que compõem um importante capítulo da Matemática, com inúmeras aplicações no cotidiano cujo entendimento requer conhecimentos prévios onde se destacam os de Geometria e Álgebra, que não raro, no ensino da matemática são deixados para um segundo plano.

2 - FUNÇÃO

É possível estar em dois lugares ao mesmo tempo?

Não, não é possível. A idéia de função originou-se exatamente na resposta matemática a esta pergunta e se desenvolveu com os estudos do italiano Galileo Galileu, no final do século XVI, a respeito do movimento dos corpos. Em qualquer movimento – seja de uma pedra que cai, de uma nave espacial, de um cavalo no campo – ocorre uma relação especial entre dois conjuntos numéricos: os de tempo e espaço.

A cada instante do primeiro conjunto vai corresponder uma, e somente uma, posição de um determinado corpo em movimento. A partir desta idéia, o conceito de função foi sendo aplicado a todos os movimentos numéricos em que esta relação especial acontece.

Na natureza, muitos movimentos obedecem a uma função ou, se encaixam nessa idéia. Uma pessoa, por exemplo, que com o passar do tempo tem o seu tamanho modificado e em nenhum instante terá duas,ou mais, alturas diferentes.

2.1- Por que estudar função é importante?

A idéia de função, comum a vários ramos da Matemática, é fundamental no cálculo e muito importante neste nosso mundo em transformação, pelas suas aplicações. Senão, vejamos:

* Quando um carro se move ao longo de seu caminho, em velocidade constante, a distância que percorre é dada em função do tempo consumido.
* A área de um terreno é dada em função das suas dimensões.
* O preço que se paga para enviar uma carta é dado em função do seu peso, isto é, o valor do selo a ser colocado na carta depende do peso da mesma.
* O comprimento de uma barra de ferro, quando aquecida, é dado em função da temperatura, pois o ferro se dilata quando aquecido.
* O número de jogos de um campeonato em turno e returno é dado em função do número de clubes participantes.
* A necessidade de oxigênio de um astronauta é dada em função do esforço físico.
* O rendimento mensal das cadernetas de poupança é dado em função da inflação.
* O reajuste salarial de um trabalhador é dado em função do índice IPC fornecido pelo governo.
* O imposto de renda retido na fonte é dado em função da renda líquido de uma pessoa.

2.2 - Representação da função

Quando o homem percebeu que na natureza tudo se transforma e se move, a representação matemática do movimento se tornou um problema para ser resolvido pelos matemáticos. Enquanto alguns procuravam desenvolver a representação numérica e algébrica, outros buscaram a representação geométrica. Entre os últimos destacam-se o monge francês Nicole Oresme (1323 a 1382), René Descartes (1596 a 1650) e Pierre de Fermat (1601 a 1665). Esses estudiosos concluíram que uma função é a correspondência entre dois conjuntos numéricos. Outras importantes contribuições foram dadas por Leibniz (1646 a 1716), que foi quem primeiro usou a palavra Função; Jean Bernoulli (1667 a 1748), que foi quem primeiro usou notações de x; Leonhard Euler (1707 a 1783), foi com quem a idéia de função tornou-se fundamental no estudo dos processos infinitos. Em 1837 Lejeune Dirichlet deu uma definição mais geral de

função e mais tarde Lagrange desenvolveu a teoria das funções de uma variável real. Hoje, fazemos uso da notação $f_{(x)} = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + k$, como exemplo, para as funções polinomiais.

2.3 - Como desenhar geometricamente os números de um movimento?

Estudiosos, em especial René Descartes, concluíram que com essas funções formam-se pares ordenados que se associam a pontos do plano onde previamente se determinou dois eixos perpendiculares, um horizontal, chamado "eixo das abscissas" e outro vertical, chamado de "eixo das ordenadas". Tomando-se um elemento de um conjunto (domínio) que se associa a um único elemento de outro conjunto (imagem) forma-se um "par ordenado", comunentemente representado entre parênteses onde aparece em primeira posição o elemento do domínio (abscissa) e após o elemento do conjunto imagem (ordenada). Qualquer par **(x,y)** pertence a este plano, onde **x** é a projeção ortogonal deste sobre o eixo horizontal (também chamado eixo das abscissas) e **y** é a projeção ortogonal deste ponto sobre o eixo vertical (também chamado de eixo das

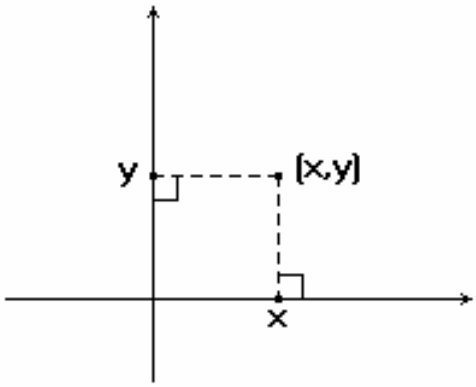


Fig. 1

ordenadas) conforme mostra a fig. 1.

Associando todos os pares formados na função a respectivos pontos do plano, obtemos a representação gráfica da função.

Os gráficos, de maneira geral, permitem "visualizar" o global que em muitos momentos facilita a análise de uma situação, como por exemplo, a inflação de um período. Não é diferente com gráfico da função e, por isso, faremos uso deste recurso par analisar o comportamento das funções a serem estudadas. As funções podem ser classificadas segundo o "comportamento" de seu movimento. Aqui faremos um estudo das funções lineares, quadráticas e exponenciais.

3 – FUNÇÃO LINEAR

Neste trabalho estaremos definindo função linear como sendo função de uma ou mais variáveis cuja expressão analítica é um polinômio do primeiro grau em relação a essas variáveis, como consta no Grande Dicionário Enciclopédico Rideel editado em 1980 e, estudaremos essas funções com uma ou duas variáveis

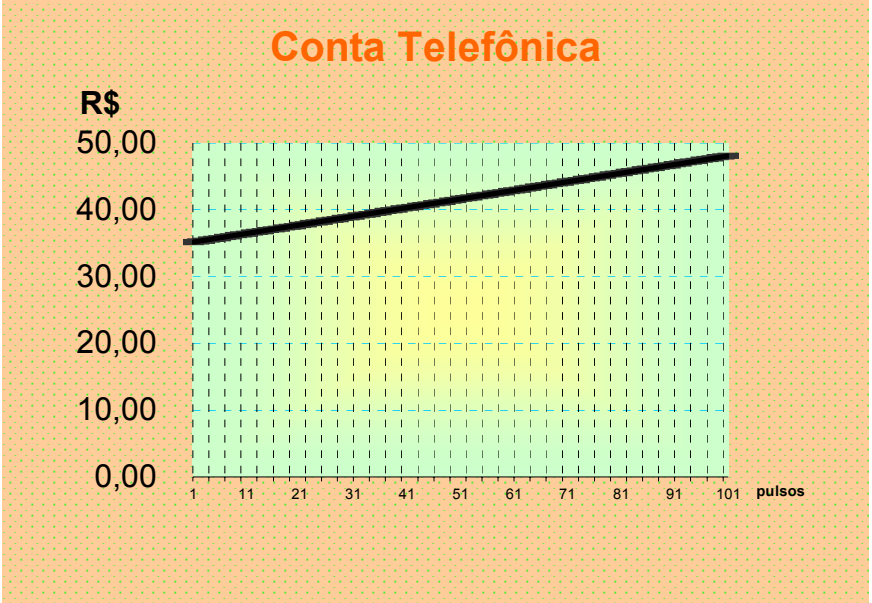
Observando uma conta telefônica de uma residência, o valor total a ser pago é calculado da seguinte maneira:

● A assinatura da linha telefônica dá direito a um certo número de pulsos que custa R$ R$ 35,12. Passando desse número, o valor das ligações (pulsos) excedentes é calculado multiplicando-se o numero de pulsos extras pelo valor de cada pulso, que é de R$ 0,13.

● Em seguida, esse valor é acrescentado ao valor da assinatura e obtemos o valor total da conta.

A fórmula matemática que possibilita o cálculo dessa conta é y = 0,13x + 35,12, onde x é o número de pulsos excedentes e y o valor da conta.

pulsos	R$
0	35,12
10	36,42
20	37,72
30	39,02
40	40,32
50	41,62
60	42,92
70	44,22
80	45,52
90	46,82
100	48,12



Uma função **f** cujos valores são dados por uma fórmula $\mathbf{f}_{(x)} = a\mathbf{x} + b$, onde **a** e **b** são números reais e $a \neq 0$, chama-se função linear ou polinomial do 1º grau. Muito provavelmente o termo "linear" se deve a forma que a representação gráfica de seu conjunto solução assume – a de uma reta.

Com isto se estabelece a representação gráfica de um movimento muito simples, aquele que apresenta uma variação constante. Com as funções lineares, resolvem-se facilmente muitos problemas da Matemática e da Física, que podem ser visualizados graficamente.

Com isto se estabelece a representação gráfica de um movimento muito simples, aquele que apresenta uma variação constante. Com as funções lineares, resolvem-se facilmente muitos problemas da Matemática e da Física, que podem ser visualizados graficamente. Veja a representação gráfica da função y = 2x + 3 na fig. 2.

x	y
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9

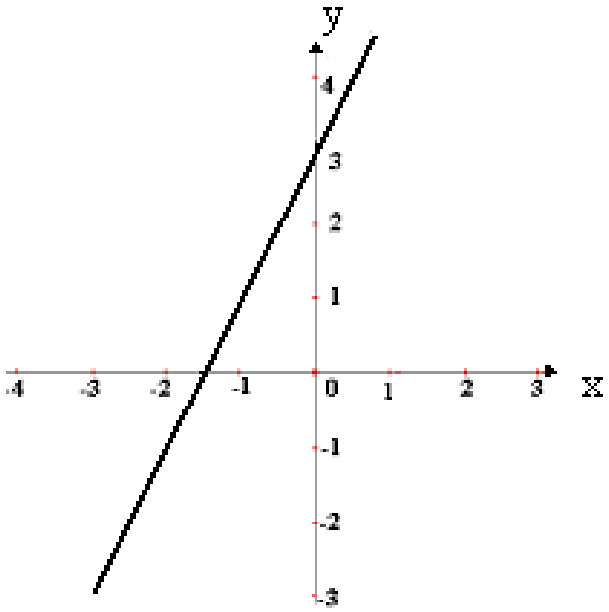


Fig. 2

Na função linear algébrica $f_{(x)} = \mathbf{a}x + b$, o coeficiente **a** determina a inclinação do gráfico (reta) em relação aos eixos. Pode-se ver isso na fig. 3:

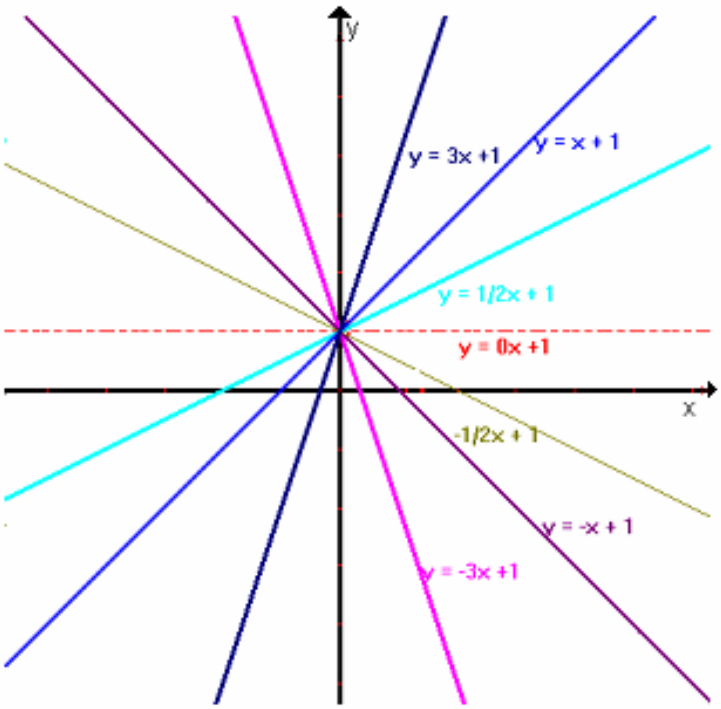


fig. 3

Nota-se que essa função é crescente quando **a** é positivo e decrescente quanto **a** é negativo. Quando **a** é igual a zero a imagem se concentra num único ponto.

O coeficiente **b**, também chamado de termo independente ou coeficiente de translação, desloca o gráfico sobre o plano sem alterar a sua inclinação. Veja na fig. 4:

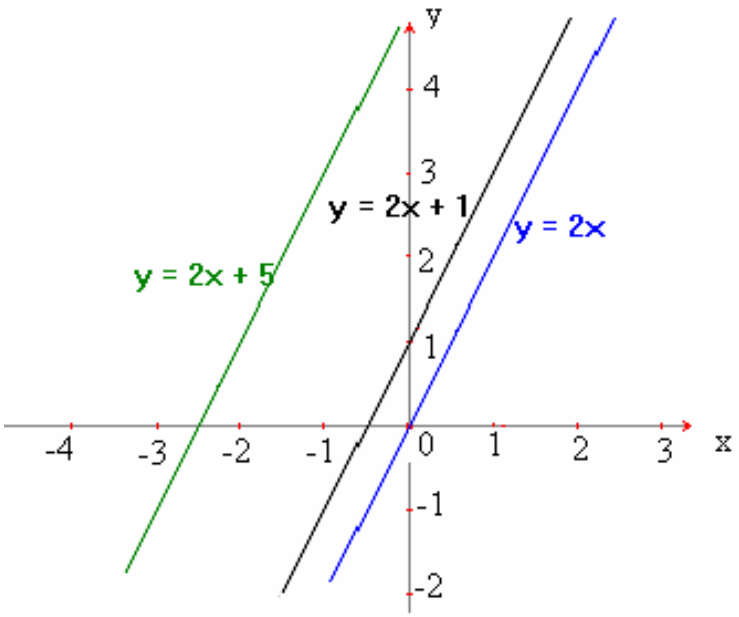


fig. 4

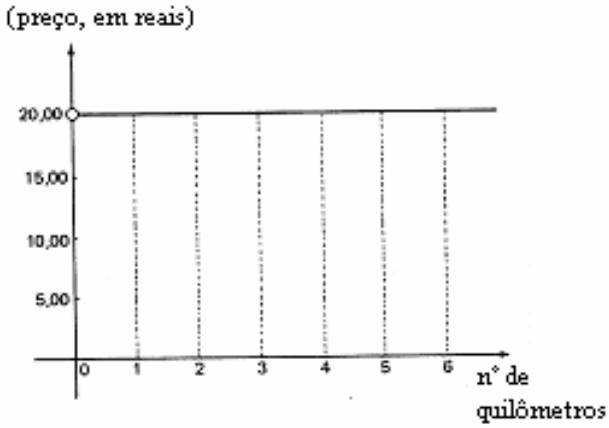
3.1 – Função Constante

Como o observado na fig. 3 que quando **a** = 0, o valor de y é constante e representa a função linear com apenas uma variável, e a chamaremos de **função constante**.

Como exemplos consideremos as seguintes situações:

1) Numa pequena cidade do interior, o preço de uma corrida de táxi é igual a R$ 20,00, independentemente da distância percorrida dentro do perímetro urbano. Vamos ilustrar o fato pelo seguinte gráfico:

N.º de km	Preço
1	20,00
2	20,00
3	20,00
4	20,00

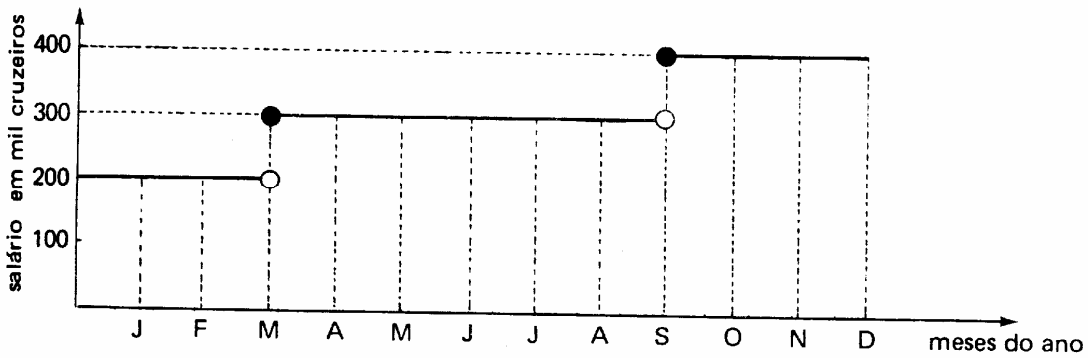


Esta situação também é um exemplo de **função constante**, pois o preço permanece constante, independente do número de quilômetros percorridos no perímetro urbano. Comparando com a função algébrica y = ax + b, esse caso apresenta a = 0.

Então, sendo y o preço da corrida e x o número de km rodados, essa função constante pode ser indicada por:

$$y = 20{,}00 \text{ ou } f(x) = 20{,}00$$

2) De acordo com a lei salarial em vigor em 1985, todo trabalhador tinha o seu salário reajustado de 6 em 6 meses. Numa determinada firma esse reajuste era feito em março e em setembro. Uma pessoa que trabalhava nessa firma tinha um salário de Cr$ 200 000; a partir de 1º de março, teve o seu salário reajustado para Cr$ 300 000 e, a partir de 1º de setembro, para Cr$ 400 000. Nestas condições, vamos ilustrar o fato pelo gráfico:



Observamos que, no intervalo de 1º de março a 31 de agosto, o salário dessa pessoa é constante, independente do mês.

Então, nesse intervalo de tempo, o salário dessa pessoa pode ser indicado por:

$$y = 300000 \text{ ou } f(x) = 300000$$

Observação:

Este problema está baseado numa lei salarial que prevê reajustes anuais de salário. O objetivo desse problema é mostrar a aplicação da função constante definida em diversos intervalos.

DEFINIÇÃO: Sendo c um número real qualquer, denomina-se função constante toda função $f : R \rightarrow R$ definida por $f(x) = c$, para todo x real.

Exemplos: $\begin{cases} f(x) = 20{,}00 & f(x) = 2 \\ f(x) = 300000 & f(x) = -\sqrt{3} \end{cases}$

Note que, regra geral, a função linear estabelece uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos, ou seja é uma função bijetora. Na função constante ela perde o caráter "injetora" e a imagem se concentra num único ponto.

Exercícios

1) Durante o ano de 1986, um trabalhador tem um desconto no seu salário mensal de Cz$ 500,00 para fins da previdência social. Esboce o gráfico desse exemplo de função constante.

2) Um piloto de provas quer saber durante quanto tempo pode manter o seu carro em velocidade constante de 100 km/h. Para atingir esta velocidade, dá uma volta na pista e, ao iniciar a segunda volta, o cronometrista começa a marcar o tempo. Sabendo que o cronometrista informou que a velocidade foi mantida durante os 6 segundos iniciais da segunda volta, esboce um gráfico que ilustre o fato.

3.2 – Função Linear

Muitos autores definem função linear como sendo a função do tipo y = ax, com $a \neq 0$, e, como se pode notar, b=0. Assim, consideremos as seguintes situações:

a) Em outubro de 2004, o preço do litro de gasolina era de R$ 2,10. Nestas condições, podíamos elaborar a tabela abaixo e escrever a sentença ao lado da mesma:

litros	R$
1	2,10
2	4,20
3	6,30
4	8,40
5	10,50
...	...
56	117,60

Preço a pagar = 2,10 . (número de litros)

Observamos, então, que o preço a pagar é dado em função da quantidade de litros comprados, ou seja:

f(x) = 2,10 . x ou y = 2,10x → lei da função

b) Em março de 1986, a tarifa cobrada para estacionamento de um automóvel em local apropriado, no aeroporto de São Paulo, era de Cz$ 3,20 por hora. Nestas condições, podemos elaborar a tabela seguinte (até um limite de 10 horas, por exemplo) e escrever a seguinte sentença:

horas	Cz$
1	3,20
2	6,40
3	9,60
4	12,80
5	16,00
...	...
10	32,00

Tarifa a pagar = 3,20 . (número de horas

Observamos que a tarifa a pagar pelo estacionamento é dada em função do número de horas que o carro fica estacionado no local, ou seja:

f(x) = 3,20.x ou y = 3,20 . x → lei da função

Baseando-se no exposto, podemos definir **função linear** como sendo, toda função f: R →R definida por **f(x) = ax** ou **y = ax**, para todo **x** real **e a** um número real não nulo.

Exemplos: $f(x) = 870x$ ou $y = 870x$ $(a = 870)$

$f(x) = 136x$ ou $y = 136x$ $(a = 136)$

$f(x) = 0{,}10x$ ou $y = 0{,}10x$ $(a = 0{,}10)$

$f(x) = \frac{1}{2}x$ ou $y = \frac{1}{2}x$ $(a = \frac{1}{2})$

$f(x) = -\sqrt{5}\,x$ ou $y = \sqrt{5}$ $(a = \sqrt{5})$

$f(x)$ x ou $y = x$ $(a = 1)$

Este último exemplo, que é uma função que a todo **x** associa o próprio **x**, denomina-se **função identidade** e é um caso particular da função linear.

Exercícios

1) De acordo com a lei de previdência social em vigor, a contribuição para o IAPAS é de 10% (0,10) sobre o salário de quem ganha de 15 a 20 salários mínimos. Nestas condições, a contribuição é dada em função do salário. Indicando-se por **x** esse salário, qual é a lei da função que representa a contribuição previdenciária?

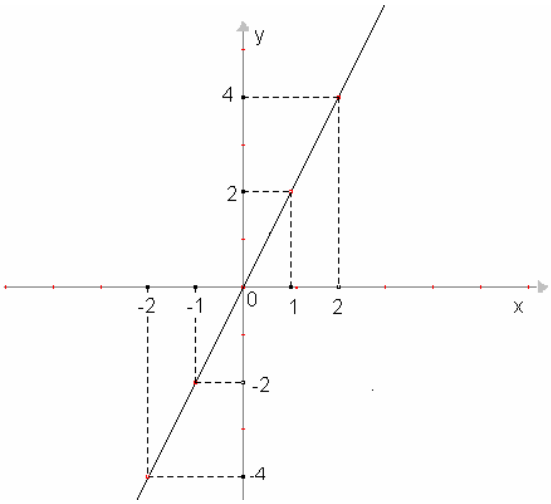
2) O preço de venda de um livro é de Cz$ 68,00 por unidade. A receita total obtida pela vende desse livro pode ser calculada pela fórmula: receita total preço de venda por unidade vezes quantidade de livros vendidos. Logo observa-se que a receita total é da. da em função da quantidade de livros vendidos. Indicando por **x** a quantidade de livros vendidos, escreva a lei dessa função.

3) Um vendedor autônomo recebe uma comissão de 15% (0,15) sobre o total de suas vendas no mês. Portanto, a comissão que ele recebe é dada em função do total de suas vendas. Se indicarmos por **x** esse total de vendas, qual é a lei da função que representa a comissão desse vendedor?

3.2.1 - GRÁFICO NO SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

Como exemplo, vamos construir o gráfico da função linear f(x) = 2x no Plano Cartesiano Ortogonal.

x	y
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4



Damos, então, alguns valores para a variável independente x e encontramos os valores de y correspondentes na seguinte tabela:

Observando este e outros exemplos, vemos que:

O gráfico da função linear f(x) = ax, com a ≠ 0, é uma reta que contém a origem (0, 0) e com D = R e Im = R

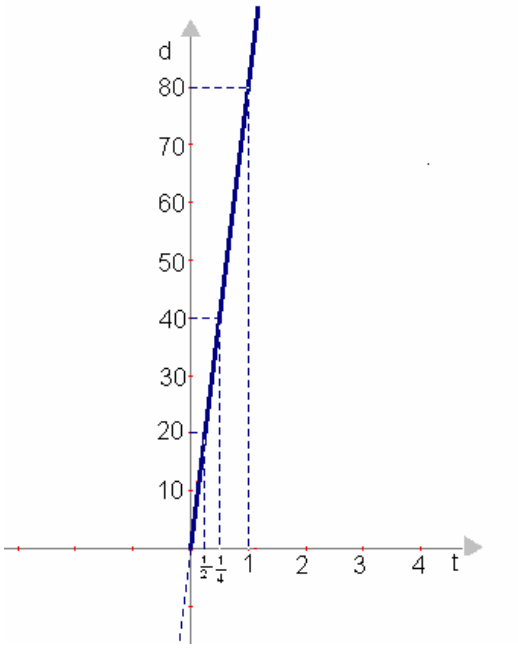
3.2.2 - PROPORCIONALIDADE E FUNÇÃO LINEAR

Suponhamos que um motorista dirija o seu carro, numa estrada, a uma velocidade constante de 80 km/h. Nestas condições, a distância que ele percorre com o seu veículo pode ser calculada pela fórmula matemática:

d = 80 . t, onde d é a distância em Km e t é o tempo em horas. Logo, a distância percorrida é dada em função do tempo.

Vamos ilustrar esta situação por meio de uma tabela e de um gráfico:

t (em horas)	d (em Km)
$\frac{1}{2}$	20
$\frac{1}{4}$	40
1	80
2	160
3	240
...	...



Observamos que, quando dobramos o tempo (por exemplo, de 1 para 2 horas), a distância percorrida também dobra; quando triplicamos o tempo, a distância percorrida também triplica; etc.

Neste caso, dizemos que a distância percorrida é **diretamente proporcional** ao tempo gasto.

Devemos notar que:
- o número 80 é chamado **constante de proporcionalidade**, pois d : t = 80

$$20 : \frac{1}{4} = 40 : \frac{1}{2} = 80 : 1 = 160 : 2 = 240 : 3 = ... = 80$$

- $\frac{\text{diferença dos valores de y}}{\text{diferença dos valores de x}}$ = constante, ou seja, $\frac{240-80}{3-2} = \frac{80-40}{1-\frac{1}{2}} = ... = 80$

O que significa que essa constante é 80.

Daí podermos dizer que a distância percorrida por um veículo é uma grandeza diretamente proporcional ao tempo, quando a velocidade é constante.

Esse fato sempre ocorre quando duas grandezas variáveis estão relacionadas por uma função linear. E o gráfico correspondente é sempre uma reta, que passa pela origem.

Exercícios

1) Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções lineares (lembre-se que basta determinar apenas mais um ponto, já que o gráfico é uma reta que passa pela origem):

1) $f_{(x)} = 3x$ 2) $f_{(x)}=-x$ 3) $f_{(x)} = \frac{1}{2}x$ 4) $f_{(x)} = -2x$

2) Construa, no plano cartesiano, o gráfico da função $f_{(x)} = 2x$ nos intervalos reais:

a) $-3 \leq x \leq 1$ b) $-1 < x < 2$

3) Esboce, num mesmo plano cartesiano, o gráfico de $f : R \rightarrow R$ definida por $f_{(x)} = x$ e $g : R \rightarrow R$ definida por $g_{(x)} = -\frac{1}{2}x$.

4) Sendo $f_{(x)} = -2$, $g_{(x)} = x$ e $h_{(x)} = 2$, pede-se o conjunto dos pontos (x, y) do gráfico de g que satisfaçam a relação $f_{(x)} \leq g_{(x)} \leq h_{(x)}$.

5) A uma temperatura constante de 0º C, a massa do ferro (dada em g) está dada em função do seu volume (dado em cm^3), função esta representada por $f_{(x)} = 8x$. Construa, no plano cartesiano, o gráfico dessa função.

6) O comprimento C de uma circunferência é dado em função da medida D do diâmetro, pois $C = \pi \cdot D$, que é uma função linear. Então o comprimento C é proporcional à medida D do diâmetro. Determine o coeficiente de proporcionalidade.

7) O perímetro **p** de um quadrado é dado em função da medida ℓ do lado, pois $p = 4\ell$, que é uma função linear. Então o perímetro **p** é diretamente proporcional à medida ℓ do lado. Determine o coeficiente de proporcionalidade e ilustre o fato por meio de uma tabela e de um gráfico.

8) Num retângulo, a medida **b** da base é igual ao dobro da medida **h** da altura. Nestas condições, pode-se calcular o perímetro **p** do retângulo em função da medida **h** da altura, o que resulta uma função linear. Então o perímetro **p** é diretamente proporcional à medida **h** da altura. Escreva a lei da função, determine o coeficiente de proporcionalidade e ilustre o fato por meio de uma tabela.

3.3 – Função afim

Consideremos as seguintes situações:

1) Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 1500,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% (0,06) do total das vendas que ele faz durante o mês. Nestas condições, podemos dizer que:

Salário mensal = 1500,00 + 0,06 . (total das vendas do mês)

Observamos, então, que o salário mensal desse vendedor é dado em função do total de vendas que ele faz durante o mês, ou seja:

$$s(x) = 1500{,}00 + 0{,}06x \quad \text{ou} \quad y = 1500{,}00 + 0{,}06x$$

onde x é o total das vendas do mês.

2) O frete cobrado por uma transportadora para levar uma mercadoria de um estado para outro é composto por uma quantia fixa (chamada CAT ou custos adicionais de transporte e despesas operacionais, taxa de despacho e tributos estaduais) e por uma quantia variável, que é proporcional ao número de quilos da mercadoria. Em março de 1986, uma transportadora da cidade de São Paulo cobrava Cz$ 62,00 de CAT e Cz$ 5,00 por quilo para transportar uma mercadoria para o estado do Rio de Janeiro. Nessas condições, podemos formar a seguinte tabela para um máximo de 100 kg, por exemplo:

Peso (em kg)	Frete (em Cz$)
1	62,00 + 1 . 5,00
2	62,00 + 2 . 5,00
3	62,00 + 3 . 5,00
4	62,00 + 4 . 5,00
5	62,00 + 5 . 5,00
...	...
100	62,00 + 100 . 5,00

Observamos que o frete a pagar é dado em função do peso da mercadoria, ou seja:

$$f_{(x)} = 62{,}00 + 5{,}00x \text{ ou } y = 62{,}00\ \ 5{,}00x$$

onde x é o número de quilos (peso) da mercadoria.

Definição: Denominamos **função afim** a toda função do função do tipo definida por $f_{(x)} = \mathbf{a}x + b$ ou $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$, para todo x real sendo **a** e **b** dois números reais quaisquer, com $\mathbf{a} \neq 0$.

Exemplos:

a) $f_{(x)} = 0{,}06x + 500\,000$ ou $y = 0{,}06x + 500\,000$ $(a = 0{,}06,\ b = 500000)$
b) $f_{(x)} = 0{,}1x + 1$ ou $y = 0{,}01x + 1$ $(a = 0{,}1,\ b = 1)$
c) $f_{(x)} = 400x + 490$ ou $y = 400x + 490$ $(a = 400,\ b = 490)$

Como se pode notar, a função afim onde b é igual a zero pode ser tratada como uma função linear na definição do item 3.2.

Se permitíssemos o caso $a \neq 0$ em $f_{(x)} = ax + b$, teríamos $f_{(x)}) = b$ para todo x real, que é a função constante (já estudada).

Exercícios

1) O preço de uma corrida de táxi, usualmente, é composto por uma quantia fixa (chamada "bandeirada") e por uma quantia variável, que é proporcional ao número de quilômetros rodados. Em julho de 1985, na cidade de São Paulo, a bandeirada correspondia á quantia de Cr$ 4000 e a tarifa por quilômetro rodado era de CrS 1120. Como o preço da corrida é dado em função do número de quilômetros rodados, represente o fato em termos de função indicando por **x** o número de quilômetros rodados.

2) Na produção de uma peça, uma indústria tem um custo fixo de R$ 1200,00 e mais um custo variável de R$ 25,00 por unidade produzida. Percebe-se, então, que o custo total é dado em função do número de unidades produzidas. Sendo **x** o número de unidades produzidas, escreva a lei dessa função.

3) A quantia referente ao imposto de renda retido na fonte é composta de duas partes: urna parte variável, que é proporcional à renda líquida mensal, e uma parte fixa (chamada "dedução"), que se deve subtrair da parte variável. Em 1985 a tabela seguinte foi utilizada para o cálculo desse imposto.

IR FONTE Assalariados			
CLASSES DE RENDA	RENDA LÍQUIDA MENSAL Cr$	ALÍQUOTA	PARCELA A DEDUZIR Cr$
01	Até 375.000	Isento	—
02	De 375.001 a 548.000	12%	45.000
03	De 548.001 a 780.000	16%	66.920
04	De 780.001 a 1.215.000	20%	98.120
05	De 1.215.001 a 1.956.000	25%	158.870
06	De 1 .956.001 a 2.780.000	30%	256.670
07	De 2.780.001 a 4.190.000	35%	395.670
08	De 4.190.001 a 6.317.000	40%	605.170
09	Acima de 6.317.000	45%	921 .020

Você observa que o imposto de renda retido na fonte é dado em função da renda líquida mensal; se indicarmos por **x** a renda líquida mensal, represente a lei dessa função para unia pessoa classificada na:

a) classe de renda 02 b) classe de renda 05 c) classe de renda 07.

4) Dada a função afim $f_{(x)} = 2x + 5$, calcular:

a) $f_{(-3)}$ b) $f_{(0)}$ c) $f_{(2)}$ d) $f_{(-\frac{1}{2})}$ e) $f_{(1)}$ f) $f_{(-\frac{5}{4})}$

5) Dada a função afim f(x) 1 - 2x, calcule os valores reais de x para que se tenha:

a) $f_{(x)} = 9$
b) b) $f_{(x)} = -6$
c) c) $f_{(x)} = 0$
d) d) $f_{(x)} = -1$
e) e) $f_{(x)} = \frac{1}{2}$
f) f) $f_{(x)} = -\frac{3}{4}$

6) Um chefe de departamento de promoção de uma loja verifica que, quanto mais ele anuncia na televisão, mais ele vende. A relação pode ser expressa por $y = \frac{3}{2}x + 150$,

onde **y** é o número de mercadorias vendidas durante a semana e **x** representa o número de comerciais de televisão durante a semana. Nestas condições, pede-se:

a) Quantas mercadorias ele vendeu se o seu comercial apareceu 24 vezes na televisão durante a semana?

b) Quantas vezes o comercial deverá aparecer na televisão para que a loja venda cerca de 225 artigos na semana?

7) Num retângulo, o comprimento é 5m. Nestas condições:

a) Calcule o perímetro do retângulo quando a largura for lrn; 1,5m; 2m; 3m e 4m.

b) Elabore uma tabela associando a cada largura o perímetro do retângulo.

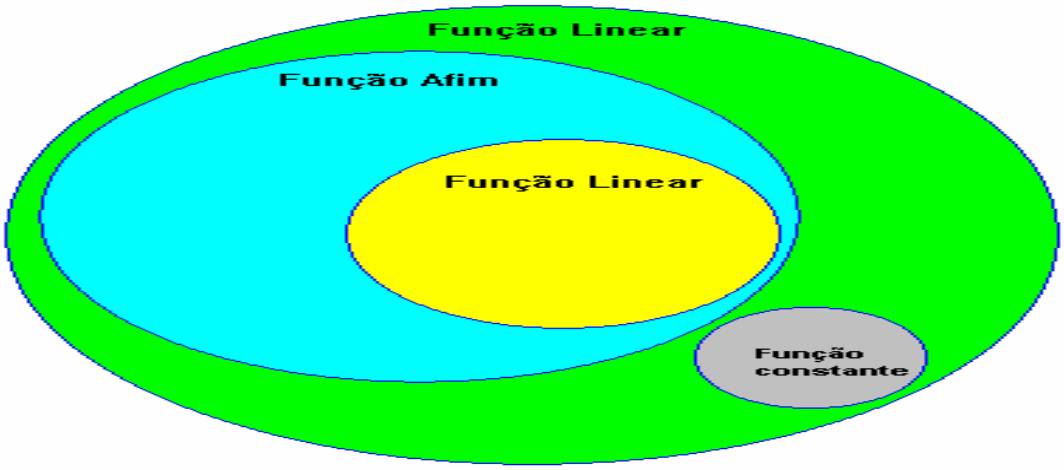
c) Se **x** representa a largura e **y** representa o perímetro do retângulo, qual a relação que define essa função?

8) O aluguel de um carro numa agência de turismo, é R$ 25,00 mais R$ 0,50 por quilômetro rodado. Nestas condições:

a) O aluguel do carro é dado em função do número de quilômetros rodados; se **y** representa o aluguel e **x** representa o número de quilômetros rodados, qual a relação que define essa função?

b) Quanto pagaremos de aluguel se rodarmos 200 quilômetros?

Observação: Nota-se que **função linear** aparece designando funções em dois momentos. O diagrama a seguir tenta demonstrar, através da teoria dos conjuntos, esta situação.



Temos no cotidiano, exemplos de aplicação da função linear como fazem os sapateiros que usam a seguinte fórmula para determinar o número do sapato de uma pessoa: N = 5/4c + 7, onde N é o numero do sapato e c é o comprimento do pé e os médicos que usam como referencial para analisar a altura de uma criança brasileira de 4 a 13 anos a fórmula: h = 5,7x + 81,5 cm, onde h é altura e x é a idade em anos.

4 - FUNÇÃO QUADRÁTICA

Como captar o movimento de uma bola de futebol chutada pelo goleiro?

O goleiro coloca a bola em jogo com um chute forte. A bola sobe até um ponto máximo e começa a descer descrevendo, assim, uma curva que recebeu o nome de parábola. O físico italiano Galileo Galilei (1564 a 1642), estudou atentamente movimentos como o desta bola e concluiu que, se não fosse a resistência do ar, qualquer corpo solto no campo de gravidade da Terra se movimentaria do mesmo modo. Ou seja, ao fim de um segundo percorreria cerca de 5 x 1^2 = 5 metros; depois de dois segundos percorreria cerca de 5 x 2^2 = 20 metros; depois de 3 segundos, 5 x 3^2 = 45 metros; e assim sucessivamente. Desta forma, depois de **x** segundos, percorreria 5 x $\mathbf{x}^2$ metros, onde 5 é aproximadamente a metade da aceleração da grávida em metros por segundo, em cada segundo. Isto é o mesmo que escrever a função $\mathbf{f(x) = 5\ x^2}$. Galileo agrupou todos esses elementos em um importante conceito matemático: função quadrática. Toda função na qual a variável **x** aparece como expoente máximo igual a **2** é chamada de função quadrática, ou polinomial do segundo grau, pois o expoente máximo da variável é quadrado.

A função quadrática, ou do segundo grau, é uma função de R→R definida por $f_{(x)} = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$. O gráfico da função quadrática nos mostra uma parábola com um eixo de simetria vertical (axial), com a clara observação de que essa função é crescente ou decrescente até o vértice, por onde passa o eixo de simetria, e que após, inverte essa situação. Como exemplos vamos mostra os gráficos das funções $y = 2x^2 - 5x - 3$ (fig. 5) e $y = -3x^2 + 3x + 2$ (fig. 6)

x	y
-3	30
-2	15
-1	4
0	-3
1	-6
2	-5
3	0
4	9

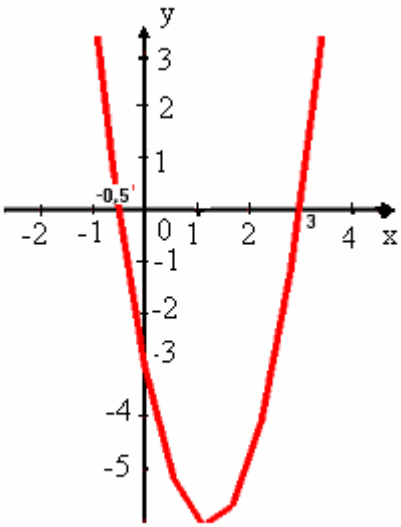


Fig. 5

x	y
-3	-34
-2	-16
-1	-4
0	2
1	2
2	-4
3	-16
4	-34

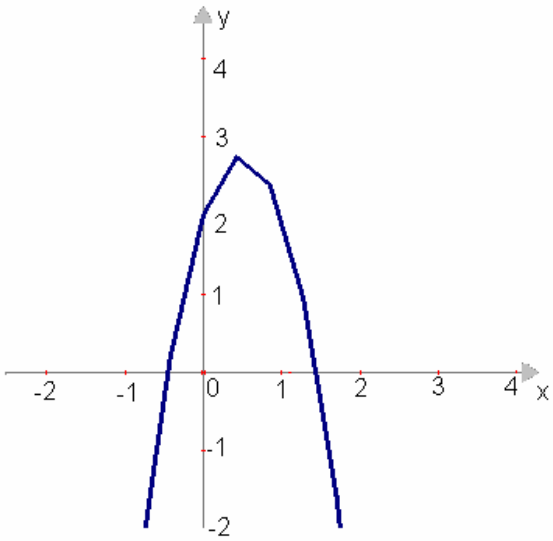


Fig. 6

Os gráficos da função quadrática nos mostra uma parábola com um eixo de simetria vertical (axial), com a clara observação de que essa função é crescente ou decrescente até o vértice, por onde passa o eixo de simetria, e que após, inverte essa situação.

A figura nos mostra o comportamento da função quadrática em relação ao coeficiente **a**.

Podemos visualizar o comportamento da função quadrática em relação ao coeficiente **a**. Veja a fig. 7.

Note que, quando **a** é positivo, a parábola tem sua concavidade voltada para cima e, quando **a** é negativo, a concavidade é voltada para baixo.

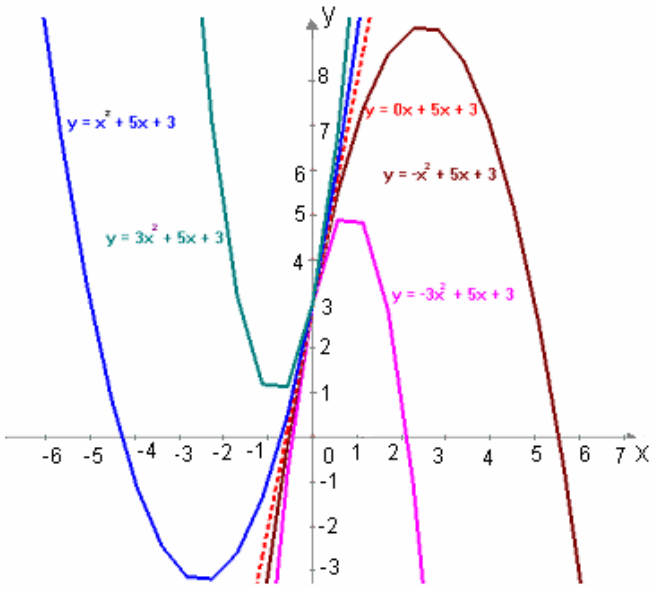


Fig. 7

A figura a seguir nos mostra o comportamento da função quadrática quando se altera o coeficiente **b**. Veja fig. 8:

Note que a parábola não perde a sua forma em função do coeficiente **b** e apenas se movimenta no plano descrevendo uma "trajetória" característica com a curva fixada no ponto de coordenadas (0,**c**).

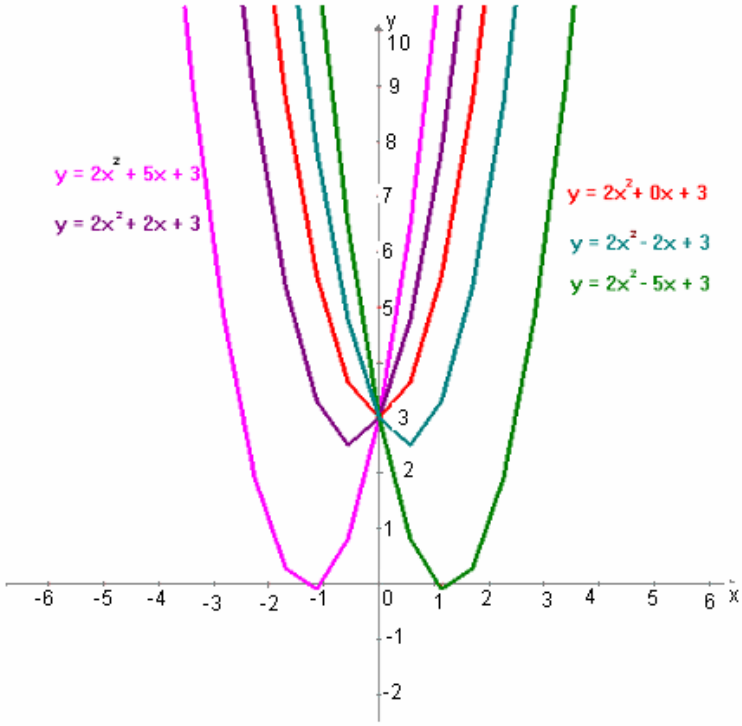


Fig. 8

O coeficiente **c** (termo independente) é conhecido como coeficiente de translação, pois não muda o formato do gráfico, apenas o movimenta no sentido vertical como mostra a fig. 9.

Note que com a mudança do coeficiente **c**, a parábola não perde sua forma, apenas translada sobre o plano.

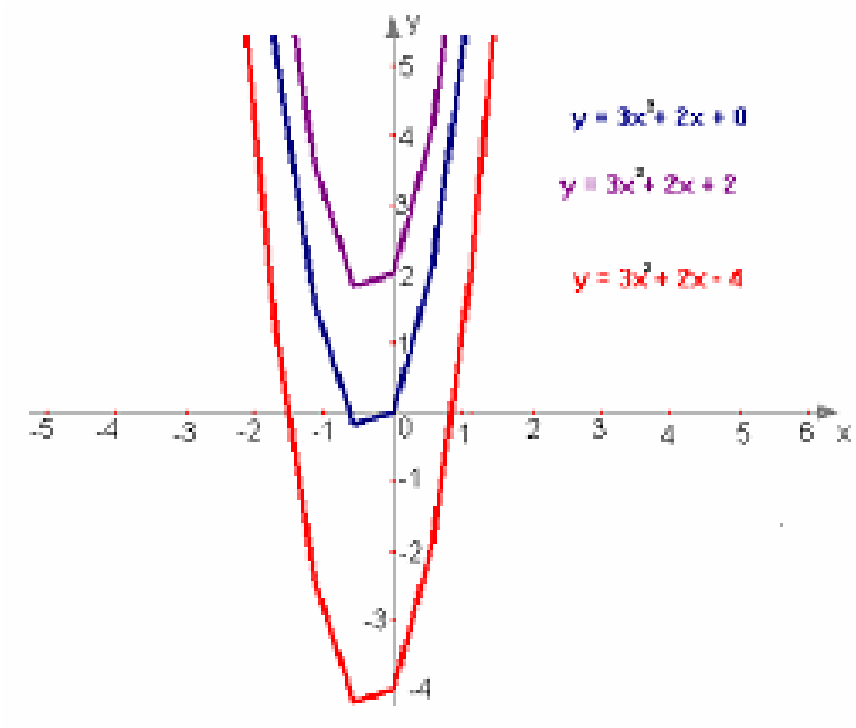


Fig 9

A função quadrática tem aplicação na Física como, por exemplo, no movimento uniformemente variado.

5 - FUNÇÃO EXPONENCIAL

Como apreender movimentos quantitativos muito rápidos e com números bem altos?

Ângela resolveu criar coelhos e comprou 4 casais. Na primeira gestação, cada um dos 4 casais gerou outros 4 casais, totalizando 4 x 4 = 4^2 = 16. A segunda gestação repetiu o número de filhotes, totalizando 4 x 4 x 4 = 4^3 = 64 casais. Nas gestações seguintes os números vão crescendo: 4^4, 4^5, 4^6, 4^7.... A Multiplicação cresce rapidamente e logo atinge números muito altos. Esta rapidez e estes valores são registrados de um modo mais simples por potências, em que é o expoente que varia. Como este existem vários outros movimentos quantitativos que são causados por variações muito altas e rápidas. Para estuda-los, matemáticos como o escocês John Napier (1550 a 1617), criaram as funções exponenciais e logarítmicas, colocando em prática idéias que surgiram com o grego Arquimedes (séc. III a. C.).

A expressão matemática que define a função exponencial é uma potência. Nesta potência a base é um número real positivo e diferente de 1 e o expoente é uma variável. É uma função de $R \rightarrow R^+$ (sendo R^+ o conjunto de números reais positivos).

Tal função será decrescente se a base pertencer ao intervalo]0,1[e crescente se a base for maior que 1. Veja os gráficos representados pelas figuras 10 e 11.

Gráfico da função $y = 2^x$

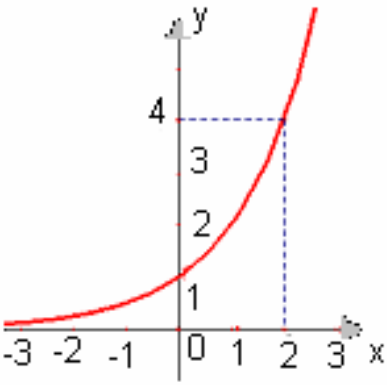


Fig. 10

Gráfico da função $y = (½)^x$

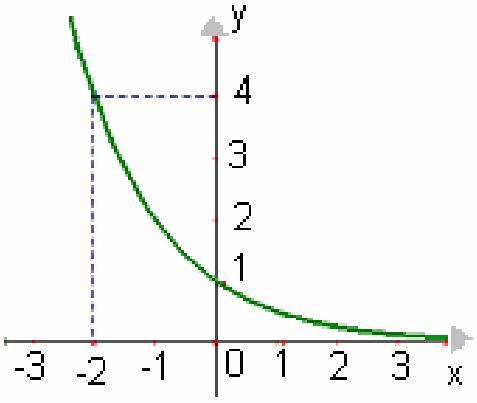


Fig. 11

Note, observando as figuras 12 e 13, o comportamento da Função Exponencial diante da variação do valor da base em cada um dos casos tratados no parágrafo imediatamente anterior.

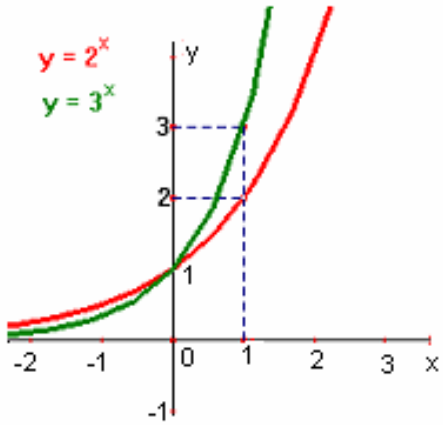


Fig. 13

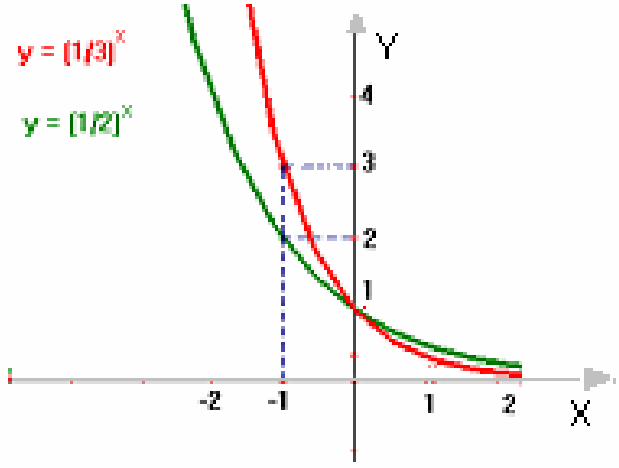


Fig. 12

A função exponencial tem aplicações em diversas áreas do conhecimento humano como, por exemplos, nos juros compostos e no estudo do crescimento de populações de seres vivos.

6 – CONCLUSÃO

Neste trabalho buscamos uma rápida visão geral dos problemas enfrentados no ensino da matemática e nos direcionamos para as funções, mais especificamente para as funções lineares, quadráticas e exponenciais. Longe da perfeição que almejamos, acreditamos que contenha algum teor com potencial para levar à reflexão aqueles que atentamente o lêem, apontando para novos rumos.

Acreditamos estarmos longe de um ensino de matemática de qualidade ideal e que imprimimos a esse trabalho, um certo caráter inovador. Temos, nesse trabalho, em consonância com nossa introdução, a intenção de deixar claro que o uso dos recursos tecnológicos deve ser maximizado. E vamos além, não queremos que a escola se torne uma voraz consumidora de tecnologias, mas sim, que nelas se apóie para formar cidadãos dotados da necessária independência psicológica associada a responsabilidade de ajudar a sua comunidade a se conduzir para um futuro promissor e ainda, a escola se torne, direta e indiretamente, uma produtora de novas tecnologias. A matemática se insere nesse contexto até para mostrar o que acontecerá no futuro se um novo caminho não for encontrado, como fez Malthus, pode ser que até sem querer, ao prever problemas de provimento de alimentos à humanidade já que esta obedecia a um crescimento geométrico – exponencial – e a produção de alimento, em função da área plantada, limitada por sinal, obedecia a um crescimento aritmético – linear.

Mostramos que o estudo das funções é de extrema importância e tem aplicações em diversas, senão em todas, áreas do conhecimento humano e se trata de um "capítulo" da matemática que não pode faltar nos planos de ensino desde as primeiras séries, mesmo que nestas, de modo subjetivo.

7 – BIBLIOGRAFIA

BARRETO FILHO, Benigno. Matemática. Benigno Barreto Filho, Cláudio Xavier da Silva. São Paulo, FTD. 1988.

BARRETO FILHO, Benigno. Matemática Aula por Aula. Benigno Barreto Filho, Cláudio Xavier da Silva. São Paulo, FTD. 2000.

GIOVANNI, José Ruy. Matemática Completo, José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr. São Paulo, FTD. 2002.

SILVA, Paulo Maurício. Matéria e Energia em transformação, Paulo Maurício Silva, S. R. Fontinha. São Paulo, Companhia Editora Nacional. 2001.

BONJORNO, Regina Azenha. Física Fundamental, Regina Azenha Bonjorno. São Paulo, FTD. 1983.

MACHADO, Antonio dos Santos. Funções e Derivadas, Antonio dos Santos Machado. São Paulo, Atual. 1988.

MACHADO, Antonio dos Santos. Geometria Analítica e Polinômios, Antonio dos Santos Machado. São Paulo, Atual. 1986.

CARVALHO, Maria Cecília Costa e Silva. Padrões numéricos e funções. Maria Cecília Costa e Silva Carvalho. São Paulo, Moderna. 1998.

IEZZI, Gelson. Aulas de Matemática. Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Antonio dos Santos Machado, Luiz Roberto da Silveira Castro. São Paulo, Atual. 1979.

HELP! Sistema de Consulta Interativa – Matemática. O Estado de São Paulo. Klick.

Telecurso 2000. Fundação Roberto Marinho.