PROJETO SALA DE AULA

TEIA DO SABER 2004

POLIEDROS E SÓLIDOS REDONDOS

AUTORES:

IRANI APARECIDA B. DA SILVA
JULIANO CÉSAR ODORÍSSIO
DENISE CRISTINA COSTA BRITO LUCIANO
ELAINE GOMIDES SILVA DEJAVITE

ORIENTADOR:

PROF. DR. ANIRIO SALES

ESTAGIÁRIOS COLABORADORES:

RENATO FERREIRA DE SOUZA
JOÃO FRANCISCO SILVA

"A mente que se abra a uma nova idéia jamais voltará a seu tamanho original".

(Albert Einstein)

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens".

(Descartes)

AGRADECIMENTOS

Aos organizadores do projeto

Professores Doutores da UNESP – Campus de Ilha solteira,

DALVA MARIA DE OLIVEIRA VILLARREAL

ERNANDES ROCHA DE OLIVEIRA

JOSÉ MARCOS LOPES

ANÍRIO SALLE FILHO

Pelo empenho e dedicação em nos oferecer esta

oportunidade de crescer mais como

professores e pessoas conscientes do

nosso papel diante da sociedade.

A importância desse trabalho merece todo o

nosso reconhecimento e carinho.

ÍNDICE

PÁGINA

1. INTRODUÇÃO..... 01

2. OBJETIVOS DO TEMA – DE ACORDO COM O PCN [1]..... 01

3. CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA..... 02

4. INTERDISCIPLINARIDADE..... 03

5. RECURSOS UTILIZADOS NA ABORDAGEM..... 05

6. CURIOSIDADE..... 05

7. GEÔMETRAS MAIS IMPORTANTES

7.1. PLATÃO..... 06

7.2. EUCLIDES..... 06

7.3. ARQUIMEDES..... 07

7.4. KEPLER..... 07

8. SÓLIDOS GEOMÉTRICOS..... 07

8.1. POLIEDROS 08

8.1.1. ELEMENTOS DO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.....08

8.1.2. POLIEDROS CONVEXOS OU CÔNCAVOS.....09

8.1.3. POLIEDROS REGULARES.....10

8.1.4. CUBO..... 11

8.1.4.1. ELEMENTOS DO CUBO..... 12

8.1.4.4. DIAGONAL DO CUBO..... 12

8.1.4.2. ÁREA DA SUPERFÍCIE DO CUBO..... 13

8.1.4.3. VOLUME DO CUBO..... 13

8.1.4.5. PLANIFICAÇÃO..... 13

8.1.5. PARALELEPÍPEDO..... 13

8.1.5.1. ELEMENTOS DO PARALELEPÍPEDO.....14

8.1.5.2. ÁREA DA SUPERFÍCIE DO PARALELEPÍPEDO..... 14

8.1.5.3. VOLUME DO PARALELEPÍPEDO..... 14

8.1.5.4. DIAGONAL DO PARALELEPÍPEDO..... 15

8.1.5.5. CONSIDERAÇÕES..... 15

8.1.5.6. PLANIFICAÇÃO..... 15

8.1.6. PIRÂMIDE..... 15

8.1.6.1. ELEMENTOS DA PIRÂMIDE..... 16

8.1.6.2. ÁREA DA SUPERFÍCIE DA PIRÂMIDE..... 17

8.1.6.3. VOLUME DA PIRÂMIDE..... 17

8.1.6.4. PLANIFICAÇÕES..... 18

8.1.7. PRISMA..... 18

8.1.7.1. ELEMENTOS DO PRISMA..... 19

8.1.7.2. ÁREA DA SUPERFÍCIE DO PRISMA..... 19

8.1.7.3. VOLUME DO PRISMA..... 20

8.1.7.4. PLANIFICAÇÃO DO PRISMA..... 20

8.2. NÃO POLIEDROS..... 20

8.2.1. CILINDRO RETO OU DE REVOLUÇÃO..... 21

8.2.1.1. ELEMENTOS DO CILINDRO..... 21

8.2.1.2. SUPERFÍCIE DO CILINDRO..... 22

8.2.1.3. VOLUME DO CILINDRO..... 22

8.2.1.4. PLANIFICAÇÃO..... 23

8.2.2. CONE RETO OU DE REVOLUÇÃO..... 23

8.2.2.1. ELEMENTOS DO CONE..... 23

8.2.2.2 SUPERFÍCIE DO CONE..... 24

8.2.2.3. VOLUME DO CONE..... 24

8.2.2.4. PLANIFICAÇÃO..... 25

9.2.3. ESFERA..... 25

9.2.3.1. ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA..... 26

9.2.3.2. VOLUME DA ESFERA..... 26

10. CONCLUSÃO..... 27

BIBLIOGRAFIA..... 28

1. INTRODUÇÃO

Este projeto destina-se especialmente a professores do 3º ciclo do ensino básico, como fonte de recursos no ensino dos **sólidos geométricos,** com o objetivo de incentivar os alunos nesta matéria, trabalhando de uma forma contextualizada, visto que, a geometria está muito ligada à vida do homem desde as formar da natureza até as obras de arte. O homem aprendeu a utilizar a geometria de acordo com os seus interesses de maneira a facilitar sua vida. Um desses exemplos foi a invenção da roda pois, já na e sem conhecer a geometria ele percebeu que a forma da roda diminuiria o seu esforço.

Queremos passar nossos conhecimentos sobre os sólidos geométricos de uma forma clara e explícita e esperamos atingir o nosso objetivo, que é despertar o interesse dos alunos para a importância da geometria e descobrir a infinidade de problemas que ela pode nos ajudar a resolver, desde uma simples embalagem até descobertas astronômicas.

Observando os sólidos geométricos os alunos desenvolverão a sua percepção do espaço e, ao mesmo tempo, o seu conhecimento do plano.

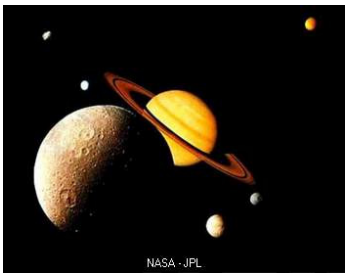
2. OBJETIVOS DO TEMA – DE ACORDO COM O PCN [1]

Com o objetivo de introduzir a geometria espacial nos conhecimentos de elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.

- Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.
- Interpretar e associar objetos, planificações, cortes e desenhos bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.
- Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.
- Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados, introduzindo assim áreas, volumes; estimativa, valor exato e aproximado.
- Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.
- Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos, etc.
- Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.

3. CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA

Na Natureza podemos encontrar as mais diversas formas geométricas, por exemplo: os anéis de Saturno, cristais de quartzo, os favos de mel de uma colméia, um vulcão e até uma simples teia de aranha.



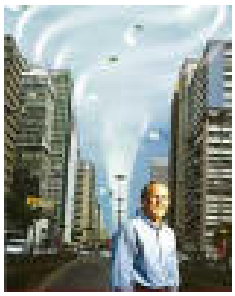
A Geometria estuda as formas, suas propriedades e suas relações.

Olhando à nossa volta podemos ver que a própria Natureza produz e reproduz determinadas formas com um certo padrão, escolhendo umas formas em relação a outras também possíveis. Por exemplo:

- Se despejarmos algumas gotas de óleo na água ele formará círculos, e não quadrados ou qualquer outra forma geométrica.
- As abelhas constroem os favos de mel em forma hexagonal, mas poderia ser cilíndrica ou triangular.

- O vento produz ondas no mar em forma de curvas ou prismas, por que não ondas quadradas?

- Os furacões aparecem sempre em forma de cone.



As formas geométricas estão presentes no universo desde a sua formação, é só observarmos a forma dos astros e planetas. Nas civilizações mais antigas as artes e as construções são um bom exemplo, como as monumentais pirâmides do Egito e nos tempos atuais temos projetos tecnológicos avançados como os equipamentos espaciais (satélites, foguetes, telescópios, ônibus espaciais, etc.).

O professor Alexandrov [2], ilustre geômetra soviético, refere:

" ...a Geometria é essencialmente a combinação de uma imagem viva e de uma lógica rigorosa que se organizam e se guiam mutuamente... o ensino da Geometria tem pois, conseqüentemente, como função o desenvolvimento nos alunos de três qualidades: a imaginação espacial, a compreensão concreta e o pensamento lógico... as duas primeiras características são fundamentais... a terceira faz, nos dias que correm, cada vez mais sentido.

(In [2], p.14)

A Geometria, considerada por muitos como a geometria do espaço, é uma ciência que desenvolve ao mesmo tempo:

- o conhecimento do mundo real;
- o processamento e a interpretação visuais;
- o raciocínio lógico/dedutivo.

Podemos viver na Geometria através da visão intuitiva ou de uma elaboração mais aprofundada. No entanto, é essencialmente através da intuição geométrica que o estudo da Geometria se concentra. Hoje em dia, a Geometria é considerada indispensável nas diversas profissões de natureza técnica ou artística.

4. INTERDISCIPLINARIDADE

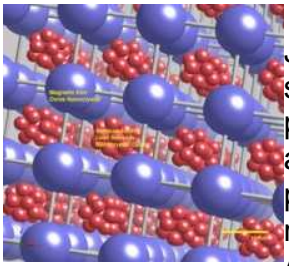
É o aprofundamento progressivo da integração entre várias disciplinas, mas mantendo-se os limites de cada uma. Verifica-se uma combinação de saberes para o estudo sintético de um determinado assunto. Por outras palavras, interdisciplinaridade é uma cooperação entre várias disciplinas no exame do mesmo objeto.

A interdisciplinaridade permite recuperar o sentido do concreto em que se fundamenta grande parte da capacidade motivacional de um ensino.

O tema apresentado neste projeto, sólidos geométricos, tem muito em comum com outras áreas o pode ser trabalhado em conjunto, mas deve haver uma sincronia senão o resultado pode não ser o esperado. É preciso um planejamento e uma organização e, principalmente a disposição e empenhos de todos.

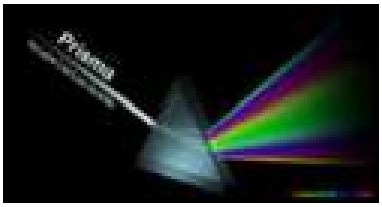
Veja alguns exemplos que podem ser trabalhados.

- Química: as estruturas de algumas moléculas.

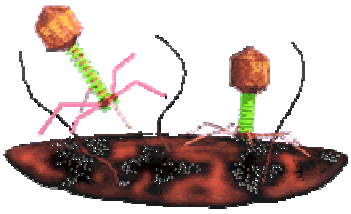


No estudo, publicado na revista Nature do último dia 26 de Junho, a equipe de pesquisadores descreve os métodos químicos super precisos desenvolvidos para configurar o tamanho das partículas em incrementos de menos do que um nanômetro e para ajustar as condições da experiência de forma que as partículas pudessem montar-se autonomamente em padrões tridimensionais repetidos e consecutivos.
A criação de novos materiais com propriedades que nenhum outro material possui, resultando nos chamados "metamateriais", é uma das promessas da nanotecnologia.

- Física: o prisma é um ótimo recurso para ajudar o aluno a compreender melhor a separação da luz branca.



- Biologia: as formas dos seres vivos, órgãos, vírus e bactérias.



Representação do vírus

- Língua Portuguesa: a formação, origem e significado de muitas palavras e expressões da geometria, além da elaboração de textos.

- História: as civilizações antigas e os matemáticos de cada época. O estudo da evolução do homem (utensílios, transportes, construções, etc).

- Geografia: localização no espaço (universo), formação da própria Terra, elementos da Natureza, formação das cidades, industrialização, etc. O professor pode organizar a confecção de maquetes com os alunos.

- Artes: planificação e montagem de sólidos geométricos com diversos materiais que podem ser embalagens para presentes, e a própria história da arte desde as civilizações antigas.

- Língua Estrangeira: pronúncia de palavras, produção e tradução de textos relacionados com o tema.

5. RECURSOS UTILIZADOS NA ABORDAGEM

Com a tecnologia avançada de que dispomos hoje com programas de computador específicos para trabalhar com desenho geométrico e cálculos, é possível criar, montar, desmontar sólidos e calcular medidas, áreas e volumes de uma maneira mais fácil e interessante, onde os alunos desenvolverão os trabalhos e o aprendizado com mais prazer.

De acordo com a realidade do local podem ser agendadas visitas a lugares onde a geometria é imprescindível como usinas hidrelétricas, indústrias, monumentos, museus, construções ou algumas empresas e departamentos responsáveis por projetos.

Também podem ser usados vídeos e DVDs, pois existe no mercado uma infinidade de filmes, documentários e programas que darão ao aluno uma forma de visualização e memorização mais rápida.

O contato dos alunos com os objetos de estudo pode ser de maneira direta se eles próprios construírem os sólidos observando o passo a passo, comparando e modificando-os quando for necessário. Até a escolha dos materiais usados pode ser bem trabalhada, utilizando cartolinas, acetato ou plásticos rígidos e reaproveitando embalagens, papelão, canudinhos, tampinhas, barbantes, arames, etc.

Também já existe, no mercado, materiais já prontos para a montagem de sólidos geométricos, mas ao elaborar os projetos é preciso levar sempre em conta os recursos financeiros da escola.

6. CURIOSIDADE

O maior sólido geométrico feito pelo Homem é a **grande pirâmide do Egito**, que foi construída há mais de 4 mil anos e é comparável, em altura, a um prédio de 40 andares e cobre uma área de mais de 5200 metros quadrados. Foi feita com mais de 2 milhões de blocos de pedra, pesando entre 2 e 150 toneladas cada um. Esta

construção é uma das “sete maravilhas do mundo” e chegou quase intacta ao nosso tempo.

Os egípcios construíram cerca de oitenta estruturas do tipo desta pirâmide, que é a maior de todas.

(adaptado de H. Jacobs, Geometry)

7. GEÔMETRAS MAIS IMPORTANTES

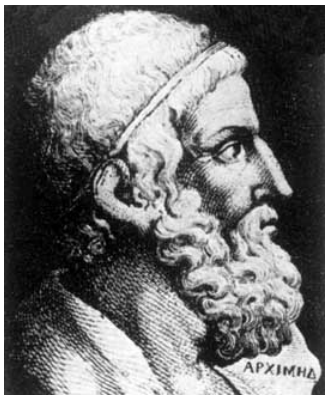
7.1. PLATÃO (Atenas/427-347 a.C.)

Foi o primeiro matemático a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares, que em sua homenagem também foram chamados de **sólidos platônicos**. São eles: cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

7.2. EUCLIDES (Síria/325-265 a.C.)

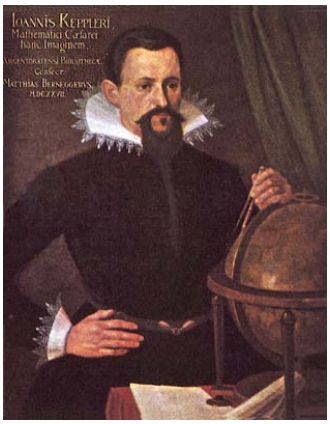
Ensinava Geometria e Álgebra na escola de Alexandria. Escreveu uma obra gigantesca chamada “Elementos”, com 13 volumes que foram usados durante, aproximadamente 20 séculos. Por isso se diz que a obra de Euclides constitui um dos maiores Best-sellers de sempre, sendo apenas ultrapassada pela Bíblia.

7.3. ARQUIMEDES (Siracusa/287-212 a.C.)



Foi considerado o maior matemático de toda a Antigüidade, sendo conselheiro do rei Hierão. Destacou-se pelos resultados a que chegou no estudo das áreas de figuras planas e dos volumes de sólidos geométricos.

7.4. KEPLER (Leonberg/1571-1630)



Era astrônomo e inspirou-se nos poliedros regulares para estudar o movimento dos seis planetas até então conhecidos (Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vênus e Mercúrio) e construiu o primeiro modelo do Sistema Solar composto por esferas concêntricas separadas umas das outras por um cubo, um tetraedro, um dodecaedro, um octaedro e um icosaedro.

8. SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

São conjuntos de pontos que formam objetos nas mais diversas formas, ocupando um certo lugar no espaço. Os **poliedros** são limitados por superfícies planas

e os **não poliedros ou sólidos redondos** por superfícies curvas ou por superfícies planas e curvas.

São exemplos de sólidos geométricos o *Cubo*, o *Paralelepípedo*, o *Prisma,* a *Pirâmide*, o *Cilindro*, o *Cone*, a *Esfera*.

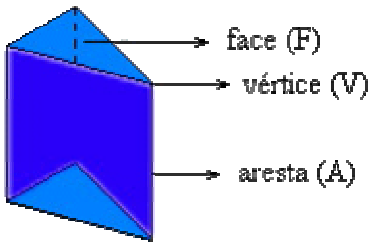
Para que os alunos compreendam a noção de volume, pode-se pegar uma bola de futebol cheia, que ocupará um determinado espaço e terá uma certa superfície, mas se estiver murcha, a superfície será a mesma mas o espaço ocupado pela bola diminuirá.

Muitos objetos podem ter formas diferentes, mas se ocuparem o mesmo lugar no espaço, ou seja, o mesmo volume, são chamados **sólidos geométricos equivalentes**. Um princípio útil para determinar os volumes de sólidos geométricos é o seguinte:

"Se dois sólidos estão sobre um plano e são seccionados por todo o plano paralelo ao plano dado, segundo figuras com a mesma área, então os sólidos têm o mesmo volume". É o **Princípio de Cavalieri.**

8.1. POLIEDROS

Poliedros são sólidos limitados por polígonos.



8.1.1. Elementos do poliedro

- ***faces***: são as figuras planas que o limitam o poliedro;
- ***arestas****:* são os segmentos de reta que limitam as faces;
- ***vértices:*** são os pontos de encontro das arestas.

Um poliedro, quando é observado, é visto como porção de espaço limitada por polígonos, daí que seja natural proceder à sua construção utilizando polígonos em papel ou cartolina, unindo os seus lados com fita ou cola, formando assim as arestas.

Veja mais uma sugestão:

- **Cartolina, acetato ou folha de plástico rígido**

A partir das planificações de sólidos, é possível a sua construção através de cartolina, acetato ou folha de plástico rígido, que são bons materiais para representar as faces, mas os materiais transparentes dão a possibilidade de visualizar melhor os poliedros.

Os modelos geométricos assim construídos ficam com as faces representadas, e caso o material usado seja transparente, podem-se unir pontos das faces com linhas ou varetas e obter outros poliedros com eles relacionados, diagonais, referenciais, etc.

- **Armações com canudinhos**

Com simples canudinhos, usados para bebidas, e barbante pode-se construir "esqueletos" de sólidos. Assim fica mais fácil visualizar um poliedro a partir da "armação" constituída pelas suas arestas.

Convém ter em atenção que nos vértices as linhas devem ter sempre um nó para fixá-los ou pode-se colocar miçangas ou pérolas usadas em bijuterias.

Estes modelos apresentam as seguintes vantagens:

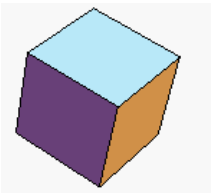
- Boa visibilidade da parte interior dos sólidos e das posições relativas de arestas e diagonais (as diagonais espaciais podem ser feitas também com canudinhos);

- Facilidade de representar um referencial fazendo passar varetas nos canudinhos ou entre eles.

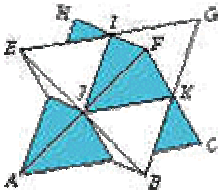
8.1.2. POLIEDROS CONVEXOS OU CÔNCAVOS

Os poliedros são **convexos** quando, em relação a qualquer de suas faces, ele está todo situado num mesmo semi-espaço determinado por esta face. Caso contrário são **côncavos**. São exemplos:

Poliedros convexos



Poliedros côncavos



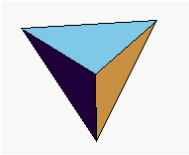
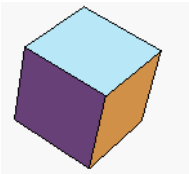
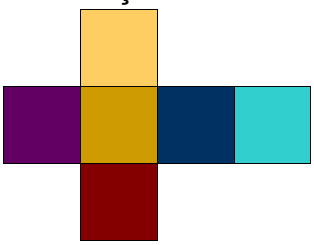
O matemático suíço Euler descobriu uma maneira prática de calcular o número de faces, arestas e vértices de todos os poliedros, que foi chamada de ***Relação de Euler:***

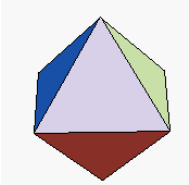
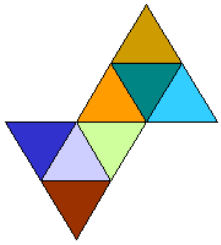
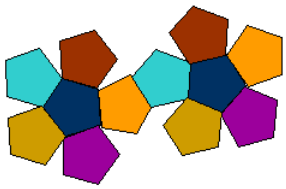
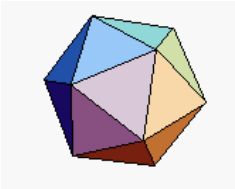
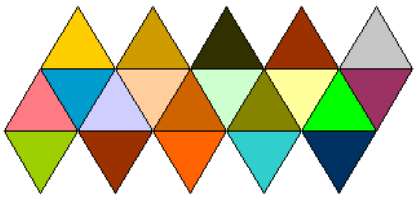
nº faces + nº vértices = nº arestas + 2

8.1.3. POLIEDROS REGULARES

São poliedros em que todas as faces são polígonos regulares geometricamente iguais e em cada um dos seus vértices encontra-se o mesmo número de arestas. São também conhecidos por **Sólidos Platônicos** em homenagem ao filósofo grego Platão (400 a.C.).

São 5 os poliedros regulares:

Tetraedro 	Planificação
Cubo 	Planificação 
Octaedro	Planificação

	
Dodecaedro	Planificação 
Icosaedro 	Planificação 

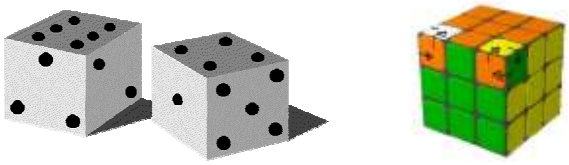
Os gregos associavam aos poliedros regulares elementos da Natureza.

Poliedro	**Elemento da Natureza**
Tetraedro	Fogo
Cubo	Terra
Octaedro	Ar
Icosaedro	Água
Dodecaedro	Universo

8.1.4. CUBO

É um sólido geométrico com seis faces quadradas, portanto todas as suas arestas são congruentes (a = b = c).

Dentre todos os poliedros, talvez seja o mais conhecido, pois existem muitos objetos de uso comum de forma cúbica, como, por exemplo, um dado.



8.1.4.1. ELEMENTOS DO CUBO

- 6 faces, que são quadrados geometricamente iguais.
- 12 arestas iguais.
- 8 vértices.

Para construir um cubo basta conhecer a medida de uma aresta.

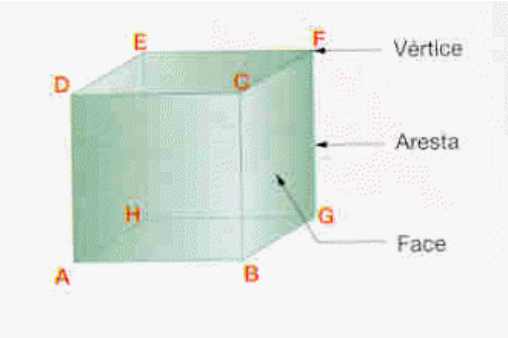


Figura 1

8.1.4.2. ÁREA DA SUPERFÍCIE DO CUBO

Como o cubo tem as 6 faces iguais (6 quadrados) é muito fácil calcular a **área da** sua **superfície**, pois a área de cada face é a^2, então é só multiplicar por 6. Assim:

$$\boxed{A_t = 6a^2}$$

8.1.4.3. VOLUME DO CUBO

O **volume** é o cubo do comprimento da aresta. Como a aresta é a temos:

$$\boxed{V = a^3}$$

8.1.4.4. DIAGONAL DO CUBO

É o segmento de reta que une dois vértices não pertencentes à mesma face.

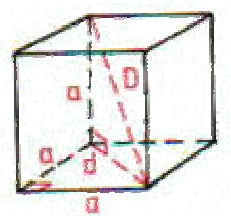
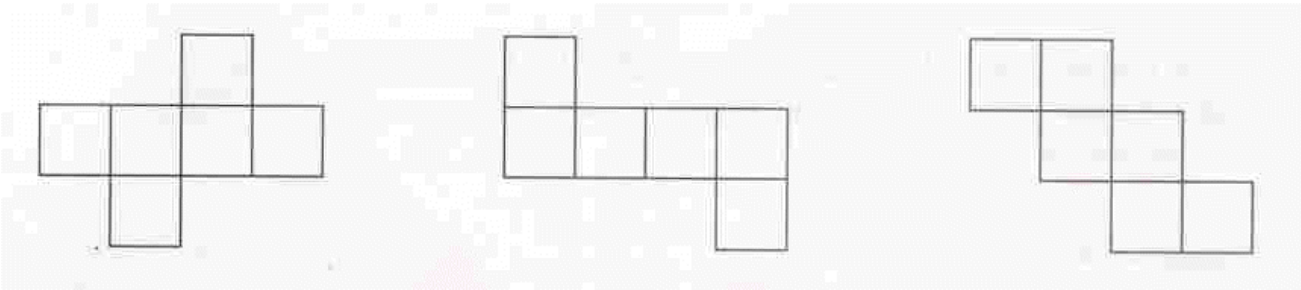


Figura 2

De acordo com a figura 2, a diagonal ***D*** do cubo é a hipotenusa do triângulo formado pela aresta ***a*** e pela diagonal da base ***d*** e, então podemos calcular através do Teorema de Pitágoras: $D^2 = d^2 + a^2$ (1). Como podemos observar ***d*** é a diagonal do triângulo retângulo de catetos iguais a ***a***. Assim temos $d^2 = a^2 + a^2$, ou seja, $d^2 = 2a^2$, que substituiremos na equação (1), logo, $D^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$, donde temos que o comprimento da diagonal do cubo é dada por $D = \sqrt{3}a$.

8.1.4.5. PLANIFICAÇÃO



8.1.5. PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

É um sólido geométrico com faces perpendiculares às bases e estas são. As faces e as bases são retângulos.

São alguns exemplos de paralelepípedos: caixa de fósforos, embalagens de sabão em pó, tijolos, livro, pedra de dominó, etc.

8.1.5.1. ELEMENTOS DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

- 6 faces.
- 12 arestas.
- 8 vértices.

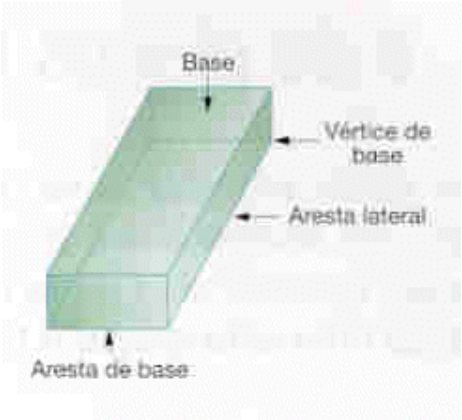


figura 1

Para a construção de um paralelepípedo é necessário conhecer as suas dimensões (comprimento, largura e altura).

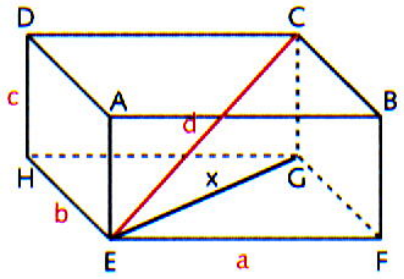


figura 2

8.1.5.2. ÁREA DA SUPERFÍCIE DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

Desmontando uma embalagem em forma de paralelepípedo, os alunos podem perceber a relação existente entre a área da sua superfície e a somas das áreas das suas faces. Então, de acordo com a figura 2 temos:

A = 2.a.b + 2.a.c + 2.b.c ou:

$$\boxed{A = 2.(ab + ac + bc)}$$

8.1.5.3. VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

O volume do paralelepípedo retângulo é o produto das suas dimensões (comprimento x altura x largura). Assim temos:

$$\boxed{V = a \,.\, b \,.\, c}$$

8.1.5.4. DIAGONAL DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

Sejam *a, b* e *c* os comprimentos das arestas concorrentes a um mesmo vértice (ver figura 2). A ***diagonal d*** é a hipotenusa do triângulo CEG, retângulo em G: $d^2 = x^2 + c^2$. Mas ***x*** é a hipotenusa do triângulo EFG , retângulo em F, logo $x^2 = a^2 + b^2$, e, substituindo ***x*** na 1ª equação, temos $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, então:

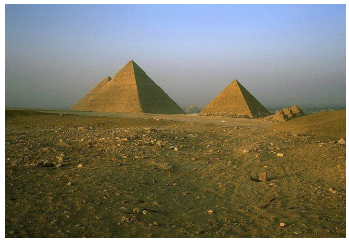
$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8.1.5.5. CONSIDERAÇÕES

Nem todos os paralelepípedos são retângulos. No caso das bases serem quadradas e não retangulares teremos um **paralelepípedo reto** e se as faces forem seis paralelogramos iguais, dois a dois, será um **paralelepípedo** oblíquo.

8.1.5.6. PLANIFICAÇÃO

8.1.6. PIRÂMIDE

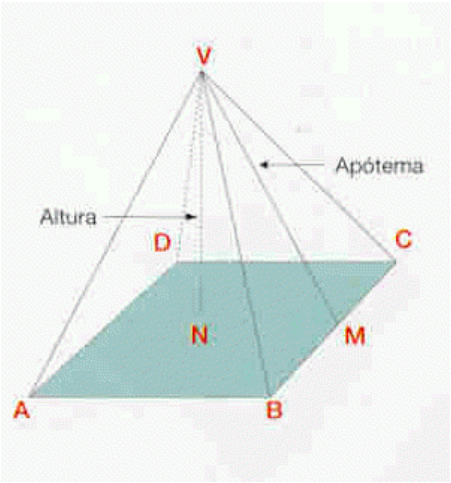


É um poliedro onde a base pode ser um polígono qualquer e as outras faces são triângulos com um vértice em comum.
Se a projeção do vértice coincide com o centro da base dizemos que a pirâmide é **reta,** caso contrário ela é **oblíqua** e quando a base é um polígono regular chama-se **pirâmide regular** e as faces laterais são triângulos isósceles.

A ***Altura*** da pirâmide é a projeção ortogonal do vértice da pirâmide na sua base.

8.1.6.1. ELEMENTOS DA PIRÂMIDE

- Base (polígono).
- Faces (triângulos).
- Arestas da base (lados da base).
- Arestas laterais (lados das faces que não pertencem à base).
- Vértices da base (vértices do polígono da base).
- Vértice da pirâmide (ponto de encontro das arestas laterais).
- Apótema (altura de cada uma das faces laterais).
- Apótema da base (altura do polígono da base).



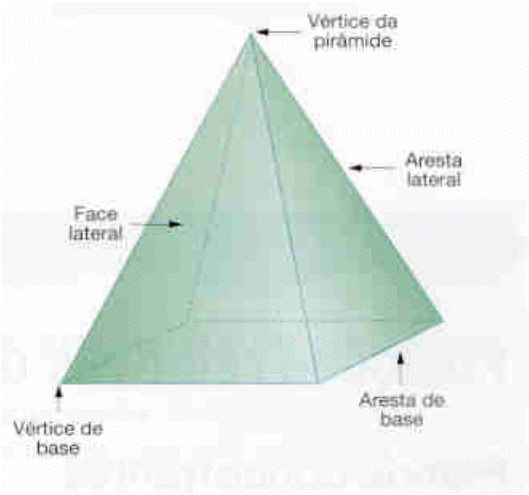


figura 1 **figura 2**

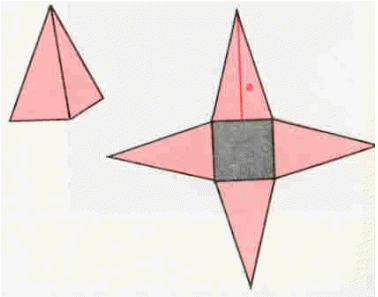
As pirâmides se classificam de acordo com o polígono da base.

- **pirâmide triangular** (três faces; base é um triângulo);
- **pirâmide quadrangular** (quatro faces);
- **pirâmide pentagonal** (cinco faces);
- **pirâmide hexagonal** (seis faces);
- etc.

A pirâmide formada por quatro triângulos eqüiláteros geometricamente iguais, tem o nome especial de **tetraedro**, que é um poliedro regular porque as suas faces são polígonos regulares idênticos.

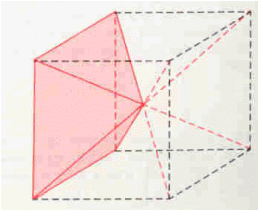
8.1.6.2. ÁREA DA SUPERFÍCIE DA PIRÂMIDE

Sugerimos a construção de uma pirâmide quadrangular em cartolina, cuja base tenha 49 cm^2 de área e cujo apótema tenha 10 cm e através da planificação, os alunos poderão ver facilmente que a área não é mais do que a soma da área lateral (soma das áreas das faces) com a área da base.



8.1.6.3. VOLUME DA PIRÂMIDE

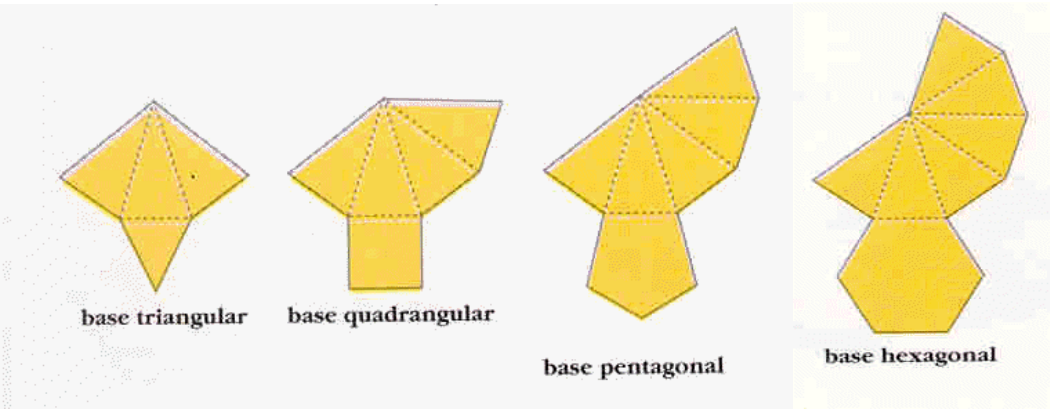
Para calcular o ***volume*** de uma pirâmide, podemos pensar num caso muito evidente: uma pirâmide quadrangular regular cuja base seja uma face de um cubo (de aresta *a*) e cujo vértice seja o centro desse cubo.



Vê-se claramente que no cubo cabem seis pirâmides iguais àquela - tantas quantas as faces do cubo. O volume de cada uma é, então, a sexta parte do volume do cubo, ou seja, $V = a^3 \div 6$. Como a altura, *h*, de cada pirâmide é metade da aresta do cubo, ou seja, a aresta do cubo vale 2*h*, temos então que o ***volume da pirâmide*** pode ser escrito da seguinte forma: $V = (A_b \times 2h) \div 6 = (A_b \times h) \div 3$, e portanto, o volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela sua altura.

Pelo Princípio de Cavalieri podemos a afirmar que esta conclusão é válida para qualquer pirâmide.

8.1.6.4. PLANIFICAÇÕES



8.1.7. PRISMA

É um sólido geométrico limitado por duas bases (polígonos iguais) situadas em planos paralelos e várias faces laterais (paralelogramos).

Num prisma, o número de faces laterais é igual ao número de lados dos polígonos da base, isto é, é igual ao número de arestas da base.

Como na pirâmide, de acordo com o polígono da base, temos:

- **Prisma triangular**; se as bases são triângulos.
- **Prisma quadrangular**; se forem quadrados.
- **Prisma pentagonal**; se forem pentágonos.
- etc.

Dizemos que o **Prisma reto** é um prisma que tem as arestas laterais perpendiculares às bases.

Prisma oblíquo é um prisma em que as arestas laterais não são perpendiculares às bases.

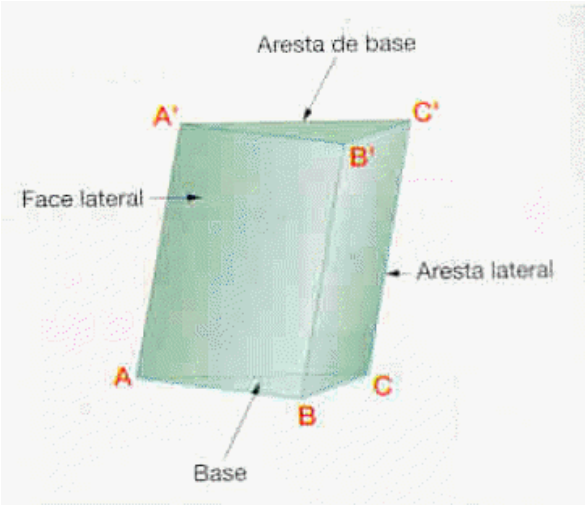
Prisma regular é um prisma reto em que as bases são dois polígonos regulares.

Se todas as faces são quadrados, o prisma é um **cubo**.

Se todas as faces são paralelogramos, o prisma é um **paralelepípedo.**

8.1.7.1. ELEMENTOS DO PRISMA

- Bases (polígonos).
- Faces (paralelogramos).
- Arestas das bases (lados das bases).
- Arestas laterais (lados das faces que não pertencem às bases).
- Vértices (pontos de encontro das arestas).
- Altura (distância entre os planos das bases).



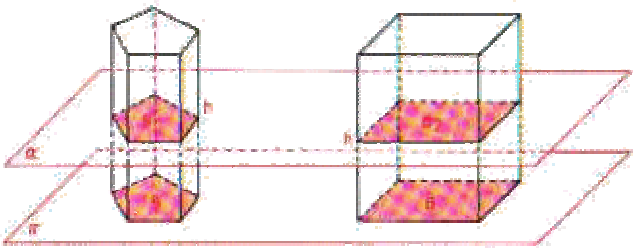
8.1.7.2. ÁREA DA SUPERFÍCIE DO PRISMA

Através da planificação de um prisma, os alunos perceberão que a área da superfície é a soma da área das bases com a soma da área das faces (área lateral). Representando a área de cada base por A_b, teremos então que a ***área total*** do prisma será:

$$\boxed{A_t = A_l + 2A_b\ .}$$

8.1.7.3. VOLUME DO PRISMA

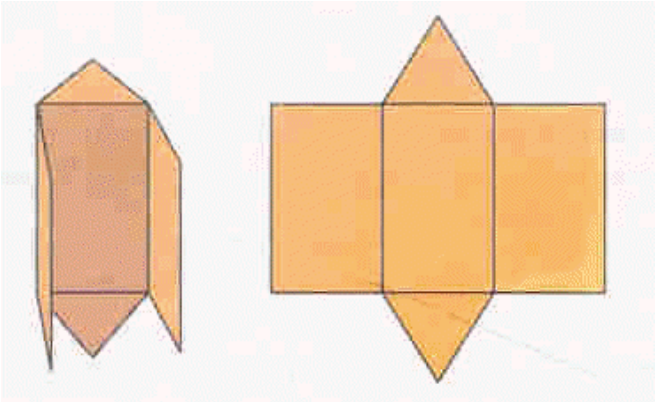
O ***volume do prisma*** (reto ou oblíquo) é igual ao volume do paralelepípedo (justificação pelo Princípio de Cavalieri). Consideremos um paralelepípedo e um prisma com a mesma altura, e em que a base do paralelepípedo tem a mesma área que a base do prisma.



As secções feitas nestes dois sólidos por um plano paralelo às bases são polígonos com a mesma área e, portanto, pelo princípio de Cavalieri, estes dois sólidos têm o mesmo volume. Sendo assim, o volume do prisma é dado pela expressão:

$$\boxed{V = A_b \times h}$$

8.1.7.4. PLANIFICAÇÃO DO PRISMA



8.2. NÃO POLIEDROS

São sólidos limitados, no todo ou em parte, por superfícies curvas dentre os quais são particularmente importantes os **Sólidos de Revolução**. São sólidos de revolução o cilindro, o cone e a esfera.

8.2.1. CILINDRO RETO OU DE REVOLUÇÃO

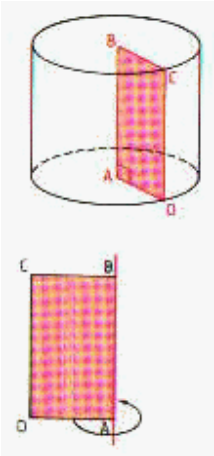
É o sólido geométrico obtido quando giramos, em torno de uma reta, uma região retangular.

Temos uma infinidade de exemplos de cilindro ao nosso redor, por exemplo: uma lata de spray, um tubo de cola, uma lata de ervilhas, tubulações de gás, água, esgoto, etc.

8.2.1.1. ELEMENTOS DO CILINDRO

- **Bases:** duas faces planas, em forma de círculos congruentes de raio r.
- **Altura** é a distância entre as bases.
- **Geratriz** é todo segmento paralelo ao eixo que tem suas extremidades nas circunferências das bases.
- **Eixo** que é o segmento de reta que une os centros das bases. Quando o eixo é inclinado em relação às bases se diz que o **cilindro é oblíquo**.

As bases do cilindro estão situadas em planos paralelos.



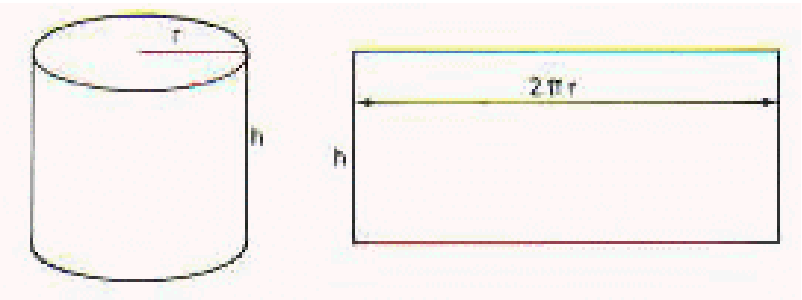
8.2.1.2. SUPERFÍCIE DO CILINDRO

Recordando da Geometria plana:

- comprimento de uma circunferência de raio r → **C = 2πr**.
- Área de um círculo de raio r → **S = πr^2 .**

Para visualizar mais facilmente a ***área lateral*** do cilindro os alunos podem construí-lo com cartolina, assim perceberão que a área da superfície lateral é a área de um retângulo em que um dos lados é o perímetro da base do cilindro e o outro é a altura do cilindro (h). Portanto, a área lateral é dada por:

$$\boxed{A_l = 2\pi r h}$$



A ***área total*** é a soma das áreas das bases (A_b) com a área lateral:

$A_t = A_l + 2A_b$.

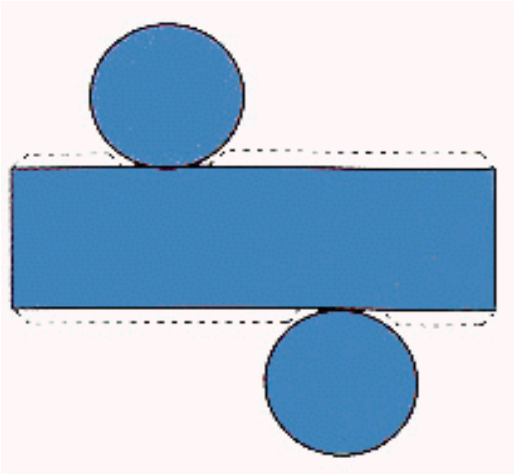
Uma vez que $A_b = \pi r^2$, vem que: $A_t = 2\pi r h + 2 \pi r^2$.

8.2.1.3. VOLUME DO CILINDRO

O volume do cilindro é o produto da área da base pela altura. Então num cilindro circular reto de raio r e altura h, temos:

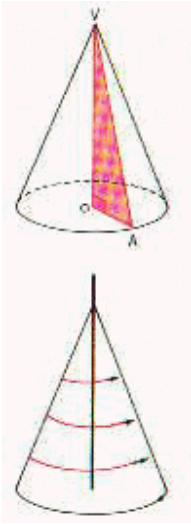
$$\boxed{V = A_b . h \rightarrow V = \pi r^2 . h}$$

8.2.1.4. PLANIFICAÇÃO



8.2.2. CONE RETO OU DE REVOLUÇÃO

É o sólido geométrico obtido quando giramos um torno de uma reta uma região triangular cujo contorno e um triângulo retângulo.



8.2.2.1. ELEMENTOS DO CONE

- **Base** é uma face plana em forma de círculo com raio r.
- **Altura** é a distância entre o vértice V e a base.

- **Eixo** é a reta que passa pelo vértice V e o centro 0 da base. Quando o eixo é inclinado em relação à base se diz que o **cone é oblíquo**.
- **Geratriz** é o segmento de reta que une o vértice a um ponto da circunferência da base.

O vértice do cone está a igual distância de todos os pontos da circunferência da base.

8.2.2.2 SUPERFÍCIE DO CONE

Como a base é um círculo, temos: $\boldsymbol{A_b = \pi r^2}$

Na planificação do cone os alunos poderão observar que s superfície lateral é um setor circular de raio g, cujo arco tem um comprimento $\mathbf{C = 2\pi r}$.

Assim, temos:

Área do setor = $\dfrac{\text{comprimento x raio}}{2}$

Área lateral = área do setor

Como no cone comprimento = $2\pi r$ e raio = g, temos:

$$A_l = \frac{2\pi r \,.\, g}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A_l = \pi r g}$$

A área total é a soma da base com a área do setor. Então:

$$A_t = A_l + A_b \Rightarrow A_t = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow \boldsymbol{A_t = \pi r (g + r)}$$

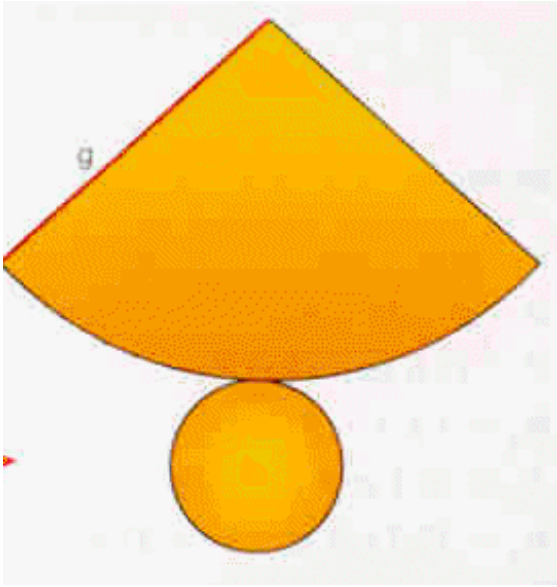
8.2.2.3. VOLUME DO CONE

O volume de um cone circular reto é o produto de $\frac{1}{3}$ da área da base pela medida da altura.

Então, num cone circular reto de raio r e de altura h, temos:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} A_b \,.\, h} \Rightarrow \mathbf{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$$

8.2.2.4. PLANIFICAÇÃO



8.2.3. ESFERA

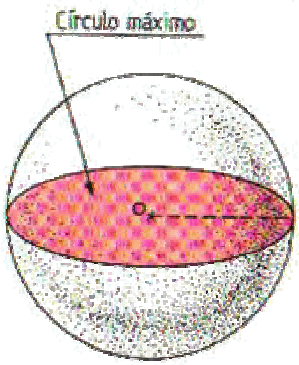
Sejam dados um ponto **0** e um número real r positivo.

O conjunto de todos os pontos P do espaço cujas distâncias ao ponto 0 são iguais a r é denominado **superfície esférica do cento 0 e raio r.**

O sólido limitado por uma superfície esférica chama-se **esfera.** Desse modo, a **esfera de centro 0 e raio r** é o conjunto de pontos do espaço cujas distâncias ao ponto **0** são menores ou igual a r.

De uma forma mais simples, podemos dizer que a superfície esférica é a "casca", enquanto a esfera é a reunião da "casca" com o "miolo".

Naturalmente, as denominações **centro e raio** são aplicadas indiferentemente a uma superfície esférica ou à esfera por ela limitada.



8.2.3.1. ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A área da superfície esféria é dada por:

$$\boxed{A = 2\,\pi\, r^2}$$

8.2.3.2. VOLUME DA ESFERA

É possível calcular a ***área da superfície de uma esfera*** através da expressão:

$$\boxed{A = 4\,p\,r^2}$$

onde *r* é o raio de um círculo máximo (secção obtida na esfera por um plano que passa pelo centro).

A esfera não pode ser planificada.

9. CONCLUSÃO

Todas as vezes que os alunos questionam " Para que serve a geometria?", torna-se um desafio para o professor responder a esta pergunta. Para a justificar, o professor tenta buscar no mundo que o rodeia exemplos concretos, sentindo-se necessidade de explorar a matemática e o real.

A geometria fascina, pois, tudo nela é tão bonito e real, todas as formas geométricas fazem parte da nossa vida, desde o nosso corpo à nossa casa, nosso jardim até o Universo.

Por que não usar os instrumentos que a vida nos dá, para explicar aos nossos alunos a importância da geometria, uma vez que eles existem e são bem mais baratos que muitos manuais cheios de conteúdos.

Presentemente os alunos vêem a geometria como algo abstrato e a sua capacidade de ver no espaço está um pouco diminuída. Em princípio, sendo o espaço o nosso meio ambiente, essa faculdade de se ver no espaço deveria ser natural para todos os alunos e para todos nós. Mas não é bem assim, talvez com a ajuda de modelos de sólidos geométricos, possamos contornar esta dificuldade.

A elaboração deste trabalho revelou-se muito interessante. Apesar do trabalho despendido, os resultados foram satisfatórios, ultrapassando assim todas as dificuldades encontradas.

BIBLIOGRAFIA

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

***(In Geometria, p. 14)* - professor Alexandrov**

Abrantes, P., & Carvalho, R. F. (1985). *M9 - Matemática - 9º ano* (1ª ed.). Porto: Texto Editora.

Campos, A. (1990). *Vector 9* (2ª ed.). Porto: Areal Editores.

Cruz, A., Vázquez, M. E., Lourenço, M. E., & Pinto, M. L. (1993). *Matemática 7*. Porto: Porto Editora.

Cruz, A., Vázquez, M. E., & Pinto, M. L. (1994). *Matemática 9*. Porto: Porto Editora.

Frederique, F., & Loureiro, F. (1997). *Matemática 7*. Amadora: Constância.

Giovanni, J.R., Bonjorno, J.R., Giovanni Jr., J.R., Matemática Fundamental – Volume Único, 2º Grau. FTD Editora.

Jorge, A. M. B., Alves, C. B., Fonseca, G., & Barbedo, J. (1996). *Infinito 10* (1ª ed.). Porto: Areal Editores.

Lopes, A. V., Bernardes, A. et al (1992). *Matemática 7* (1ª ed.). Porto: Edições Contraponto.

Neves, M. A. F., & Brito, M. L. C. (1995). *Matemática 9º Ano: Livro de Texto* (1ª ed.). Porto: Porto Editora.

Neves, M. A. F., & Faria M. L. M. (1997). *Matemática 7: Livro de Texto* (1ª ed.). Porto: Porto Editora.

Oliveira, A. F., Ralha, E., & Bastos, R. (1997). *Geometria: matemática - 10º ano de escolaridade* (1ª ed.). Lisboa: Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário.

Pesquisa na Internet.

Santos, C.A.M., Gentil, N., Greco, S.E., Matemática: Série Novo Ensino Médio. Editora Ática.