

**unesp**  UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

**FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**ESTUDO DAS  
LAJES**

Ilha Solteira-SP  
2004

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	4
1.1 Definição .....	4
1.2 Tipos de Lajes .....	4
1.3 Definição do Bordo .....	6
2.1. Vão Teórico.....	8
2.2 Espessura Mínima .....	8
2.3 Estimativa das Cargas Atuantes .....	9
2.4 Aberturas em Lajes.....	10
2.5 Limitação das Flechas .....	11
2.6. Cargas de Alvenaria nas Lajes .....	13
3. ESFORÇOS NAS LAJES .....	15
3.1 Princípios da Análise Estrutural .....	15
3.2 Lajes Maciças.....	15
3.3 Lajes Nervuradas.....	19
4. COMPENSAÇÃO DOS ESFORÇOS .....	21
5. ARMADURAS DE FLEXÃO .....	22
5.1 Prescrições Gerais .....	22
5.2 Taxa de Armadura .....	22
5.3 Posicionamento das Armaduras de Flexão.....	24
5.4 Armadura de Punção e Colapso Progressivo .....	27
6. REAÇÃO DE APOIO .....	28
7. FORÇA CORTANTE .....	30
7.1 Laje Sem Armadura para Força Cortante.....	30
7.2 Laje Com Armadura para Força Cortante .....	31
8. PUNÇÃO EM LAJES .....	32
8.1 Modelo de Cálculo .....	32
8.2 Tensão Solicitante nas Superfícies Críticas .....	33
8.3 Tensão Resistente nas Superfícies Críticas .....	34
8.4 Armadura de Punção Obrigatória.....	36
8.5 Disposição das Armaduras de Punção .....	36
9. EXERCÍCIOS .....	38
9.1 Lajes .....	38
9.2 Punção .....	51

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ocorrência de aberturas em lajes .....	11
Figura 2 – Armadura positiva: laje sobre vigas.....	24
Figura 3 – Armadura negativa: bordas engastadas.....	24
Figura 4 – Armadura negativa – bordas apoiadas .....	25
Figura 5 – Lajes em balanço .....	25
Figura 6 – Lajes com bordas livres e aberturas.....	25
Figura 7 – Armaduras nas lajes sem vigas .....	26
Figura 8 – Planta de armação: notação gráfica esquemática.....	26
Figura 9- Armadura de punção e colapso progressivo.....	27
Figura 10 – Ancoragem das armaduras das lajes .....	30
Figura 11 – Perímetro crítico em pilares internos .....	34
Figura 12 – Disposição da armadura de punção .....	36
Figura 13 –Detalhe armadura de punção e conectores.....	37

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -Valores de ( $\psi_2$ ) para lajes armadas em 1 direção .....	11
Tabela 2 - Valores de ( $\psi_2$ ) para lajes armadas em 2 direções.....	12
Tabela 3 - Valores de ( $\psi_3$ ) .....	12
Tabela 4 – Valores mínimos para lajes sem armaduras ativas.....	22
Tabela 5 – Taxas mínimas de armaduras passivas aderentes.....	23
Tabela 6 - Valores do coeficientes: $K_x$ , $K'_x$ , $K_y$ e $K'_y$ : .....	29
Tabela 7 – Valores de $K$ .....	34

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Definição

A norma (item 14.4.2.1) define placas como sendo elementos de superfície plana sujeitos principalmente a ações normais a seu plano. As placas de concreto são usualmente denominadas lajes e a norma estipula que lajes com espessura maior que  $1/3$  do vão devem ser estudadas como placas espessas. As prescrições sobre as lajes estão contidas nos itens 13.2.4, 13.2.5.2, 13.3, 14.7, 19 e 20 da NBR-6118/2003.

As lajes, na maioria das vezes, destinam-se a receber as cargas verticais que atuam nas estruturas de um modo geral, transmitindo-as para os respectivos apoios, que comumente são vigas localizadas em seus bordos, podendo ocorrer também a presença de apoios pontuais (pilares).

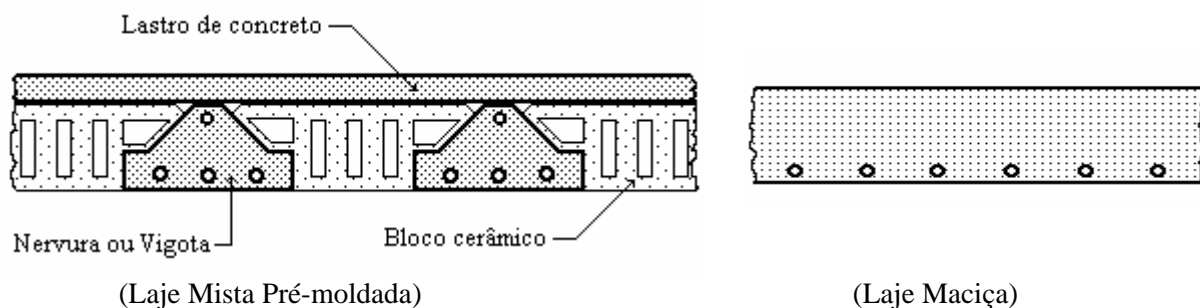
## 1.2 Tipos de Lajes

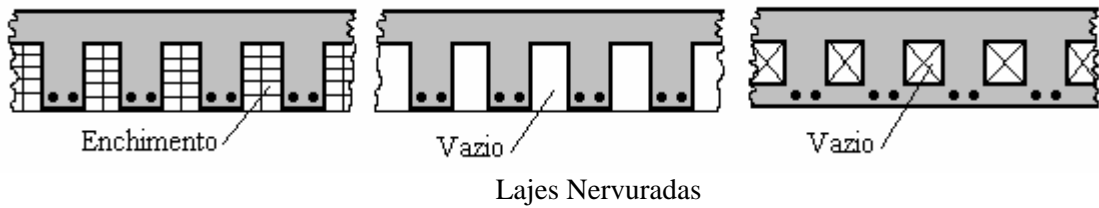
Na prática, existem diferentes tipos de lajes que são empregadas nas obras de um modo geral, sendo que podem ser classificadas da seguinte forma:

- Quanto a sua composição e forma;
- Quanto ao tipo de apoio;
- Quanto ao esquema de cálculo.

### a) Quanto a sua composição e forma, as lajes podem ser:

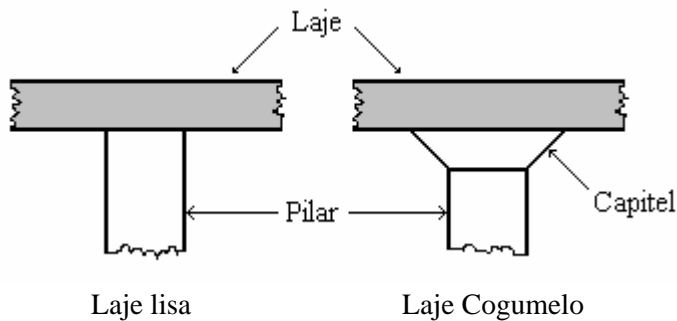
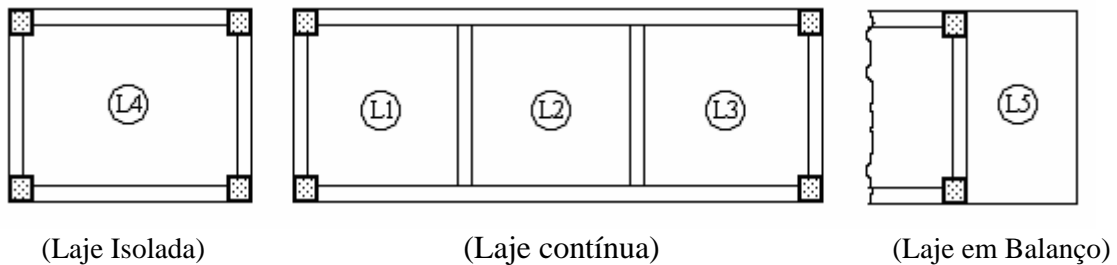
- Lajes mistas pré-moldadas;
- Lajes mistas moldadas na obra;
- Lajes maciças;
- Lajes nervuradas (item 14.7.7).



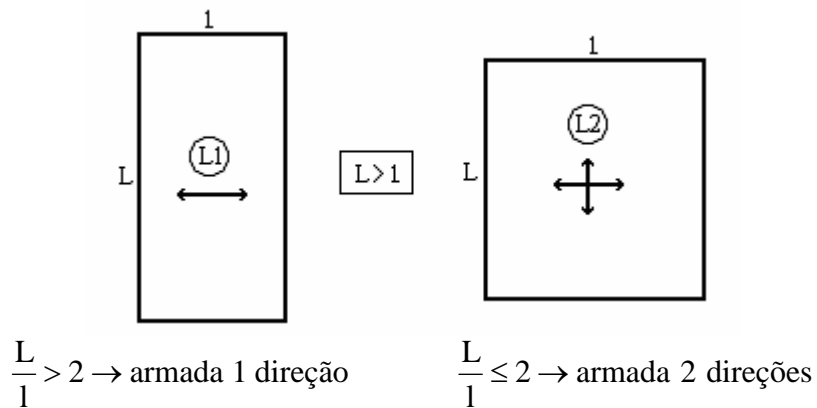


**b) Quanto ao tipo de apoio, as lajes podem ser:**

- Lajes contínuas;
- Lajes isoladas;
- Lajes em balanço;
- Lajes cogumelo e lisas (item 14.7.8).



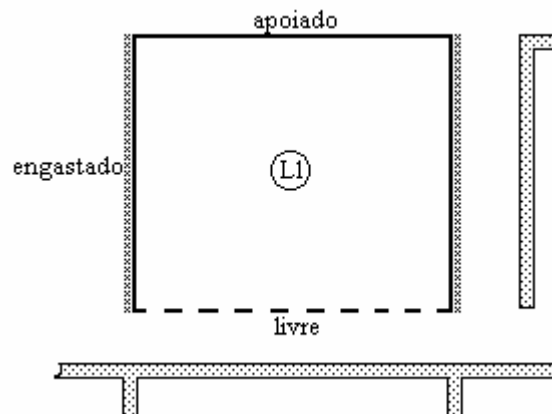
**c) Quanto ao esquema de cálculo, as lajes podem ser:**



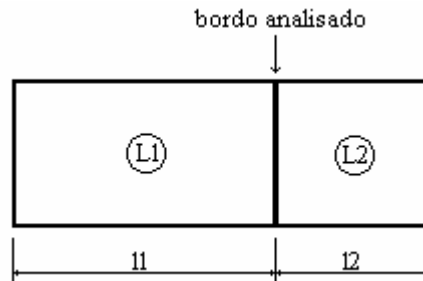
### 1.3 Definição do Bordo

Para o emprego da maioria dos processos de cálculos correntes, é necessário que cada painel individual de laje apresente as condições de bordo bem definidas.

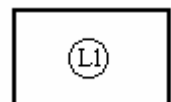
Os bordos das lajes são ditos de engastados, apoiados ou livres, adotando-se a seguinte representação gráfica para os mesmos:



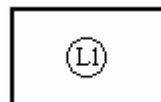
#### i) Relação Entre Vãos:



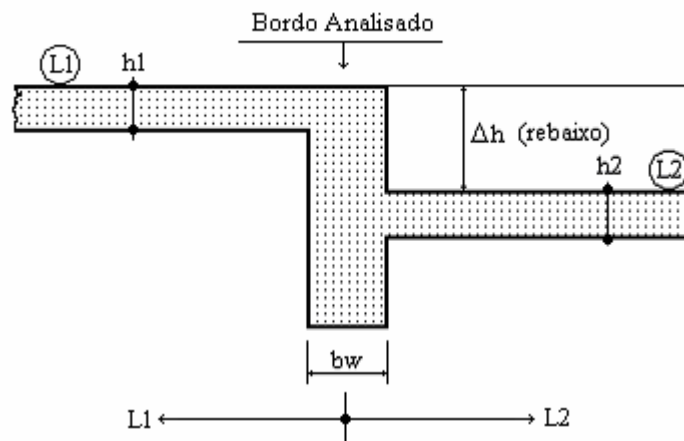
. Se  $l_2 \geq \frac{1}{4} l_1 \rightarrow L_1$  engasta em  $L_2$ :



. Se  $l_2 < \frac{1}{4} l_1 \rightarrow L_1$  apoia em  $L_2$ :



#### ii) Laje Rebaixada:



- . Se  $\begin{cases} \Delta h \leq h_1 \\ b_w \geq h_{\min} \end{cases} \rightarrow$  bordo engastado
- . Se  $\begin{cases} \Delta h > h_1 \\ L \leq 2,5m \end{cases} \rightarrow$  bordo apoiado
- . Se  $\begin{cases} \Delta h > h_1 \\ L > 2,5m \\ b_w \geq h_{\min} \end{cases} \rightarrow$  bordo engastado

Onde:

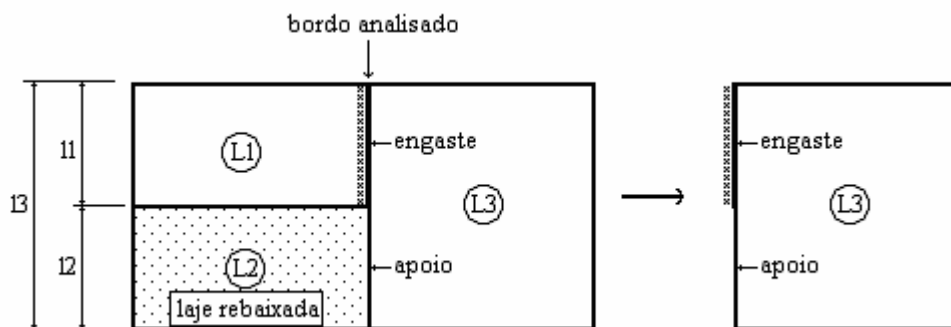
$h_1$  = espessura da laje superior;

$h_2$  = espessura da laje inferior;

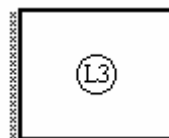
$h_{\min}$  = o menor entre  $h_1$  e  $h_2$ ;

$L$  = o menor vão entre as duas lajes ( $L_1, L_2$ ).

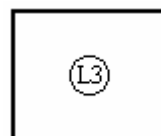
### iii) Engaste Parcial:



- . Se  $l_1 \geq \frac{2}{3} l_3 \rightarrow$  bordo engastado:



- . Se  $l_1 < \frac{2}{3} l_3 \rightarrow$  bordo apoiado:



## 2. DISPOSIÇÕES NORMATIVAS

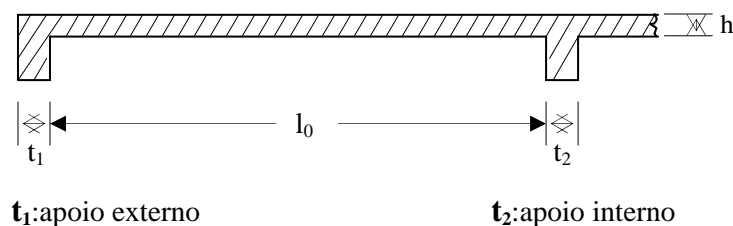
A seguir são apresentadas as recomendações feitas pela NBR-6118, para as lajes executadas em concreto armado:

### 2.1. Vão Teórico

(item 14.7.2.2)

O vão teórico ou efetivo ( $l_{ef}$ ) das lajes e placas, é o valor da distância entre os apoios que deve ser empregado no processo da análise estrutural, em cada direção. Quando os apoios puderem ser considerados suficientemente rígidos quanto à translação vertical, o vão efetivo deve ser calculado da seguinte forma:

$$l_{ef} = l_0 + a_1 + a_2 \quad ; \quad a_1 \leq \begin{cases} \frac{t_1}{2} \\ 0,3 \cdot h \end{cases} \quad ; \quad a_2 \leq \begin{cases} \frac{t_2}{2} \\ 0,3 \cdot h \end{cases}$$



### 2.2 Espessura Mínima

(item 13.2.4.1)

#### 2.2.1 Lajes maciças

- Lajes de cobertura não em balanço →  $h \geq 5\text{cm}$
- Lajes de pisos e lajes de cobertura em balanço →  $h \geq 7\text{cm}$
- Lajes que suportarem veículos de peso total  $\leq 30\text{kN}$  →  $h \geq 10\text{cm}$
- Lajes que suportarem veículos de peso total  $> 30\text{kN}$  →  $h \geq 12\text{cm}$
- Lajes lisas e lajes cogumelo →  $h \geq 14\text{cm}$

#### 2.2.2 Lajes nervuradas

- Espessura da mesa quando não houver tubulações horizontais embutidas:

$$h_f \geq \begin{cases} 1/15 \cdot \text{distância entre nervuras} \\ 3\text{cm} \end{cases}$$

- Espessura da mesa quando houver tubulações embutidas com  $\phi \leq 12,5\text{mm}$ :  $h_f \geq 4\text{cm}$

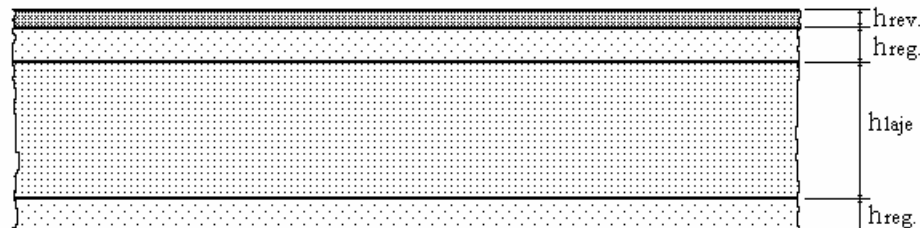


- Espessura das nervuras:  $b_w \geq 5\text{cm}$
- Espessura das nervuras que contenham armaduras de compressão:  $b_w \geq 8\text{cm}$

### 2.3 Estimativa das Cargas Atuantes

As cargas atuantes nas lajes são de natureza permanente (g) e de natureza acidental (q). Os valores dessas são indicadas pela NBR-6120. As cargas de natureza permanente que atuam nas lajes são compostas basicamente por:

- Peso próprio da laje;
- Peso da regularização;
- Peso do enchimento;
- Peso do revestimento;
- Peso dos elementos construtivos fixos;
- Peso das instalações permanentes; outras.



Peso específico dos materiais:

- Concreto armado →  $25 \text{ kN/m}^3$
- Concreto simples →  $24 \text{ kN/m}^3$
- Alvenaria de tijolos furados →  $13 \text{ kN/m}^3$
- Alvenaria de tijolos maciços →  $18 \text{ kN/m}^3$
- Argamassa (cimento e areia) →  $21 \text{ kN/m}^3$
- Cerâmica →  $18 \text{ kN/m}^3$
- Ipê, angico, cabriúva →  $10 \text{ kN/m}^3$

As cargas de natureza acidental que atuam nas lajes são provenientes de pessoas, móveis, veículos, etc. A seguir, apresentam-se alguns valores indicados pela NBR-6120:

a) Edifícios residenciais:

- Dormitório, sala, copa, cozinha, banheiro →  $1,5 \text{ kN/m}^2$
- Despensa, área de serviço, lavanderia →  $2,0 \text{ kN/m}^2$

b) Escadas:

- Com acesso ao público (área comum) →  $3,0 \text{ kN/m}^2$
- Sem acesso ao público (área privativa) →  $2,0 \text{ kN/m}^2$

c) Hall:

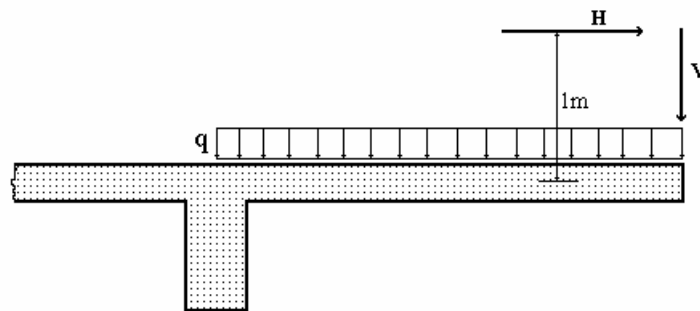
- Com acesso ao público (área comum) →  $3,0 \text{ kN/m}^2$
- Sem acesso ao público (área privativa) →  $2,5 \text{ kN/m}^2$

d) Terraços:

- Com acesso ao público → 3,0 kN/m<sup>2</sup>
  - Sem acesso ao público → 1,5 kN/m<sup>2</sup>
  - Inacessíveis à pessoas → 0,5 kN/m<sup>2</sup>
- e) Forros sem acesso à pessoas → 0,5 kN/m<sup>2</sup>

### Lajes em balanço:

Nas lajes em balanço, que se destinam a sacadas, além das cargas permanentes e acidentais citadas acima, devem ser considerados os seguintes carregamentos:



Onde:

- q = carga acidental do compartimento que lhe dá acesso;
- H = 0,8 kN/m;
- V = 2,0 kN/m

## 2.4 Aberturas em Lajes

(item 13.2.5)

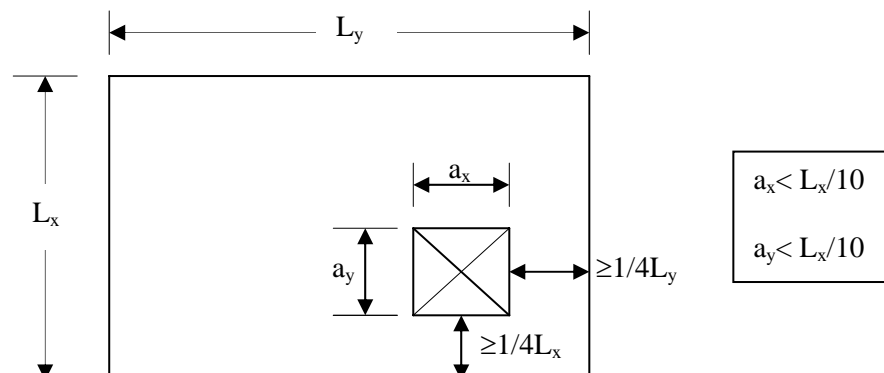
Quando forem previstos furos e aberturas em lajes, seu efeito na resistência e na deformação deve ser verificado quando se tratar de lajes lisas ou cogumelo, respeitando-se os limites impostos na norma.

Os demais tipos de lajes estão dispensados dessa verificação, devendo ser armadas em duas direções e verificadas, simultaneamente, as seguintes condições:

- i) As dimensões da abertura devem corresponder no máximo a 1/10 do menor vão ( $l_x$ ) (ver

Figura 1);

- ii) A distância entre a face de uma abertura e uma borda livre da laje deve ser igual ou maior que  $1/4$  do vão, na direção considerada;



**Figura 1 – Ocorrência de aberturas em lajes**

iii) A distância entre faces de aberturas adjacentes deve ser maior que a metade do menor vão.

## 2.5 Limitação das Flechas

(item 13.3)

Deslocamentos limites (ou flechas) são valores práticos utilizados para verificação em serviço do estado limite de deformações excessivas da estrutura. A norma define quatro grupos básicos, a saber:

- i) **Aceitabilidade sensorial:** o limite é caracterizado por vibrações indesejáveis ou efeito visual desagradável;
- ii) **Efeitos específicos:** os deslocamentos podem impedir a utilização adequada da construção;
- iii) **Efeitos em elementos não estruturais:** deslocamentos estruturais podem ocasionar o mau funcionamento de elementos que, apesar de não fazerem parte da estrutura, estão a ela ligados;
- iv) **Efeitos em elementos estruturais:** os deslocamentos podem afetar o comportamento do elemento estrutural, provocando afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas. Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados.

O item 13.3 da norma apresenta valores limites para cada tipo de deslocamento, com comentários e observações adicionais.

Apresenta-se a seguir um critério prático que permite a obtenção de lajes relativamente rígidas em função de sua altura útil (d):

$$d \geq \frac{l}{\psi_2 \cdot \psi_3}$$



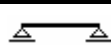

Onde:

l = menor vão teórico da laje;


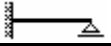

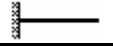
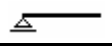
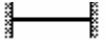
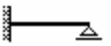

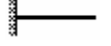

$\psi_2$  = valor que depende das condições de bordo;

$\psi_3$  = valor que depende do aço empregado.

**Tabela 1 - Valores de ( $\psi_2$ ) para lajes armadas em 1 direção**

			
1,70	1,20	1,00	0,50

**Tabela 2 - Valores de ( $\psi_2$ ) para lajes armadas em 2 direções**

$I \downarrow$	$L \rightarrow$	L/l					
		1,0	2,20	2,00	1,90	1,70	1,70
		1,2	2,10	1,94	1,86	1,70	1,70
		1,4	2,00	1,88	1,82	1,70	1,70
		1,6	1,90	1,82	1,76	1,70	1,70
		1,8	1,80	1,76	1,74	1,70	1,70
		$\geq 2,0$	1,70	1,70	1,70	1,70	1,70
		1,0	2,00	1,80	1,70	1,40	1,30
		1,2	1,88	1,72	1,64	1,38	1,30
		1,4	1,76	1,64	1,58	1,36	1,30
		1,6	1,64	1,56	1,52	1,34	1,30
		1,8	1,52	1,48	1,46	1,32	1,30
		$\geq 2,0$	1,40	1,40	1,40	1,30	1,30
		1,0	1,90	1,70	1,50	1,10	1,00
		1,2	1,76	1,55	1,42	1,08	1,00
		1,4	1,62	1,46	1,34	1,06	1,00
		1,6	1,48	1,34	1,26	1,04	1,00
		1,8	1,34	1,22	1,16	1,02	1,00
		$\geq 2,0$	1,20	1,10	1,10	1,00	1,00
		1,0	1,70	1,40	1,10	0,70	0,60
		1,2	1,45	1,22	0,98	0,66	0,58
		1,4	1,22	1,04	0,86	0,62	0,56
		1,6	0,98	0,86	0,74	0,58	0,54
		1,8	0,74	0,68	0,62	0,54	0,52
		$\geq 2,0$	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
		1,0	1,50	1,30	1,00	0,60	0,50
		1,2	1,46	1,14	0,90	0,58	0,46
		1,4	1,22	0,96	0,60	0,56	0,42
		1,6	0,98	0,82	0,70	0,54	0,38
		1,8	0,74	0,66	0,60	0,52	0,34
		$\geq 2,0$	0,50	0,50	0,50	0,50	0,30

**Tabela 3 - Valores de ( $\psi_3$ )**

Aço utilizado	Laje maciça	Laje nervurada
CA-25	35	25
CA-32	33	22
CA-40	30	20
CA-50	25	17
CA-60	20	15

**Observação:**

Atenção especial deverá ser dada para as lajes com mais de 4m de vão teórico (L), que suportarem paredes, na direção do vão, suscetíveis de fissuração.

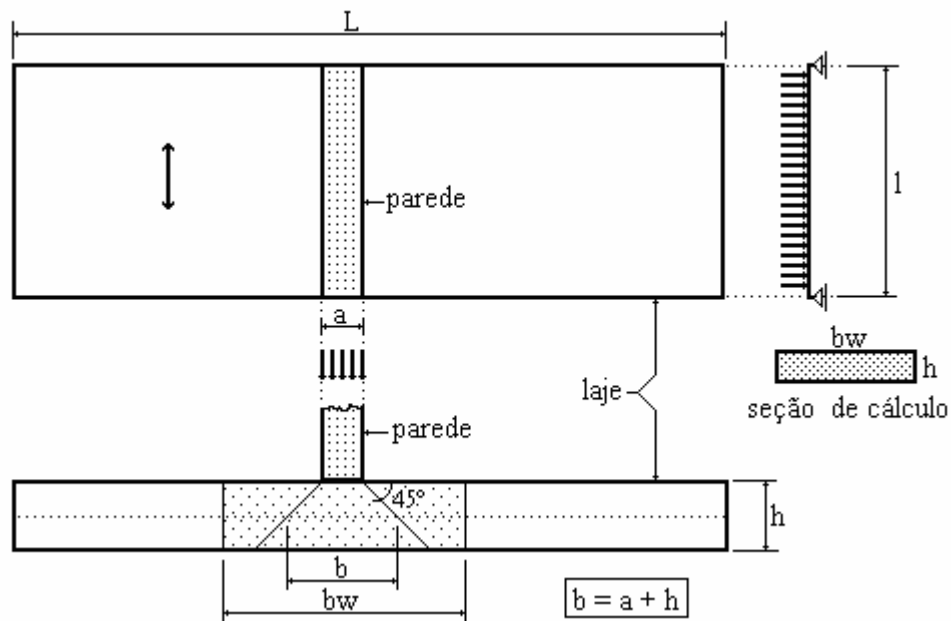
**2.6. Cargas de Alvenaria nas Lajes**

Quando existirem paredes que se apóiam diretamente sobre as lajes, o seu peso próprio deverá ser considerado como sendo uma carga permanente, da seguinte forma:

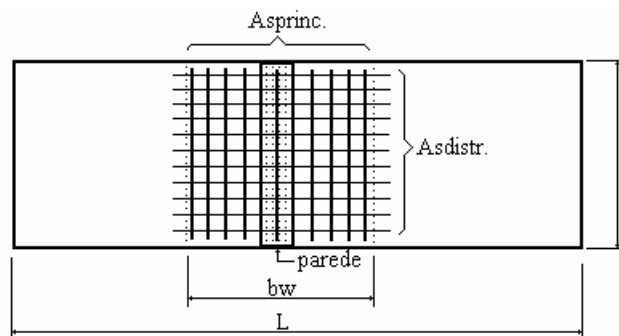
**2.6.1. Lajes armadas em 1 direção**

**a) Alvenaria segundo a menor dimensão:**

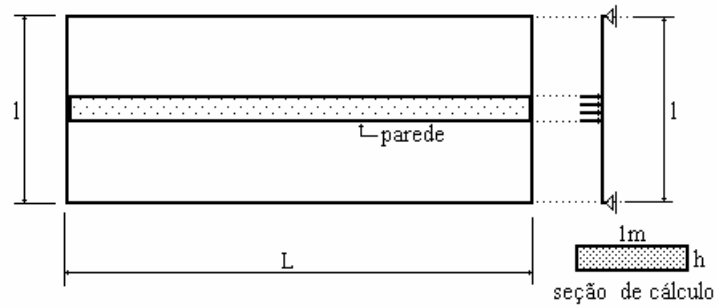
A carga da parede será suposta distribuída uniformemente segundo uma faixa de largura (b) e o trecho será dimensionado como uma viga de largura ( $b_w$ ), altura (h) e vão teórico (l):



$$b_w = \frac{b}{2} + \frac{l}{2}$$



**b) Alvenaria segundo a maior dimensão:**



**2.6.2. Lajes armadas em 2 direções**

Um critério muito simplista, consiste em considerar que o peso total da parede se distribua uniformemente por sobre toda a laje.

## 3. ESFORÇOS NAS LAJES

### 3.1 Princípios da Análise Estrutural

(item 14.7)

Segundo a norma, estruturas de placas podem ser analisadas admitindo as seguintes hipóteses:

- Manutenção da seção plana após a deformação;
- Representação dos elementos por seu plano médio.

A determinação dos esforços solicitantes nas lajes envolve modelos matemáticos complexos de cálculos de placas, sendo portanto de utilização pouco prática. Assim, é comum a utilização de processos simplificados que permitem a determinação dos esforços solicitantes nas lajes, sendo que os mesmos devem atender às prescrições da NBR-6118.

A análise do comportamento estrutural pode ser efetuada por diferentes métodos, a saber:

- i) **Análise linear, com ou sem redistribuição dos esforços:** aplicam-se os métodos baseados na teoria da elasticidade, com coeficiente de Poisson igual a 0,2, que considera o concreto armado como se fosse um material homogêneo, de comportamento elástico
- ii) **Análise plástica:** para a consideração do estado limite último, a análise de esforços pode ser realizada através da teoria das charneiras plásticas, que considera o concreto armado em regime rígido-plástico, admitindo portanto a presença de fissuras.
- iii) **Análise não-linear:** são permitidas para verificações de estados limites últimos e de estados limites de serviço.

Existem diversas tabelas que possibilitam calcular as lajes com base na teoria da elasticidade, fornecendo os valores de momentos, reações de apoios e flechas, tais como:

- Tabelas de Bares;
- Tabelas de Czerny;
- Tabelas de Marcus, entre outras.

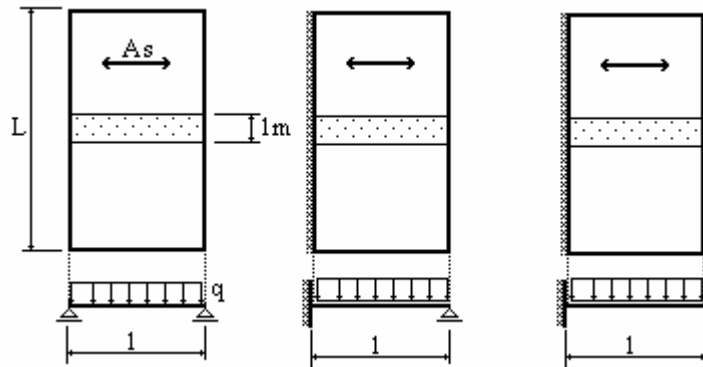
### 3.2 Lajes Maciças

(item 13.2.4 e 14.7.6)

#### 3.2.1 Lajes armadas em uma direção

Quando um painel de laje apresentar a relação de lados maior que dois, de maneira muito simplificada pode-se calcular os esforços apenas na direção do menor vão. Na outra direção (maior vão), coloca-se uma armadura mínima de distribuição recomendada por norma.

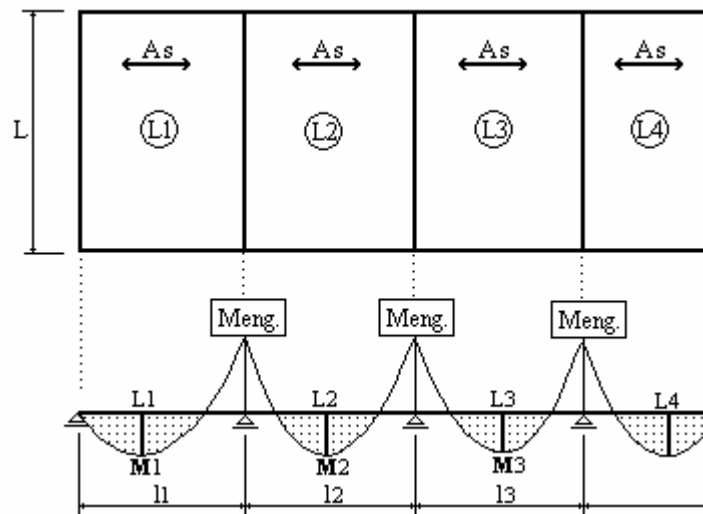
**a) Lajes Isoladas:**



**b) Lajes Contínuas:**

As lajes contínuas armadas em 1 direção e com cargas uniformemente distribuídas, poderão ser calculadas como vigas contínuas, desde que observada a seguinte condição:

- Não serão considerados momentos positivos menores do que se houvesse engastamento perfeito nos apoios:



$$M_1 \geq \frac{q_1 \cdot l_1^2}{14,22} \quad ; \quad M_2 \geq \frac{q_2 \cdot l_2^2}{24} \quad ; \quad M_3 \geq \frac{q_3 \cdot l_3^2}{24}$$

**3.2.2 Lajes Armadas em duas direções**

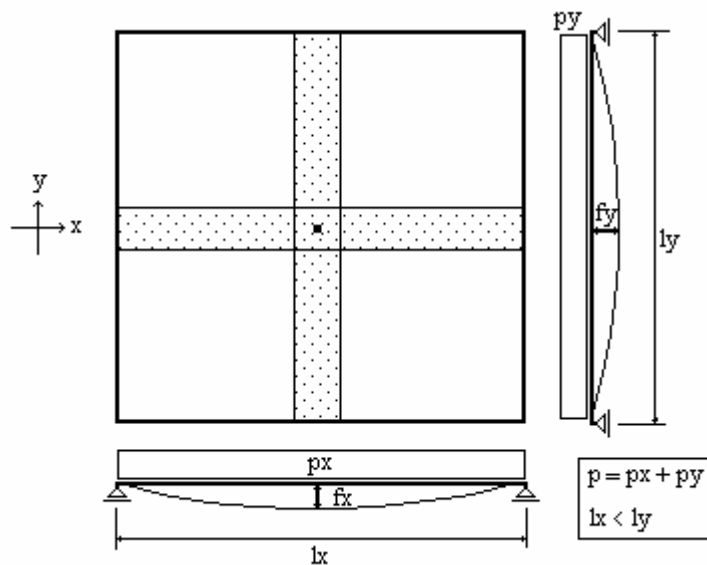
Serão apresentados aqui dois processos para o cálculo de esforços em lajes, que são o Processo das Grelhas e o Processo de Marcus, ambos originados da Teoria da Elasticidade. Esses dois processo estão intimamente ligados como se verá adiante.



### 3.2.2.1 Processo das grelhas

É adotado principalmente para o cálculo de esforços em lajes nervuradas. A idéia básica desse processo consiste em considerar que um painel de laje seja constituído de apenas duas faixas de larguras unitárias e ortogonais entre si, formando assim uma pequena grelha.

Do estudo das grelhas, sabe-se que cada faixa é responsável por conduzir parte (quinhão) do carregamento total ( $p$ ) até os respectivos apoios. Uma vez conhecido esse quinhão de carga que atua em cada faixa ( $p_x$  e  $p_y$ ), pode-se determinar os diagramas de momento e cortante, conhecendo-se as condições de contorno do painel.



A montagem do problema é conduzida com base nas seguintes hipóteses:

- As faixas são independentes entre si;
- Os quinhões de carga são constantes em cada direção;
- O carregamento é uniformemente distribuído na faixa.

Para o caso da laje simplesmente apoiada dada acima, e considerando que por hipótese inicial a carga seja uniformemente distribuída em cada faixa, pode-se escrever os valores das flechas no ponto central comum às duas faixas:

$$f_x = \frac{5}{384} \frac{p_x \cdot l_x^4}{E \cdot I_x} \quad \text{e} \quad f_y = \frac{5}{384} \frac{p_y \cdot l_y^4}{E \cdot I_y}$$

Considerando que ( $E \cdot I_x = E \cdot I_y$ ) e com base na condição de compatibilidade de deformações ( $f_x = f_y$ ), resulta:

$$p_x \cdot l_x^4 = p_y \cdot l_y^4 \quad (+ p_x \cdot l_y^4)$$

$$p_x (l_x^4 + l_y^4) = l_y^4 \cdot (p_x + p_y)$$

definindo  $\lambda = l_y/l_x$  e por condição de equilíbrio ( $p = p_x + p_y$ ), resulta:

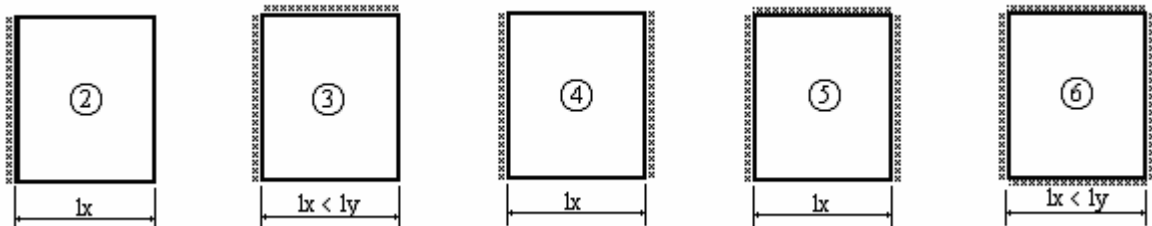
$$p_x = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4} \cdot p \quad \text{e} \quad p_y = \frac{1}{1 + \lambda^4} \cdot p \quad \text{ou:}$$

$$p_x = K_x \cdot p \quad \text{e} \quad p_y = K_y \cdot p$$

Conhecidos os valores de ( $p_x$  e  $p_y$ ) pode-se determinar momentos e reações de apoio para cada faixa, como segue:

$$M_x = K_x \cdot p \cdot \frac{l_x^2}{8} \quad ; \quad M_y = K_y \cdot p \cdot \frac{l_y^2}{8} \quad ; \quad R_x = K_x \cdot p \cdot \frac{l_x}{2} \quad ; \quad R_y = K_y \cdot p \cdot \frac{l_y}{2}$$

De forma análoga, pode-se obter os valores de ( $K_x$ ) e de ( $K_y$ ) para os demais tipos de condições de apoio para cada painel isolado:



$$p_x = \frac{5 \cdot \lambda^4}{5\lambda^4 + 2} p$$

$$p_x = \frac{\lambda^4}{\lambda^4 + 1} p$$

$$p_x = \frac{5 \cdot \lambda^4}{5\lambda^4 + 1} p$$

$$p_x = \frac{2 \cdot \lambda^4}{2\lambda^4 + 1} p$$

$$p_x = \frac{\lambda^4}{\lambda^4 + 1} p$$

$$p_y = \frac{2}{5\lambda^4 + 2} p$$

$$p_y = \frac{1}{\lambda^4 + 1} p$$

$$p_y = \frac{1}{5\lambda^4 + 1} p$$

$$p_y = \frac{1}{2\lambda^4 + 1} p$$

$$p_y = \frac{1}{\lambda^4 + 1} p$$

### 3.2.2.2 Processo de Marcus

Para as lajes maciças, o processo das grelhas apresenta resultados conservadores quando comparados com o cálculo exato, ou seja, como placa propriamente dita, por não levar em consideração a ação favorável da união entre as faixas e a existência de momentos torçores.

O processo de Marcus resultou do confronto entre esses resultados e a posterior correção dos valores obtidos através do processo da grelhas, de modo a aproximá-los mais dos valores reais das placas.

Marcus observou que o processo das grelhas fornecia valores relativamente altos para os momentos fletores positivos, propondo então coeficientes de correção para os mesmos. Os momentos negativos apresentaram valores semelhantes, não sendo portanto alterados. Os coeficientes de correção de Marcus são apresentados abaixo:

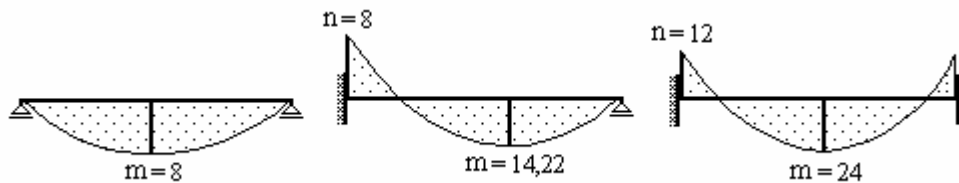
$$U_x = 1 - \frac{20 \cdot K_x}{3 \cdot m_x \cdot \lambda^2} \rightarrow \text{correção de } M_x$$

$$U_y = 1 - \frac{20 \cdot K_y \cdot \lambda^2}{3 \cdot m_y} \rightarrow \text{correção de } M_y$$

Onde:

$K_x, K_y$  → obtidos pela teoria das grelhas;

$m_x, m_y$  → coef. dos denominadores dos momentos positivos para as faixas isoladas.



Logo, o processo de Marcus fornece, a partir dos coeficientes ( $K_x, K_y$ ) obtidos no processo das grelhas e dos coeficientes de correção propostos, as seguintes expressões que permitem calcular os momentos nos painéis isolados de lajes:

$$M_x = c_x \cdot p \cdot l_x^2$$

$$M_y = c_y \cdot p \cdot l_x^2$$

$$M_{ex} = e_x \cdot p \cdot l_x^2$$

$$M_{ey} = e_y \cdot p \cdot l_x^2$$

Onde:

$M_e$  → momentos negativos;

### 3.3 Lajes Nervuradas

(item 13.2.4.1 e 14.7.7)

As lajes nervuradas são as lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração para momentos positivos está localizada nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte.

Para o projeto das lajes nervuradas devem ser obedecidas as seguintes condições:

- i) Para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras  $\leq 65\text{cm}$ , pode ser dispensada a verificação da flexão da mesa, e para a verificação do cisalhamento da região das nervuras, permite-se a consideração dos critérios de laje;
- ii) Para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras entre  $65\text{cm}$  e  $110\text{cm}$ , exige-se a verificação da flexão da mesa e as nervuras devem ser verificadas ao cisalhamento como vigas. Permite-se

essa verificação como lajes se o espaçamento entre eixos de nervuras for até 90cm e a largura média das nervuras for maior que 12cm;

- iii) Para lajes nervuradas com espaçamento entre eixos de nervuras  $> 110\text{cm}$ , a mesa deve ser projetada como laje maciça, apoiada na grelha de vigas, respeitando-se os seus limites mínimos de espessura.

Se as dimensões da laje nervurada atenderem aos requisitos do item 13.2.4.2 da norma, a laje nervurada pode ser analisada como sendo uma laje maciça, conforme o item 14.7.6 da norma, caso contrário, a laje nervurada deve ser calculada considerando-se a capa como laje maciça apoiada em grelha de vigas.

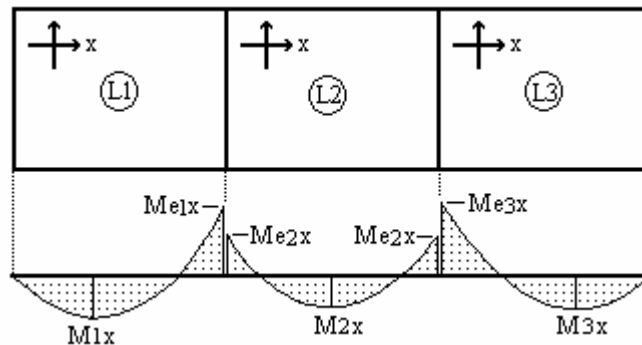
As lajes nervuradas unidirecionais devem ser calculadas segundo a direção das nervuras desprezadas a rigidez transversal e a rigidez à torção.

As lajes nervuradas bidirecionais (NBR-14859-2) podem ser calculadas, para efeito de esforços solicitantes, como lajes maciças (item 14.7.7).

## 4. COMPENSAÇÃO DOS ESFORÇOS

(item 14.7.6.2)

Nas arestas comuns entre as lajes contínuas armadas em duas direções, geralmente existem dois valores diferentes de momentos fletores negativos, pois o cálculo dos esforços é feito para cada painel isolado. Portanto, é necessário efetuar a correção desses momentos negativos e, conseqüentemente, o ajuste dos momentos positivos.



A seguir, indica-se um procedimento prático para a correção dos momentos.

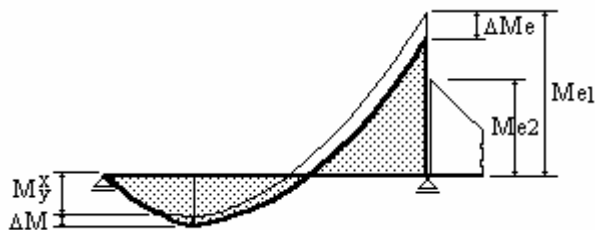
**a) Momento Negativo Final:**

$$M_{e_y}^x > \begin{cases} \frac{M_{e_y}^x(i) + M_{e_y}^x(i+1)}{2} \\ 0,8 \cdot M_{e_y}^x(\text{maior}) \end{cases}$$

**b) Momento Positivo Final:**

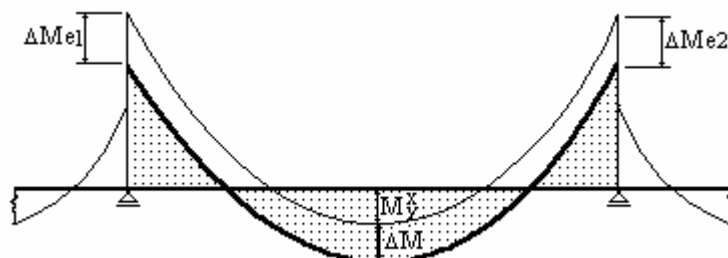
Vão externo:

$$\Delta M \cong \frac{\Delta M_e}{2}$$



Vão interno:

$$\Delta M = \frac{\Delta M_{e1} + \Delta M_{e2}}{2}$$



## 5. ARMADURAS DE FLEXÃO

### 5.1 Prescrições Gerais

(item 20.1)

Para as armaduras principais de flexão, o diâmetro máximo das barras não deve ultrapassar o valor de  $h/8$  da laje e o espaçamento ( $s$ ) entre as barras deve atender ao seguinte:

$$s \leq \begin{cases} 20cm \\ 2.h \end{cases} ; \quad \phi_l \leq \frac{hlaje}{8}$$

Nas lajes armadas em uma direção, o valor e o espaçamento das armaduras secundárias, ou de distribuição, deve atender:

$$A_{s,distr.} \geq 20\% . A_{s,princ.}$$

$$S_{distr.} \leq 33cm$$

No caso de lajes nervuradas, os estribos, quando necessários, não devem ter espaçamento superior a 20 cm.

### 5.2 Taxa de Armadura

(item 19.3.3.2)

Os valores mínimos e máximos das armaduras devem respeitar o item 17.3.5 da norma, estabelecidos para elementos lineares. Como as lajes armadas em duas direções têm outros mecanismos resistentes possíveis, os valores mínimos das armaduras positivas são reduzidos em relação aos dados no referido item, da seguinte forma:

Tabela 4 – Valores mínimos para lajes sem armaduras ativas

Armadura	Taxa mínima de armadura ( $\rho_s$ )
Negativa	$\rho_s \geq \rho_{min}$
Positiva: lajes armadas em duas direções	$\rho_s \geq 0,67 . \rho_{min}$
Positiva: lajes armadas em uma direção (principal)	$\rho_s \geq \rho_{min}$
Positiva: lajes armadas em uma direção (secundária)	$A_{s,sec.} \geq A_{s,principal}$ $A_{s,sec.} \geq 0,9 \text{ cm}^2/m$ $\rho_s \geq 0,50 . \rho_{min}$

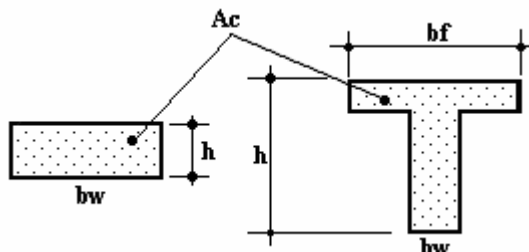
Com:

$$\rho_s = \frac{A_s}{b_w . h} \quad (\text{Taxa de armadura})$$

O valor de  $\rho_{\min}$  é definido no item 17.3.5.2.1 da norma, conforme segue abaixo:

A armadura mínima de tração em elementos de concreto deve ser determinada em função do momento fletor mínimo ( $M_{d\min}$ ) dado abaixo, respeitando-se a taxa de 0,15% em relação à área de concreto:

$$M_{d\min} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{ctk, \text{sup}} \quad ; \quad A_s \geq 0,15\% \cdot (A_c)$$



Onde:

- $W_0$  = módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativa à fibra mais tracionada;
- $f_{ctk, \text{sup}}$  = resistência característica superior do concreto à tração.

O dimensionamento para  $M_{d\min}$  deve ser considerado atendido se forem respeitadas as taxas mínimas de armadura da Tabela 5, onde:

$$\rho_{\min} = \frac{A_{s\min}}{A_c}$$

**Tabela 5 – Taxas mínimas de armaduras passivas aderentes.**

Forma da seção	Valores de $\rho_{\min}$ (%) <sup>1</sup>							
	$f_{ck}$ $\omega_{\min}$	20	25	30	35	40	45	50
Retangular	0,035	0,150	0,150	0,173	0,201	0,230	0,259	0,288
T (mesa comprimida)	0,024	0,150	0,150	0,150	0,150	0,158	0,177	0,197
T (mesa tracionada)	0,031	0,150	0,150	0,153	0,178	0,204	0,229	0,255
Circular	0,070	0,230	0,288	0,345	0,403	0,460	0,518	0,575

1- os valores de  $\rho_{\min}$  estabelecidos nesta tabela pressupõem o uso de aço CA-50,  $\gamma_c=1,4$  e  $\gamma_s=1,15$ . Caso esses fatores sejam diferentes,  $\rho_{\min}$  deve ser recalculado com base no valor de  $\omega_{\min}$  dado.  
Nota: nas seções tipo T, a área da seção a ser considerada deve ser caracterizada pela alma acrescida da mesa colaborante.

Com:

$$\omega_{\min} = \frac{A_{s\min} \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} \quad (\text{taxa mecânica mínima de armadura longitudinal de flexão}).$$

A soma das armaduras de tração e de compressão ( $A_s + A'_s$ ) não deve ter valor maior que 4% de  $A_c$ , calculada na região fora da zona de emendas.

-Recomendação do (CEB):

$$A_{s\min} = 0,10\% \cdot b_w \cdot d = 0,10 \cdot d$$





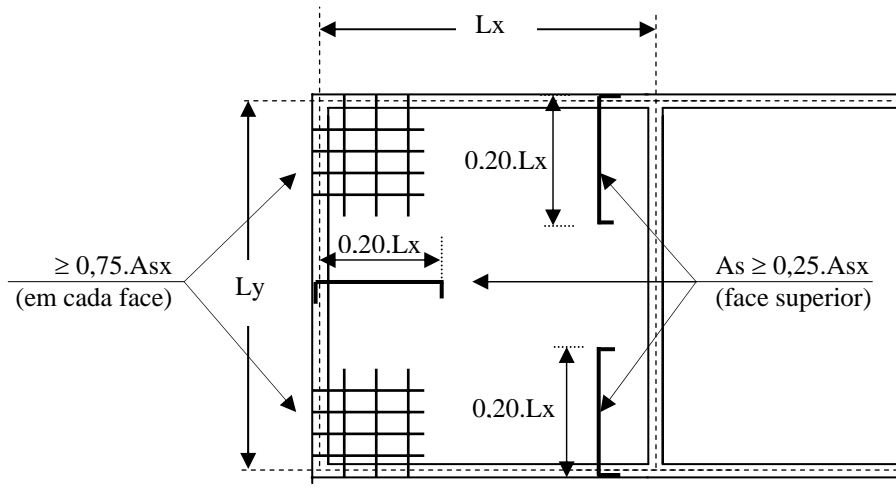


Figura 4 – Armadura negativa – bordas apoiadas

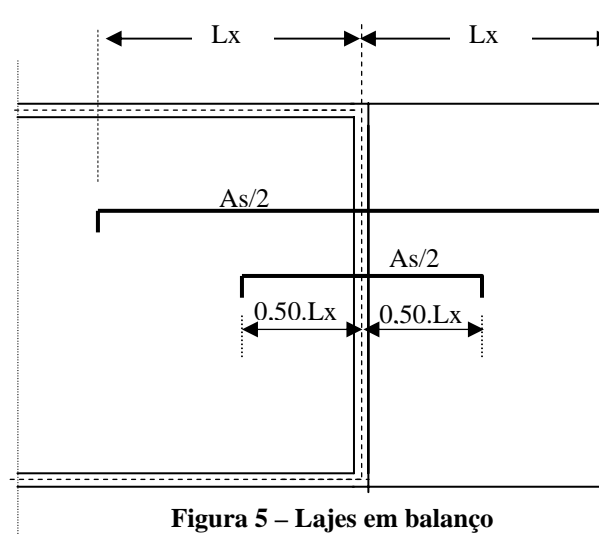


Figura 5 – Lajes em balanço

### 5.3.2 Bordas Livres e Aberturas (item 20.2)

Em bordas livres e junto às aberturas nas lajes, devem ser respeitadas as prescrições mínimas esquematizadas na Figura 6:

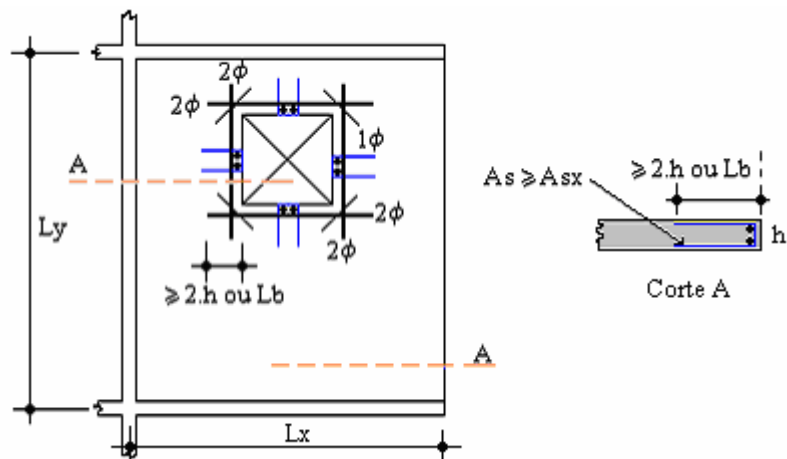


Figura 6 – Lajes com bordas livres e aberturas

### 5.3.2 Lajes sem vigas (item 20.3)

Nas lajes sem vigas, maciças ou nervuradas, calculadas pelo processo aproximado dado no item 14.7.8 da norma, devem ser respeitadas as disposições contidas na Figura 7.

Pelo menos duas barras inferiores devem passar continuamente sobre os apoios, respeitando-se também a armadura contra colapso progressivo

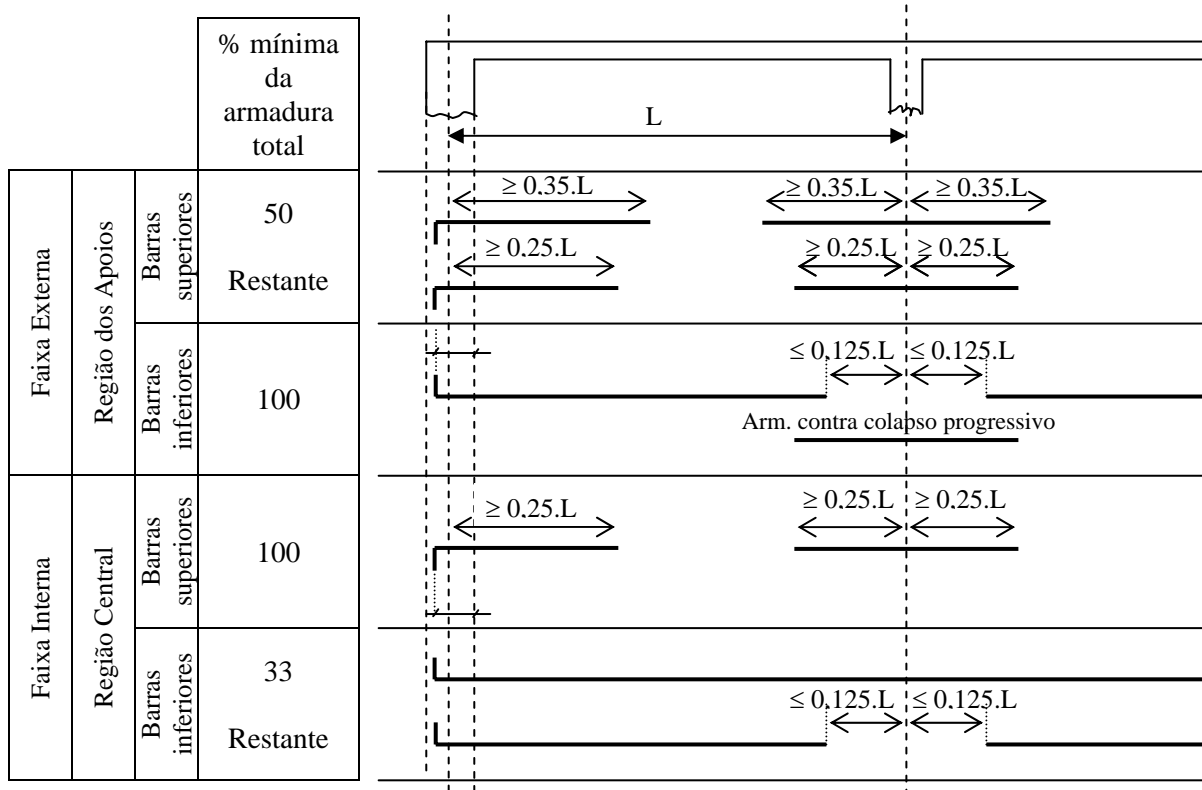


Figura 7 – Armaduras nas lajes sem vigas

### 5.3.3 Notação Gráfica

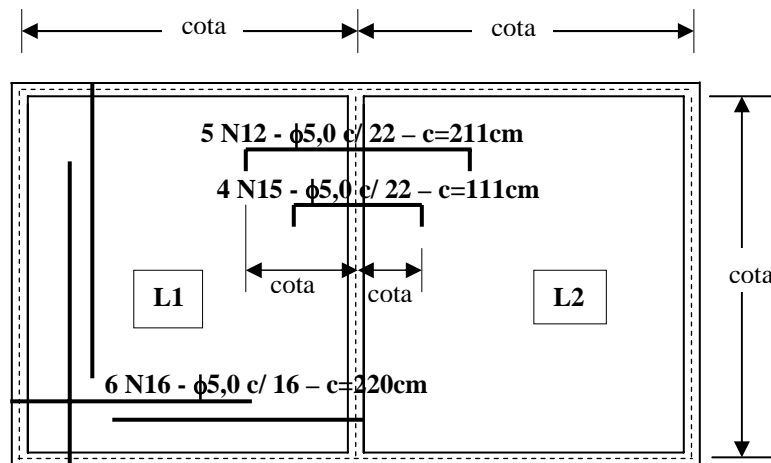


Figura 8 – Planta de armação: notação gráfica esquemática

## 5.4 Armadura de Punção e Colapso Progressivo

(item 20.4)

Quando necessárias, as armaduras para resistir à punção devem ser constituídas por estribos verticais ou conectores, com preferência pela utilização destes últimos.

O diâmetro da armadura de estribos não pode superar  $h/20$  e deve haver contato mecânico das barras longitudinais com os cantos dos estribos (ancoragem mecânica).

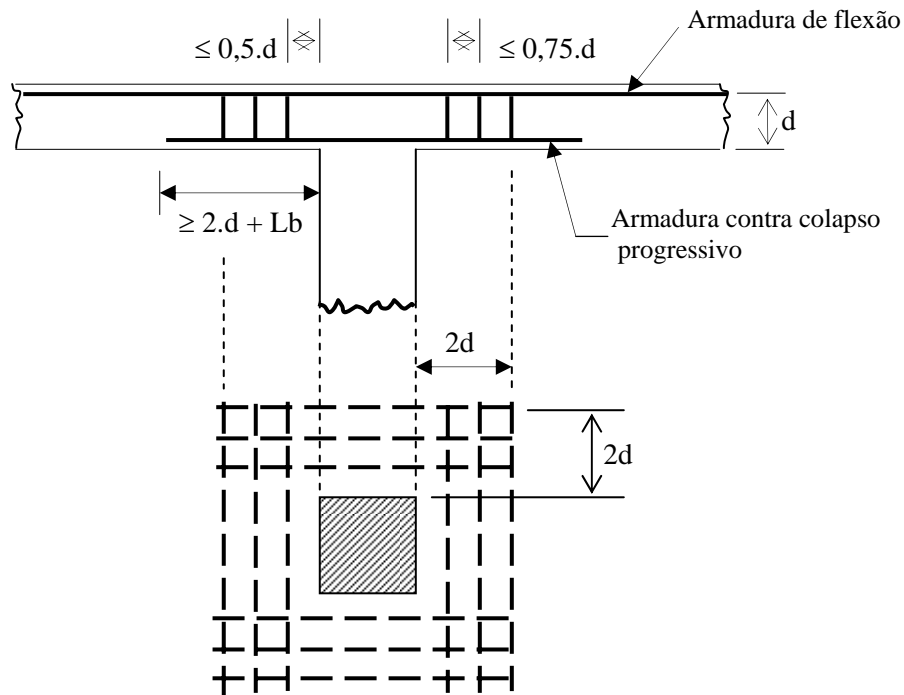


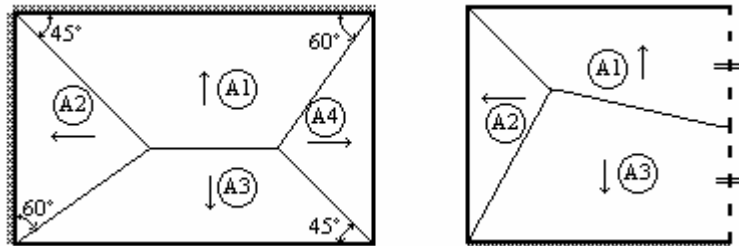
Figura 9- Armadura de punção e colapso progressivo

## 6. REAÇÃO DE APOIO

(item 14.7.6.1)

Para o cálculo das reações de apoio das lajes maciças retangulares com carga uniforme, podem ser feitas as seguintes aproximações:

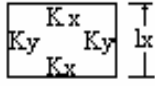
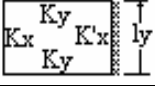
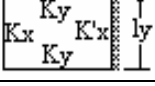
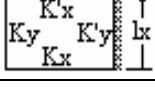
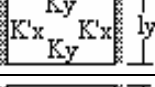
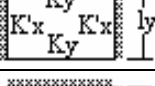
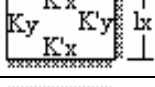
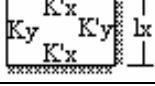
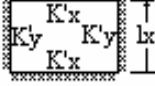
- i) As reações em cada apoios são as correspondentes às cargas atuantes nos triângulos ou trapézios determinados através das charneiras plásticas, sendo que estas podem ser, de maneira aproximada, consideradas uniformemente distribuídas sobre os elementos estruturais que lhes servem de apoio;
- ii) Quando a análise plástica não for efetuada, as charneiras podem ser aproximadas por retas inclinadas, a partir dos vértices com os seguintes ângulos:
  - 45° entre apoios do mesmo tipo;
  - 60° a partir do apoio considerado engastado, se o outro for considerado simplesmente apoiado;
  - 90° a partir do apoio, quando a borda vizinha for livre.



A NBR-6118 permite considerar que a carga ( $p$ ) que atua na laje se distribua uniformemente sobre as vigas adjacentes. A Tabela 6 fornece os valores dessas reações de apoio:

$$R_x = K_x \cdot p \cdot \frac{l_x}{2} \quad ; \quad R'_x = K'_x \cdot p \cdot \frac{l_x}{2} \quad ; \quad R_y = K_y \cdot p \cdot \frac{l_y}{2} \quad ; \quad R'_y = K'_y \cdot p \cdot \frac{l_y}{2}$$

Tabela 6 - Valores do coeficientes:  $K_x$ ,  $K'_x$ ,  $K_y$  e  $K'_y$ :

Caso	Tipo Laje	$\lambda=L_y/L_x$	$K_x$	$K'_x$	$K_y$	$K'_y$
1		$\lambda \geq 1,00$	$1,00 - \frac{0,50}{\lambda}$	-	$\frac{0,50}{\lambda}$	-
2a		$\lambda \leq 0,73$	$0,50 \cdot \lambda$	$0,87 \cdot \lambda$	$1,00 - 0,68 \cdot \lambda$	-
2b		$\lambda > 0,73$	$0,73 - \frac{0,27}{\lambda}$	$1,27 - \frac{0,46}{\lambda}$	$\frac{0,37}{\lambda}$	-
3		$\lambda \geq 1,00$	$0,73 - \frac{0,37}{\lambda}$	$1,27 - \frac{0,64}{\lambda}$	$\frac{0,37}{\lambda}$	$\frac{0,64}{\lambda}$
4a		$\lambda \leq 0,58$	-	$0,87 \cdot \lambda$	$1,00 - 0,87 \cdot \lambda$	-
4b		$\lambda > 0,58$	-	$1,00 - \frac{0,29}{\lambda}$	$\frac{0,29}{\lambda}$	-
5a		$\lambda \geq 0,79$	-	$1,00 - \frac{0,40}{\lambda}$	$\frac{0,29}{\lambda}$	$\frac{0,50}{\lambda}$
5b		$\lambda < 0,79$	-	$0,64 \cdot \lambda$	$0,73 - 0,46 \cdot \lambda$	$1,27 - 0,81 \cdot \lambda$
6		$\lambda \geq 1,00$	-	$1,00 - \frac{0,50}{\lambda}$	-	$\frac{0,50}{\lambda}$

## 7. FORÇA CORTANTE

(item 19.4)

Para as lajes e elementos lineares com uma ralação  $b_w \geq 5.d$ , a norma faz as seguintes prescrições em relação a atuação dos esforços cortantes:

### 7.1 Laje Sem Armadura para Força Cortante

(item 19.4.1)

As lajes maciças ou nervuradas podem prescindir de armadura transversal para resistir aos esforços de tração oriundos da força cortante, quando a força cortante de cálculo obedecer à expressão:

$$V_{sd} \leq V_{rd1}$$

A resistência de projeto ao cisalhamento ( $V_{rd1}$ ) é dada por:

$$V_{rd1} = [\tau_{rd}.k.(1,2 + 40.\rho_1) + 0,15.\sigma_{cp}] . b_w . d$$

Com:

$$\cdot \tau_{rd} = 0,25.f_{ctd}$$

$$\cdot f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c}$$

$$\cdot \rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w.d}$$

$$\cdot \sigma_{cp} = \frac{N_{sd}}{A_c}$$

$$\cdot k = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{para elementos onde 50\% da armadura inferior não chega até o apoio} \\ 1,6 - d \geq 1 \text{ (d em metros)} \rightarrow \text{para os demais casos} \end{cases}$$

- $f_{ctd}$  – resistência de cálculo do concreto ao cisalhamento;
- $A_{s1}$  – área da armadura de tração que se estende até não menos que  $(d+lb_{nec.})$  além da seção considerada (ver Figura 10);
- $b_w$  – largura mínima da seção ao longo da altura útil  $d$ ;
- $N_{sd}$  – força longitudinal na seção devida à protensão ou carregamento.

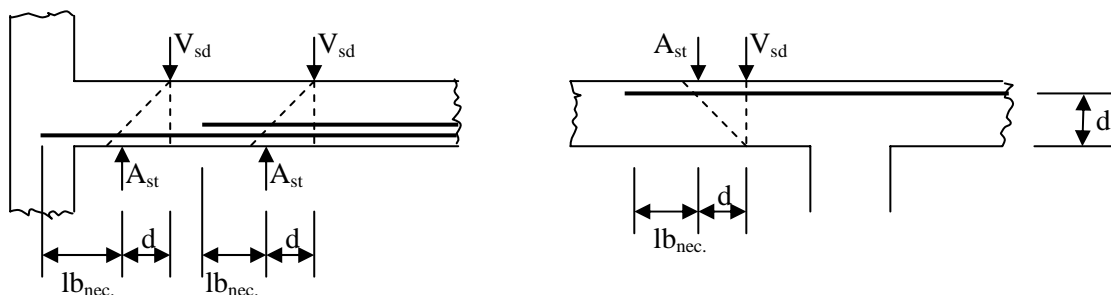


Figura 10 – Ancoragem das armaduras das lajes

A distribuição da armadura longitudinal das lajes deve respeitar o item 18.3.2.3.1 da norma, adotando-se para (a) o valor de 1,5.d.

Quando da verificação de elementos sem armadura de cisalhamento, a resistência de cálculo  $V_{rd2}$  é dada por:

$$V_{rd2} = 0,50 \cdot \alpha_{v1} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0,90 \cdot d$$

Onde:

$$\alpha_{v1} = \left( 0,7 - \frac{f_{ck}}{200} \right) \leq 0,50$$

## 7.2 Laje Com Armadura para Força Cortante

(item 19.4.2)

São válidos os métodos estabelecidos para o cálculo e verificação de elementos lineares, prescritos no item 17.4.2 da norma.

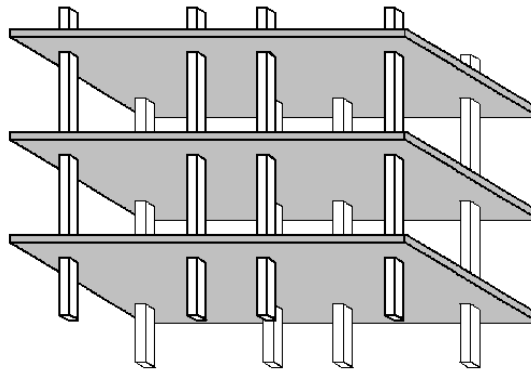
A resistência dos estribos pode ser considerada com os seguintes valores máximos, sendo permitida interpolação linear:

- . 250 MPa → para lajes com espessura até 15 cm;
- . 435 MPa → para lajes com espessura maior que 35 cm.

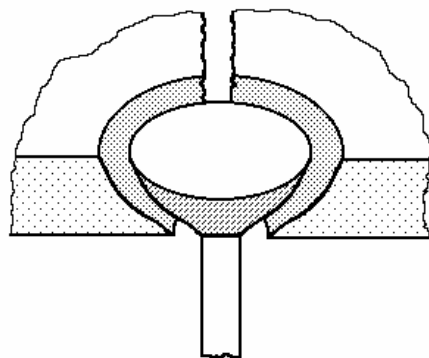
## 8. PUNÇÃO EM LAJES

(item 19.5)

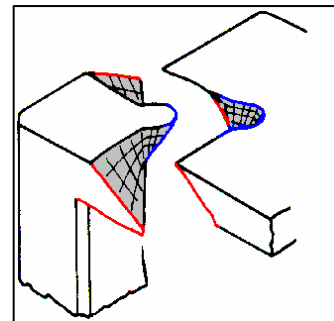
Denomina-se de punção ao fenômeno segundo o qual elementos planos, principalmente, apresentam ruptura localizada por corte, frente à cargas concentradas elevadas. Esse tipo de ruptura pode ocorrer principalmente nos encontros entre elementos lineares comprimidos (pilares) com elementos planos (lajes).



A ruptura de punção se dá por corte localizado, onde o elemento plano se rompe segundo a forma de um tronco de cone, como mostra a figura abaixo:



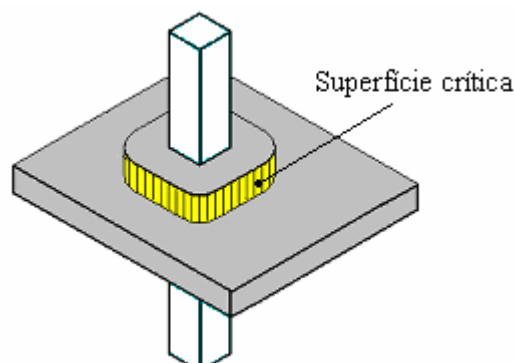
Pilar central



Pilar de canto

### 8.1 Modelo de Cálculo

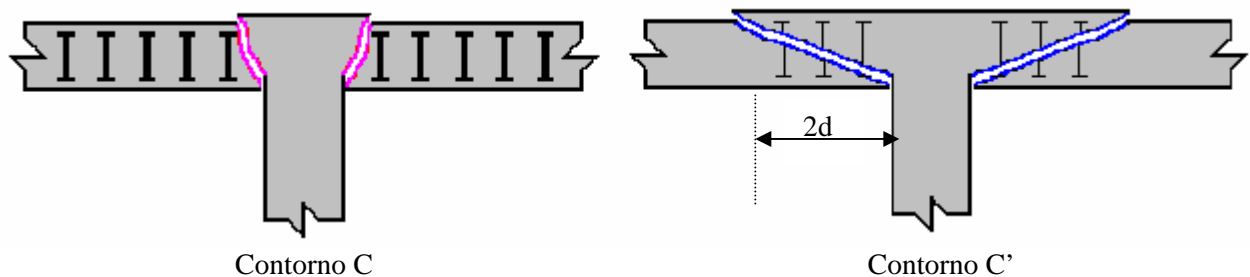
O modelo de cálculo de punção em lajes corresponde à verificação do cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas definidas no entorno de forças concentradas.



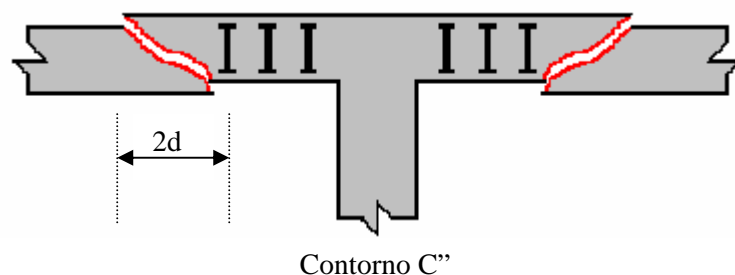


Na primeira superfície crítica (contorno C), no entorno do pilar ou da carga concentrada, deve ser verificada indiretamente a tensão de compressão diagonal do concreto, através da tensão de cisalhamento. Essa verificação deve ser feita em lajes com e sem armadura de punção.

Na segunda superfície crítica (contorno C'), afastada 2d do pilar ou da carga concentrada, deve ser verificada a capacidade da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal. Essa verificação também se faz através de uma tensão de cisalhamento, no contorno C'. Caso haja necessidade, a ligação deve ser reforçada por armadura transversal.



A terceira superfície crítica (contorno C'') apenas deve ser verificada quando for necessário colocar armadura transversal.



## 8.2 Tensão Solicitante nas Superfícies Críticas

### 8.2.1 Pilar interno com carregamento simétrico

No caso de pilares internos em que o carregamento seja simétrico, conforme esquematizado na Figura 11, a tensão de cisalhamento ( $\tau_{sd}$ ) que atua no contorno C' pode ser expressa por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{\mu \cdot d} \quad ; \quad d = \frac{d_x + d_y}{2}$$

d – altura útil média da laje no contorno C';  
 $d_x, d_y$  – altura útil da laje nas direções x e y;  
 $\mu$  - perímetro do contorno C';  
 $F_{sd}$  – força ou reação concentrada, de cálculo.

A força de punção  $F_{sd}$  pode ser reduzida da força distribuída aplicada na face posta da laje, dentro do contorno considerado na verificação, C ou C'.

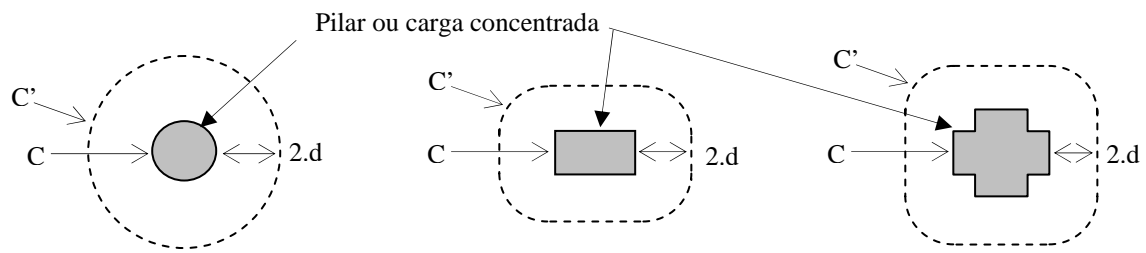


Figura 11 – Perímetro crítico em pilares internos

### 8.2.2 Pilar interno com efeito de momento

No caso em que, além da força vertical, existe transferência de momento da laje para o pilar, o efeito de assimetria deve ser considerado, de acordo com a expressão:

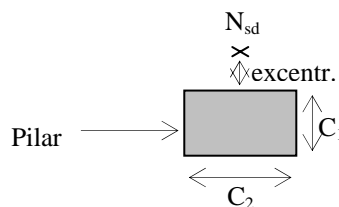
$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{\mu \cdot d} + \frac{K \cdot M_{sd}}{W_p \cdot d}$$

K – coeficiente que fornece a parcela de  $M_{sd}$  transmitida ao pilar por cisalhamento;

Tabela 7 – Valores de K

$C_1/C_2$	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80

$C_1$  : é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força.  
 $C_2$  : é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.



#### 7.2.2.1 Valores de $W_p$ :

i) Pilar retangular →  $W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1 \cdot C_2 + 4 \cdot C_2 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot C_1$

ii) Pilar circular →  $W_p = (D + 4 \cdot d)^2$

D – diâmetro do pilar.

## 8.3 Tensão Resistente nas Superfícies Críticas

### 8.3.1 Compressão diagonal do concreto: superfície crítica C

Essa verificação deve ser feita no contorno C, em lajes com ou sem armadura de punção.

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \quad ; \quad \tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{\mu_0 \cdot d}$$

$$- \alpha_v = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \text{ (MPa)}$$

-  $\mu_0$  – perímetro do contorno C.

O valor de  $\tau_{rd2}$  pode ser ampliado de 20% por efeito de estado múltiplo de tensões junto a um pilar interno, quando os vãos que chegam a esse pilar não diferem mais de 50% e não existem aberturas junto ao pilar.

### 8.3.1 Tensão resistente na superfície crítica C'

#### i) Trechos sem armadura de punção:

Essa verificação deve ser feita em elementos estruturais ou trechos sem armadura de punção e a tensão resistente crítica C' deve ser calculada como segue:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3}$$

$$- \rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y}$$

$$- d = \frac{(d_x + d_y)}{2}$$

d - Altura útil da laje no contorno C', em cm;

$\rho_x, \rho_y$  - taxa geométrica de armadura da laje, nas duas direções, assim calculadas:

- . na largura igual à dimensão ou área carregada do pilar acrescida de 3.d para cada um dos lados;
- . no caso de proximidade da borda prevalece a distância até a borda quando menor que 3.d.

Se existir capitel, essa verificação deve ser feita no contorno crítico C'<sub>1</sub> e C'<sub>2</sub>, conforme indicado no item 19.5.2.5 da norma.

#### ii) Trechos com armadura de punção:

No caso de elementos estruturais ou trechos com armadura de punção, a tensão resistente crítica C' deve ser calculada como segue:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd3} = 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 1,5 \cdot \frac{d \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha}{\mu \cdot d \cdot S_r} \quad ; \quad S_r \leq 0,75 \cdot d$$

ou

$$A_{sw} = \frac{\left[ \tau_{sd} - 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} \right]}{1,5 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha} \cdot \mu \cdot d \cdot S_r$$

$S_r$  – espaçamento radial entre linhas de armadura de punção;  
 $A_{sw}$  – área de armadura de punção num contorno completo paralelo a  $C'$ ;  
 $\alpha$  - ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;  
 $\mu$ - perímetro crítico;

$f_{wyd}$  – resistência de cálculo da armadura de punção:

- .  $f_{wyd} \leq 300$  MPa para conectores;
- .  $f_{wyd} \leq 250$  MPa para CA-50 ou CA-60;
- . Para lajes com espessura maior que 15cm esses valores podem ser aumentados.

Essa armadura deve ser preferencialmente constituída por três ou mais linhas de conectores tipo pino com extremidades alargadas, dispostas radialmente a partir do perímetro do pilar. Cada uma dessas extremidades deve estar ancorada fora do plano da armadura de flexão correspondente.

### 8.3.2 Tensão resistente na superfície crítica $C''$

Quando for necessário utilizar armadura de punção, ela deve ser estendida em contornos paralelos a  $C'$  até que, num contorno  $C''$  afastado ( $2.d$ ) do último contorno de armadura (ver Figura 12), não seja mais necessária armadura, ou seja, até que:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$$

### 8.4 Armadura de Punção Obrigatória

(item 19.5.3.5)

Quando a estabilidade global da estrutura depender da resistência da laje à punção, deve ser prevista armadura de punção, mesmo que  $\tau_{sd}$  seja menor que  $\tau_{rd1}$ . Essa armadura deve equilibrar um mínimo de 50% de  $F_{sd}$ .

### 8.5 Disposição das Armaduras de Punção

(item 20.4)

As armaduras para resistir à punção devem ser constituídas por estribos verticais ou conectores, com preferência pela utilização destes últimos. O diâmetro da armadura de estribos não pode superar  $h/20$  e deve haver contato mecânico das barras longitudinais com os cantos dos estribos (ancoragem mecânica).

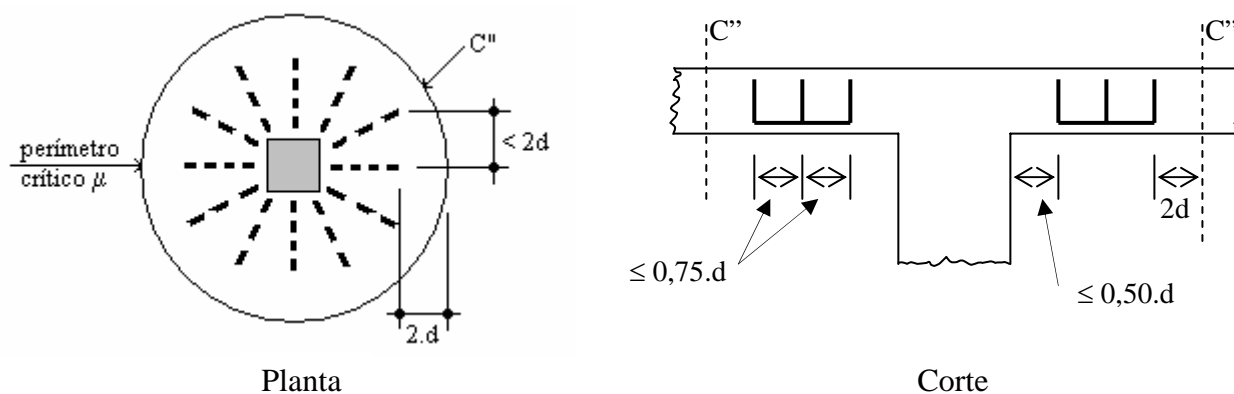


Figura 12 – Disposição da armadura de punção

No caso de ser necessária armadura de punção, três verificações devem ser feitas:

- i) Tensão resistente de compressão do concreto no contorno C (diagonal comprimida);
- ii) Tensão resistente à punção no contorno C', considerando a armadura de punção;
- iii) Tensão resistente à punção no contorno C'', sem armadura de punção.



**Figura 13 –Detalhe armadura de punção e conectores**

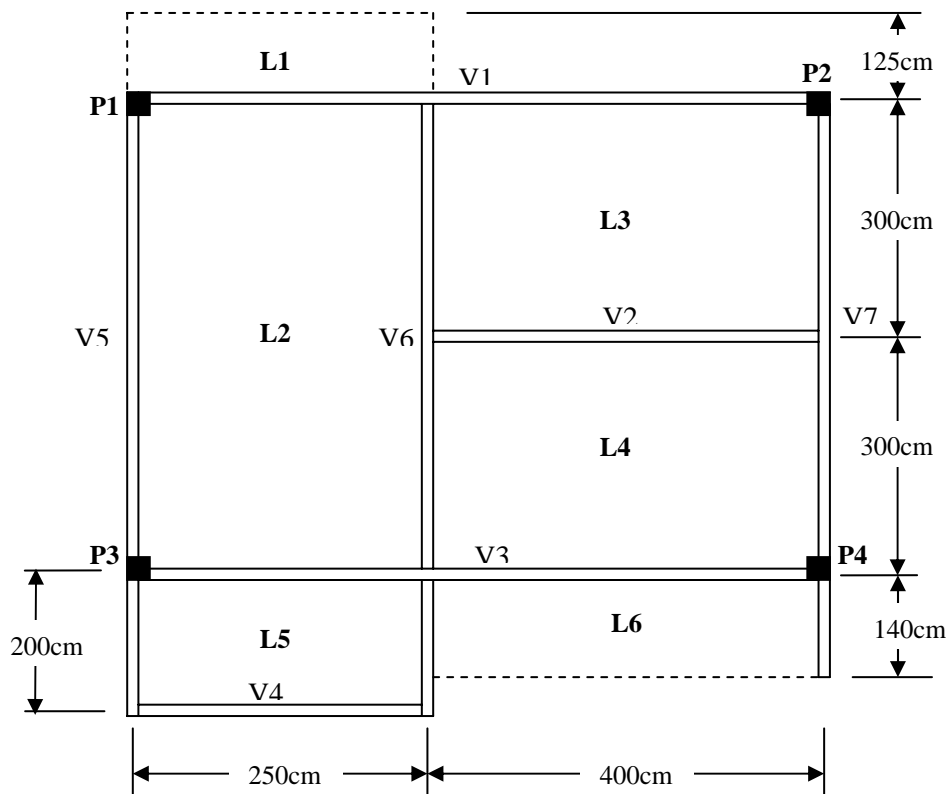
## 9. EXERCÍCIOS

### 9.1 Lajes

1) Dada a planta de formas abaixo, de um edifício residencial, pede-se o cálculo e o detalhamento das lajes, que deverão ser moldadas “in-loco” e estão apoiadas sobre vigas de largura 15cm.

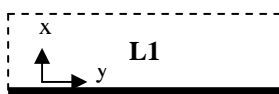
Dados:  
 $f_{ck} = 20\text{MPa}$   
 CA-60  
 $q_k = 1,5\text{ kN/m}^2$

Regularização: 3cm  
 Piso: cerâmico em L1, L2 e L6  
 Piso: madeira em L3, L4 e L5  
 $d' = 2,5\text{cm}$

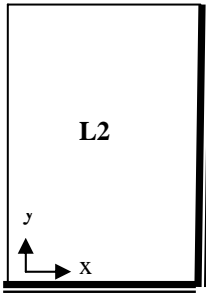


#### a) Armaduras de Flexão

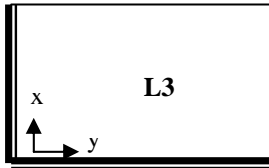
i) Esquema estático:



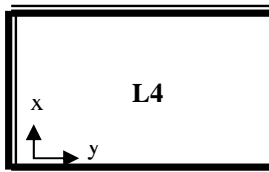
Processo de Marcus não se aplica (Laje em balanço).  
 Laje armada em 1 direção (x).



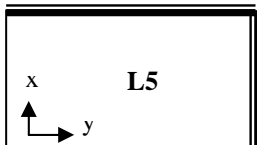
$$\frac{L}{l} = \frac{600}{250} = 2,4 > 2,0 \rightarrow \text{laje armada em 1 direção (x)}.$$



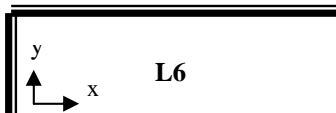
$$\frac{L}{l} = \frac{400}{300} = 1,33 < 2,0 \rightarrow \text{laje armada em 2 direções}.$$



$$\frac{L}{l} = \frac{400}{300} = 1,33 < 2,0 \rightarrow \text{laje armada em 2 direções}.$$



$$\frac{L}{l} = \frac{250}{200} = 1,25 < 2,0 \rightarrow \text{laje armada em 2 direções}.$$



Processo de Marcus não se aplica (bordo em balanço).

ii) **Estimativa das espessuras das lajes:**

$$d \geq \frac{l}{\Psi_2 \Psi_3} ; l = \text{menor lado}$$

-  $\Psi_3 = 20$  (CA-60 e laje maciça)

*Altura mínima das lajes*

Laje	L (cm)	l (cm)	L/l	$\Psi_2$	$\Psi_3$	d (cm)	h (cm)
L1*	250	125	balanço	0,50	20	12,5	15,0
L2*	600	250	1 dir.	1,20	20	10,4	13,0
L3	400	300	1,33	1,64	20	9,1	11,5
L4	400	300	1,33	1,88	20	8,0	10,5
L5	250	200	1,25	1,72	20	5,8	8,5
L6	400	140	2,00	0,50	20	14,0	15,0**

\* Laje armada em 1 direção.

\*\* Definição de projeto

**iii) Cargas atuantes:**

- Peso próprio:  $h_{\text{laje}} \cdot 25 \text{ kN/m}^2$
- Regularização:  $0,03 \cdot 21 \text{ kN/m}^2 = 0,63 \text{ kN/m}^2$
- Revestimento L1, L2 e L6:  $0,01 \cdot 18 \text{ kN/m}^2 = 0,18 \text{ kN/m}^2$
- Revestimento L3, L4 e L5:  $0,015 \cdot 10 \text{ kN/m}^2 = 0,15 \text{ kN/m}^2$
- Sobrecarga: função do ambiente.
- Outras: ver equipamentos fixos, paredes, enchimentos, recomendações de normas, etc.

**Carga distribuída total**

Laje	Peso próprio (kN/m <sup>2</sup> )	Regularização (kN/m <sup>2</sup> )	Revestimento (kN/m <sup>2</sup> )	Outras	Sobrecarga (kN/m <sup>2</sup> )	Total (kN/m <sup>2</sup> )
L1	3,75	0,63	0,18	H e V	1,50	6,06*
L2	3,25	0,63	0,18	-	1,50	5,56
L3	2,88	0,63	0,15	-	1,50	5,19
L4	2,63	0,63	0,15	-	1,50	4,94
L5	2,13	0,63	0,15	-	1,50	4,44
L6	3,75	0,63	0,18	H e V	1,50	6,06*

\* Acrescentar os efeitos de H e V.2,31

**iv) Momentos fletores atuantes nas lajes:**

- Processo de Marcus: L3, L4 e L5.

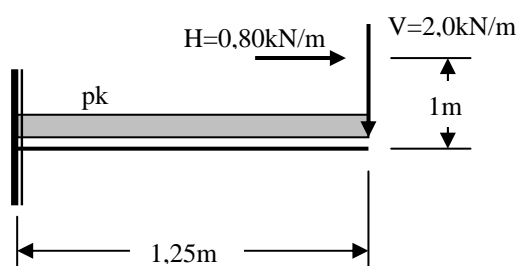
$$\begin{aligned}
 - M_x &= c_x \cdot p \cdot l_x^2 \\
 - M_y &= c_y \cdot p \cdot l_x^2 \\
 - M_{ex} &= e_x \cdot p \cdot l_x^2 \\
 - M_{ey} &= e_y \cdot p \cdot l_x^2
 \end{aligned}$$

Laje	Tipo	l <sub>x</sub> (cm)	l <sub>y</sub> (cm)	λ=l <sub>y</sub> /l <sub>x</sub>	C <sub>x</sub>	C <sub>y</sub>	e <sub>x</sub>	e <sub>y</sub>
L3	3	300	400	1,33	0,0426	0,0241	0,0947	0,0536
L4	5	300	400	1,33	0,0312	0,0154	0,0721	0,0301
L5	3	200	250	1,25	0,0393	0,0251	0,0880	0,0568

**Momentos fletores**

Laje	Carga (p) (kN/m <sup>2</sup> )	Momentos (kN.m/m)			
		M <sub>x</sub>	M <sub>y</sub>	M <sub>ex</sub>	M <sub>ey</sub>
L3	5,19	1,99	1,13	-4,42	-2,50
L4	4,94	1,39	0,68	-3,21	-1,34
L5	4,44	0,70	0,45	-1,56	-1,01

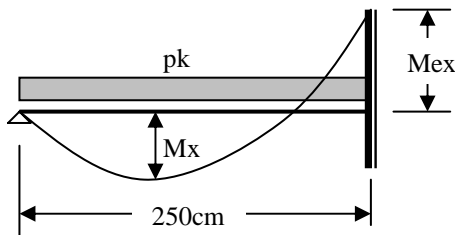
- Laje L1: balanço.



$$M_{ex} = - \left( \frac{pk \cdot l^2}{2} + 2,0 \cdot l + 0,8 \cdot 1,0 \right) = -8,03 \text{ kN.m/m}$$



- Laje L2: 1 direção.

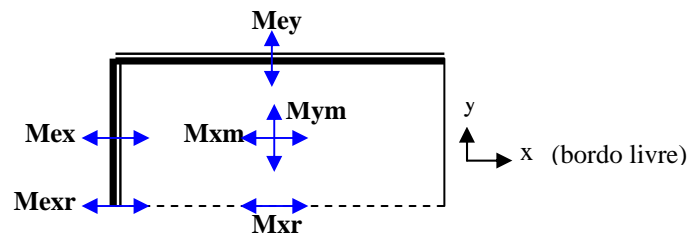


$$M_{ex} = -\frac{p_k \cdot l_x^2}{8} = -\frac{5,56 \cdot 2,50^2}{8} = -4,34 \text{ kN.m/m}$$

$$M_x = \frac{p_k \cdot l_x^2}{14,21} = -\frac{5,56 \cdot 2,50^2}{14,21} = 2,44 \text{ kN.m/m}$$

- Laje L6: bordo livre.  
(Ver livro Adolpho Polillo vol. 2)

$$- \lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{140}{400} = 0,35$$



Considerando somente a carga uniformemente distribuída:

- $M_{xr} = C_{xr} \cdot p_k \cdot l_x^2 = 0,0119 \cdot 6,06 \cdot 4,0^2 = 1,15 \text{ kN.m/m}$
- $M_{exr} = C_{exr} \cdot p_k \cdot l_x^2 = -0,0699 \cdot 6,06 \cdot 4,0^2 = -6,78 \text{ kN.m/m}$
- $M_{xm} = C_{xm} \cdot p_k \cdot l_x^2 = 0,0054 \cdot 6,06 \cdot 4,0^2 = 0,52 \text{ kN.m/m}$
- $M_{ym} = C_{ym} \cdot p_k \cdot l_x^2 = -0,0032 \cdot 6,06 \cdot 4,0^2 = -0,31 \text{ kN.m/m}$
- $M_{ex} = C_{ex} \cdot p_k \cdot l_x^2 = -0,0184 \cdot 6,06 \cdot 4,0^2 = -1,78 \text{ kN.m/m}$
- $M_{ey} = C_{ey} \cdot p_k \cdot l_x^2 = -0,0454 \cdot 6,06 \cdot 4,0^2 = -4,40 \text{ kN.m/m}$

Considerando a carga vertical em linha, de 2,0 kN/m, aplicada no bordo livre:

- $M_{xr} = C_{xr} \cdot p_k \cdot l_x = 0,061 \cdot 2,0 \cdot 4,00 = 0,49 \text{ kN.m/m}$
- $M_{exr} = C_{exr} \cdot p_k \cdot l_x = 0,311 \cdot 2,0 \cdot 4 = 2,49 \text{ kN.m/m}$
- $M_{ey} = C_{ey} \cdot p_k \cdot l_x = 0,238 \cdot 2,0 \cdot 4,00 = 1,90 \text{ kN.m/m}$

Considerando a carga horizontal em linha, de 0,80 kN/m, aplicada no bordo livre (h=1,0m):  
(simplificadamente, a carga horizontal foi substituída por uma vertical equivalente de 0,57 kN/m, de modo a geral o mesmo momento fletor no engaste)

- $M_{xr} = C_{xr} \cdot p_k \cdot l_x = 0,061 \cdot 0,57 \cdot 4,00 = 0,14 \text{ kN.m/m}$
- $M_{exr} = C_{exr} \cdot p_k \cdot l_x = 0,311 \cdot 0,57 \cdot 4,00 = 0,71 \text{ kN.m/m}$
- $M_{ey} = C_{ey} \cdot p_k \cdot l_x = 0,238 \cdot 0,57 \cdot 4,00 = 0,54 \text{ kN.m/m}$

Totalizando:

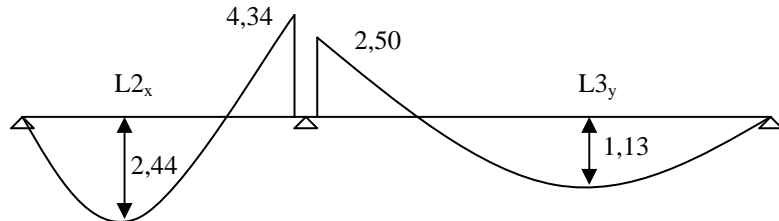
$$- M_{xr} = 1,15 + 0,49 + 0,14 = 1,78 \text{ kN.m/m}$$

$$- M_{exr} = 6,78 + 2,49 + 0,71 = 9,98 \text{ kN.m/m}$$

$$- M_{ey} = 4,40 + 1,90 + 0,54 = 6,84 \text{ kN.m/m}$$

v) **Correção dos momentos fletores:**

• **Corte L2-L3:**



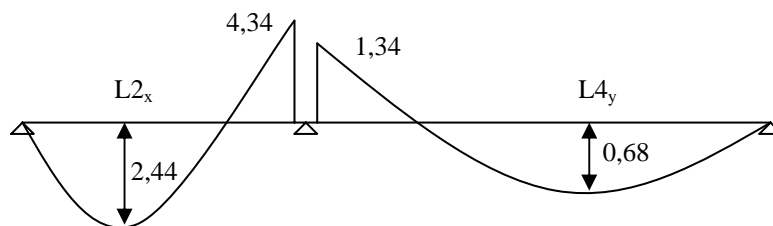
- Momento negativo na aresta:

$$M_e > \begin{cases} \frac{M_e^x(L2) + M_e^y(L3)}{2} = \frac{4,34 + 2,50}{2} = 3,42 \\ 0,8 \cdot M_e^x(L2) = 0,8 \cdot 4,34 = 3,47 \end{cases} \rightarrow M_e = 3,47 \text{ kN.m/m}$$

- Momento positivo em L2:

$$\Delta M \cong \frac{\Delta M_e}{2} = \frac{4,34 - 3,47}{2} = 0,44 \Rightarrow M_{(L2)}^x = M_{(L2)}^x + \Delta M = 2,44 + 0,44 = 2,88 \text{ kN.m/m}$$

• **Corte L2-L4:**



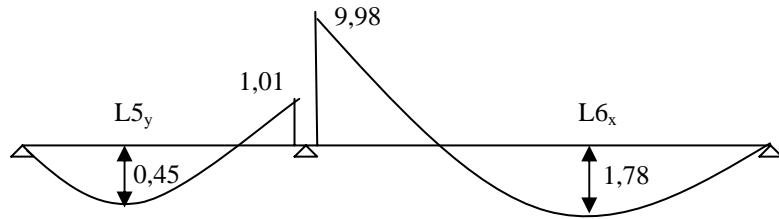
- Momento negativo na aresta:

$$M_e > \begin{cases} \frac{M_e^x(L2) + M_e^y(L4)}{2} = \frac{4,34 + 1,34}{2} = 2,84 \\ 0,8 \cdot M_e^x(L2) = 0,8 \cdot 4,34 = 3,47 \end{cases} \rightarrow M_e = 3,47 \text{ kN.m/m}$$

- Momento positivo em L2:

$$\Delta M \cong \frac{\Delta M_e}{2} = \frac{4,34 - 3,47}{2} = 0,44 \Rightarrow M_{(L2)}^x = M_{(L2)}^x + \Delta M = 2,44 + 0,44 = 2,88 \text{ kN.m/m}$$

• **Corte L5-L6:**



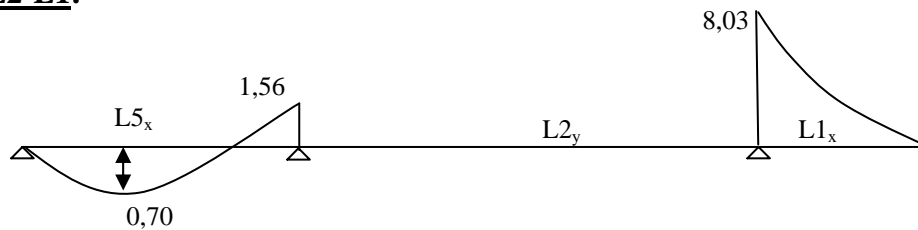
- Momento negativo na aresta:

$$M_e > \begin{cases} \frac{M_e^x(L5) + M_e^y(L6)}{2} = \frac{1,01 + 9,98}{2} = 5,50 \\ 0,8 \cdot M_e^x(L6) = 0,8 \cdot 9,98 = 7,98 \end{cases} \rightarrow M_e = 7,98 \text{ kN.m/m}$$

- Momento positivo em L6:

$$\Delta M \cong \frac{\Delta M_e}{2} = \frac{9,98 - 7,98}{2} = 1,0 \Rightarrow M_{(L6)}^y = M_{(L6)}^y + \Delta M = 1,78 + 1,0 = 2,78 \text{ kN.m/m}$$

• **Corte L5-L2-L1:**



- Momento negativo na aresta L5-L2:

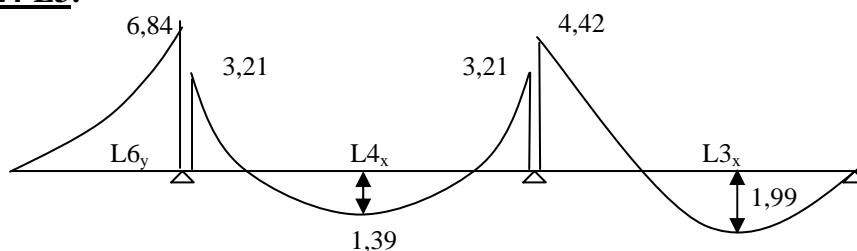
$$M_e > \begin{cases} \frac{M_e^x(L5) + M_e^y(L2)}{2} = \frac{1,56 + 0}{2} = 0,78 \\ 0,8 \cdot M_e^x(L5) = 0,8 \cdot 1,56 = 1,25 \end{cases} \rightarrow M_e = 1,25 \text{ kN.m/m}$$

- Momento negativo na aresta L2-L1: Não se reduz balanço  $\Rightarrow M_e = 8,03 \text{ kN.m/m}$

- Momento positivo em L5:

$$\Delta M \cong \frac{\Delta M_e}{2} = \frac{1,56 - 1,25}{2} = 0,16 \Rightarrow M_{(L5)}^x = M_{(L5)}^x + \Delta M = 0,70 + 0,16 = 0,86 \text{ kN.m/m}$$

• **Corte L6-L4-L3:**



- Momento negativo na aresta L6-L4:

$$M_e > \begin{cases} \frac{M_e^x(L6) + M_e^x(L4)}{2} = \frac{6,84 + 3,21}{2} = 5,03 \\ 0,8 \cdot M_e^x(L6) = 0,8 \cdot 6,84 = 5,47 \end{cases} \rightarrow M_e = 5,47 \text{ kN.m/m}$$

- Momento negativo na aresta L4-L3:

$$M_e > \begin{cases} \frac{M_e^x(L4) + M_e^x(L3)}{2} = \frac{3,21 + 4,42}{2} = 3,82 \\ 0,8 \cdot M_e^x(L3) = 0,8 \cdot 4,42 = 3,54 \end{cases} \rightarrow M_e = 3,82 \text{ kN.m/m}$$

- Momento positivo em L3:

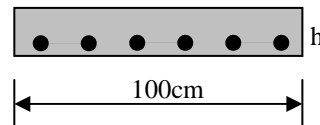
$$\Delta M \cong \frac{\Delta M_e}{2} = \frac{4,42 - 3,82}{2} = 0,30 \Rightarrow M_{(L3)}^x = M_{(L3)}^x + \Delta M = 1,99 + 0,30 = 2,29 \text{ kN.m/m}$$

#### vi) Resumo final dos momentos fletores corrigidos:

*Momentos (kN.m/m)*

Laje	Tipo	Positivos		Negativos	
		Mx	My	Aresta	Me
L1	Balanço	--	--	L1-L2	8,03
L2	1 direção	2,88	--	L2-L3	3,47
L3	2 direções	2,29	1,13	L2-L4	3,47
L4	2 direções	1,39	0,68	L2-L5	1,25
L5	2 direções	0,86	0,45	L3-L4	3,82
L6	2 direções	2,78	-0,31	L4-L6	5,47
				L5-L6	7,98

#### vii) Cálculo das armaduras de flexão:



#### ➤ Prescrições de norma:

$$- A_s \geq A_{s \min} > \begin{cases} \frac{\omega_{\min} \cdot A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} \\ \rho_{\min} \cdot A_c \end{cases} ; \quad \omega_{\min} \text{ e } \rho_{\min} \rightarrow \text{ver Tabela 4 e Tabela 5}$$

$$\Rightarrow A_{s \min} = \frac{\omega_{\min} \cdot A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,035 \cdot (100 \cdot h) \cdot (2,0/1,4)}{(60/1,15)} = \frac{h}{10,43}$$

$$- s \leq \begin{cases} 20\text{cm} \\ 2.h \end{cases} ; \quad S_{distr.} \leq 33\text{cm}$$

$$- A_{sdistr.} \geq 20\% . A_{sprinc.}$$

$$- \phi_i \leq \frac{hlaje}{8}$$

### ➤ Cálculo das armaduras:

$$- M_{dlim} = \mu_{lim}.b.d^2.f_{cd} ; \quad \mu_{lim.} = 0,246 \Rightarrow M_{dlim} = 0,246.100.d^2 \cdot \frac{2,0}{1,4} = 0,35.d^2 (kN.m/m)$$

$$- y = d \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{M_d}{0,425.b.d^2.f_{cd}}} \right) \quad e \quad A_s = \frac{0,85.f_{cd}.b.y}{f_{yd}}$$

#### Armadura positiva (cm<sup>2</sup>/m)

Laje	d(cm)	M <sub>xk</sub> (kN.m/m)	M <sub>yk</sub> (kN.m/m)	S ≤	A <sub>sx</sub>	A <sub>sy</sub>
L1	12,5	--	--	--	A <sub>s</sub> distr. (1φ 5,0 c/ 33)	A <sub>s</sub> distr. (1φ 5,0 c/ 33)
L2	10,5	2,88	--	20cm	0,75 (1φ 5,0 c/ 16)*	A <sub>s</sub> distr. (1φ 5,0 c/ 33)
L3	9,0	2,29	1,13	20cm	0,70 (1φ 5,0 c/ 18)**	0,34 (1φ 5,0 c/ 18)**
L4	8,0	1,39	0,68	20cm	0,47 (1φ 5,0 c/ 20)*	0,23 (1φ 5,0 c/ 20)*
L5	6,0	0,86	0,45	17cm	0,39 (1φ 5,0 c/ 17)**	0,20 (1φ 5,0 c/ 17)**
L6	13,5	2,78	-0,31	20cm	0,56 (1φ 5,0 c/ 14)*	0,06 (1φ 5,0 c/ 14)*

\* Usar armadura mínima.

\*\* Usar armadura mínima com S<sub>máx.</sub>

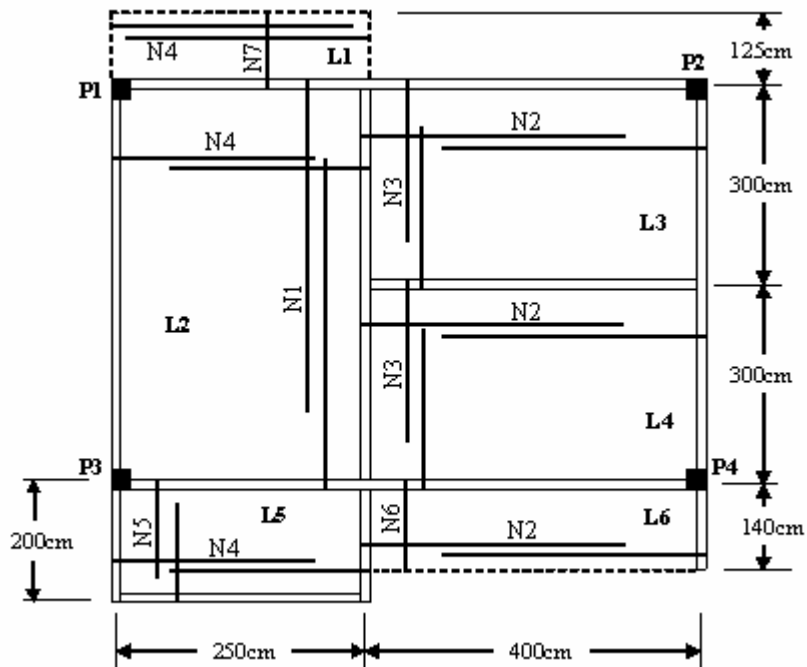
#### Armadura negativa (cm<sup>2</sup>/m)

Aresta	d(cm)	M <sub>ek</sub> (kN.m/m)	A <sub>s</sub>	S ≤	A <sub>s</sub> proj.
L1-L2	10,5	8,03	2,15	20cm	(1φ 5,0 c/ 9,0)
L2-L3	9,0	3,47	1,06	20cm	(1φ 5,0 c/ 19)
L2-L4	8,0	3,47	1,21	20cm	(1φ 5,0 c/ 16)
L2-L5	6,0	1,25	0,57	17cm	(1φ 5,0 c/ 17)**
L3-L4	8,0	3,82	1,33	20cm	(1φ 5,0 c/ 15)
L4-L6	8,0	5,47	1,94	20cm	(1φ 5,0 c/ 10)
L5-L6	6,0	7,98	4,21	16cm	(1φ 8,0 c/ 11)

\*\* Usar armadura mínima com S<sub>máx.</sub>

vii) Detalhamento das armaduras de flexão:

Armaduras Positivas:



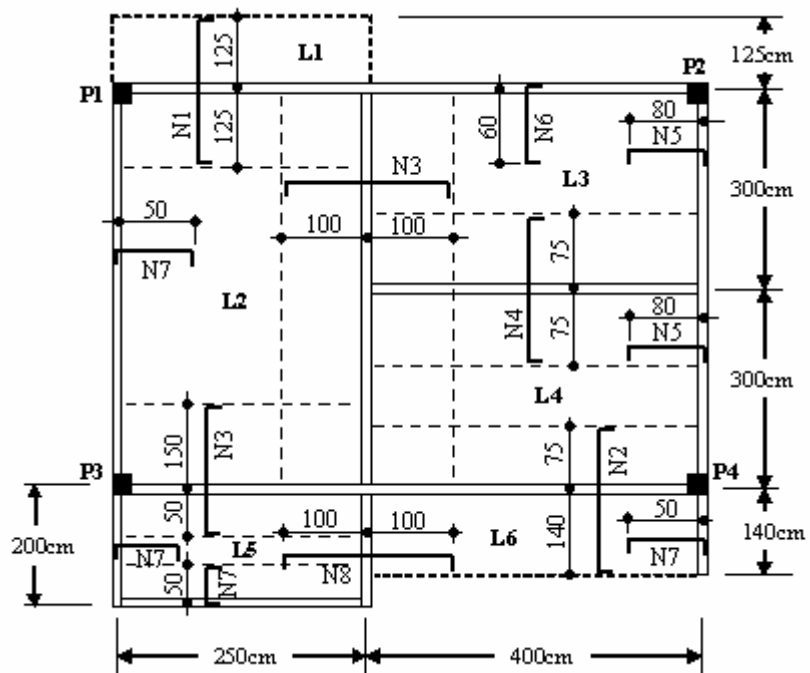
**Armadura Positiva**

Laje	N	$\phi$ (mm)	S (cm)	Q	Compr. (m)
L <sub>1</sub>	N4	5,0	33	4	2,00
	N7	5,0	33	8	1,25
L <sub>2</sub>	N1	5,0	33	8	4,80
	N4	5,0	16	38	2,00
L <sub>3</sub>	N2	5,0	18	17	3,20
	N3	5,0	18	23	2,40
L <sub>4</sub>	N2	5,0	20	15	3,20
	N3	5,0	20	20	2,40
L <sub>5</sub>	N4	5,0	17	12	2,00
	N5	5,0	17	15	1,60
L <sub>6</sub>	N2	5,0	14	10	3,20
	N6	5,0	14	29	1,40

**Resumo Armadura Positiva**

N	$\phi$ (mm)	Q	Compr. (m)	Peso (kgf)
N1	5,0	8	38,4	<b>73,4</b>
N2	5,0	42	134,4	
N3	5,0	43	103,2	
N4	5,0	54	108,0	
N5	5,0	15	24,0	
N6	5,0	29	40,6	
N7	5,0	8	10,0	

Armaduras Negativas:



**Armadura Negativa**

Aresta	N	φ (mm)	S (cm)	Q	Compr. (m)
L <sub>1</sub> - L <sub>2</sub>	N1	5,0	9,0	28	2,60
L <sub>2</sub> - L <sub>3</sub>	N3	5,0	19	16	2,10
L <sub>2</sub> - L <sub>4</sub>	N3	5,0	16	19	2,10
L <sub>2</sub> - L <sub>5</sub>	N3	5,0	17	15	2,10
L <sub>2</sub>	N7	5,0	33	19	0,60
L <sub>3</sub> - L <sub>4</sub>	N4	5,0	15	27	1,60
L <sub>3</sub>	N5	5,0	33	9	0,90
L <sub>3</sub>	N6	5,0	33	13	0,70
L <sub>4</sub> - L <sub>6</sub>	N2	5,0	10	40	2,25
L <sub>4</sub>	N5	5,0	33	9	0,90
L <sub>5</sub> - L <sub>6</sub>	N8	8,0	11	13	2,10
L <sub>5</sub>	N7	5,0	33	14	0,60

**Resumo Armadura Negativa**

N	φ (mm)	Q	Compr. (m)	Peso (kgf)
N1	5,0	28	72,80	57,0
N2	5,0	40	90,00	
N3	5,0	50	105,00	
N4	5,0	27	43,20	
N5	5,0	18	16,20	
N6	5,0	13	9,10	
N7	5,0	33	19,80	
N8	8,0	13	27,30	
<b>Peso Total (kgf)</b>				<b>67,9</b>

**Consumo de concreto:**

$$Vol. = \sum \text{Área}_{\text{interna}} \cdot h = (2,5 \cdot 1,175) \cdot 0,15 + (2,35 \cdot 5,85) \cdot 0,13 + (3,85 \cdot 2,85) \cdot 0,115 + (3,85 \cdot 2,85) \cdot 0,105 + (2,35 \cdot 1,85) \cdot 0,085 + (3,85 \cdot 1,325) \cdot 0,15 = 5,78m^3$$

**b) Reações de Apoio**

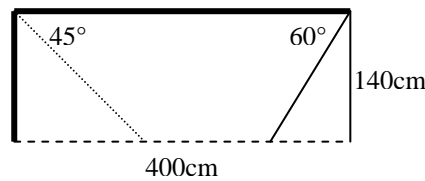
$$R_x = K_x \cdot p \cdot \frac{l_x}{2} \quad ; \quad R'_x = K'_x \cdot p \cdot \frac{l_x}{2} \quad ; \quad R_y = K_y \cdot p \cdot \frac{l_y}{2} \quad ; \quad R'_y = K'_y \cdot p \cdot \frac{l_y}{2}$$

**Reações de apoio: kN/m**

Laje	Caso	$\lambda=L_y/L_x$	$K_x$	$K'_x$	$K_y$	$K'_y$	(kN/m <sup>2</sup> )	$R_x$	$R'_x$	$R_y$	$R'_y$
L1 <sup>1</sup>	--	--	--	--	--	--	5,69	--	11,11	--	--
L2	3	2,4	0,58	1,00	0,15	0,27	5,19	3,76	6,49	2,34	4,20
L3	3	1,33	0,45	0,71	0,28	0,48	4,78	3,23	5,10	2,68	4,59
L4	5a	1,33	--	0,70	0,22	0,38	4,53	--	4,76	1,99	3,44
L5	3	1,25	0,43	0,78	0,30	0,51	4,03	1,73	3,14	1,51	2,57
L6 <sup>2</sup>	3	1,43	--	--	--	--	6,06	--	6,15	2,45	4,24

$$1 \rightarrow R'_{L1} = \frac{(1,25 \cdot 2,5) \cdot 5,69 + 2 \cdot (1,25 + 1,25 + 2,5)}{2,5} = 11,11 \text{ kN/m}$$

2 → Áreas de influência:

**c) Esforço Cortante**

**Verificação da laje L1:** (h=13,5cm - d=11,5cm - V<sub>k</sub>=11,11kN - A<sub>s</sub>=2,35cm<sup>2</sup>/m)

- Armadura transversal: Se  $V_{sd} \leq V_{rd1} \rightarrow$  Dispensa armadura transversal

$$\tau_{rd} = 0,25 \cdot f_{ctd} = 0,25 \cdot \frac{f_{ctk, inf}}{\gamma_c} = 0,25 \cdot \frac{0,7 \cdot f_{ctm}}{\gamma_c} = 0,25 \cdot \frac{0,7 \cdot (0,3 \cdot f_{ck}^{2/3})}{\gamma_c} = 0,25 \cdot \frac{0,7 \cdot (0,3 \cdot 20^{2/3})}{1,4} = 0,276 \text{ MPa}$$

$$- k = 1,6 - d = 1,6 - 0,115 = 1,485 \quad (\geq 1)$$

$$- \rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w \cdot d} = \frac{2,35}{100 \cdot 11,5} = 0,00205$$

$$- \sigma_{cp} = 0$$

$$V_{rd1} = [\tau_{rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1) + 0,15 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d = [0,276 \cdot 1,485 \cdot (1,2 + 40 \cdot 0,00205)] \cdot 100 \cdot 11,5 = 60,43 \text{ kN}$$

$$V_{sd} = 1,4 \cdot 11,11 = 15,55 \text{ kN} \quad V_{sd} < V_{rd1} \Rightarrow \text{Sem armadura transversal.}$$

- Verificação da bielas:  $V_{sd} \leq V_{rd2}$

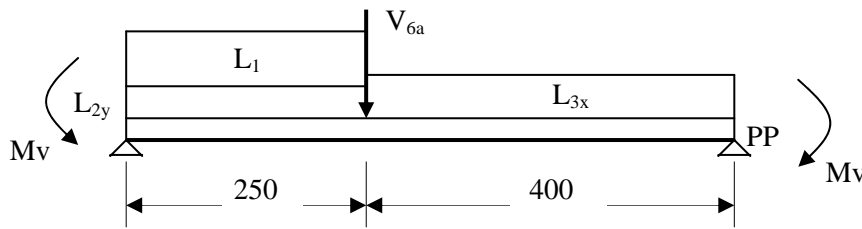
$$- \alpha_{v1} = \left(0,7 - \frac{f_{ck}}{200}\right) = \left(0,7 - \frac{20}{200}\right) = 0,60 \Rightarrow \alpha_{v1} = 0,50 \quad (\leq 0,50)$$



$$- V_{rd2} = 0,50 \cdot 0,50 \cdot \frac{2,0}{1,4} \cdot 100,0 \cdot 90,11,5 = 369,64 \text{ kN} > V_{sd} \rightarrow \text{OK}$$

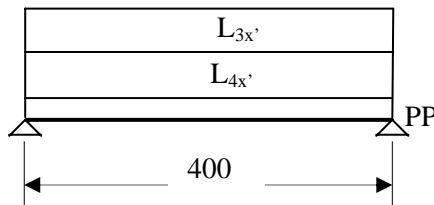
**d) Esquema Estático das Vigas**

**Viga V<sub>1</sub>:**



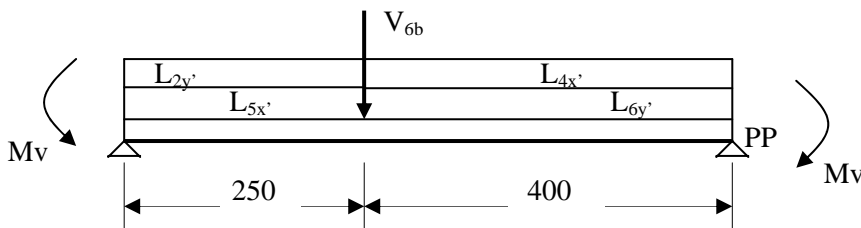
$L_1 = 11,11 \text{ kN/m}$   
 $L_{2y} = 2,34 \text{ kN/m}$   
 $L_{3x} = 3,23 \text{ kN/m}$   
 $PP =$   
 $V_{6a} =$   
 $Mv =$

**Viga V<sub>2</sub>:**



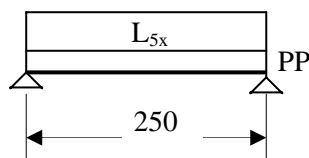
$L_{3x'} = 5,10 \text{ kN/m}$   
 $L_{4x'} = 4,76 \text{ kN/m}$   
 $PP =$

**Viga V<sub>3</sub>:**



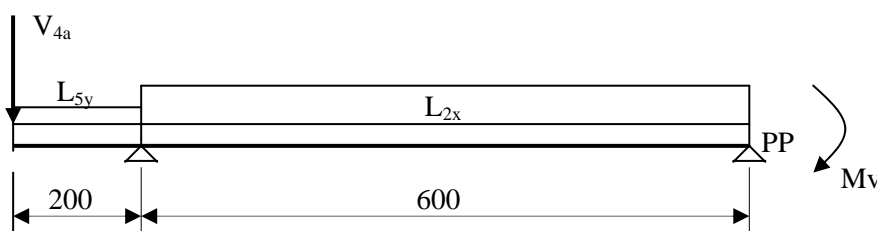
$L_{2y'} = 4,20 \text{ kN/m}$   
 $L_{4x'} = 4,76 \text{ kN/m}$   
 $L_{5x'} = 3,14 \text{ kN/m}$   
 $L_{6y'} = 6,15 \text{ kN/m}$   
 $PP =$   
 $V_{6b} =$   
 $Mv =$

**Viga V<sub>4</sub>:**



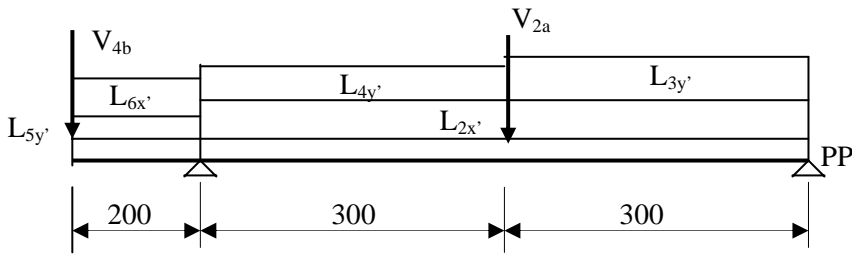
$L_{5x'} = 1,73 \text{ kN/m}$   
 $PP =$

**Viga V<sub>5</sub>:**



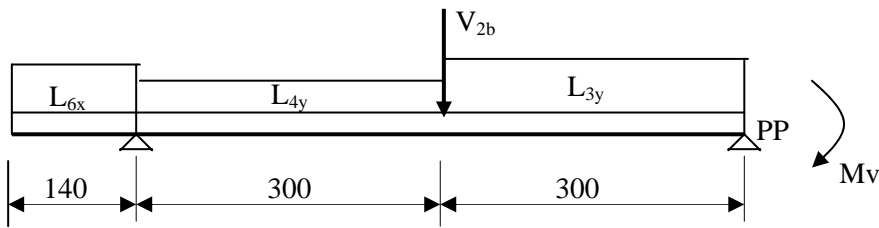
$L_{2x} = 3,76 \text{ kN/m}$   
 $L_{5y} = 1,51 \text{ kN/m}$   
 $PP =$   
 $V_{6b} =$   
 $Mv =$

**Viga V<sub>6</sub>:**



$L_{2x'}=6,49 \text{ kN/m}$   
 $L_{3y'}=4,59 \text{ kN/m}$   
 $L_{4y'}=3,44 \text{ kN/m}$   
 $L_{5y'}=2,57 \text{ kN/m}$   
 $L_{6x'}=6,49 \text{ kN/m}$   
 PP=  
 $V_{4b}=\text{=}$

**Viga V<sub>7</sub>:**



$L_{3y}=2,68 \text{ kN/m}$   
 $L_{4y}=1,99 \text{ kN/m}$   
 $L_{6x}=2,45 \text{ kN/m}$   
 PP=  
 $V_{2b}=\text{=}$

-----X-----X-----X-----X-----

## 9.2 Punção

1) Dada a laje lisa abaixo, com espessura de 15cm e uma sobrecarga de  $3,0 \text{ kN/m}^2$ , apoiada sobre pilares de seção (20x20)cm, pede-se verificar a punção na região do pilar  $P_3$ , que está sujeito a um carregamento de serviço centrado de 81,0 kN.

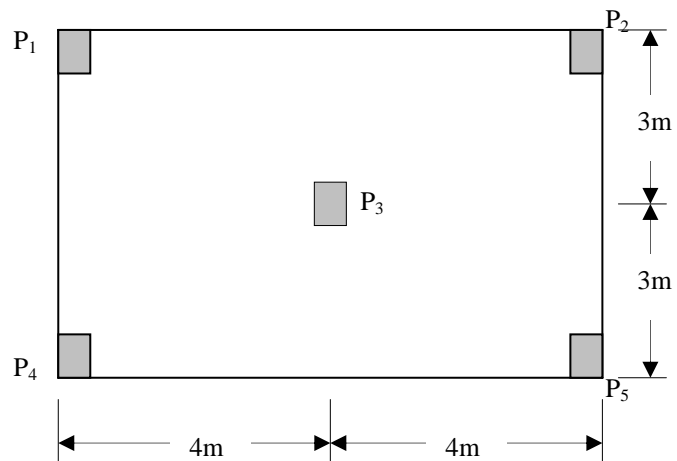
### Dados:

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa}$$

CA-50

$$d' = 3,0 \text{ cm}$$

$$A_{slaje} = 1 \phi 8,0 \text{ c/ } 10 \text{ cm (2 direções)}$$



### i) Definição dos perímetros críticos:

$$\cdot \mu_c = \mu_0 = 2 \cdot (20 + 20) = 80 \text{ cm} \quad (\text{contorno C: junto ao pilar})$$

$$\cdot \mu_c' = 2 \cdot (20 + 20) + 2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot d) = 80 + 2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot 12) = 230,72 \text{ cm} \quad (\text{contorno C'})$$

### ii) Tensão solicitante nas superfícies críticas:

#### . Contorno C:

$$\tau_{sd0} = \frac{F_{sd}}{\mu_0 \cdot d} = \frac{1,481}{80 \cdot 12} = 0,118 \text{ kN/cm}^2 = 1,18 \text{ MPa}$$

#### . Contorno C':

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{\mu \cdot d} = \frac{1,481}{230,72 \cdot 12} = 0,04 \text{ kN/cm}^2 = 0,41 \text{ MPa}$$

### iii) Tensões resistentes:

#### . Contorno C:

$$\tau_{rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{20}{250}\right) \cdot \frac{20}{1,4} = 3,55 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sd0} < \tau_{rd2} \Rightarrow \mathbf{OK} \quad (1,18 < 3,55)\text{MPa}$$

. Contorno C': Sem armadura de punção

$$\rho_x = \rho_y = \frac{5,0}{15.100} = 0,0033 \Rightarrow \rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = 0,0033$$

$$\tau_{rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{12}}\right) (100 \cdot 0,0033 \cdot 20)^{1/3} = 0,56 \text{MPa}$$

$$\tau_{sd} < \tau_{rd1} \Rightarrow \mathbf{OK} \quad (0,41 < 0,56)\text{MPa}$$

-----X-----X-----X-----X-----

- 2) Dada uma laje maciça quadrada (6x6)m, com espessura de 15cm, apoiada sobre um pilar central de diâmetro de 30cm e sujeita a um carregamento acidental de 2,0 kN/m<sup>2</sup>, pede-se a verificação da punção na região de apoio.

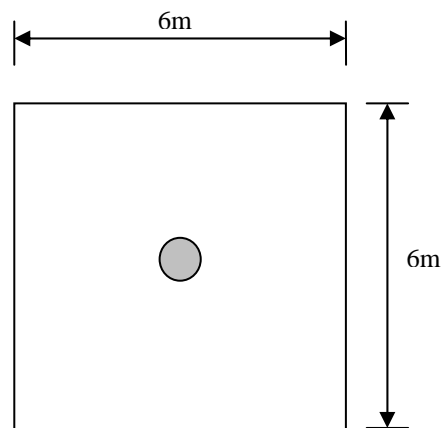
Dados:

$$f_{ck} = 20\text{MPa}$$

CA-50

$$A_{slaje} = 1 \phi 8,0 \text{ c/ } 8,0\text{cm (2 direções)}$$

$$d' = 3\text{cm}$$



**i) Carga no pilar (P<sub>k</sub>):**

$$. P_k = (6 \cdot 6) \cdot (2,0 + 0,15 \cdot 25) = 207,0 \text{kN}$$

**ii) Definição dos perímetros críticos:**

$$. \mu_c = \mu_0 = \pi \cdot \phi_p = 3,14 \cdot 30 = 94,2 \text{cm} \quad (\text{contorno C: junto ao pilar})$$

$$. \mu_{c'} = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{\phi_p}{2} + 2 \cdot d\right) = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{30}{2} + 2 \cdot 12\right) = 244,92 \text{cm} \quad (\text{contorno C'})$$

**iii) Tensão solicitante nas superfícies críticas:**

. Contorno C:

$$\tau_{sd0} = \frac{F_{sd}}{\mu \cdot d} = \frac{1,4 \cdot 207}{94,2 \cdot 12} = 0,256 \text{ kN} / \text{cm}^2 = 2,56 \text{ MPa}$$

. Contorno C':

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{\mu \cdot d} = \frac{1,4 \cdot 207}{244,92 \cdot 12} = 0,099 \text{ kN} / \text{cm}^2 = 0,99 \text{ MPa}$$

iv) **Tensões resistentes:**

. Contorno C:

$$\tau_{rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{20}{250}\right) \cdot \frac{20}{1,4} = 3,55 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sd0} < \tau_{rd2} \Rightarrow \text{OK} \quad (2,56 < 3,55) \text{ MPa}$$

. Contorno C': Sem armadura de punção

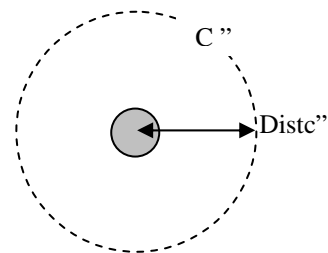
$$\rho_x = \rho_y = \frac{6,25}{15 \cdot 100} = 0,0042 \Rightarrow \rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = 0,0042$$

$$\tau_{rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{12}}\right) (100 \cdot 0,0042 \cdot 20)^{1/3} = 0,61 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sd} > \tau_{rd1} \Rightarrow \text{NÃO PASSA} \quad (0,99 > 0,61) \text{ MPa} \Rightarrow \text{Colocar armadura de punção.}$$

v) **Definição do contorno crítico C''**:  $\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} \quad ; \quad \tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{\mu \cdot d}$$



No limite:

$$\frac{F_{sd}}{\mu \cdot d} = 0,61 \text{ MPa} = 0,061 \text{ kN} / \text{cm}^2 \rightarrow \mu = \frac{F_{sd}}{d \cdot 0,061} = \frac{1,4 \cdot 207}{12 \cdot 0,061} = 395,90 \text{ cm}$$

$$\text{Como: } \mu c'' = 2 \cdot \pi \cdot \text{Distc}'' \quad (\text{contorno C''}) \Rightarrow \text{Distc}'' = \frac{395,90}{2 \cdot \pi} = 63,04 \text{ cm}$$

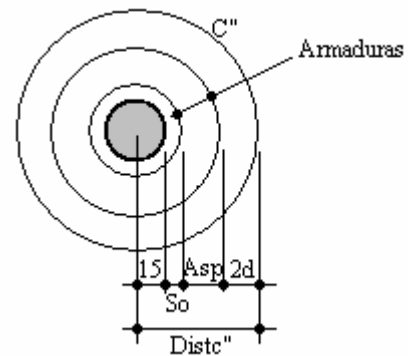
**vi) Disposição da armadura de punção:**

- $S_0 \leq 0,5.d = 6\text{cm}$
- $2.d = 24\text{cm}$  (distância entre barras)
- $\text{Distc}'' = 63,04\text{cm}$

$$\Rightarrow \text{Asp} = 33,04\text{cm}$$

- Asp: pelo menos três linhas radiais
- $S_r \leq 0,75.d = 9\text{cm}$ .

⇒ A armadura de punção será disposta em cinco linhas radiais →  $S_r = 33,04/4 = 8,26\text{cm}$ .

**vii) Valor da armadura de punção:**

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd3} = 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 1,5 \cdot \frac{d \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha}{\mu \cdot d \cdot S_r}$$

$$A_{sw} = \frac{\left[ \tau_{sd} - 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} \right]}{1,5 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha} \cdot \mu \cdot d \cdot S_r \quad ; \text{fazendo } \mu = 100\text{cm} (A_{sw}/\text{m}):$$

$$A_{sw} = \frac{\left[ 0,61 - 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{12}}\right) (100 \cdot 0,0042 \cdot 20)^{1/3} \right]}{1,5 \cdot 12 \cdot 250 \cdot \text{sen} 90} \cdot 100 \cdot 12 \cdot 9 = 0,35\text{cm}^2 / \text{m} \quad (\text{adotar } 1 \phi 5,0 \text{ c/ } 24\text{cm})$$

**viii) Detalhamento da armadura de punção:**

-----X-----X-----X-----X-----



**ÁREA DA SEÇÃO DE ARMADURA POR METRO DE LARGURA: (cm<sup>2</sup>/m)**

BITOLAS PADRONIZADAS (NBR-7480/85)							
Espaçamento(cm)	BITOLAS ( $\phi$ - mm)						
	3,2	4,0	5,0	6,3	8,0	10,0	12,5
7,0	1,14	1,79	2,88	4,50	7,14	11,43	17,88
7,5	1,07	1,67	2,67	4,20	6,67	10,67	16,67
8,0	1,00	1,56	2,50	3,94	6,25	10,00	15,63
8,5	0,94	1,47	2,35	3,71	5,88	9,41	14,71
9,0	0,89	1,39	2,22	3,50	5,58	8,89	13,89
9,5	0,84	1,32	2,11	3,32	5,26	8,42	13,16
10,0	0,80	1,25	2,00	3,15	5,00	8,00	12,50
11,0	0,73	1,14	1,82	2,86	4,55	7,27	11,36
12,0	0,67	1,04	1,67	2,62	4,17	6,67	10,42
12,5	0,64	1,00	1,60	2,52	4,00	6,40	10,00
13,0	0,62	0,96	1,54	2,42	3,85	6,15	9,62
14,0	0,57	0,89	1,43	2,25	3,57	5,71	8,93
15,0	0,53	0,83	1,33	2,10	3,33	5,33	8,33
16,0	0,50	0,78	1,25	1,97	3,13	5,00	7,81
17,0	0,47	0,74	1,18	1,85	2,94	4,71	7,35
17,5	0,46	0,71	1,14	1,80	2,86	4,57	7,14
18,0	0,44	0,69	1,11	1,75	2,78	4,44	6,94
19,0	0,42	0,66	1,05	1,66	2,63	4,21	6,58
20,0	0,40	0,63	1,00	1,58	2,50	4,00	6,25
21,0	0,38	0,60	0,95	1,50	2,38	3,81	5,95
22,0	0,36	0,57	0,91	1,43	2,27	3,64	5,68
23,0	0,35	0,54	0,87	1,37	2,17	3,48	5,43
24,0	0,33	0,52	0,83	1,31	2,08	3,33	5,21
25,0	0,32	0,50	0,80	1,26	2,00	3,20	5,00
26,0	0,31	0,48	0,77	1,21	1,92	3,08	4,81
27,0	0,30	0,46	0,74	1,17	1,85	2,96	4,63
28,0	0,29	0,45	0,71	1,12	1,79	2,86	4,46
29,0	0,28	0,43	0,69	1,09	1,72	2,76	4,31
30,0	0,27	0,42	0,67	1,05	1,67	2,67	4,17
31,0	0,26	0,40	0,65	1,03	1,61	2,58	4,03
32,0	0,25	0,39	0,63	1,00	1,56	2,50	3,91
33,0	0,24	0,37	0,61	0,97	1,52	2,42	3,79





BITOLAS PADRONIZADAS PELA NBR-7480/85														
BITOLA		VALOR NOMINAL PARA CÁLCULO				NÚMERO DE FIOS OU DE BARRAS								
$\phi$		DIÂMETRO		PESO	PERÍMETRO									
FIOS	BARRAS	(cm)	(pol)	(kgf/m)	(cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,2	--	0,32	--	0,063	1,00	0,08	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56	0,64	0,72
4	--	0,40	--	0,10	1,25	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,13
5	5	0,50	3/16	0,16	1,60	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80
6,3	6,3	0,63	1/4	0,25	2,00	0,32	0,63	0,95	1,26	1,58	1,89	2,21	2,52	2,84
8	8	0,80	5/16	0,40	2,50	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50
10	10	1,00	3/8	0,63	3,15	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20
12,5	12,5	1,25	1/2	1,00	4,00	1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	7,50	8,75	10,00	11,25
--	16	1,60	5/8	1,60	5,00	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00	18,00
--	20	2,00	3/4	2,50	6,30	3,15	6,30	9,45	12,60	15,75	18,90	22,05	25,20	28,35
--	22,2	2,22	7/8	3,05	6,97	3,88	7,76	11,64	15,52	19,40	23,28	27,16	31,04	34,92
--	25	2,50	1	4,00	8,00	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	35,00	40,00	45,00
--	32	3,20	1 1/4	6,30	10,00	8,00	16,00	24,00	32,00	40,00	48,00	56,00	64,00	72,00
--	40	4,00	1 1/2	10,00	12,50	12,50	25,00	37,50	50,00	62,50	75,00	87,50	100,00	112,50

