

INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA



CIRCUITOS TRIFÁSICOS

INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA

A tall, grey metal electrical transmission tower stands against a clear blue sky. The tower is equipped with several yellow, V-shaped insulators that support the power lines. The lines extend from the tower towards the left and right, with some sagging between the points of support. The overall scene is a clear, bright day.

ESTE MATERIAL CORRESPONDE A UMA APRESENTAÇÃO DO LIVRO “INTRODUÇÃO A SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA – COMPONENTES SIMÉTRICAS” DE AUTORIA DE ERNESTO JOÃO ROBBA E OUTROS. PEQUENAS ALTERAÇÕES SÃO APENAS UMA TENTATIVA DE ILUSTRAR CERTOS CONCEITOS.

1.1 - INTRODUÇÃO

- **UTILIZAÇÃO DA ENERGIA ELÉTRICA – HISTÓRICO**
 - **CORRENTE CONTÍNUA**
 - ILUMINAÇÃO (Comp. de Luz) E MOTORES (Força e Luz) – BAIXA TENSÃO
 - **CORRENTE ALTERNADA – CIRCUITOS MONOFÁSICOS**
 - **TRANSFORMADORES** – TRANSMISSÃO EM ALTA TENSÃO COM MENORES PERDAS → TRANSMISSÃO EM LONGAS DISTÂNCIAS.
 - **GERADORES E MOTORES EM CA** – MAIS SIMPLES, MAIS BARATOS DO QUE EM CC E MAIS POTENTES.
 - **CIRCUITOS TRIFÁSICOS**
 - **RAZÕES TÉCNICAS E ECONÔMICAS**
 - UTILIZAÇÃO DE MOTORES TRIFÁSICOS – MAIS POTENTES
 - TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA COM MENORES CUSTOS
 - **PADRÃO PARA GERAÇÃO, TRANSMISSÃO E DISTRIBUIÇÃO**
 - **CARGAS ELÉTRICAS**
 - **TRIFÁSICAS** – EQUILIBRADAS – IGUAIS NAS TRÊS FASES – Y / Δ
 - **MONOFÁSICAS E BIFÁSICAS** - DESEQUILIBRADAS

1.1.1 – DEFINIÇÕES GERAIS

- SISTEMA DE TENSÕES POLIFÁSICO SIMÉTRICO

- SEJA n O NÚMERO DE FASES COM $n \geq 3$ E INTEIRO:

$$e_1 = E_M \cos(\omega t)$$

$$e_2 = E_M \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{1}{n}\right)$$

$$e_3 = E_M \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{2}{n}\right)$$

⋮

$$e_i = E_M \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{i-1}{n}\right)$$

⋮

$$e_n = E_M \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{n-1}{n}\right)$$



1.1.1 – DEFINIÇÕES GERAIS

- SISTEMA DE TENSÕES TRIFÁSICO SIMÉTRICO $n=3$

- NO DOMÍNIO DO TEMPO

$$e_1 = E_M \cos(\omega t + 0)$$

$$e_2 = E_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_3 = E_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = E_M \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

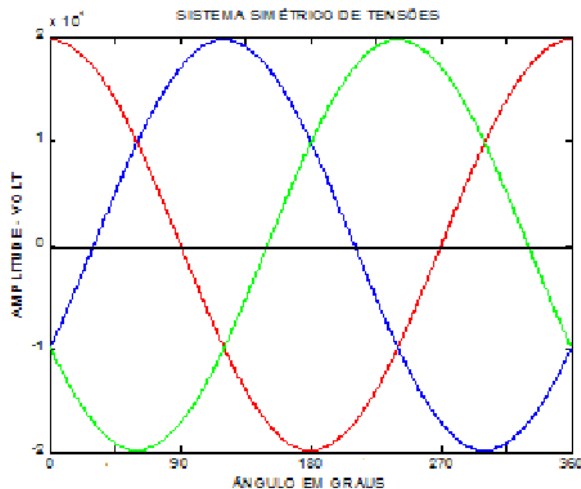


Fig. 1 – Sistema de tensão trifásico

- NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

$$E = E_m / \sqrt{2}$$

$$e_1 = \Re[E_M e^{j0} e^{j\omega t}] \quad \dot{E}_1 = E|_{\underline{0}^\circ}$$

$$e_2 = \Re[E_M e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j\omega t}] \quad \dot{E}_2 = E|_{\underline{-120}^\circ}$$

$$e_3 = \Re[E_M e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{j\omega t}] \quad \dot{E}_3 = E|_{\underline{120}^\circ}$$

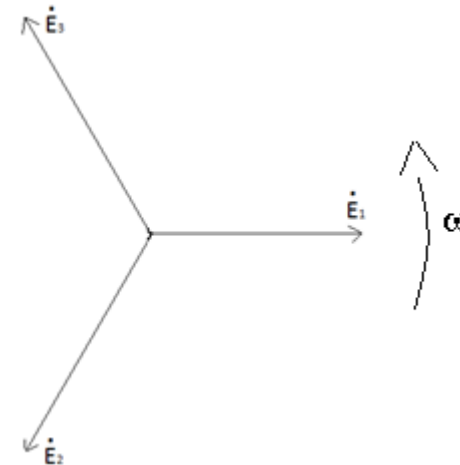
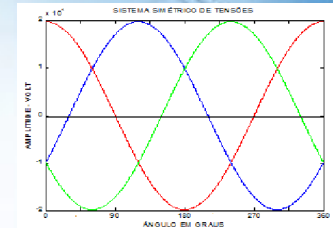


Fig. 2 – Representação Fasorial

1.1.2 – DEFINIÇÕES ADICIONAIS

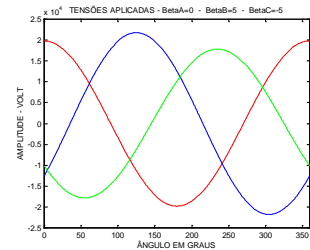
- SISTEMA DE TENSÕES TRIFÁSICO SIMÉTRICO

- TRÊS TENSÕES SENOIDAIS DE MESMA MAGNITUDE, DEFASADAS ENTRE SI DE 120°.



- SISTEMA DE TENSÕES TRIFÁSICO ASSIMÉTRICO

- SISTEMA TRIFÁSICO EM QUE AS TENSÕES NÃO ATENDEM A PELO MENOS UMA DAS CONDIÇÕES ANTERIORES. – MAGNITUDES OU DEFASAGENS DIFERENTES DE 120°.



- LINHA (OU REDE) TRIFÁSICA EQUILIBRADA

- LINHA (OU REDE) TRIFÁSICA CONSTITUÍDA POR 3 OU 4 FIOS (INCLUÍDO O NEUTRO, OU RETORNO), COM:

- IMPEDÂNCIAS PRÓPRIAS DOS FIOS DE FASE IGUAIS ENTRE SI

$$\vec{Z}_{AA} = \vec{Z}_{BB} = \vec{Z}_{CC} = \vec{Z}_p$$

- IMPEDÂNCIAS MÚTUAS ENTRE FIOS DE FASE IGUAIS ENTRE SI

$$\vec{Z}_{AB} = \vec{Z}_{BC} = \vec{Z}_{CA} = \vec{Z}_M$$

- IMPEDÂNCIAS MÚTUAS ENTRE FIOS DE FASE E O FIO NEUTRO IGUAIS ENTRE SI

$$\vec{Z}_{AG} = \vec{Z}_{BG} = \vec{Z}_{CG} = \vec{Z}'_M$$

1.1.2 – DEFINIÇÕES ADICIONAIS

- **LINHA (OU REDE) TRIFÁSICA DESEQUILIBRADA**
 - LINHA (OU REDE) TRIFÁSICA EM QUE NÃO SE VERIFICA PELO MENOS UMA DAS CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO.
- **CORRENTES DESEQUILIBRADAS**
 - CONSEQUÊNCIA DA LINHA DESEQUILIBRADA OU DO SISTEMA ASSIMÉTRICO.
- **CARGA TRIFÁSICA EQUILIBRADA**
 - CARGA TRIFÁSICA CONSTITUÍDA POR TRÊS IMPEDÂNCIAS COMPLEXAS IGUAIS, LIGADAS EM ESTRELA (Y) OU EM TRIÂNGULO (Δ).
- **CARGA TRIFÁSICA DESEQUILIBRADA**
 - CARGA TRIFÁSICA EM QUE NÃO SE VERIFICA A CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO.

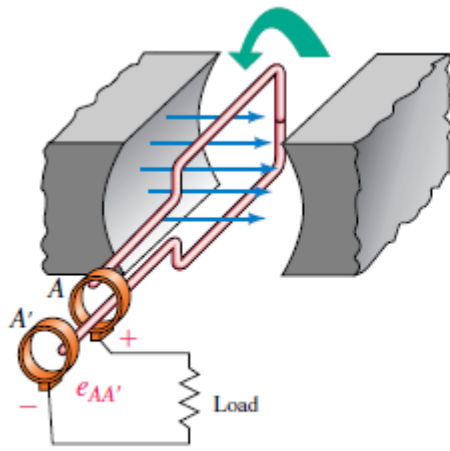


1.1.3 – SEQUÊNCIA DE FASES

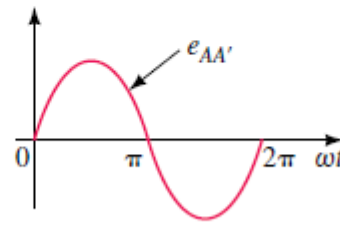
- NOS TERMINAIS DE UMA BOBINA QUE GIRA COM VELOCIDADE ω CONSTANTE EM UM CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME SURGE UMA TENSÃO DADA POR:

$$e = E_M \cos(\omega t + \theta)$$

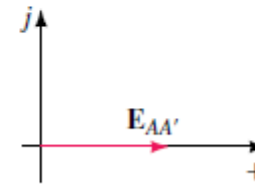
f.e.m. – TENSÃO GERADA



(a) Basic ac generator



(b) Voltage waveform



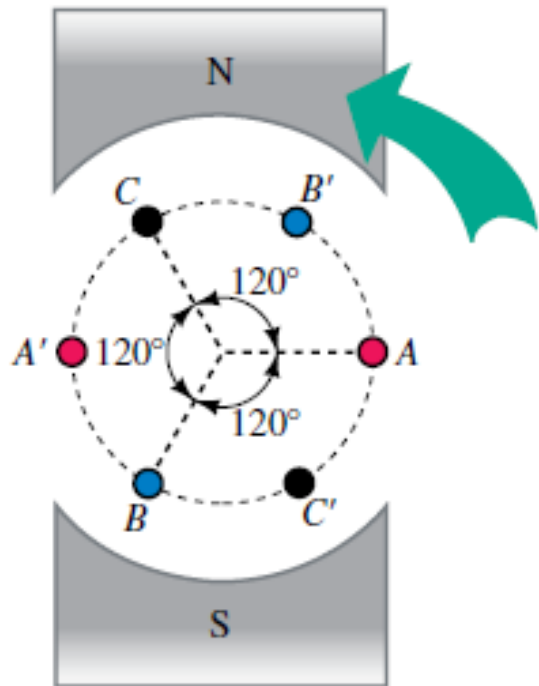
(c) Phasor

θ REPRESENTA O ÂNGULO INICIAL DA BOBINA.

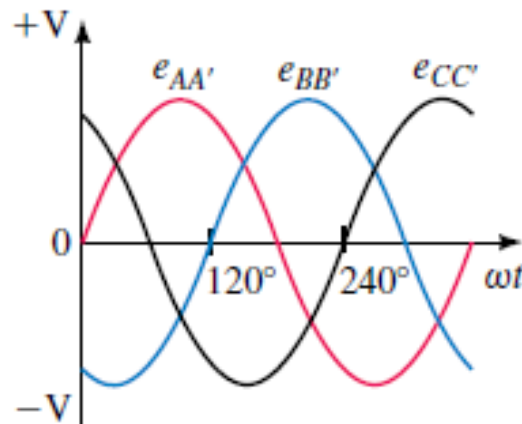
- NO CASO DA FIGURA $\theta = 0^\circ$.

1.1.3 – SEQUÊNCIA DE FASES

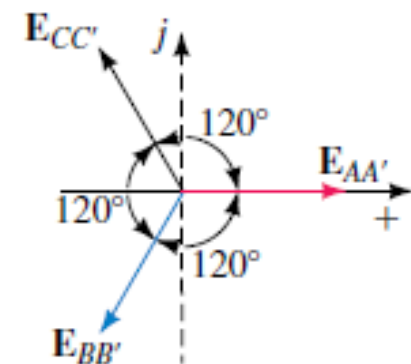
- CONSIDERE-SE 3 BOBINAS DESLOCADAS ENTRE SI DE $2\pi/3$ rad, OU 120° , EM UM MESMO EIXO.



(a) Basic 3-phase generator



(b) Voltage waveforms



(c) Phasors

FIG. 3 – OBTENÇÃO DE UM SISTEMA DE TENSÃO TRIFÁSICO.

1.1.3 – SEQUÊNCIA DE FASES

- AS EXPRESSÕES MATEMÁTICAS PARA UM SISTEMA TRIFÁSICO SIMÉTRICO FICAM:

$$e_1 = E_M \cos(\omega t + 0)$$

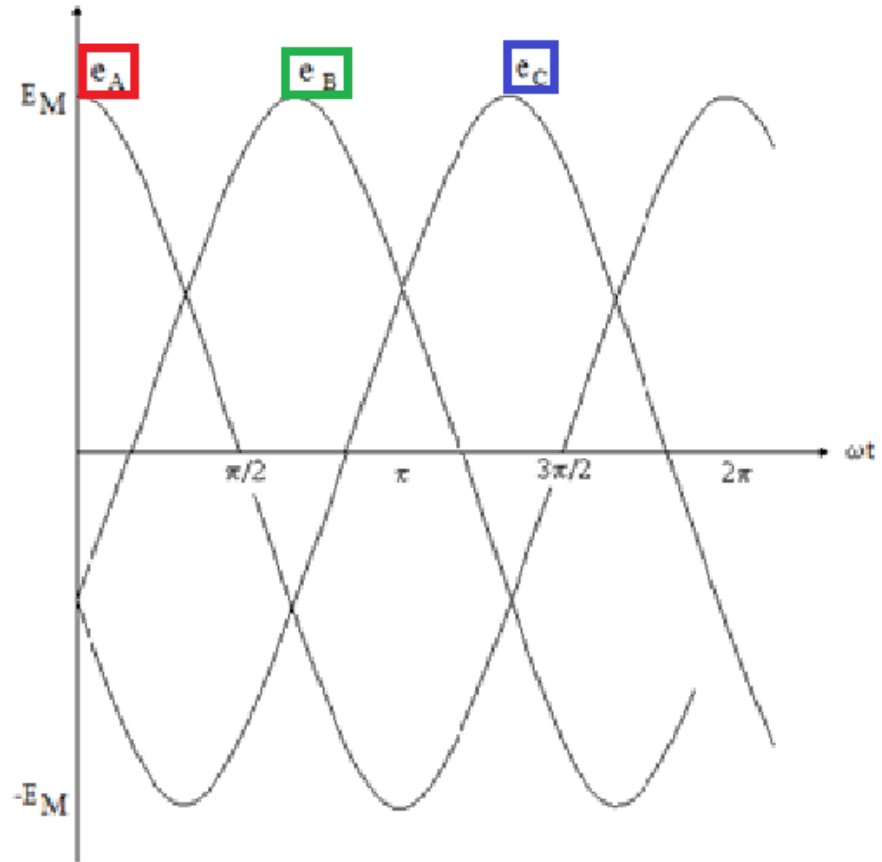
$$e_2 = E_M \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_3 = E_M \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = E_M \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_1 = E_M \cos(\omega t + \theta)$$

$$e_2 = E_M \cos\left(\omega t + \theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_3 = E_M \cos\left(\omega t + \theta - \frac{4\pi}{3}\right) = E_M \cos\left(\omega t + \theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$



1.1.3 – SEQUÊNCIA DE FASES

- **SEQUÊNCIA DE FASE** – É A ORDEM PELA QUAL AS TENSÕES PASSAM POR UM PONTO MÁXIMO.

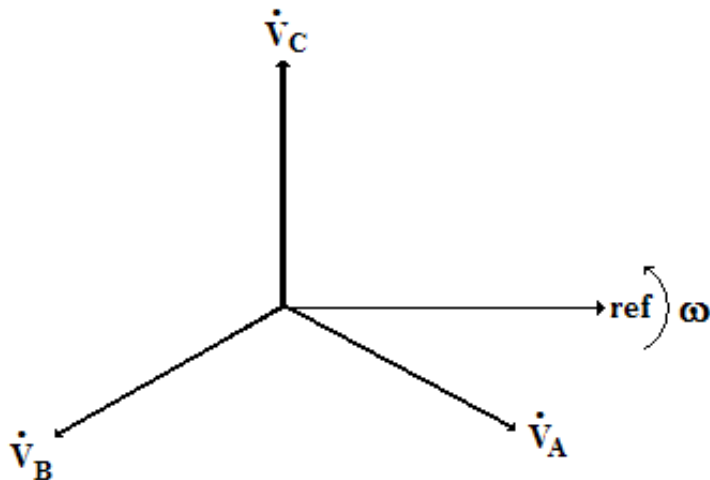
- **SEQUÊNCIA DIRETA OU POSITIVA**

- A-B-C; B-C-A; C-A-B.

- **SEQUÊNCIA INDIRETA OU NEGATIVA**

- A-C-B; C-B-A; B-A-C.

Seq. + (ABC)



Seq. - (ACB)

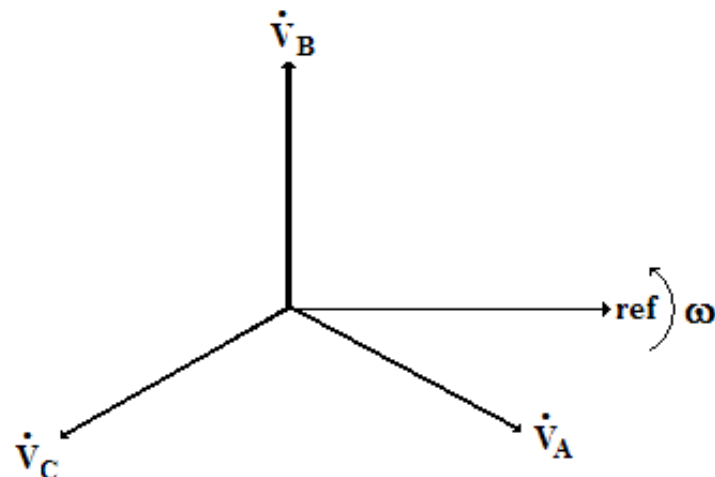


FIG. 4 – SEQUÊNCIA DE FASE, DIRETA E INVERSA, DOS FASORES DE TENSÃO.

EX. 1

1.1.4 – OPERADOR α

- **OPERADOR j** – UTILIZADO NA REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS.
- PROMOVE UMA ROTAÇÃO DE 90° EM UM NÚMERO COMPLEXO.
- DEFINE-SE α COMO SENDO UM OPERADOR QUE, APLICADO A UM FASOR, PROMOVE, NESTE FASOR, UMA ROTAÇÃO DE 120° .

$$\alpha = 1 \Big|_{\underline{120^\circ}} = 1 \cdot \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\alpha = 1 \Big|_{\underline{-120^\circ}} = 1 \cdot \cos(-120^\circ) + j \sin(-120^\circ) = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- OU SEJA, α É UM NÚMERO COMPLEXO DE MÓDULO UNITÁRIO E ARGUMENTO DE 120° DE MODO QUE, QUANDO APLICADO A UM FASOR QUALQUER, TRANSFORMA-O EM OUTRO FASOR DE MESMO MÓDULO E ADIANTADO DE 120°

1.1.4 – OPERADOR α

- PROPRIEDADES DE α

$$\alpha^1 = 1 \left| \underline{120^\circ} \right.$$

$$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha = 1 \left| \underline{120^\circ} \right. \cdot 1 \left| \underline{120^\circ} \right. = 1 \left| \underline{240^\circ} \right. = 1 \left| \underline{-120^\circ} \right.$$

$$\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = 1 \left| \underline{-120^\circ} \right. \cdot 1 \left| \underline{120^\circ} \right. = 1 \left| \underline{0^\circ} \right.$$

$$\alpha^4 = \alpha^3 \cdot \alpha = \alpha$$

- GENÉRICAMENTE – n É UM NÚMERO INTEIRO E POSITIVO

$$\alpha^{3n} = (\alpha^3)^n = (1 \left| \underline{0^\circ} \right.)^n = 1 \left| \underline{0^\circ} \right. = \alpha^0$$

$$\alpha^{3n+1} = \alpha^{3n} \cdot \alpha = \alpha = 1 \left| \underline{120^\circ} \right.$$

$$\alpha^{3n+2} = \alpha^{3n} \cdot \alpha^2 = \alpha^2 = 1 \left| \underline{-120^\circ} \right.$$

OPERAÇÕES COM α :

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0$$

$$= 1 \left| \underline{0^\circ} \right. + 1 \left| \underline{120^\circ} \right. \cdot 1 \left| \underline{-120^\circ} \right.$$

$$= 1 + j0 - \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

EX. 2

1.1.5 – SEQUÊNCIAS

- DEFINE-SE **SEQUÊNCIA** COMO SENDO UM CONJUNTO ORDENADO DE TRÊS FASORES.

- SEJAM DADOS TRÊS FASORES QUAISQUER: \dot{M}_A , \dot{M}_B , \dot{M}_C

- PODE-SE DEFINIR A SEGUINTE SEQUÊNCIA:

$$\text{SEQUÊNCIA } M_A = \vec{M}_A = \begin{bmatrix} \dot{M}_A \\ \dot{M}_B \\ \dot{M}_C \end{bmatrix}$$

- EXEMPLO DE SEQUÊNCIA:

$$\vec{V}_{AN} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 | \underline{0^\circ} \\ 225 | \underline{-118^\circ} \\ 217 | \underline{123^\circ} \end{bmatrix}$$

1.1.5 – SEQUÊNCIAS

- CASOS PARTICULARES

- **SEQUÊNCIA ZERO** – QUANDO OS TRÊS FASORES SÃO IGUAIS.
ESTA SEQUÊNCIA SERÁ IDENTIFICADA POR UM ÍNDICE 0

$$\vec{V}_0 = \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_0 \\ \dot{V}_0 \end{bmatrix} = \dot{V}_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{V}_0 \vec{S}_0 \quad \text{SEND O} \quad \vec{S}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{V}_0 = 220 | \underline{0^\circ} \cdot \vec{S}_0 = 220 | \underline{0^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 | \underline{0^\circ} \\ 220 | \underline{0^\circ} \\ 220 | \underline{0^\circ} \end{bmatrix}$$

- **SEQUÊNCIA DIRETA (OU POSITIVA)** – É DEFINIDA COMO SENDO UMA SEQUÊNCIA $\dot{V}_A, \dot{V}_B, \dot{V}_C$ EM QUE $\dot{V}_B = \alpha^2 \dot{V}_A$ E $\dot{V}_C = \alpha \dot{V}_A$

ESTA SEQUÊNCIA SERÁ IDENTIFICADA POR UM ÍNDICE 1 OU +
SEND O $\dot{V}_A = \dot{V}_1$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \alpha^2 \dot{V}_1 \\ \alpha \dot{V}_1 \end{bmatrix} = \dot{V}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \dot{V}_1 \vec{S}_1 \quad \text{COM} \quad \vec{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \vec{V}_{BN} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \\ \dot{V}_{AN} \end{bmatrix} = \dot{V}_{BN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 220 | \underline{58^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 | \underline{58^\circ} \\ 220 | \underline{-62^\circ} \\ 220 | \underline{178^\circ} \end{bmatrix} V$$

1.1.5 – SEQUÊNCIAS

- CASOS PARTICULARES

- **SEQUÊNCIA INDIRETA (OU NEGATIVA)** – É DEFINIDA COMO SENDO UMA SEQUÊNCIA $\dot{V}_A, \dot{V}_B, \dot{V}_C$ EM QUE $\dot{V}_B = \alpha \dot{V}_A$ E $\dot{V}_C = \alpha^2 \dot{V}_A$

ESTA SEQUÊNCIA SERÁ IDENTIFICADA POR UM ÍNDICE 2 OU -

SENDO $\dot{V}_A = \dot{V}_2$ TEM-SE

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \alpha \dot{V}_2 \\ \alpha^2 \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \dot{V}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = \dot{V}_2 \vec{S}_2 \quad \text{COM} \quad \vec{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_{BN} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \\ \dot{V}_{AN} \end{bmatrix} = \dot{V}_{BN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = 220 \angle 58^\circ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \angle 58^\circ \\ 220 \angle 178^\circ \\ 220 \angle -62^\circ \end{bmatrix} V$$

1.2 – SISTEMAS TRIFÁSICOS SIMÉTRICOS E EQUILIBRADOS COM CARGA EQUILIBRADA - LIGAÇÕES



1.2.1 - INTRODUÇÃO

- SISTEMAS TRIFÁSICOS

- 3 FIOS – 3 FASES
- 4 FIOS – 3 FASES E 1 NEUTRO
- PODERÁ HAVER **ACOPLAMENTO MAGNÉTICO** .
 - A EXISTÊNCIA DE CORRENTE ELÉTRICA SENOIDAL EM UM FIO IRÁ INDUZIR TENSÕES SENOIDAIS NOS DEMAIS FIOS.
 - ESTE EFEITO É REPRESENTADO POR **INDUTÂNCIAS MÚTUAS**.
 - A RESOLUÇÃO DOS SISTEMA É COMPLEXA POIS PODE-SE TER SISTEMAS DESEQUILIBRADOS DEVIDO À DISPOSIÇÃO ESPACIAL DOS CONDUTORES.
 - INICIALMENTE VAMOS DESCONSIDERAR ESTE EFEITO.

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA:

1.2.2 - LIGAÇÕES EM ESTRELA

- SEJAM TRÊS BOBINAS IDÊNTICAS ALIMENTANDO TRÊS CARGAS DE IMPEDÂNCIAS IGUAIS – CARGA EQUILIBRADA.

$$\bar{Z} = Z|\varphi = R + jX \quad \rightarrow \text{CARACTERÍSTICA INDUTIVA}$$

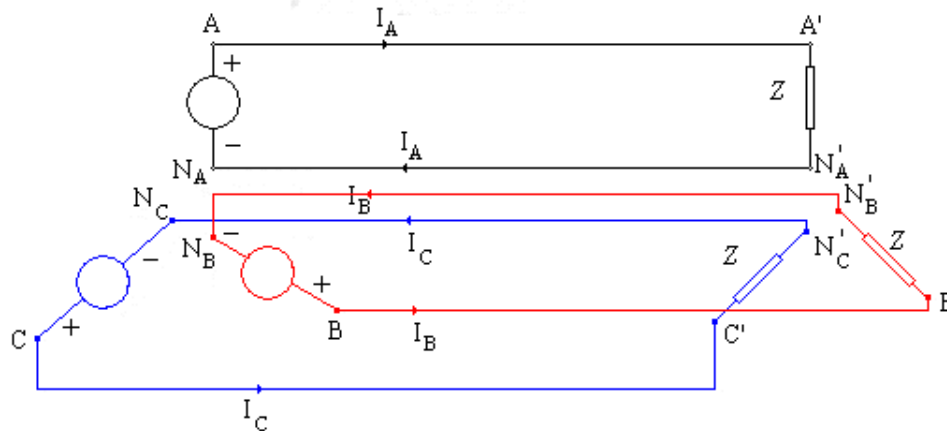


FIG. 5 – TRÊS CIRCUITOS MONOFÁSICOS

- VAMOS CONSIDERAR QUE AS TRÊS BOBINAS “GERAM” TRÊS TENSÕES DE MESMA MAGNITUDE, MAS DEFASADAS DE 120° , COM SEQUÊNCIA POSITIVA:

$$\dot{E}_{AN_A} = E|0^\circ, \dot{E}_{BN_B} = E| -120^\circ \text{ e } \dot{E}_{CN_C} = E|120^\circ$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA:

1.2.2 - LIGAÇÕES EM ESTRELA

- AS CORRENTES QUE CIRCULAM NOS CIRCUITOS SÃO:

$$\dot{i}_A = \frac{\dot{E}_{AN_A}}{\bar{Z}} = \frac{E|_{0^\circ}}{Z|\varphi} = \frac{E}{Z} |_{-\varphi}$$

$$\dot{i}_B = \frac{\dot{E}_{BN_B}}{\bar{Z}} = \frac{E|_{-120^\circ}}{Z|\varphi} = \frac{E}{Z} |_{-120-\varphi}$$

$$\dot{i}_C = \frac{\dot{E}_{CN_C}}{\bar{Z}} = \frac{E|_{+120^\circ}}{Z|\varphi} = \frac{E}{Z} |_{+120-\varphi}$$

- NOS TRÊS CIRCUITOS CIRCULARÃO CORRENTES DE MESMO VALOR EFICAZ E DEFASADAS ENTRE SI DE $2\pi/2$ rad OU 120° .
- OS CIRCUITOS SÃO ELETRICAMENTE INDEPENDENTES. ENTÃO OS PONTOS \mathbf{N}_A , \mathbf{N}_B E \mathbf{N}_C PODEM SER CONECTADOS EM UM PONTO \mathbf{N} .

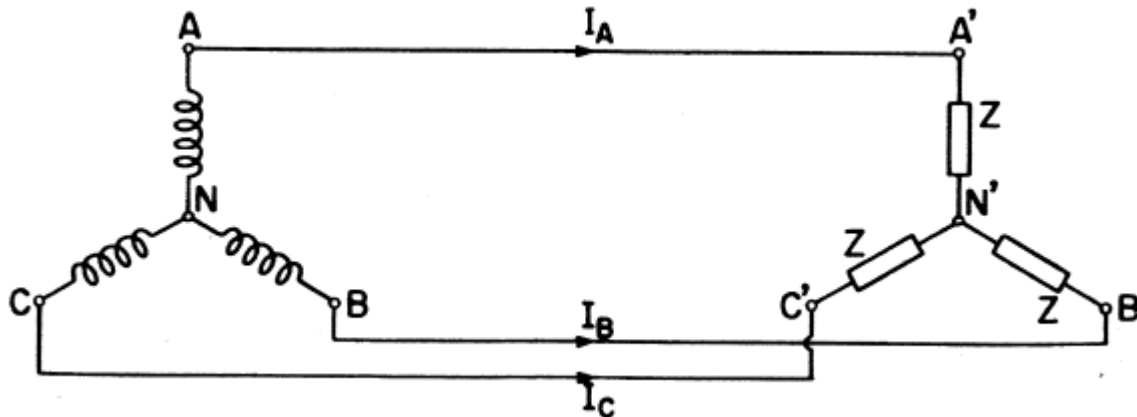
1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA:

1.2.2 - LIGAÇÕES EM ESTRELA

- OS PONTOS N'_A , N'_B E N'_C ESTÃO AO MESMO POTENCIAL DE N E PODEM SER IGUALMENTE CONECTADOS.
- OS TRÊS FIOS PODEM SER SUBSTITUÍDOS POR UM FIO ÚNICO.
- A CORRENTE QUE CIRCULA NO CONDUTOR N-N' É:

$$\dot{I}_{NN'} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

POIS AS TRÊS CORRENTES QUE CHEGAM AO NÓ N' TÊM O MESMO VALOR EFICAZ E ESTÃO DEFASADAS DE 120° - OS PONTOS N E N' ESTÃO NO MESMO POTENCIAL – PORTANTO NÃO CIRCULA CORRENTE ENTRE ELES – O FIO NN' PODE SER RETIRADO



1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA:

1.2.2 - LIGAÇÕES EM ESTRELA

- AO ESQUEMA ASSIM OBTIDO DÁ-SE O NOME DE CIRCUITO TRIFÁSICO SIMÉTRICO COM GERADOR LIGADO EM “ESTRELA” (Y) E CARGA EQUILIBRADA LIGADA EM “ESTRELA”.
- O PONTO N OU N’ RECEBE O NOME DE “CENTRO-ESTRELA”.
- LOGO O CIRCUITO PODE SER REDESENHADO COMO SEGUE:

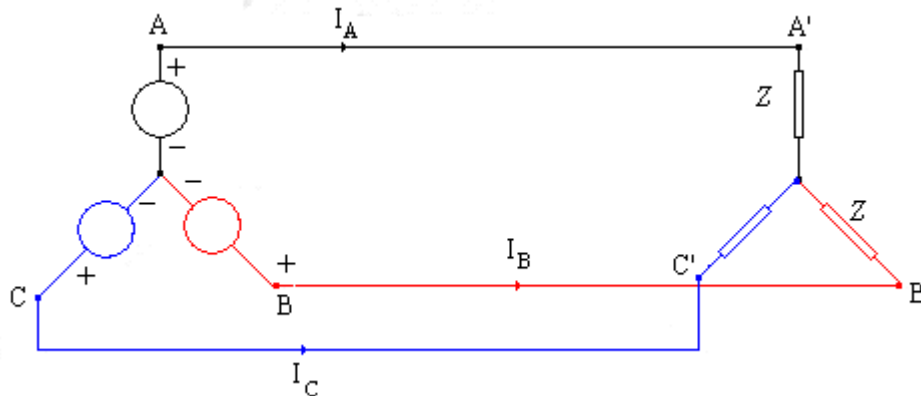


FIG. 6 – SISTEMA TRIFÁSICO COM FONTES E CARGAS LIGADAS EM ESTRELA.

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.2 - LIGAÇÕES EM ESTRELA - DEFINIÇÕES

- **TENSÃO DE FASE:** MEDIDA ENTRE QUALQUER TERMINAL DO GERADOR, OU DA CARGA, E O CENTRO-ESTRELA (FASE-NEUTRO)
- **TENSÃO DE LINHA:** MEDIDA ENTRE QUAISQUER DOIS TERMINAIS DO GERADOR, OU DA CARGA (FASE-FASE).
- **CORRENTE DE FASE:** CORRENTE QUE PERCORRE CADA UMA DAS BOBINAS DO GERADOR, OU DA IMPEDÂNCIA DA CARGA.
- **CORRENTE DE LINHA:** CORRENTE QUE PERCORRE OS CONDUTORES QUE CONECTAM O GERADOR À CARGA, EXCETUADO O NEUTRO (CORRENTE DE NEUTRO).
- **SISTEMA TRIFÁSICO SIMÉTRICO E EQUILIBRADO:** AS TENSÕES E CORRENTES DE LINHA E DE FASE EM TODAS AS FASES APRESENTAM VALORES EFICAZES IGUAIS E DEFASAGEM DE 120° . RESOLVE-SE COMO SE FOSSE UM CIRCUITO MONOFÁSICO.

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.3 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE – LIGAÇÃO ESTRELA

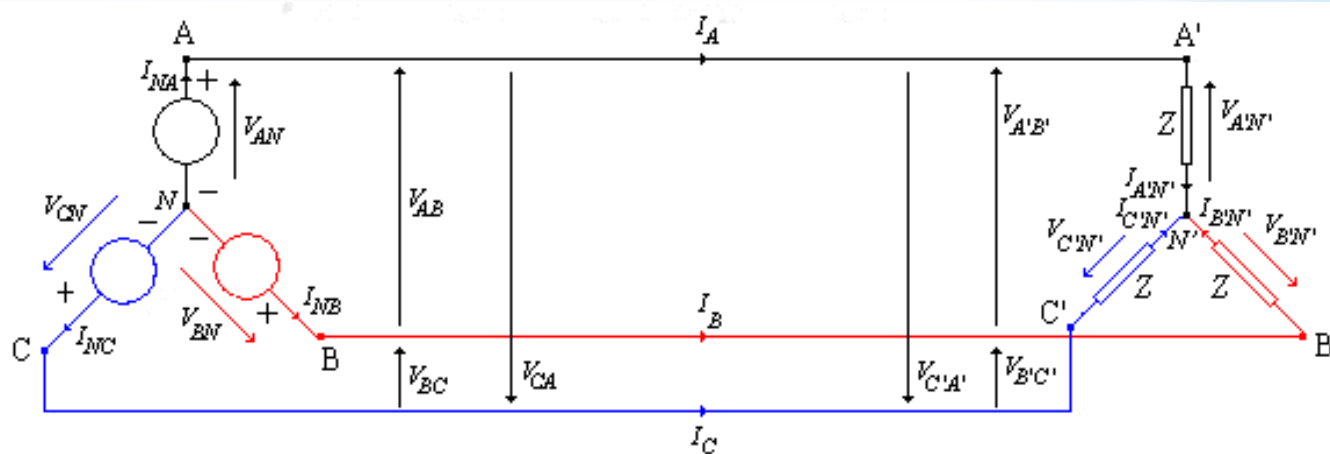


FIG. 6 – TENSÕES E CORRENTES DE FASE E DE LINHA EM UM SISTEMA TRIFÁSICO COM GERADOR E CARGA LIGADOS EM Y.

TABELA 1 – GRANDEZAS DE FASE E DE LINHA (EM MÓDULO) NUM SISTEMA TRIFÁSICO E EQUILIBRADO LIGADO EM Y.

Valores de fase				Valores de linha			
Gerador		Carga		Gerador		Carga	
Corrente	Tensão	Corrente	Tensão	Corrente	Tensão	Corrente	Tensão
I_{NA}	V_{AN}	$I_{A'N'}$	$V_{A'N'}$	I_A	V_{AB}	I_A	$V_{A'B'}$
I_{NB}	V_{BN}	$I_{B'N'}$	$V_{B'N'}$	I_B	V_{BC}	I_B	$V_{B'C'}$
I_{NC}	V_{CN}	$I_{C'N'}$	$V_{C'N'}$	I_C	V_{CA}	I_C	$V_{C'A'}$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

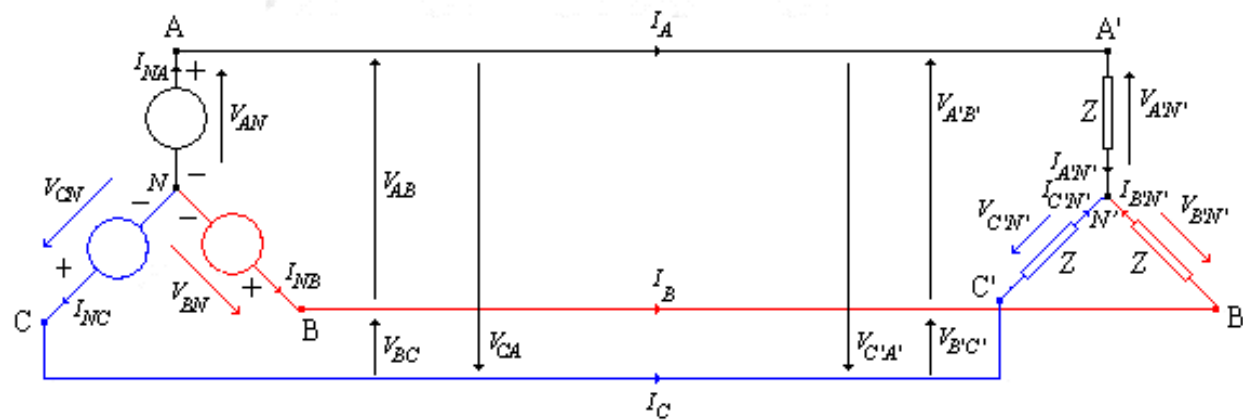
1.2.3 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE – LIGAÇÃO ESTRELA

A – RELAÇÃO ENTRE AS CORRENTES

$$\dot{I}_{NA} = \dot{I}_A = \dot{I}_{A'N'}$$

$$\dot{I}_{NB} = \dot{I}_B = \dot{I}_{B'N'}$$

$$\dot{I}_{NC} = \dot{I}_C = \dot{I}_{C'N'}$$



B – RELAÇÃO ENTRE AS TENSÕES – SEQUÊNCIA POSITIVA

- DADAS AS TENSÕES DE FASE

- AS TENSÕES DE LINHA SÃO (LKT):

$$\vec{V}_{AN} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \dot{V}_{AN} \cdot \vec{S}_1$$

$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN}$$

$$\dot{V}_{BC} = \dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN}$$

$$\dot{V}_{CA} = \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{AN}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.3 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE – LIGAÇÃO ESTRELA

B – RELAÇÃO ENTRE AS TENSÕES – SEQUÊNCIA POSITIVA

EM FORMA MATRICIAL TEMOS:

$$\vec{V}_{AB} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \\ \dot{V}_{AN} \end{bmatrix} = \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} - \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 - \alpha^2 \\ \alpha^2 - \alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

ONDE:

$$1 - \alpha^2 = 1 - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \angle 30^\circ$$

$$\alpha^2 - \alpha = \alpha^2(1 - \alpha^2) = \alpha^2 \sqrt{3} \angle 30^\circ$$

$$\alpha - 1 = \alpha(1 - \alpha^2) = \alpha \sqrt{3} \angle 30^\circ$$

LOGO

$$\vec{V}_{AB} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{AN} \\ \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{BN} \\ \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix}$$

OU, AINDA

$$\vec{V}_{AB} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{V}_{AN} \cdot \vec{S}_1 = \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot \vec{V}_{AN}$$

CONCLUSÃO – OBTÊM-SE AS TENSÕES DE LINHA MULTIPLICANDO-SE AS CORRESPONDENTES TENSÕES DE FASE POR $\sqrt{3}$ E SOMANDO-SE 30° AO SEU ÂNGULO DE FASE.

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.3 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE – LIGAÇÃO ESTRELA

B – RELAÇÃO ENTRE AS TENSÕES – SEQUÊNCIA POSITIVA

O DIAGRAMA FASORIAL CORRESPONDENTE, COM A TENSÃO NA FASE \dot{V}_{AN} NA REFERÊNCIA, FICA:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN}$$

$$\dot{V}_{BC} = \dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN}$$

$$\dot{V}_{CA} = \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{AN}$$

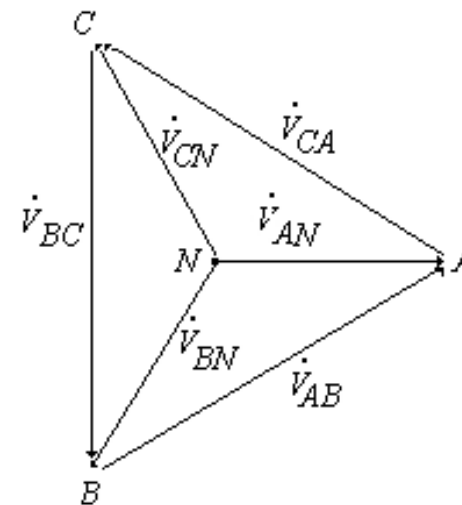
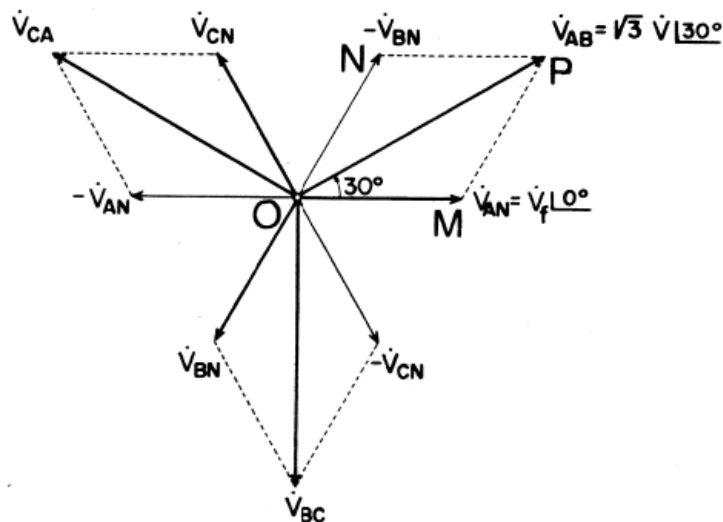
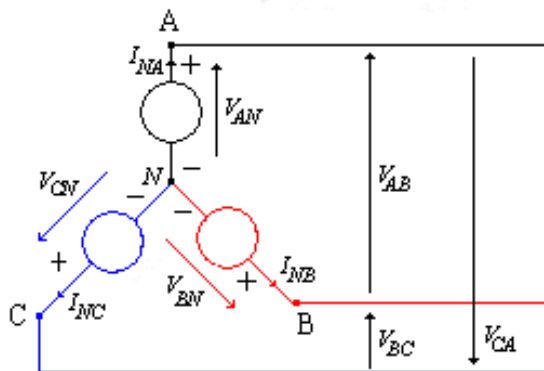


FIG. 9 – DIAGRAMA FASORIAL COM RELAÇÃO ENTRE TENSÕES DE LINHA E FASE, SEQUÊNCIA DIRETA, LIGAÇÃO Y, TENSÃO DA FASE A NA REFERÊNCIA

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.3 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE – LIGAÇÃO ESTRELA

C – RELAÇÃO ENTRE AS TENSÕES – SEQUÊNCIA NEGATIVA



$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN}$$

$$\dot{V}_{BC} = \dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN}$$

$$\dot{V}_{CA} = \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{AN}$$

NESTE CASO OBTÊM-SE AS TENSÕES DE LINHA MULTIPLICANDO-SE AS TENSÕES DE FASE POR $\sqrt{3}$ E SUBTRAINDO-SE 30° DE SEU ÂNGULO DE FASE, OU SEJA:

$$\vec{V}_{AB} = \sqrt{3} \angle -30^\circ \cdot \vec{V}_{AN}$$

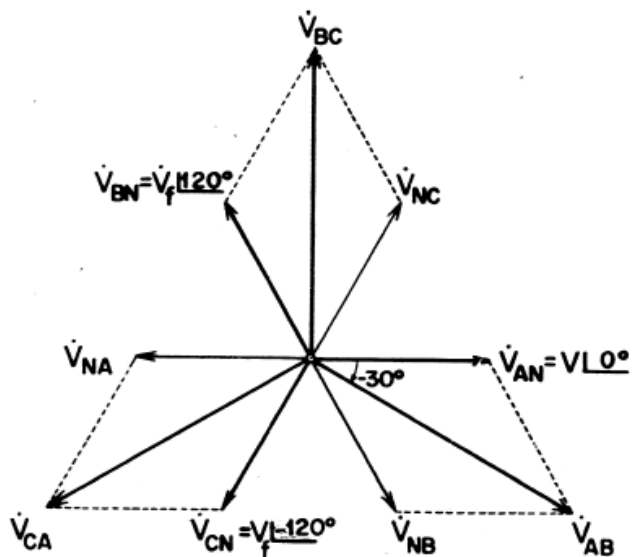


FIG. 10 – DIAGRAMA FASORIAL COM RELAÇÃO ENTRE AS TENSÕES DE LINHA E FASE, SEQUÊNCIA INDIRETA, LIGAÇÃO Y.

A DEMONSTRAÇÃO FICA COMO EXERCÍCIO

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.3 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE – LIGAÇÃO ESTRELA

D – DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES DE FASE CONHECENDO-SE AS TENSÕES DE LINHA.

NESTE CASO SURGE UMA INDETERMINAÇÃO.

SUPONDO-SE UMA SEQUÊNCIA DE FASE DIRETA, OS VALORES

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \frac{\dot{V}_{AB}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_{AB} = \sqrt{3} \left| \underline{30^\circ} \right. \cdot \vec{V}_{AN}$$

REPRESENTAM UMA TERNA DE FASORES DE TENSÕES DE FASE QUE SATISFAZEM AOS DADOS DE LINHA.

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.3 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE – LIGAÇÃO ESTRELA

- CONSIDERE UMA TENSÃO $V_{NN'}$ QUALQUER, COMO ILUSTRADO NA FIG. 11

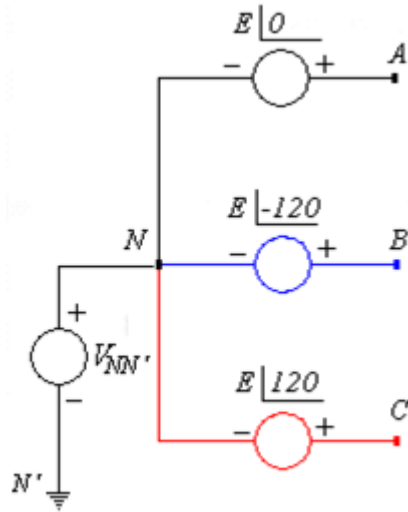
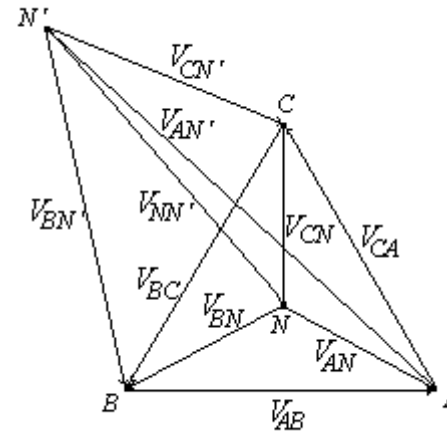


FIG. 11 – DESLOCAMENTO DE NEUTRO



LOGO

$$\vec{V}_{AN'} = \vec{V}_{AN} + \vec{V}_{NN'} = \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} + \dot{V}_{NN'} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

TAMBÉM SATISFAZEM AS
CONDIÇÕES IMPOSTAS, POIS:

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.3 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE – LIGAÇÃO ESTRELA

$$\vec{V}_{AB} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN'} \\ \dot{V}_{BN'} \\ \dot{V}_{CN'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{BN'} \\ \dot{V}_{CN'} \\ \dot{V}_{AN'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{V}_{NN'} \\ \dot{V}_{NN'} \\ \dot{V}_{NN'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \\ \dot{V}_{AN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{NN'} \\ \dot{V}_{NN'} \\ \dot{V}_{NN'} \end{bmatrix} =$$

$$\dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} - \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{V}_{NN'} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \dot{V}_{AN} (1 - \alpha^2) \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \sqrt{3} \underline{30^\circ} \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

CONCLUSÕES:

- 1 – A TENSÃO $V_{NN'}$ NÃO AFETA AS TENSÕES DE LINHA – LOGO $V_{NN'}$ PODE SER QUALQUER VALOR;
- 2 – DADAS AS TENSÕES DE LINHA, AS TENSÕES FASE-TERRA ESTÃO INDETERMINADAS, OU SEJA,

$$\dot{V}_{AN'} = \frac{\dot{V}_{AB}}{\sqrt{3} \underline{30^\circ}}$$

SE, E SOMENTE SE, FOR GARANTIDO QUE O SISTEMA É ATERRADO.

EX. 3 E 4

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.4 - RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS COM GERADOR E CARGA – LIGAÇÃO ESTRELA

- CONSIDERE-SE O CIRCUITO A SEGUIR SENDO CONHECIDAS AS TENSÕES DE FASE DO GERADOR (SIMÉTRICAS – SEQUÊNCIA POSITIVA), IMPEDÂNCIAS DA LINHA E DA CARGA.

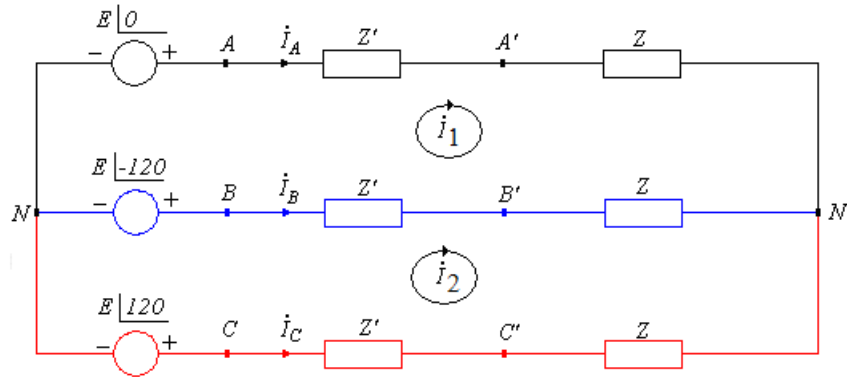


FIG. 11 – CIRCUITO TRIFÁSICO EM ESTRELA.

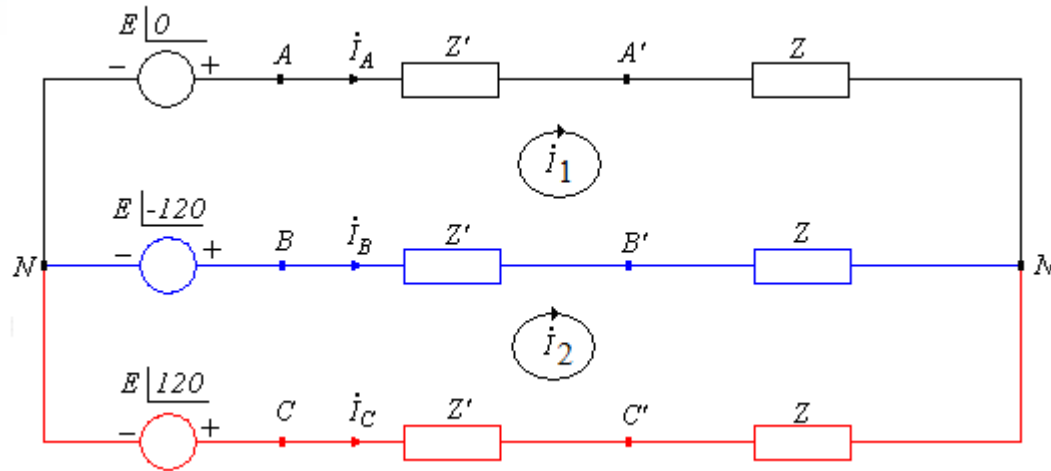
- DETERMINAR AS CORRENTES DE LINHA UTILIZANDO ANÁLISE DE REDE.
- DADOS:
- TENSÕES NO GERADOR:
- IMPEDÂNCIAS DE CARGA E DE LINHA:

$$\vec{V}_{AN} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = E \begin{matrix} | \\ \underline{0^\circ} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z} = Z \begin{matrix} | \\ \underline{\varphi} \end{matrix}; \quad \bar{Z}' = Z' \begin{matrix} | \\ \underline{\varphi}' \end{matrix}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.4 - RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS COM GERADOR E CARGA – LIGAÇÃO ESTRELA



- **SOLUÇÃO:** - UTILIZA-SE O MÉTODOS DAS MALHAS.

- APLICANDO-SE A LEI DE KIRCHHOFF DAS TENSÕES NAS DUAS MALHAS:

$$\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN} = 2\dot{I}_1(\bar{Z} + \bar{Z}') - \dot{I}_2(\bar{Z} + \bar{Z}') = (2\dot{I}_1 - \dot{I}_2)(\bar{Z} + \bar{Z}') \quad \rightarrow \quad 2\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')}$$

$$\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN} = -\dot{I}_1(\bar{Z} + \bar{Z}') + 2\dot{I}_2(\bar{Z} + \bar{Z}') = (-\dot{I}_1 + 2\dot{I}_2)(\bar{Z} + \bar{Z}') \quad \rightarrow \quad -\dot{I}_1 + 2\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.4 - RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS COM GERADOR E CARGA – LIGAÇÃO ESTRELA

- APLICANDO-SE ALGUM MÉTODO DE SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR:

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{3(\bar{Z} + \bar{Z}')} [2\dot{V}_{AN} - (\dot{V}_{BN} + \dot{V}_{CN})]$$

- LEMBRANDO QUE: $\dot{V}_{AN} + \dot{V}_{BN} + \dot{V}_{CN} = 0 \rightarrow \dot{V}_{AN} = -(\dot{V}_{BN} + \dot{V}_{CN})$

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{3(\bar{Z} + \bar{Z}')} [3\dot{V}_{AN}] = \frac{\dot{V}_{AN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')}$$

- DA MESMA FORMA:

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{3(\bar{Z} + \bar{Z}')} [-2\dot{V}_{CN} + (\dot{V}_{AN} + \dot{V}_{BN})]$$

$$\dot{V}_{AN} + \dot{V}_{BN} + \dot{V}_{CN} = 0 \rightarrow -\dot{V}_{CN} = \dot{V}_{AN} + \dot{V}_{BN}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{3(\bar{Z} + \bar{Z}')} [-3\dot{V}_{CN}] = \frac{-\dot{V}_{CN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.4 - RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS COM GERADOR E CARGA – LIGAÇÃO ESTRELA

- LOGO, POR INSPEÇÃO DO CIRCUITO TRIFÁSICO, CONCLUI-SE QUE:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_{AN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = -\frac{\dot{V}_{CN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')} - \frac{\dot{V}_{AN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')} = \frac{\dot{V}_{BN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')} = \frac{\alpha^2 \dot{V}_{AN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')} = \alpha^2 \dot{I}_A$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_{CN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')} = \frac{\alpha \dot{V}_{AN}}{(\bar{Z} + \bar{Z}')} = \alpha \dot{I}_A$$

- EM FORMA MATRICIAL, TEM-SE:

- GENERALIZANDO, TEM-SE:

$$\vec{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \alpha^2 \dot{I}_A \\ \alpha \dot{I}_A \end{bmatrix} = \dot{I}_A \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{E \angle 0^\circ}{(\bar{Z} + \bar{Z}')} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\vec{I}_A = \frac{E \angle \theta^\circ}{(\bar{Z} + \bar{Z}')} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- PORTANTO, BASTARIA CALCULAR A CORRENTE NA FASE A E IMPRIMIR AS DEVIDAS ROTAÇÕES PARA SE DETERMINAR AS CORRENTES NAS FASES B E C.

EX. - 5

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.5 - LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO

- CONSIDEREMOS OS GERADORES MONOFÁSICOS QUE COMPÕEM O TRIFÁSICO, COMO ILUSTRADO NA FIG. 14.

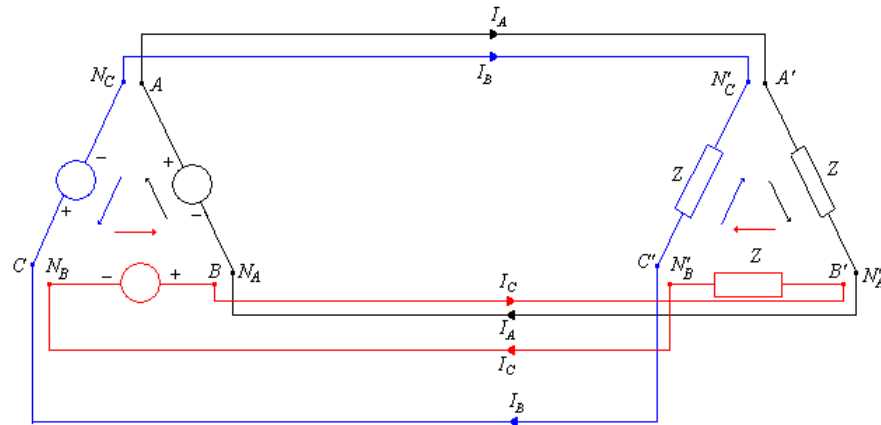


FIG.14 – TRÊS CIRCUITOS MONOFÁSICOS PARA CONEXÃO Δ

- EXISTEM 3 MALHAS ELETRICAMENTE INDEPENDENTES:

$$AA'N'_AN_A; \quad BB'N'_BN_B; \quad CC'N'_CN_C;$$

PORTANTO, PODE-SE INTERLIGAR OS PONTOS C E N_B

- COMO C' e N'_B ESTÃO NO MESMO POTENCIAL TAMBÉM PODEM SER INTERLIGADOS.
- OS CONDUTORES CC' E $N_BN'_B$ PODEM SER SUBSTITUÍDOS POR UM ÚNICO CONDUTOR.
- A MALHA $AA'N'_AN_A$ CONTINUA ELETRICAMENTE INDEPENDENTE.

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.5 - LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO

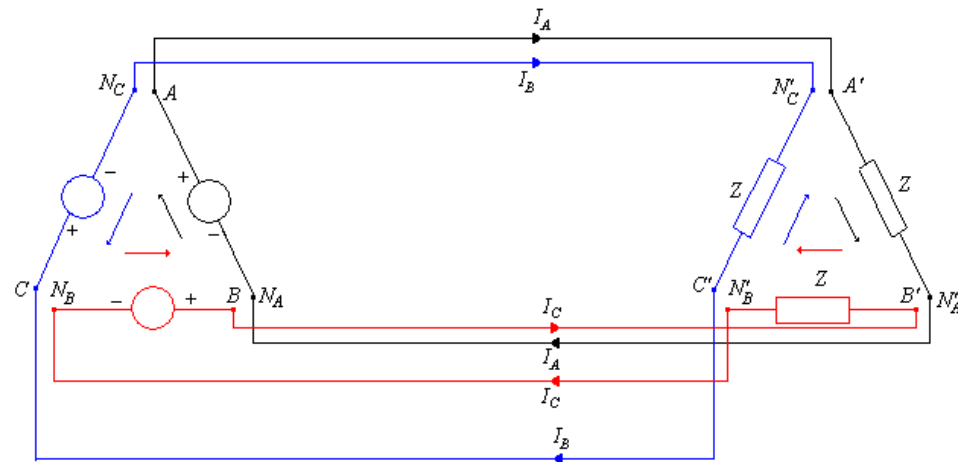


FIG.14 – TRÊS CIRCUITOS MONOFÁSICOS PARA CONEXÃO Δ

- A MALHA AA'N'AN_A CONTINUA ELETRICAMENTE INDEPENDENTE.
- POR RACIOCÍNIO ANÁLOGO PODEMOS INTERLIGAR A - N_C E A' - N'_C.
- OS CONDUTORES AA' E N_CN'_C PODEM SER SUBSTITUÍDOS POR UM ÚNICO CONDUTOR.
- NOTE-SE QUE: $\dot{V}_{BN_A} = \dot{V}_{BN_B} + \dot{V}_{CN_C} + \dot{V}_{AN_A} = 0$ SISTEMA 3 ϕ SIMÉTRICO
- CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA QUE SEJA POSSÍVEL LIGAR UM GERADOR EM TRIÂNGULO SEM QUE HAJA CORRENTE DE CIRCULAÇÃO
- B E N_A PODEM SER INTERLIGADOS

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.5 - LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO

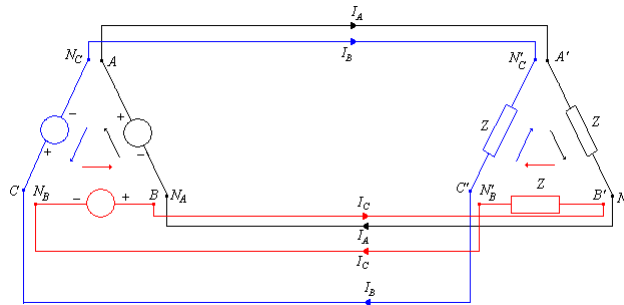


FIG.14 – TRÊS CIRCUITOS MONOFÁSICOS PARA CONEXÃO Δ

- ANÁLOGAMENTE $\dot{V}_{B'N'_A} = \bar{Z} \cdot \dot{I}_{B'N'_B} + \bar{Z} \cdot \dot{I}_{C'N'_C} + \bar{Z} \cdot \dot{I}_{A'N'_A} = 0$
- PORTANTO B' E N'_A PODEM SER INTERLIGADOS.
- OS CONDUTORES BB' E N'_A N'_A PODEM SER SUBSTITUÍDOS POR UM ÚNICO CONDUTOR.
- LOGO O CIRCUITO FICA:

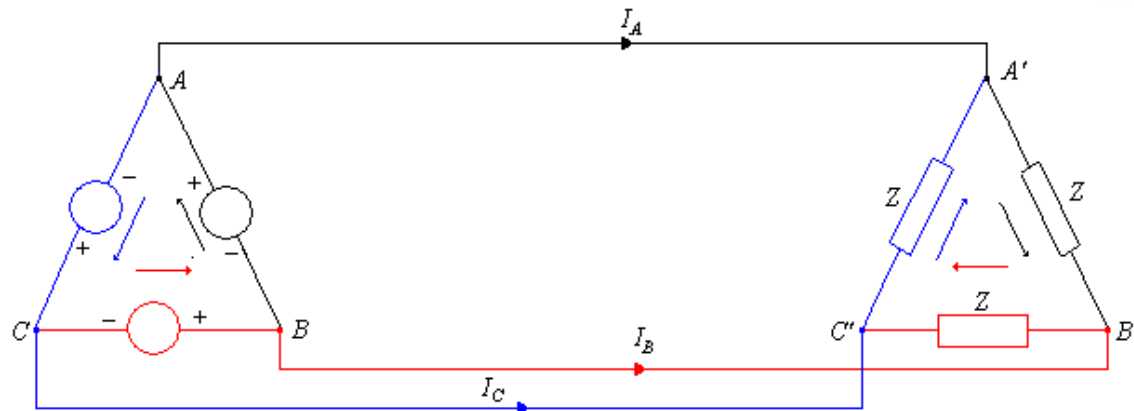
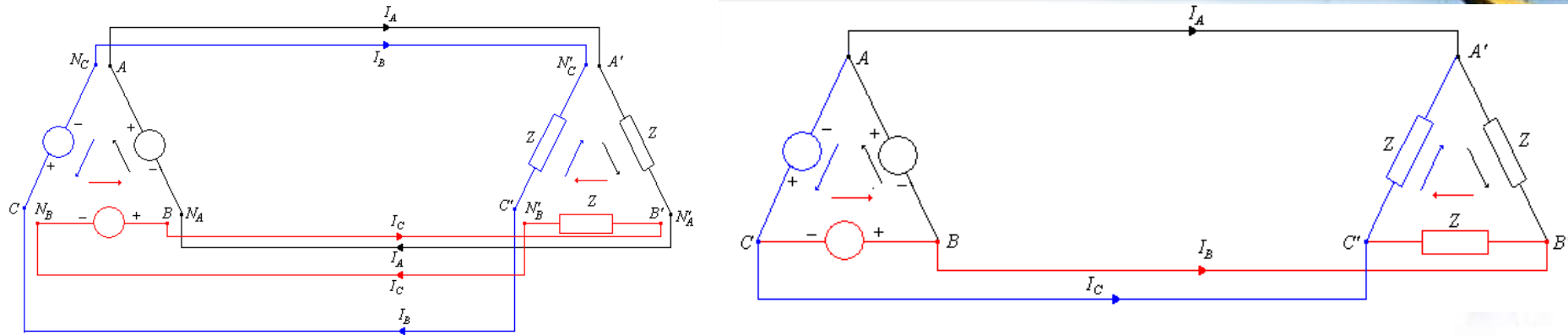


FIG.15 – CIRCUITO TRIFÁSICO COM GERADOR E CARGA EM Δ

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.6 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE - LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO



– RELAÇÕES DE TENSÕES DE FASE E DE LINHA NO GERADOR

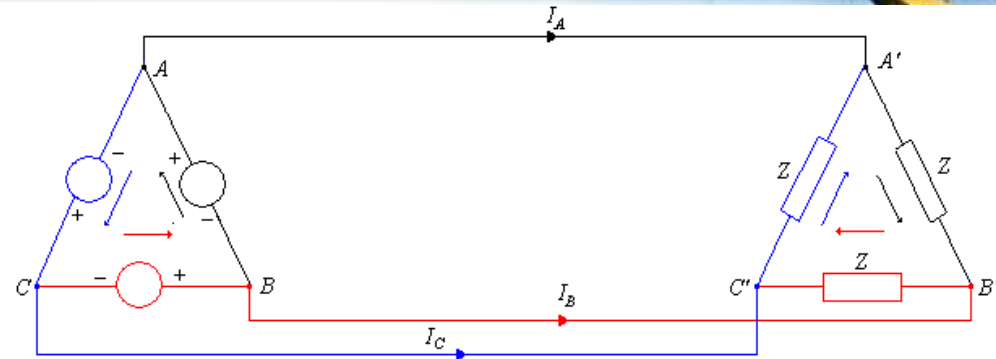
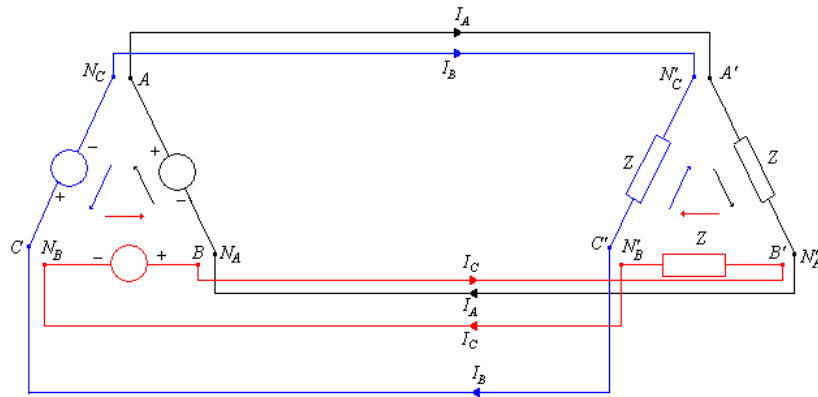
$$\vec{V}_{AN_A} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN_A} \\ \dot{V}_{BN_B} \\ \dot{V}_{CN_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = \vec{V}_{AB} \quad \text{OU SEJA, SÃO IGUAIS.}$$

– RELAÇÕES DE TENSÕES DE FASE E DE LINHA NA CARGA

$$\vec{V}_{A'N'_A} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N'_A} \\ \dot{V}_{B'N'_B} \\ \dot{V}_{C'N'_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'B'} \\ \dot{V}_{B'C'} \\ \dot{V}_{C'A'} \end{bmatrix} = \vec{V}_{A'B'} \quad \text{OU SEJA, SÃO IGUAIS.}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.6 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE - LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO



– CORRENTES DE FASE NO GERADOR:

$$\dot{I}_{AC}, \dot{I}_{CB} \text{ e } \dot{I}_{BA}$$

– CORRENTES DE FASE NA CARGA:

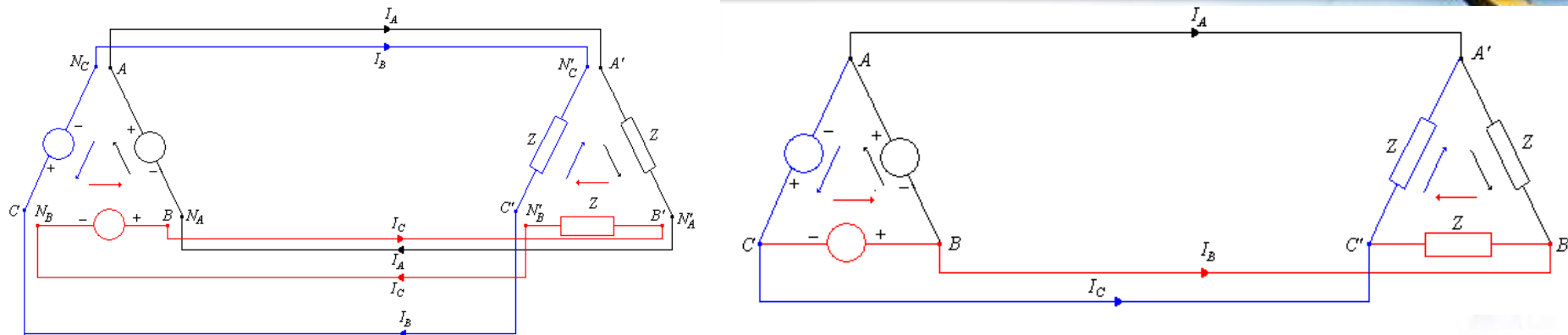
$$\dot{I}_{A'B'}, \dot{I}_{B'C'} \text{ e } \dot{I}_{C'A'}$$

– CORRENTES DE LINHA:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AA'}, \dot{I}_B = \dot{I}_{BB'} \text{ e } \dot{I}_C = \dot{I}_{CC'}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.6 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE - LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO



– RELAÇÕES ENTRE CORRENTES DE LINHA E DE FASE

A – SISTEMA SIMÉTRICO – SEQUÊNCIA DE FASE DIRETA

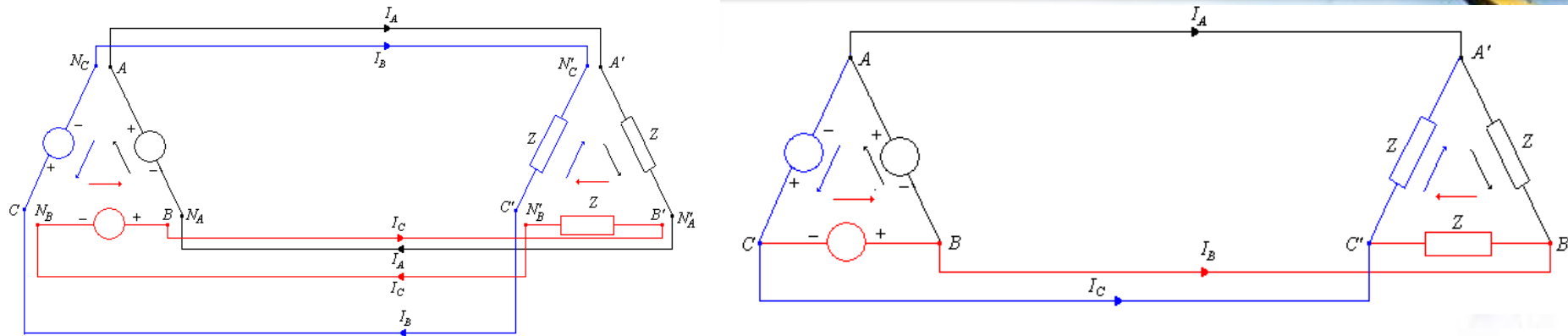
$$\vec{I}_{A'B'} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} = \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

– APLICANDO A LEI DE KIRCHHOFF DAS CORRENTES AOS NÓS A', B' E C'

$$\vec{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{C'A'} \\ \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \end{bmatrix} = \dot{I}_{A'B'} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \right\} \quad \vec{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 - \alpha \\ \alpha^2 - 1 \\ \alpha - \alpha^2 \end{bmatrix} = \sqrt{3} \angle -30^\circ \cdot \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.6 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE - LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO



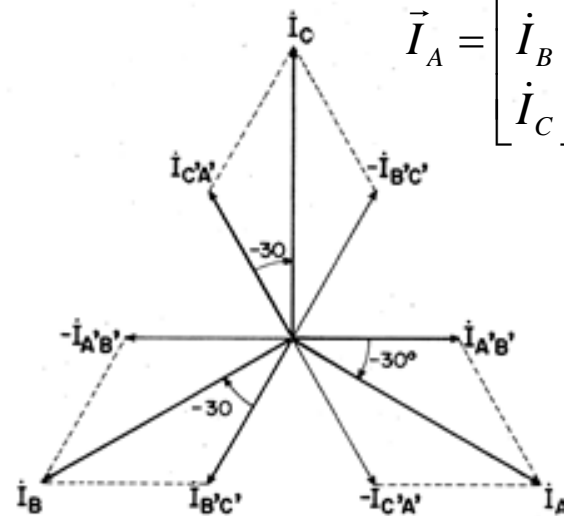
– RELAÇÕES ENTRE CORRENTES DE LINHA E DE FASE

A – SISTEMA SIMÉTRICO – SEQUÊNCIA DE FASE DIRETA

$$\vec{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 - \alpha \\ \alpha^2 - 1 \\ \alpha - \alpha^2 \end{bmatrix} = \sqrt{3} \angle -30^\circ \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

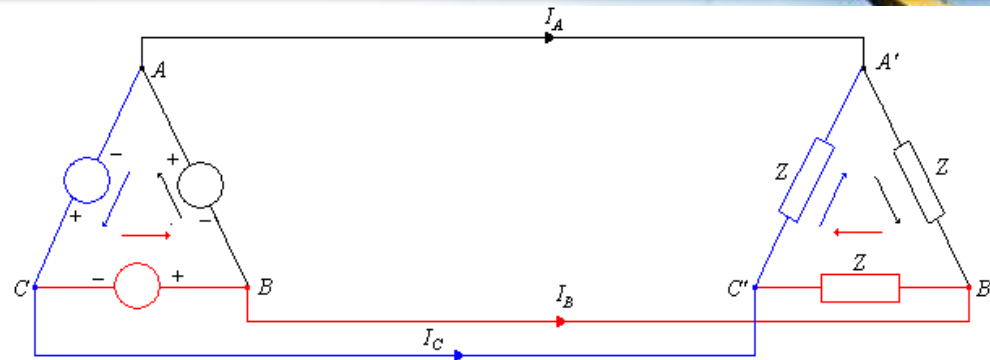
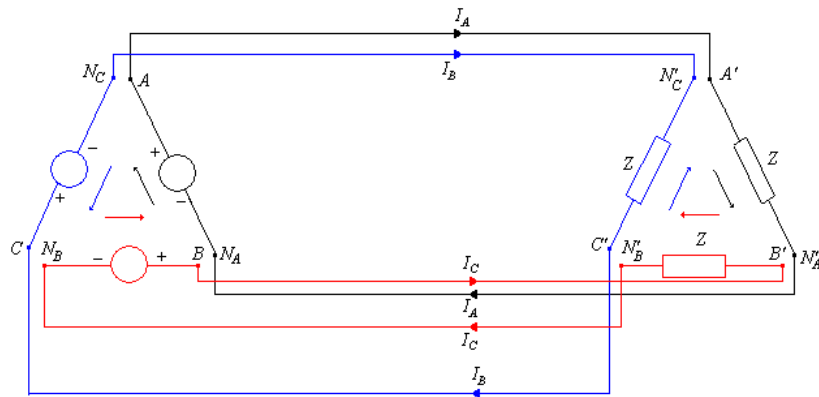
$$\vec{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{C'A'} \\ \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \end{bmatrix}$$

FIG. 16 – DIAGRAMA FASORIAL COM GERADOR E CARGA EM Δ



1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.6 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE - LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO



– RELAÇÕES ENTRE CORRENTES DE LINHA E DE FASE

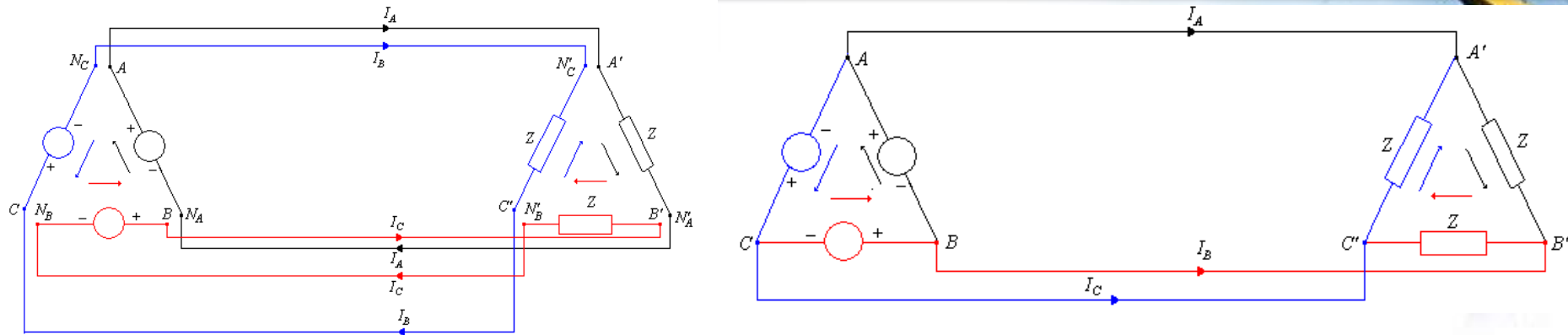
A – SISTEMA SIMÉTRICO – SEQUÊNCIA DE FASE INVERSA

$$\vec{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{C'A'} \\ \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \end{bmatrix} = \dot{I}_{A'B'} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha^2 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \right\} = \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 - \alpha^2 \\ \alpha - 1 \\ \alpha^2 - \alpha \end{bmatrix}$$

$$\vec{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.6 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE - LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO



– RELAÇÕES ENTRE CORRENTES DE LINHA E DE FASE

A – SISTEMA SIMÉTRICO – SEQUÊNCIA DE FASE INVERSA

$$\vec{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \dot{I}_{A'B'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$$

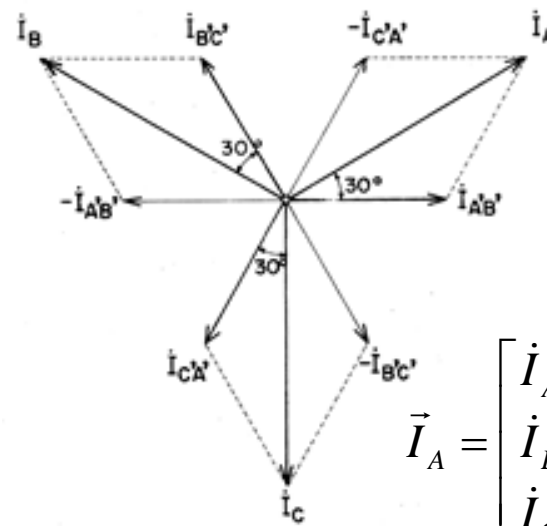
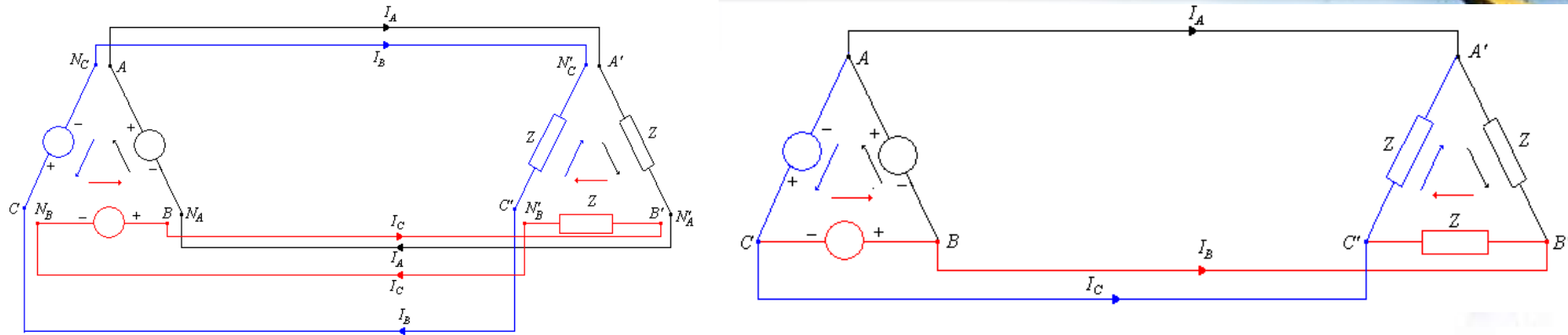


FIG. 17 – DIAGRAMA FASORIAL COM GERADOR E CARGA EM Δ

$$\vec{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{C'A'} \\ \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \end{bmatrix}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.6 - RELAÇÕES ENTRE OS VALORES DE LINHA E DE FASE - LIGAÇÕES EM TRIÂNGULO



– DETERMINAÇÃO DAS CORRENTES DE FASE CONHECENDO-SE AS DE LINHA

- NO CASO DE UMA CARGA TRIFÁSICA EQUILIBRADA ALIMENTADA POR UM SISTEMA DE TENSÕES TRIFÁSICO SIMÉTRICO, A I_{CIR} NO TRIÂNGULO É SEMPRE NULA. NESTE CASO, TEM-SE:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} = \frac{\dot{I}_A}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.7 - RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS TRIFÁSICOS EM TRIÂNGULO

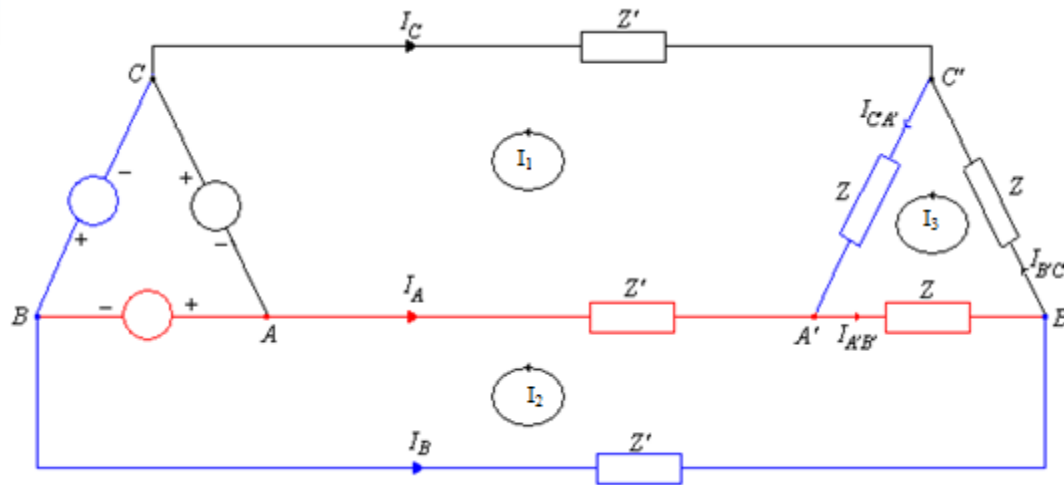


FIG. 18 – CIRCUITO TRIFÁSICO EM Δ

- APLICANDO O MÉTODO DAS MALHAS, TEM-SE:

$$\dot{V}_{CA} = (2\bar{Z}' + \bar{Z})\dot{i}_1 - \bar{Z}'\dot{i}_2 - \bar{Z}\dot{i}_3$$

$$V_{AB} = -\bar{Z}'\dot{i}_1 + (2\bar{Z}' + \bar{Z})\dot{i}_2 - \bar{Z}\dot{i}_3$$

$$0 = -\bar{Z}\dot{i}_1 - \bar{Z}\dot{i}_2 + 3\bar{Z}\dot{i}_3$$

- DE ONDE PODE-SE DETERMINAR

$$\dot{i}_1, \dot{i}_2 \text{ E } \dot{i}_3$$

ISTO DÁ UM CERTO TRABALHO.

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.7 - RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS TRIFÁSICOS EM TRIÂNGULO

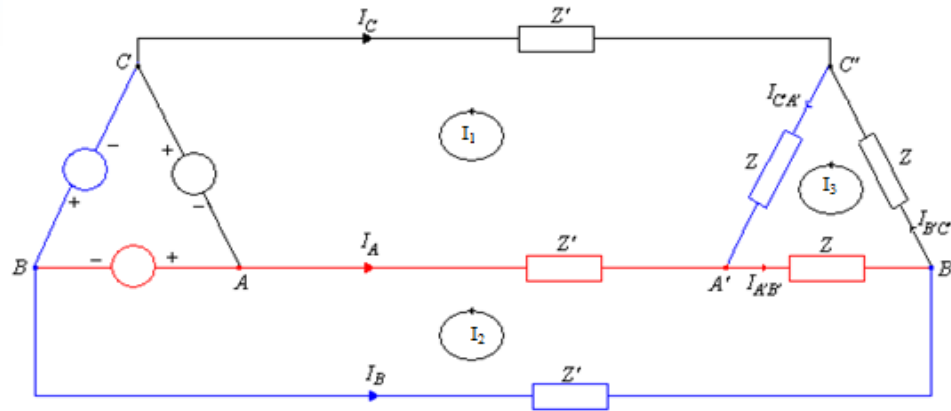


FIG. 18 – CIRCUITO TRIFÁSICO EM Δ

- OUTRO MÉTODO: APLICANDO-SE A LKT À MALHA AA'B'BA E UTILIZANDO-SE AS CORRENTES NOS RAMOS:

$$\dot{V}_{AB} = \bar{Z}' \cdot \dot{I}_A + \bar{Z} \dot{I}_{A'B'} - \bar{Z}' \dot{I}_B$$

$$\dot{V}_{AB} = \bar{Z}' (\dot{I}_A - \dot{I}_B) + \bar{Z} \dot{I}_{A'B'}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.7 - RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS TRIFÁSICOS EM TRIÂNGULO

- OUTRO MÉTODO: APLICANDO-SE A LKT À MALHA AA'B'BA E UTILIZANDO-SE AS CORRENTES NOS RAMOS:

$$\dot{V}_{AB} = \bar{Z}' \cdot \dot{I}_A + \bar{Z} \dot{I}_{A'B'} - \bar{Z}' \dot{I}_B$$

$$\dot{V}_{AB} = \bar{Z}'(\dot{I}_A - \dot{I}_B) + \bar{Z} \dot{I}_{A'B'}$$

- CONSIDERANDO QUE O SISTEMA É SIMÉTRICO E EQUILIBRADO E DE SEQUÊNCIA DIRETA, TEM-SE:

$$\vec{I}_{A'B'} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} = \dot{I}_F \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} -30^\circ \\ 30^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix} \dot{I}_F \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

LOGO

$$\dot{I}_A - \dot{I}_B = \sqrt{3} \begin{bmatrix} -30^\circ \\ 30^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix} \dot{I}_F (1 - \alpha^2) = \sqrt{3} \begin{bmatrix} -30^\circ \\ 30^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix} \dot{I}_F \sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 3 \dot{I}_F$$

SUBSTITUINDO NA EXPRESSÃO DE \dot{V}_{AB} E LEMBRANDO QUE $\dot{I}_{A'B'} = \dot{I}_F$

$$\dot{V}_{AB} = \bar{Z}' \cdot 3 \cdot \dot{I}_F + \bar{Z} \cdot \dot{I}_F \quad \dot{V}_{AB} = (3\bar{Z}' + \bar{Z}) \dot{I}_F \quad \rightarrow \quad \dot{I}_{A'B'} = \dot{I}_F = \frac{\dot{V}_{AB}}{3\bar{Z}' + \bar{Z}}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.7 - RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS TRIFÁSICOS EM TRIÂNGULO

- VIMOS QUE:
$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{V}_{AB}}{3\bar{Z}' + \bar{Z}}$$

O QUE CORRESPONDE À CORRENTE QUE CIRCULA NUMA MALHA CUJA f.e.m. VALE \dot{V}_{AB}

E CUJA IMPEDÂNCIA É $3\bar{Z}' + \bar{Z}$

- CONSEQUENTEMENTE, AS CORRENTES NAS FASES SÃO:

$$\vec{I}_{A'B'} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{B'C'} \\ \dot{I}_{C'A'} \end{bmatrix} = \frac{\dot{V}_{AB}}{3\bar{Z}' + \bar{Z}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- AS CORRENTES DE LINHA SÃO OBTIDAS UTILIZANDO-SE:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -30^\circ \\ 30^\circ \end{bmatrix} \dot{I}_{A'B'}$$

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

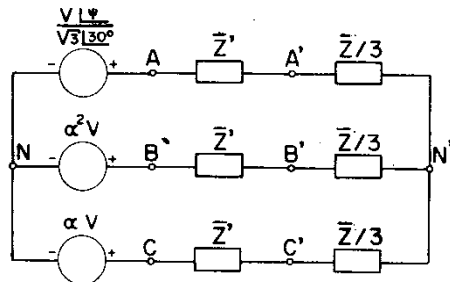
1.2.7 - RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS TRIFÁSICOS EM TRIÂNGULO

- TRANSFORMAÇÃO DO TRIÂNGULO EM ESTRELA

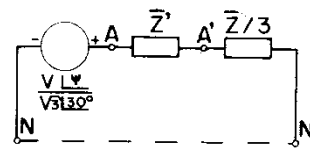
- SE SUBSTITUIRMOS A CARGA LIGADA EM TRIÂNGULO POR UMA EQUIVALENTE LIGADA EM ESTRELA, CHEGA-SE AO MESMO RESULTADO.
- AS IMPEDÂNCIAS DA ESTRELA EQUIVALENTE SÃO CALCULADAS UTILIZANDO-SE AS EXPRESSÕES JÁ CONHECIDAS, OU SEJA:

$$\bar{Z}_Y = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3}$$

- SUBSTITUINDO-SE O GERADOR EM TRIÂNGULO POR OUTRO EM ESTRELA, DE MODO QUE A TENSÃO DE LINHA SEJA A MESMA, RECAÍMOS NO CASO DE LIGAÇÃO EM ESTRELA, RESULTANDO:



(a) Circuito trifásico em estrela



(b) Circuito monofásico equivalente

FIG. 19 – CIRCUITO TRIFÁSICO EM Δ SUBSTITUÍDO POR Y EQUIVALENTE.

1.2 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA EQUILIBRADA

1.2.7 - RESOLUÇÃO DE CIRCUITOS TRIFÁSICOS EM TRIÂNGULO

- TRANSFORMAÇÃO DO TRIÂNGULO EM ESTRELA

- TEM-SE:

$$\dot{V}_{AN} = \frac{\dot{V}_{AB}}{\sqrt{3}|30^\circ}$$

- N E N' ESTÃO NO MESMO POTENCIAL. PORTANTO:

$$\dot{V}_{AN'} = \dot{V}_{AN} = i_{AA'} \left(\bar{Z}' + \frac{\bar{Z}}{3} \right) = i_A \left(\bar{Z}' + \frac{\bar{Z}}{3} \right) = i_A \left(\frac{3 \cdot \bar{Z}' + \bar{Z}}{3} \right)$$

- LOGO:

$$i_{AA'} = i_A = \frac{3 \cdot \dot{V}_{AN}}{3 \cdot \bar{Z}' + \bar{Z}} = \frac{\dot{V}_{AN}}{\bar{Z}' + \frac{\bar{Z}}{3}}$$

- A CORRENTE DE FASE NA CARGA EM TRIÂNGULO É DADA POR:

$$i_{A'B'} = \frac{i_A}{\sqrt{3}|30^\circ} = \frac{3 \cdot \dot{V}_{AN}}{\sqrt{3}|30^\circ \cdot (3 \cdot \bar{Z}' + \bar{Z})} = \frac{\sqrt{3}|30^\circ \cdot \dot{V}_{AN}}{3 \cdot \bar{Z}' + \bar{Z}} = \frac{\dot{V}_{AB}}{3 \cdot \bar{Z}' + \bar{Z}}$$

EX. 6 + EXTRA

1.3 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA

1.3.1 - CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA

- OS MÉTODOS GERAIS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS SÃO APLICÁVEIS.
- NO ENTANTO, SEM UMA ESCOLHA CRITERIOSA DO MÉTODO CHEGA-SE A SISTEMAS DE EQUAÇÕES CUJA SOLUÇÃO É MUITO TRABALHOSA.
- SEJA O SISTEMA TRIFÁSICO A SEGUIR:

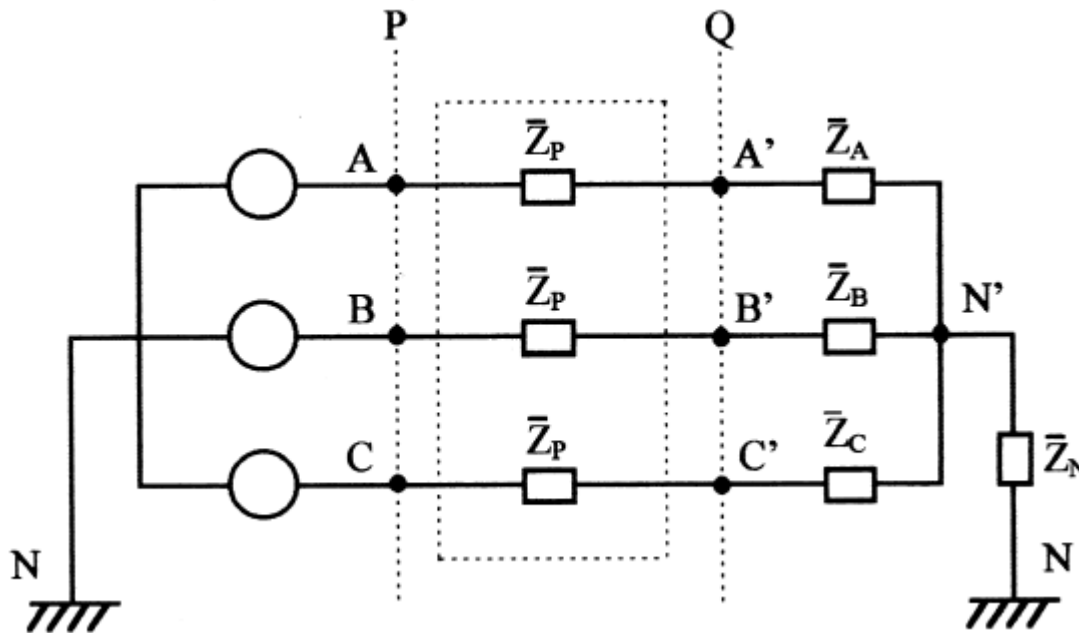
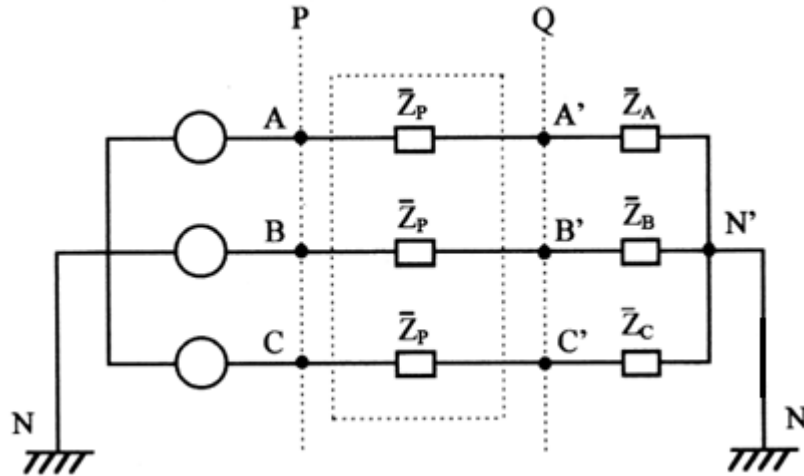


FIG. 19 – CIRC. TRIF. SIM. E EQUIL. COM CARGA DESEQUILIBRADA EM ESTRELA ATERRADA.

1.3 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA

1.3.1 - CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA

- INICIALMENTE VAMOS CONSIDERAR $Z_N = 0$.



LOGO, CONSIDERANDO-SE CONHECIDAS AS TENSÕES NO GERADOR, TEM-SE:

$$\dot{V}_{AN} = \dot{I}_A (\bar{Z}_A + \bar{Z}_P)$$

$$\dot{V}_{BN} = \dot{I}_B (\bar{Z}_B + \bar{Z}_P)$$

$$\dot{V}_{CN} = \dot{I}_C (\bar{Z}_C + \bar{Z}_P)$$

- AS CORRENTES SÃO:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{V}_{AN}}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_P}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{V}_{BN}}{\bar{Z}_B + \bar{Z}_P}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_{CN}}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_P}$$

- ALÉM DISSO, NO NÓ N' TEM-SE:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$

- AS TENSÕES DE FASE NA CARGA SÃO DADAS POR:

$$\dot{V}_{A'N} = \dot{I}_A \bar{Z}_A \quad , \quad \dot{V}_{B'N} = \dot{I}_B \bar{Z}_B \quad , \quad \dot{V}_{C'N} = \dot{I}_C \bar{Z}_C$$

1.3 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA

1.3.1 - CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA

- **AS TENSÕES DE LINHA NA CARGA NÃO PODEM SER CALCULADAS UTILIZANDO:**

$$\vec{V}_{AB} = \sqrt{3} \left| \underline{30^\circ} \right. \dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \sqrt{3} \left| \underline{30^\circ} \right. \dot{V}_{AN} \cdot \vec{S}_1 = \sqrt{3} \left| \underline{30^\circ} \right. \cdot \vec{V}_{AN}$$

- POIS NOS TERMINAIS DA CARGA NÃO SE DISPÕEM DE UM TRIFÁSICO SIMÉTRICO.
- PORTANTO, TEMOS QUE UTILIZAR:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{A'B'} \\ \dot{V}_{B'C'} \\ \dot{V}_{C'A'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \\ \dot{V}_{A'N} \end{bmatrix}$$

1.3 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA

1.3.1 - CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA

- NO CASO DA IMPEDÂNCIA DE ATERRAMENTO NÃO SER NULA ($Z_N \neq 0$)

TEM-SE, APLICANDO AS LEI DE OHM E LKT:

$$\dot{V}_{AN} = \dot{I}_A (\bar{Z}_A + \bar{Z}_P) + \dot{I}_N \bar{Z}_N$$

$$\dot{V}_{BN} = \dot{I}_B (\bar{Z}_B + \bar{Z}_P) + \dot{I}_N \bar{Z}_N$$

$$\dot{V}_{CN} = \dot{I}_C (\bar{Z}_C + \bar{Z}_P) + \dot{I}_N \bar{Z}_N$$

- LOGO, AS CORRENTES SÃO:

$$\frac{\dot{V}_{AN}}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_P} - \dot{I}_N \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_P} = \dot{I}_A$$

$$\frac{\dot{V}_{BN}}{\bar{Z}_B + \bar{Z}_P} - \dot{I}_N \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_B + \bar{Z}_P} = \dot{I}_B$$

$$\frac{\dot{V}_{CN}}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_P} - \dot{I}_N \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_P} = \dot{I}_C$$

1.3 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA

1.3.1 - CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA

- APLICANDO A **LKC** NO NÓ **N'** TEM-SE:

$$I_A + I_B + I_C = I_N$$

- SUBSTITUINDO-SE AS EXPRESSÕES DAS CORRENTES, OBTÉM-SE A CORRENTE NO NEUTRO COM IMPEDÂNCIA DE ATERRAMENTO NÃO NULA.

$$I_N = \frac{\frac{\dot{V}_{AN}}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_P} + \frac{\dot{V}_{BN}}{\bar{Z}_B + \bar{Z}_P} + \frac{\dot{V}_{CN}}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_P}}{1 + \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_P} + \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_B + \bar{Z}_P} + \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_P}}$$

- SUBSTITUINDO-SE O VALOR DE I_N OBTIDO, NAS EQUAÇÕES DAS CORRENTES DETERMINA-SE OS VALORES DE:

- FAÇA UMA ANÁLISE CONSIDERANDO $Z_N = 0$.

$$I_A, I_B \text{ e } I_C$$

1.3 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA

1.3.2 - CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTRELA ISOLADO

- SEJA O CIRCUITO A SEGUIR:

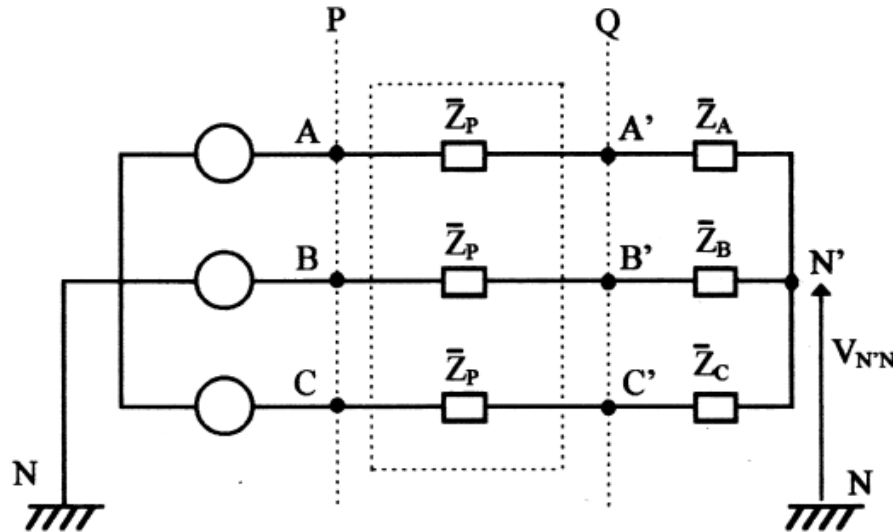
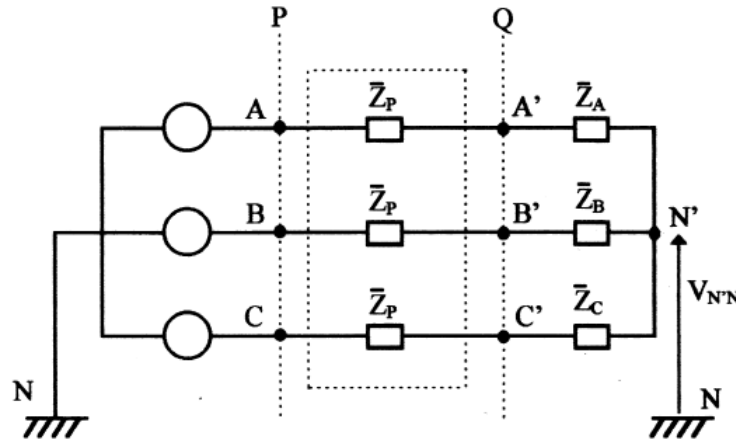


FIG. 20 – CIRCUITO TRIFÁSICO SIMÉTRICO E EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA EM ESTRELA ISOLADA.

- SÃO CONHECIDAS AS TENSÕES DE FASE NOS GERADORES, AS IMPEDÂNCIAS DA CARGA E DA LINHA.
- DESEJA-SE DETERMINAR AS CORRENTES E AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA.

1.3 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA

1.3.2 - CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTRELA ISOLADO



- NESTE CASO, TEM-SE:

$$\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{AN'} - \dot{V}_{N'N} = 0$$

$$\dot{V}_{AN'} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{N'N}$$

$$\dot{V}_{BN'} = \dot{V}_{BN} - \dot{V}_{N'N}$$

$$\dot{V}_{CN'} = \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{N'N}$$

- POR OUTRO LADO, TAMBÉM TEM-SE:

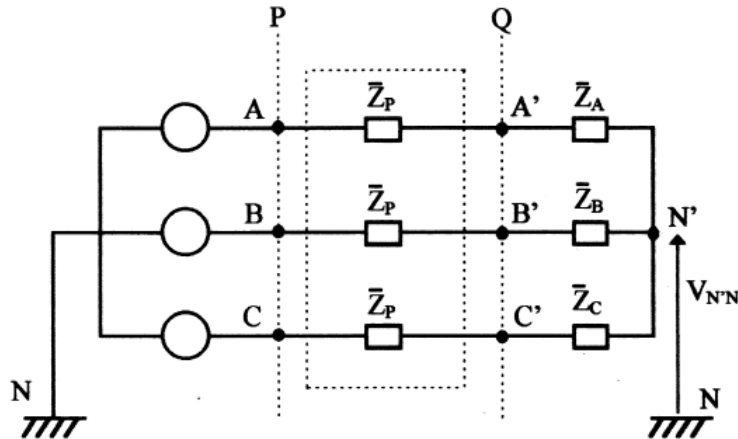
$$\dot{V}_{AN'} = \dot{I}_A(\bar{Z}_A + \bar{Z}_P)$$

$$\dot{V}_{BN'} = \dot{I}_B(\bar{Z}_B + \bar{Z}_P)$$

$$\dot{V}_{CN'} = \dot{I}_C(\bar{Z}_C + \bar{Z}_P)$$

1.3 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA

1.3.2 - CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTRELA ISOLADO



- PORTANTO:

$$\dot{V}_{AN'} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{N'N} = \dot{I}_A(\bar{Z}_A + \bar{Z}_P)$$

$$\dot{V}_{BN'} = \dot{V}_{BN} - \dot{V}_{N'N} = \dot{I}_B(\bar{Z}_B + \bar{Z}_P)$$

$$\dot{V}_{CN'} = \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{N'N} = \dot{I}_C(\bar{Z}_C + \bar{Z}_P)$$

PRECISAMOS DE $V_{N'N}$

- FAZENDO:

$$\bar{Z}_{AT} = \bar{Z}_A + \bar{Z}_P$$

$$\bar{Z}_{BT} = \bar{Z}_B + \bar{Z}_P$$

$$\bar{Z}_{CT} = \bar{Z}_C + \bar{Z}_P$$

- TEM-SE:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{V}_{AN}}{\bar{Z}_{AT}} - \frac{\dot{V}_{N'N}}{\bar{Z}_{AT}} = \bar{Y}_{AT} \cdot \dot{V}_{AN} - \bar{Y}_{AT} \cdot \dot{V}_{N'N}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{V}_{BN}}{\bar{Z}_{BT}} - \frac{\dot{V}_{N'N}}{\bar{Z}_{BT}} = \bar{Y}_{BT} \cdot \dot{V}_{BN} - \bar{Y}_{BT} \cdot \dot{V}_{N'N}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_{CN}}{\bar{Z}_{CT}} - \frac{\dot{V}_{N'N}}{\bar{Z}_{CT}} = \bar{Y}_{CT} \cdot \dot{V}_{CN} - \bar{Y}_{CT} \cdot \dot{V}_{N'N}$$

- SENDO \bar{Y}_{AT} , \bar{Y}_{BT} , E \bar{Y}_{CT} AS ADMITÂNCIAS TOTAIS DE CADA FASE.

1.3 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA

1.3.2 - CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTRELA ISOLADO

- SOMANDO-SE AS EQUAÇÕES DAS CORRENTES MEMBRO A MEMBRO E LEMBRANDO-SE QUE:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

- RESULTA:

$$\dot{V}_{N'N} = \frac{\bar{Y}_{AT} \cdot \dot{V}_{AN} + \bar{Y}_{BT} \cdot \dot{V}_{BN} + \bar{Y}_{CT} \cdot \dot{V}_{CN}}{\bar{Y}_{AT} + \bar{Y}_{BT} + \bar{Y}_{CT}}$$

- SUBSTITUINDO-SE ESTE VALOR NAS EXPRESSÕES DAS CORRENTES E DAS TENSÕES, PODE-SE CALCULAR:

$$\dot{I}_A, \dot{I}_B \text{ E } \dot{I}_C \quad \text{BEM COMO:} \quad \dot{V}_{AN'}, \dot{V}_{BN'} \text{ E } \dot{V}_{CN'}$$

- AS TENSÕES DE FASE NOS TERMINAIS DA CARGA SÃO OBTIDAS POR:

$$\dot{V}_{A'N'} = \bar{Z}_A \dot{I}_A, \quad \dot{V}_{B'N'} = \bar{Z}_B \dot{I}_B, \quad \dot{V}_{C'N'} = \bar{Z}_C \dot{I}_C$$

1.3 – S.T.S.EQUILIBRADO COM CARGA DESEQUILIBRADA

1.3.2 - CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTRELA ISOLADO

- AS TENSÕES DE LINHA NOS TERMINAIS DA CARGA NÃO PODEM SER OBTIDAS POR:

$$\vec{V}_{AB} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot \vec{V}_{AN}$$

- AS TENSÕES DE LINHA DEVEM SER CALCULADAS A PARTIR DE:

$$\dot{V}_{A'N'}, \dot{V}_{B'N'} \text{ e } \dot{V}_{C'N'}$$

- OU SEJA, APLICANDO-SE A LKT:

$$\dot{V}_{A'B'} = \dot{V}_{A'N'} - \dot{V}_{B'N'}$$

$$\dot{V}_{B'C'} = \dot{V}_{B'N'} - \dot{V}_{C'N'}$$

$$\dot{V}_{C'A'} = \dot{V}_{C'N'} - \dot{V}_{A'N'}$$

- SE FOREM CONHECIDAS AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA:

$$\dot{V}_{A'N'}, \dot{V}_{B'N'}, \dot{V}_{C'N'}$$

- DEVE-SE UTILIZAR:

$$\dot{V}_{N'N} = \frac{\bar{Y}_A \cdot \dot{V}_{A'N} + \bar{Y}_B \cdot \dot{V}_{B'N} + \bar{Y}_C \cdot \dot{V}_{C'N}}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C}$$

1.4 – SISTEMAS TRIFÁSICOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

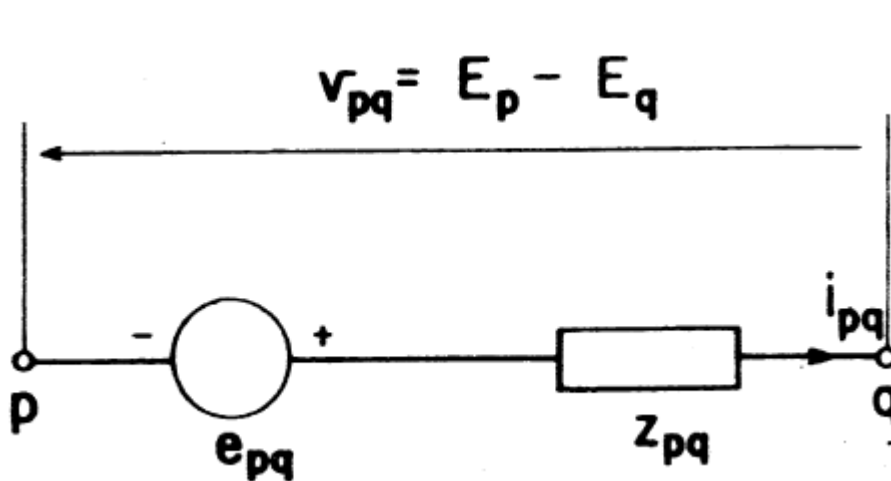


- **OBJETIVO: CONSIDERAR**
- CASO GERAL DE SISTEMAS TRIFÁSICOS SIMÉTRICOS – 3 OU 4 FIOS
- CARGAS EQUILIBRADAS OU DESEQUILIBRADAS
- INDUTÂNCIAS PRÓPRIAS E INDUTÂNCIAS MÚTUAS DOS FIOS
 - IGUAIS ENTRE SI – TRIFÁSICO SIMÉTRICO EQUILIBRADO
 - DESIGUAIS ENTRE SI – TRIFÁSICO SIMÉTRICO DESEQUILIBRADO
- **METODOLOGIA**
- APRESENTAREMOS O EQUACIONAMENTO MATRICIAL PARA OS ELEMENTOS PRIMITIVOS DE UMA REDE, SEM MÚTUAS
- EM SEGUIDA, INTRODUIREMOS AS INDUTÂNCIAS MÚTUAS ENTRE OS ELEMENTOS PRIMITIVOS
- FINALMENTE ESTUDAREMOS OS CIRCUITOS TRIFÁSICOS COM MÚTUAS

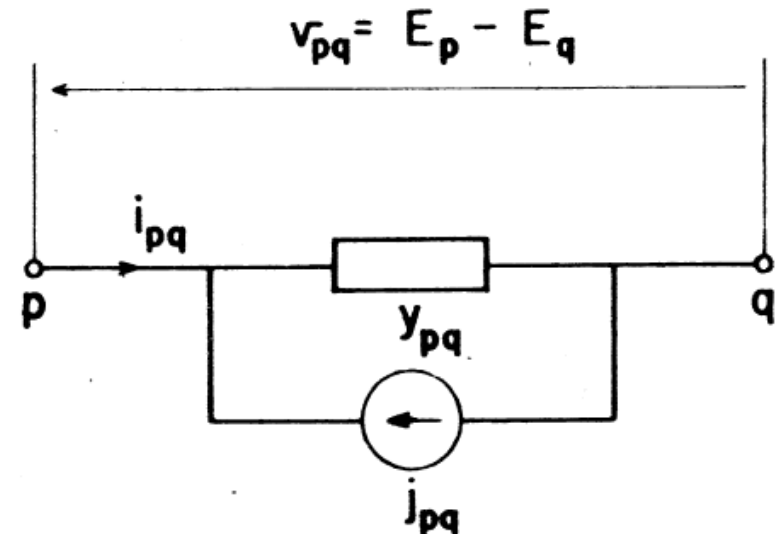
1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.1 - MATRIZES PRIMITIVAS DOS ELEMENTOS DE UMA REDE

- OS ELEMENTOS COMPONENTES DOS RAMOS DE LIGAÇÃO DE UMA REDE PODEM SER REPRESENTADOS POR IMPEDÂNCIAS OU ADMITÂNCIAS.
- SEJA O ELEMENTO LIGADO ENTRE OS NÓS p E q DE UMA REDE:



a) REPRESENTAÇÃO POR IMPEDÂNCIA – EQUIVALENTE DE THEVENIN

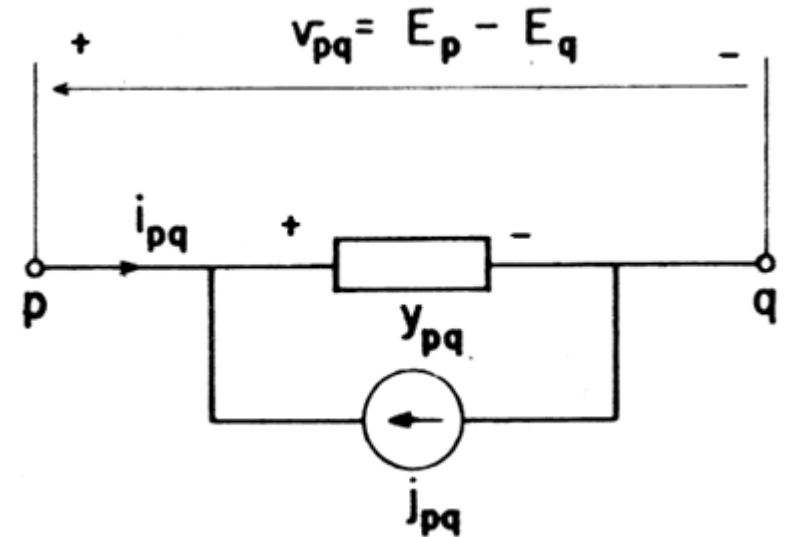
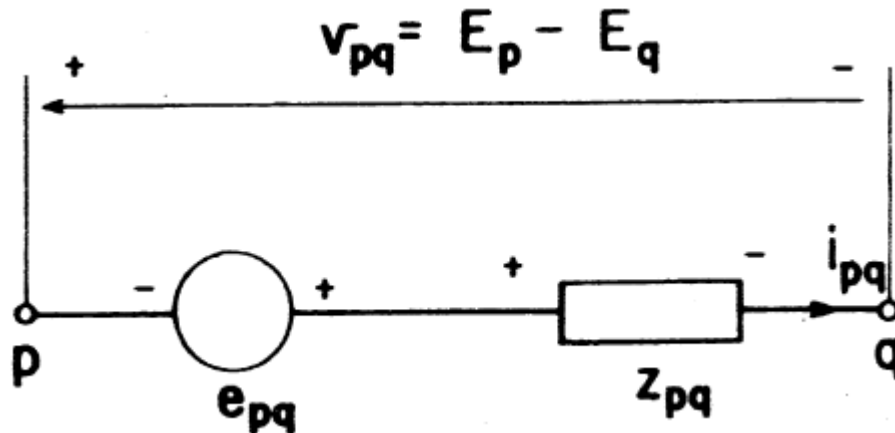


b) REPRESENTAÇÃO POR ADMITÂNCIA – EQUIVALENTE DE NORTON

FIG. 21 - CIRCUITO EQUIVALENTE DE UM ELEMENTO

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.1 - MATRIZES PRIMITIVAS DOS ELEMENTOS DE UMA REDE



- SEJAM:

v_{pq} – DIFERENÇA DE POTENCIAL ENTRE OS PONTOS p E q

e_{pq} – f. e. m. DO ELEMENTO pq

i_{pq} – CORRENTE NO ELEMENTO pq

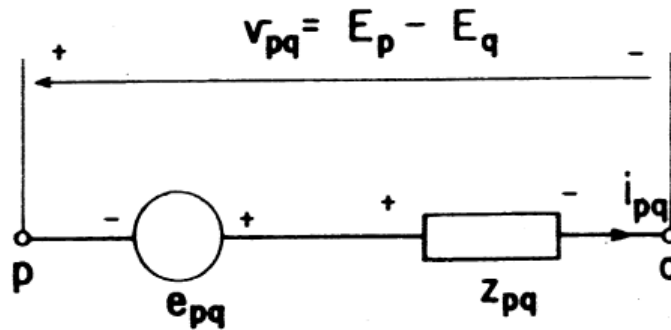
\bar{Z}_{pq} – IMPEDÂNCIA DO ELEMENTO pq

j_{pq} – CORRENTE DO GERADOR EM PARALELO COM O RAMO pq

\bar{Y}_{pq} – ADMITÂNCIA DO ELEMENTO pq

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.1 - MATRIZES PRIMITIVAS DOS ELEMENTOS DE UMA REDE



- APLICANDO A LEI DE KIRCHHOFF DAS TENSÕES ENTRE OS PONTOS p E q , RESULTA A EQUAÇÃO A SEGUIR:

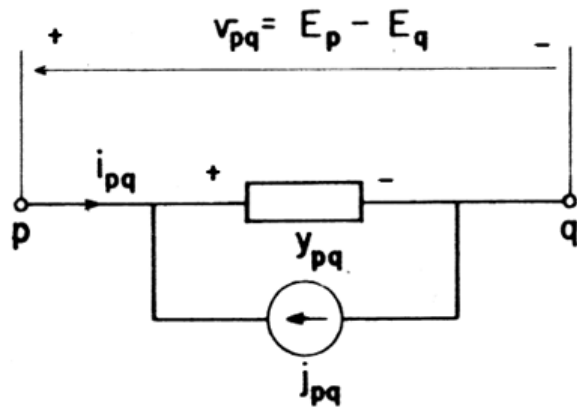
$$\dot{V}_{pq} + \dot{E}_{pq} = \dot{I}_{pq} \bar{Z}_{pq} \quad \text{RESULTA UMA EQUAÇÃO MATRICIAL}$$

- OU AINDA, DIVIDINDO POR Z_{pq} E TROCANDO OS MEMBROS DA EQUAÇÃO:

$$\frac{\dot{V}_{pq}}{Z_{pq}} = \dot{I}_{pq} - \frac{\dot{E}_{pq}}{Z_{pq}}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.1 - MATRIZES PRIMITIVAS DOS ELEMENTOS DE UMA REDE



- A ADMITÂNCIA DO RAMO pq É DADA POR : $\bar{Y}_{pq} = 1/\bar{Z}_{pq}$

- A CORRENTE DO GERADOR EM PARALELO COM O RAMO pq É DADA POR :

$$J_{pq} = -\hat{E}_{pq} / \bar{Z}_{pq}$$

- LOGO : $\hat{I}_{pq} + J_{pq} = \hat{V}_{pq} \bar{Y}_{pq}$ RESULTA OUTRA EQUAÇÃO MATRICIAL

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.1 - MATRIZES PRIMITIVAS DOS ELEMENTOS DE UMA REDE

- NO CASO DE UMA REDE COM n ELEMENTOS (RAMOS), OBTEM-SE UM SISTEMA COM n EQUAÇÕES A $2n$ INCÓGNITAS (n CORRENTES E n TENSÕES)

- LOGO (SEM MÚTUAS) :

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{12} \\ \dots \\ \dot{V}_{pq} \\ \dots \\ \dot{V}_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{E}_{12} \\ \dots \\ \dot{E}_{pq} \\ \dots \\ \dot{E}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{12,12} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & Z_{pq,pq} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & Z_{ij,ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{12} \\ \dots \\ \dot{I}_{pq} \\ \dots \\ \dot{I}_{ij} \end{bmatrix}$$

- OU, AINDA:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{pq} \end{bmatrix}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.1 - MATRIZES PRIMITIVAS DOS ELEMENTOS DE UMA REDE

$$\left[\mathbf{V}_{pq} \right] + \left[\mathbf{E}_{pq} \right] = \left[\mathbf{Z}_{pq} \right] \left[\mathbf{I}_{pq} \right]$$

- SENDO:

$\left[\mathbf{V}_{pq} \right]$ = matriz-coluna das quedas de tensão nos elementos da rede

$\left[\mathbf{E}_{pq} \right]$ = matriz-coluna das f.e.m. série dos elementos da rede

$\left[\mathbf{Z}_{pq} \right]$ = matriz de impedância dos elementos da rede

$\left[\mathbf{I}_{pq} \right]$ = matriz-coluna das correntes nos elementos da rede.

- ANALOGAMENTE, TEMOS, AINDA:

$$\left[\mathbf{I}_{pq} \right] + \left[\mathbf{J}_{pq} \right] = \left[\mathbf{Y}_{pq} \right] \left[\mathbf{V}_{pq} \right]$$

$\left[\mathbf{J}_{pq} \right]$ = matriz-coluna dos geradores de corrente em paralelo com os elementos da rede

$\left[\mathbf{Y}_{pq} \right] = \left[\mathbf{Z}_{pq} \right]^{-1}$ = matriz de admitância dos elementos da rede

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.2 - REDES PRIMITIVAS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS

- DEFINIÇÕES RELATIVAS A INDUTÂNCIAS MÚTUAS

- SEJAM DOIS CIRCUITOS DENOMINADOS 1 E 2.

- SEJA ϕ_{12} O FLUXO CONCATENADO COM O CIRCUITO 1 E PRODUZIDO POR UMA CORRENTE i_2 QUE CIRCULA NO CIRCUITO 2.

- DEFINE-SE COMO INDUTÂNCIA MÚTUA ENTRE OS CIRCUITOS 2 E 1 A

RELAÇÃO:

$$M_{21} = \frac{\phi_{12}}{i_2}$$

- A TENSÃO INDUZIDA NO CIRCUITO 1 DEVIDO A CORRENTE i_2 É DADA POR:

$$e_1(t) = M_{21} \cdot \frac{di_2}{dt}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.2 - REDES PRIMITIVAS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS

- DEFINIÇÕES RELATIVAS A INDUTÂNCIAS MÚTUAS

- DA MESMA FORMA, SEJA ϕ_{21} O FLUXO CONCATENADO COM O CIRCUITO 2 E PRODUZIDO POR UMA CORRENTE i_1 QUE CIRCULA NO CIRCUITO 1.

- DEFINE-SE COMO INDUTÂNCIA MÚTUA ENTRE OS CIRCUITOS 1 E 2 A RELAÇÃO:

$$M_{12} = \frac{\phi_{21}}{i_1}$$

- A TENSÃO INDUZIDA NO CIRCUITO 2 DEVIDO A CORRENTE i_1 É DADA POR:

$$e_2(t) = M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

- NO CASO DE MEIOS LINEARES, TEM-SE:

$$M_{21} = M_{12} = M$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.2 - REDES PRIMITIVAS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS

- TENSÕES INDUZIDAS

- SEJA A CORRENTE i_1 QUE CIRCULA NO CIRCUITO 1.

$$i_1 = I_M \cos \omega t$$

- O FLUXO CONCATENADO NO CIRCUITO 2 DEVIDO A CORRENTE i_1 SERÁ:

$$\phi_{21} = i_1 M = M I_M \cos \omega t$$

- CONSIDERANDO O CIRCUITO 2 ABERTO, SERÁ INDUZIDA NOS TERMINAIS DO MESMO A f.e.m.:

$$e_2 = - \frac{d \phi_{21}}{dt} = M \omega I_M \sin \omega t$$

- O SINAL NEGATIVO REPRESENTA A LEI DE LENZ, QUE DIZ QUE A TENSÃO INDUZIDA IRÁ CONTRARIAR A CAUSA QUE LHE DEU ORIGEM.

- FASORIALMENTE TEM-SE:

$$\dot{E}_2 = j\omega M \dot{I}_1 = jX_M \cdot \dot{I}_1 = \bar{Z}_M \cdot \dot{I}_1$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.2 - REDES PRIMITIVAS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS

- POLARIDADE DE \dot{E}_2
- REGRA DOS DOIS PONTOS
- ASSINALEMOS UMA DAS EXTREMIDADES DO CIRCUITO 1 E UMA DAS EXTREMIDADES DO CIRCUITO 2 COM UM PONTO, DE TAL MODO QUE A UMA CORRENTE i_1 ENTRANDO PELO TERMINAL ASSINALADO DO CIRCUITO 1 E A UMA CORRENTE i_2 ENTRANDO PELO TERMINAL ASSINALADO DO CIRCUITO 2, CORRESPONDAM FLUXOS ϕ_1 E ϕ_2 CONCORDES (DE MESMO SENTIDO).

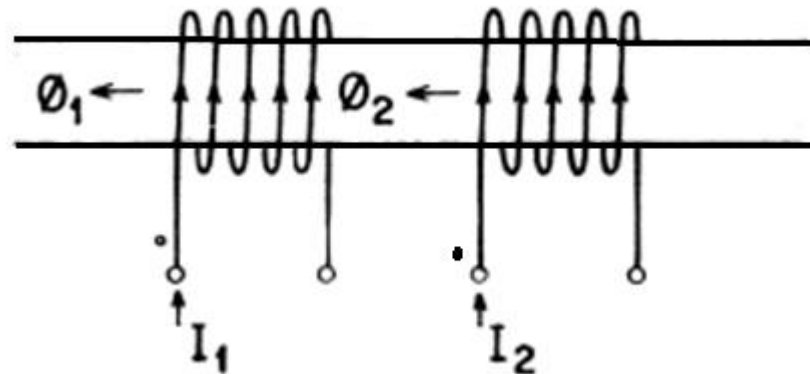


FIG. 22 - INDUTÂNCIA MÚTUA ENTRE DOIS CIRCUITOS

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.2 - REDES PRIMITIVAS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS

- POLARIDADE DE \dot{E}_2 - COMO LOCALIZAR

- LIGUEMOS OS TERMINAIS DO CIRCUITO 2 EM CURTO-CIRCUITO

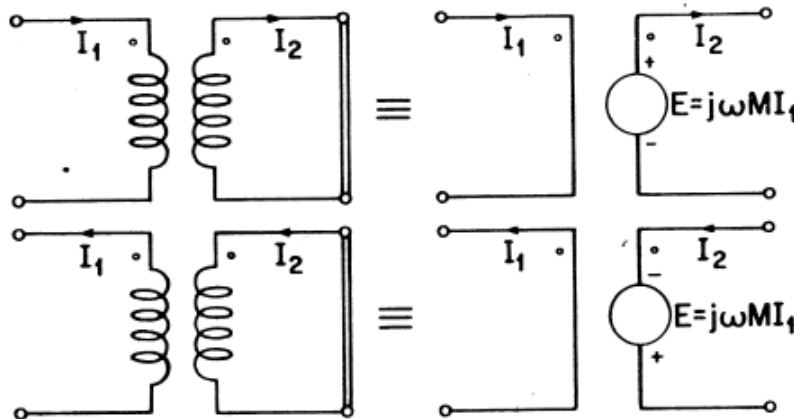


FIG. 23 - SENTIDO DE f.e.m. INDUZIDA DEVIDO À INDUTÂNCIA MÚTUA.

- IRÁ SURTIR UMA CORRENTE i_2 QUE DEVERÁ CRIAR UM FLUXO QUE SE OPORÁ AO FLUXO CRIADO POR i_1 .
- SE O SENTIDO POSITIVO DA CORRENTE NO CIRC. 1 FOR ENTRANDO PELO TERMINAL ASSINALADO, O SENTIDO POSITIVO DA CORRENTE NO CIRC. 2 SERÁ SAINDO PELO TERMINAL ASSINALADO.
- LOGO, EM TERMOS DE CIRCUITOS PODE-SE SUBSTITUIR O EFEITO DA MÚTUA POR UM GERADOR DE f.e.m. $j\omega M\dot{I}_1$ COM O TERMINAL POSITIVO ASSOCIADO AO TERMINAL ASSINALADO.

EX. 9

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.3 - INTRODUÇÃO DAS INDUTÂNCIAS MÚTUAS NAS EQUAÇÕES DOS ELEMENTOS

- **CONVENÇÃO:** INDICA-SE A MÚTUA PELOS SÍMBOLOS DOS BARRAMENTOS EXTREMOS DAS DUAS LINHAS E OS TERMINAIS ASSINALADOS POR PONTOS ESTÃO EM CORRESPONDÊNCIA AO PRIMEIRO BARRAMENTO DE CADA ELEMENTO.
- SEJAM DOIS ELEMENTOS, pq E rs , COM f.e.m. EM SÉRIE \dot{E}_{pq} e \dot{E}_{rs} , IMPEDÂNCIAS \bar{Z}_{pq} e \bar{Z}_{rs} , E IMPEDÂNCIAS MÚTUAS $\bar{Z}_{pq,rs}$ e $\bar{Z}_{rs,pq}$, CONFORME Fig. 24.

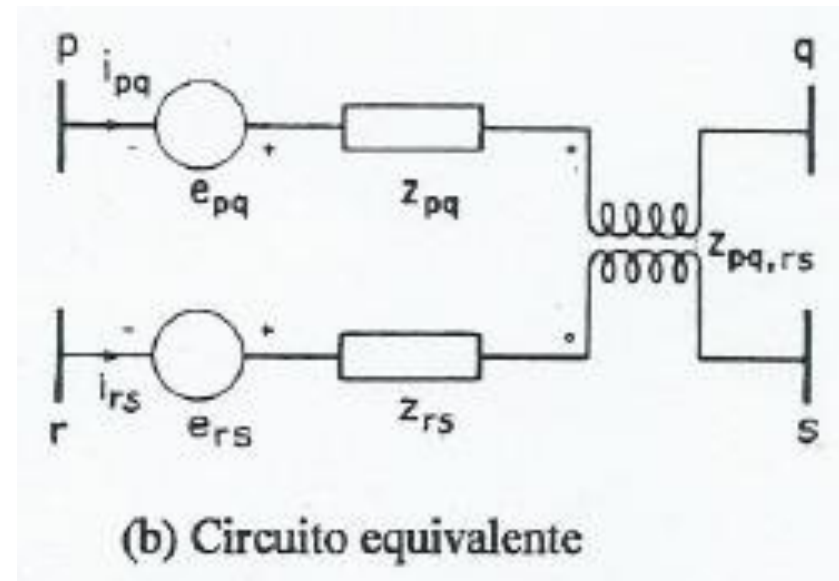
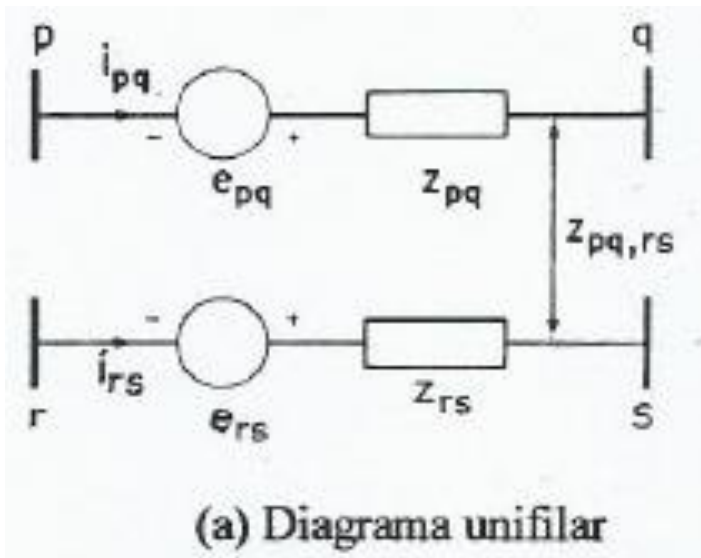
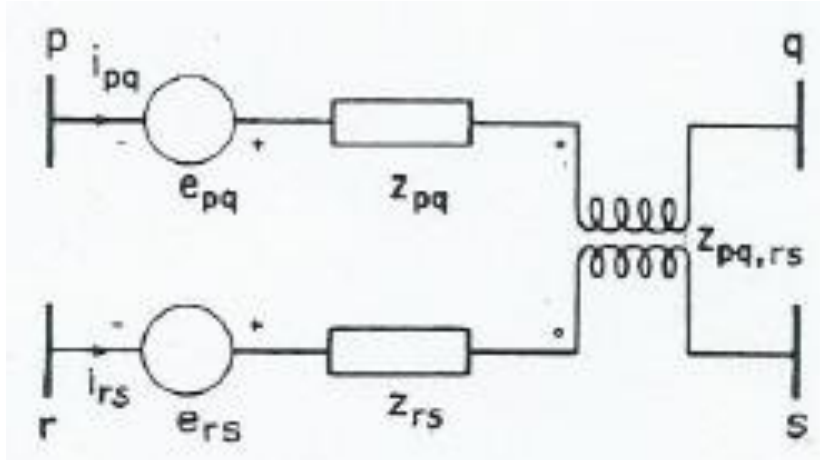


FIG. 24 - DOIS ELEMENTOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS.

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.3 - INTRODUÇÃO DAS INDUTÂNCIAS MÚTUAS NAS EQUAÇÕES DOS ELEMENTOS



- O EQUACIONAMENTO FICA:

$$\dot{V}_{pq} + \dot{E}_{pq} = Z_{pq} \dot{I}_{pq} + Z_{pq,rs} \dot{I}_{rs}$$

$$\dot{V}_{rs} + \dot{E}_{rs} = Z_{rs,pq} \dot{I}_{pq} + Z_{rs} \dot{I}_{rs}$$

- NA FORMA MATRICIAL:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{pq} \\ \dot{V}_{rs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{E}_{pq} \\ \dot{E}_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{pq} & Z_{pq,rs} \\ Z_{rs,pq} & Z_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{pq} \\ \dot{I}_{rs} \end{bmatrix}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.3 - INTRODUÇÃO DAS INDUTÂNCIAS MÚTUAS NAS EQUAÇÕES DOS ELEMENTOS

- NA FORMA MATRICIAL:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{pq} \\ \dot{V}_{rs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{E}_{pq} \\ \dot{E}_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{pq} & \bar{Z}_{pq,rs} \\ \bar{Z}_{rs,pq} & \bar{Z}_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{pq} \\ \dot{I}_{rs} \end{bmatrix}$$

- PRÉ-MULTIPLICANDO AMBOS OS MEMBROS PELA INVERSA DA MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS OBTÊM-SE (UTILIZANDO ADMITÂNCIAS) :

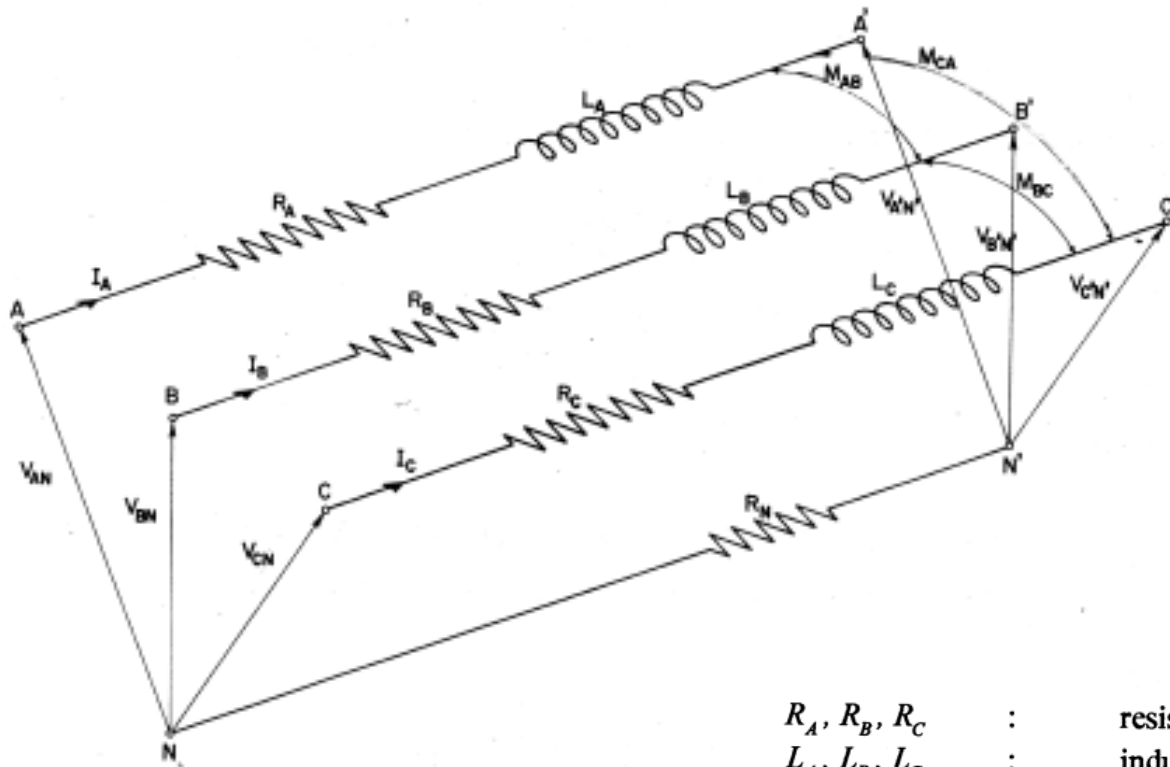
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{pq} \\ \dot{I}_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{pq} & \bar{Z}_{pq,rs} \\ \bar{Z}_{rs,pq} & \bar{Z}_{rs} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{V}_{pq} \\ \dot{V}_{rs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{E}_{pq} \\ \dot{E}_{rs} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{pq} & \bar{Y}_{pq,rs} \\ \bar{Y}_{rs,pq} & \bar{Y}_{rs} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{V}_{pq} \\ \dot{V}_{rs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{E}_{pq} \\ \dot{E}_{rs} \end{bmatrix} \right\}$$

- ESTAS DUAS EQUAÇÕES EXPRESSAM AS RELAÇÕES ENTRE TENSÕES E CORRENTES PARA ELEMENTOS COM MÚTUAS.

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.4 - LINHA TRIFÁSICA A 4 FIOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS – MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS

- SEJA UMA LINHA TRIFÁSICA CONSTITUÍDA POR 3 FIOS DE FASE E O FIO NEUTRO, Fig. 25.



- APLICANDO A LEI DE KIRCHHOFF DAS TENSÕES EM CADA MALHA:

$$\dot{V}_{AN} = \dot{V}_{AA'} + \dot{V}_{A'N'} + \dot{V}_{N'N}$$

R_A, R_B, R_C	:	resistência ôhmica dos fios da linha;
L_A, L_B, L_C	:	indutância própria dos fios da linha;
M_{AB}, M_{BC}, M_{CA}	:	indutância mútua entre os fios da linha;
R_G	:	resistência ôhmica do fio de retorno;
L_G	:	indutância própria do fio de retorno;
M_{AG}, M_{BG}, M_{CG}	:	indutância mútua entre o fio de retorno e os fios da linha.

FIG. 25 - LINHA TRIFÁSICA A 4 FIOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS.

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.4 - LINHA TRIFÁSICA A 4 FIOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS – MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS

- APLICANDO A LEI DE KIRCHHOFF DAS TENSÕES EM CADA MALHA:

$$\dot{V}_{AN} = \dot{V}_{AA'} + \dot{V}_{A'N'} + \dot{V}_{NN}$$

- OU, COM MATRIZES:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N'} \\ \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{C'N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AA'} \\ \dot{V}_{BB'} \\ \dot{V}_{CC'} \end{bmatrix} + \dot{V}_{NN} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{- QUEDA DE TENSÃO NA LINHA}$$

- NOTE-SE QUE: $\dot{V}_{AA'} = I_A(R_A + j\omega L_A) + I_B j\omega M_{AB} + I_C j\omega M_{AC} + I_N j\omega M_{AG}$

- LEMBRANDO QUE: $I_N = -(I_A + I_B + I_C)$

- TEM-SE: $\dot{V}_{AA'} = I_A(R_A + j\omega L_A) + I_B j\omega M_{AB} + I_C j\omega M_{AC} - (I_A + I_B + I_C)j\omega M_{AG}$

- OU, AINDA:

$$\dot{V}_{AA'} = I_A [R_A + j\omega(L_A - M_{AG})] + I_B j\omega(M_{AB} - M_{AG}) + I_C j\omega(M_{AC} - M_{AG})$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.4 - LINHA TRIFÁSICA A 4 FIOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS – MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS

- VIMOS QUE:

$$\dot{V}_{AA'} = I_A [R_A + j\omega(L_A - M_{AG})] + I_B j\omega(M_{AB} - M_{AG}) + I_C j\omega(M_{AC} - M_{AG})$$

- EM FORMA MATRICIAL, TEM-SE:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AA'} \\ \dot{V}_{BB'} \\ \dot{V}_{CC'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A + j\omega(L_A - M_{AG}) & j\omega(M_{AB} - M_{AG}) & j\omega(M_{AC} - M_{AG}) \\ j\omega(M_{AB} - M_{BG}) & R_B + j\omega(L_B - M_{BG}) & j\omega(M_{BC} - M_{BG}) \\ j\omega(M_{AC} - M_{CG}) & j\omega(M_{BC} - M_{CG}) & R_C + j\omega(L_C - M_{CG}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- PELA FIG. 25 TEM-SE, AINDA:

$$\dot{V}_{NN'} = (I_A + I_B + I_C)(R_G + j\omega L_G) - I_A j\omega M_{AG} - I_B j\omega M_{BG} - I_C j\omega M_{CG}$$

- OU :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN'} = & [R_G + j\omega(L_G - M_{AG})]I_A + [R_G + j\omega(L_G - M_{BG})]I_B + \\ & + [R_G + j\omega(L_G - M_{CG})]I_C \end{aligned}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.4 - LINHA TRIFÁSICA A 4 FIOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS – MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS

- VIMOS QUE:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N'} \\ \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{C'N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AA'} \\ \dot{V}_{BB'} \\ \dot{V}_{CC'} \end{bmatrix} + \dot{V}_{NN'} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- SENDO:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AA'} \\ \dot{V}_{BB'} \\ \dot{V}_{CC'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A + j\omega(L_A - M_{AG}) & j\omega(M_{AB} - M_{AG}) & j\omega(M_{AC} - M_{AG}) \\ j\omega(M_{AB} - M_{BG}) & R_B + j\omega(L_B - M_{BG}) & j\omega(M_{BC} - M_{BG}) \\ j\omega(M_{AC} - M_{CG}) & j\omega(M_{BC} - M_{CG}) & R_C + j\omega(L_C - M_{CG}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN'} &= [R_G + j\omega(L_G - M_{AG})]I_A + [R_G + j\omega(L_G - M_{BG})]I_B + \\ &+ [R_G + j\omega(L_G - M_{CG})]I_C \end{aligned}$$

- EM FORMA SIMPLIFICADA, TEM-SE:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N'} \\ \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{C'N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{AA} & \bar{Z}_{AB} & \bar{Z}_{AC} \\ \bar{Z}_{BA} & \bar{Z}_{BB} & \bar{Z}_{BC} \\ \bar{Z}_{CA} & \bar{Z}_{CB} & \bar{Z}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- SENDO:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{AA} &= R_A + R_G + j\omega(L_A + L_G - 2M_{AG}) \\ \bar{Z}_{BB} &= R_B + R_G + j\omega(L_B + L_G - 2M_{BG}) \\ \bar{Z}_{CC} &= R_C + R_G + j\omega(L_C + L_G - 2M_{CG}) \\ \bar{Z}_{AB} &= \bar{Z}_{BA} = R_G + j\omega(M_{AB} - M_{AG} - M_{BG} + L_G) \\ \bar{Z}_{AC} &= \bar{Z}_{CA} = R_G + j\omega(M_{AC} - M_{AG} - M_{CG} + L_G) \end{aligned}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.4 - LINHA TRIFÁSICA A 4 FIOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS – MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS

- EM FORMA SIMPLIFICADA, TEM-SE:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N'} \\ \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{C'N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{AA} & \bar{Z}_{AB} & \bar{Z}_{AC} \\ \bar{Z}_{BA} & \bar{Z}_{BB} & \bar{Z}_{BC} \\ \bar{Z}_{CA} & \bar{Z}_{CB} & \bar{Z}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- SENDO:

$$\bar{Z}_{AA} = R_A + R_G + j\omega(L_A + L_G - 2M_{AG})$$

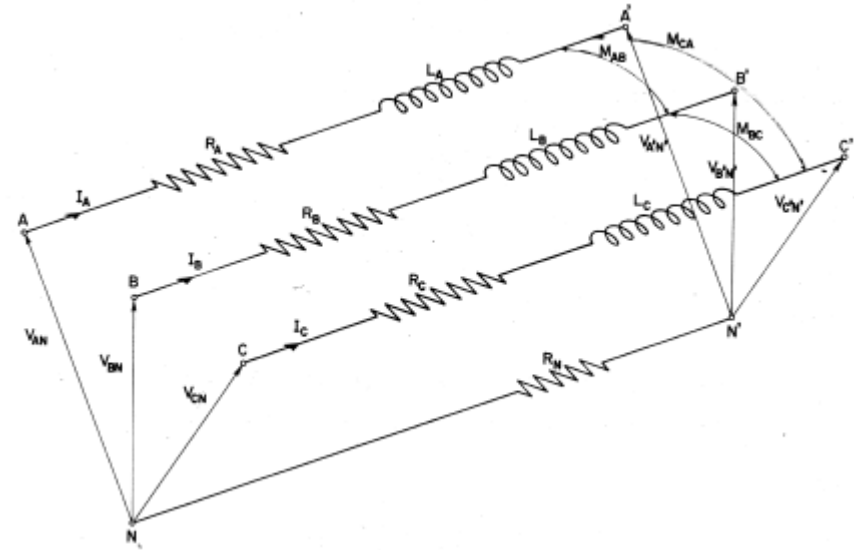
$$\bar{Z}_{BB} = R_B + R_G + j\omega(L_B + L_G - 2M_{BG})$$

$$\bar{Z}_{CC} = R_C + R_G + j\omega(L_C + L_G - 2M_{CG})$$

$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_{BA} = R_G + j\omega(M_{AB} - M_{AG} - M_{BG} + L_G)$$

$$\bar{Z}_{AC} = \bar{Z}_{CA} = R_G + j\omega(M_{AC} - M_{AG} - M_{CG} + L_G)$$

$$\bar{Z}_{BC} = \bar{Z}_{CB} = R_G + j\omega(M_{BC} - M_{BG} - M_{CG} + L_G)$$



1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.4 - LINHA TRIFÁSICA A 4 FIOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS – MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS

- NOS CASOS USUAIS DE LINHAS COM **TRANSPOSIÇÃO COMPLETA**, TEM-SE:

$$R_A = R_B = R_C = R$$

$$L_A = L_B = L_C = L$$

$$M_{AB} = M_{BC} = M_{CA} = M$$

$$M_{AG} = M_{BG} = M_{CG} = M'$$

- O QUE RESULTA EM:

$$\bar{Z}_{AA} = \bar{Z}_{BB} = \bar{Z}_{CC} = R + R_G + j\omega(L + L_G - 2M') = \bar{Z}_P$$

$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_{BC} = \bar{Z}_{CA} = R_G + j\omega(L_G + M - 2M') = \bar{Z}_M$$

- LOGO:
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N'} \\ \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{C'N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_P & \bar{Z}_M & \bar{Z}_M \\ \bar{Z}_M & \bar{Z}_P & \bar{Z}_M \\ \bar{Z}_M & \bar{Z}_M & \bar{Z}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = [Z_{REDE}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$
 QUEDA DE TENSÃO NA LINHA

- SENDO:
$$[Z_{REDE}] = \begin{bmatrix} \bar{Z}_P & \bar{Z}_M & \bar{Z}_M \\ \bar{Z}_M & \bar{Z}_P & \bar{Z}_M \\ \bar{Z}_M & \bar{Z}_M & \bar{Z}_P \end{bmatrix}$$
 A MATRIZ DE IMPEDÂNCIA DE REDE

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.5 - LINHA TRIFÁSICA A 3 FIOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS – MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS

- SEJA A FIGURA 26.

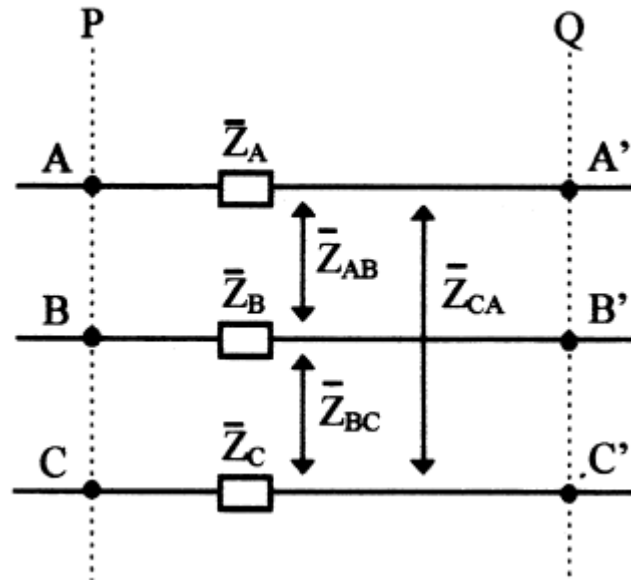


FIG. 26 - LINHA TRIFÁSICA A 3 FIOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS.

- QUAISQUER QUE SEJAM AS CORRENTES, TEM-SE: $I_A + I_B + I_C = 0$

- LOGO:

$$\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N} = I_A \bar{Z}_A + I_B j\omega M_{AB} + I_C j\omega M_{AC}$$

$$\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{B'N} = I_B \bar{Z}_B + I_A j\omega M_{AB} + I_C j\omega M_{BC}$$

$$\dot{V}_{CN} - \dot{V}_{C'N} = I_C \bar{Z}_C + I_A j\omega M_{AC} + I_B j\omega M_{BC}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.5 - LINHA TRIFÁSICA A 3 FIOS COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS – MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS

- MATRICIALMENTE, TEM-SE:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A + j\omega L_A & j\omega M_{AB} & j\omega M_{AC} \\ j\omega M_{AB} & R_B + j\omega L_B & j\omega M_{BC} \\ j\omega M_{AC} & j\omega M_{BC} & R_C + j\omega L_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- OU:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{AA} & \bar{Z}_{AB} & \bar{Z}_{AC} \\ \bar{Z}_{BA} & \bar{Z}_{BB} & \bar{Z}_{BC} \\ \bar{Z}_{CA} & \bar{Z}_{CB} & \bar{Z}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = [Z_{REDE}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- QUE É O CASO ANTERIOR ELIMINANDO-SE OS TERMOS REFERENTES AO FIO RETORNO:

- NO CASO DE TRANSPOSIÇÃO COMPLETA, TEM-SE:

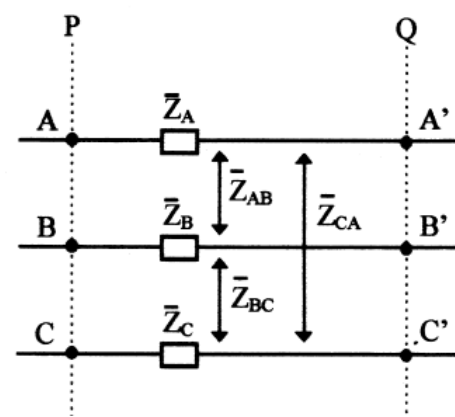
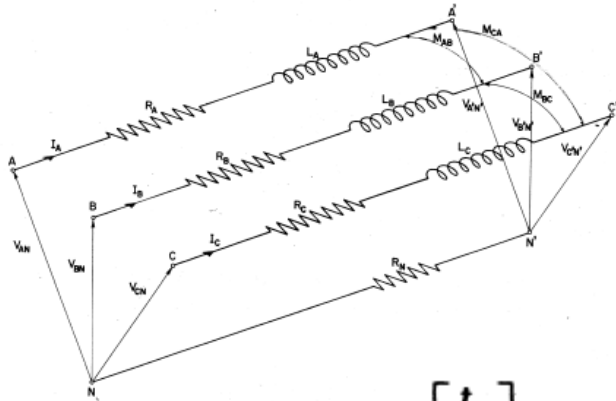
$$\begin{aligned} Z_{AA} &= Z_{BB} = Z_{CC} = R + j\omega L = Z_P \\ Z_{AB} &= Z_{BC} = Z_{CA} = j\omega M = Z_M \end{aligned}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.6 - LINHA TRIF. A 4 OU 3 FIOS COM MÚTUAS IGUAIS ALIMENTANDO CARGA TRIF. EQUIL.



- CONSIDEREMOS AS FIGS. 25 E 26, SENDO QUE A LINHA É TRANSPOSTA.



- NESTE CASO:

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- LOGO, A QUEDA DE TENSÃO NA LINHA ($\vec{V}_{AA'}$) É DADA POR:

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_{AN} \\ \vec{V}_{BN} \\ \vec{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{V}_{A'N'} \\ \vec{V}_{B'N'} \\ \vec{V}_{C'N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_P & \bar{Z}_M & \bar{Z}_M \\ \bar{Z}_M & \bar{Z}_P & \bar{Z}_M \\ \bar{Z}_M & \bar{Z}_M & \bar{Z}_P \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.6 - LINHA TRIF. A 4 OU 3 FIOS COM MÚTUAS IGUAIS ALIMENTANDO CARGA TRIF. EQUIL.

- DO SLIDE ANTERIOR:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N'} \\ \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{C'N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_P & \bar{Z}_M & \bar{Z}_M \\ \bar{Z}_M & \bar{Z}_P & \bar{Z}_M \\ \bar{Z}_M & \bar{Z}_M & \bar{Z}_P \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- LEMBRANDO QUE $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, E QUE $R + j\omega L = \bar{Z}_P$ E $j\omega M = \bar{Z}_M$

$$\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N'} = I \left[\bar{Z}_P + (\alpha^2 + \alpha) \bar{Z}_M \right] = I (\bar{Z}_P - \bar{Z}_M) = I [R + j\omega(L - M)]$$

$$\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{B'N'} = I \left[\bar{Z}_P \alpha^2 + (1 + \alpha) \bar{Z}_M \right] = I \alpha^2 \left[\bar{Z}_P + (\alpha + \alpha^2) \bar{Z}_M \right] = I \alpha^2 (\bar{Z}_P - \bar{Z}_M)$$

$$\dot{V}_{CN} - \dot{V}_{C'N'} = I \left[\bar{Z}_P \alpha + (1 + \alpha^2) \bar{Z}_M \right] = I \alpha \left[\bar{Z}_P + (\alpha^2 + \alpha) \bar{Z}_M \right] = I \alpha (\bar{Z}_P - \bar{Z}_M)$$

- PORTANTO, COLOCANDO EM FUNÇÃO DE \vec{V}_{AN} E $\vec{V}_{A'N'}$, TEM-SE:

$$\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{B'N'} = \alpha^2 (\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N'})$$

$$\dot{V}_{CN} - \dot{V}_{C'N'} = \alpha (\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N'})$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.6 - LINHA TRIF. A 4 OU 3 FIOS COM MÚTUAS IGUAIS ALIMENTANDO CARGA TRIF. EQUIL.



- DO SLIDE ANTERIOR:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{B'N'} &= \alpha^2 (\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N'}) \\ \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{C'N'} &= \alpha (\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N'})\end{aligned}$$

- LEMBRANDO QUE:

$$\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N'} = I [R + j\omega(L - M)]$$

- TEM-SE EM FORMA MATRICIAL:

$$\dot{V}_{AN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} - \dot{V}_{A'N'} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = I [R + j\omega(L - M)] \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- OU, AINDA:

$$(\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N'}) \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = I [R + j\omega(L - M)] \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- DEVE-SE LEMBRAR QUE PODE-SE RESOLVER COMO SENDO UM CIRCUITO MONOFÁSICO, POIS:

$$\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N'} = I [R + j\omega(L - M)]$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.7 - LINHA TRIF. COM MÚTUAS QUAISQUER ALIMENTANDO CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA

- SEJA O CIRCUITO DA FIG. 27:

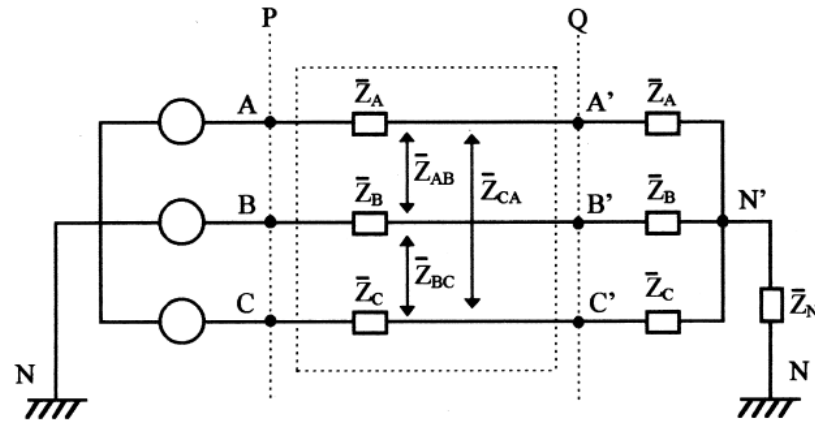


FIG. 27 - SIST. TRIF. SIM. E DESEQ. COM CARGA DESEQ. EM ESTRELA ATERRADA.

- NOS TERMINAIS DA CARGA TEM-SE: $\dot{V}_{A'N} = \dot{V}_{A'N'} + \dot{V}_{N'N} = \bar{Z}_A \cdot \dot{I}_A + \bar{Z}_N \cdot \dot{I}_N$

- MAS: $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$

- LOGO: $\dot{V}_{A'N} = \dot{I}_A \bar{Z}_A + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) \bar{Z}_N$

$$\dot{V}_{B'N} = \dot{I}_B \bar{Z}_B + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) \bar{Z}_N$$

$$\dot{V}_{C'N} = \dot{I}_C \bar{Z}_C + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) \bar{Z}_N$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.7 - LINHA TRIF. COM MÚTUAS QUAISQUER ALIMENTANDO CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA



- DO SLIDE ANTERIOR:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{A'N} &= \dot{I}_A \bar{Z}_A + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) \bar{Z}_N \\ \dot{V}_{B'N} &= \dot{I}_B \bar{Z}_B + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) \bar{Z}_N \\ \dot{V}_{C'N} &= \dot{I}_C \bar{Z}_C + (\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) \bar{Z}_N\end{aligned}$$

- UTILIZANDO MATRIZES:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_B & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \\ \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \\ \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix}$$

- OU, AINDA:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A + \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \\ \bar{Z}_N & \bar{Z}_B + \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \\ \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_C + \bar{Z}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix}$$

- SE O CENTRO-ESTRELA DA CARGA FOR ATERRADO, FAZ-SE $\bar{Z}_N = 0$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.7 - LINHA TRIF. COM MÚTUAS QUAISQUER ALIMENTANDO CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA



- APLICANDO A LKT NA LINHA FICA: $\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{AA'} - \dot{V}_{A'N} = 0$

- LOGO, A QUEDA DE TENSÃO NA LINHA É:

$$\dot{V}_{AA'} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N}$$

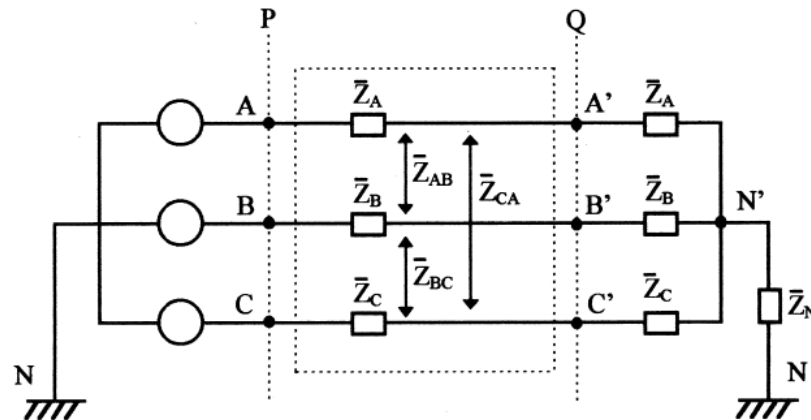
- OU, AINDA: $\dot{V}_{AA'} = \bar{Z}_A \cdot \dot{I}_A + \bar{Z}_{AB} \cdot \dot{I}_B + \bar{Z}_{AC} \cdot \dot{I}_C$

- PORTANTO:

$$\vec{V}_{AA'} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = [Z_{REDE}] \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix}$$

- SENDO:

$$[Z_{REDE}] = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{AA} & \bar{Z}_{AB} & \bar{Z}_{AC} \\ \bar{Z}_{BA} & \bar{Z}_{BB} & \bar{Z}_{BC} \\ \bar{Z}_{CA} & \bar{Z}_{CB} & \bar{Z}_{CC} \end{bmatrix}$$

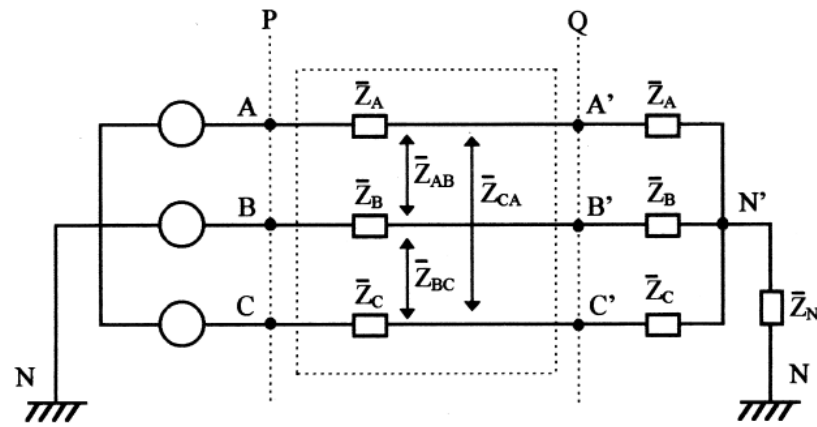


1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.7 - LINHA TRIF. COM MÚTUAS QUAISQUER ALIMENTANDO CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA



- FOI VISTO QUE:
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = [Z_{REDE}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$



- LEMBRANDO QUE:
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- RESULTA:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \{ [Z_{CARGA}] + [Z_{REDE}] \} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- E, PORTANTO:

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \{ [Z_{CARGA}] + [Z_{REDE}] \}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix}$$

- UMA VEZ DETERMINADAS AS CORRENTES, CALCULA-SE AS TENSÕES DE FASE NOS TERMINAIS DA CARGA.

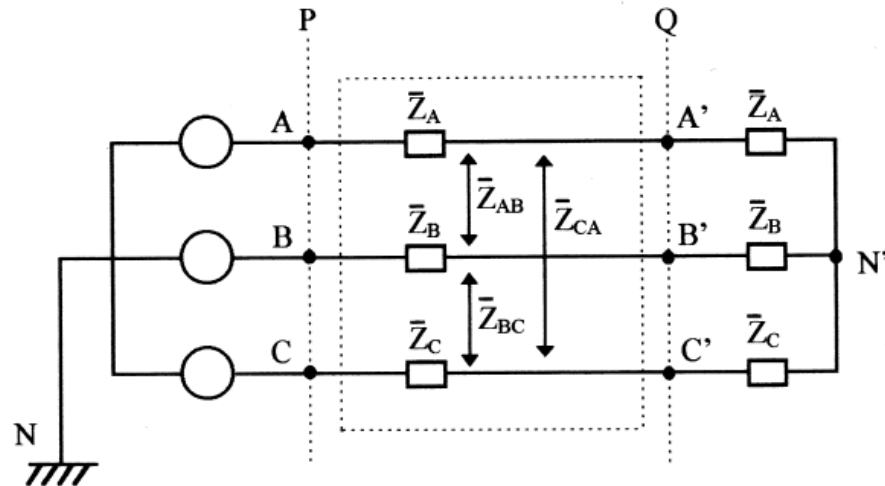
- AS TENSÕES DE LINHA SÃO CALCULADAS APLICANDO-SE A LKT. EX. 11-12

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.8 - LINHA TRIF. COM MÚTUAS QUAISQUER ALIMENTANDO CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTR. ISOLADO OU EM TRIÂNGULO

- SEJA O CIRCUITO DA FIG. 28.

FIG. 28 - SIST. TRIF. SIM. E DESEQ. COM CARGA DESEQ. EM ESTRELA ISOLADA.



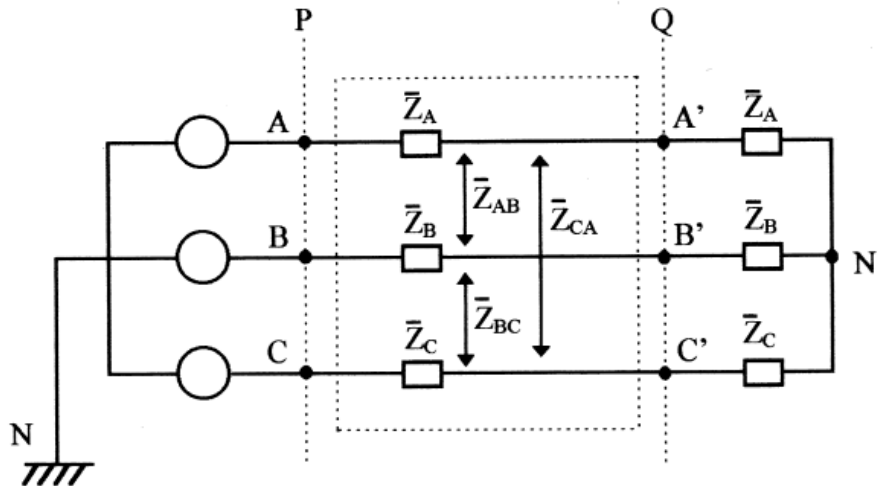
- NO CASO DA CARGA ESTAR EM TRIÂNGULO, BASTA CONVERTÊ-LA PARA ESTRELA.
- SÃO CONHECIDAS AS TENSÕES DE FASE NOS TERMINAIS DOS GERADORES (\dot{V}_{AN}), AS IMPEDÂNCIAS DE CARGA (\bar{Z}_A , \bar{Z}_B E \bar{Z}_C), AS IMPEDÂNCIAS PRÓPRIAS (\bar{Z}'_A , \bar{Z}'_B E \bar{Z}'_C) E MÚTUAS (\bar{Z}_{AB} , \bar{Z}_{BC} E \bar{Z}_{CA}) DA LINHA DE TRANSMISSÃO.
- DEVE-SE CALCULAR AS CORRENTES NAS TRÊS FASES E AS TENSÕES DE FASE E DE LINHA NOS TERMINAIS DA CARGA.

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.8 - LINHA TRIF. COM MÚTUAS QUAISQUER ALIMENTANDO CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTR. ISOLADO OU EM TRIÂNGULO

NOS TERMINAIS DA CARGA TEM-SE:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{A'N'} &= \dot{V}_{A'N} + \dot{V}_{NN'} = \dot{I}_A \bar{Z}_A \\ \dot{V}_{B'N'} &= \dot{V}_{B'N} + \dot{V}_{NN'} = \dot{I}_B \bar{Z}_B \\ \dot{V}_{C'N'} &= \dot{V}_{C'N} + \dot{V}_{NN'} = \dot{I}_C \bar{Z}_C\end{aligned}$$



- PRECISAMOS ENCONTRAR O VALOR DE $\dot{V}_{NN'}$
- ISOLANDO O VALOR DAS CORRENTES, TEM-SE:

$$\begin{aligned}I_A &= \frac{\dot{V}_{A'N}}{\bar{Z}_A} + \frac{\dot{V}_{NN'}}{\bar{Z}_A} = \bar{Y}_A \dot{V}_{A'N} + \bar{Y}_A \dot{V}_{NN'} \\ I_B &= \frac{\dot{V}_{B'N}}{\bar{Z}_B} + \frac{\dot{V}_{NN'}}{\bar{Z}_B} = \bar{Y}_B \dot{V}_{B'N} + \bar{Y}_B \dot{V}_{NN'} \\ I_C &= \frac{\dot{V}_{C'N}}{\bar{Z}_C} + \frac{\dot{V}_{NN'}}{\bar{Z}_C} = \bar{Y}_C \dot{V}_{C'N} + \bar{Y}_C \dot{V}_{NN'}\end{aligned}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.8 - LINHA TRIF. COM MÚTUAS QUAISQUER ALIMENTANDO CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTR. ISOLADO OU EM TRIÂNGULO

- LEMBRANDO QUE:

$$I_A + I_B + I_C = 0$$

- TEM-SE:

$$\dot{V}_{NN'} = - \frac{\bar{Y}_A \dot{V}_{A'N} + \bar{Y}_B \dot{V}_{B'N} + \bar{Y}_C \dot{V}_{C'N}}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C}$$

- NO ENTANTO, NÃO CONHECEMOS OS VALORES DE $\dot{V}_{A'N}$, $\dot{V}_{B'N}$ E $\dot{V}_{C'N}$.

- MATRICIALMENTE, A EQUAÇÃO PARA $\dot{V}_{NN'}$, PODE SER ESCRITA DA SEGUINTE FORMA:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{NN'} \\ \dot{V}_{NN'} \\ \dot{V}_{NN'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\bar{Y}_A}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_B}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} \\ -\frac{\bar{Y}_A}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_B}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} \\ -\frac{\bar{Y}_A}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_B}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.8 - LINHA TRIF. COM MÚTUAS QUAISQUER ALIMENTANDO CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTR. ISOLADO OU EM TRIÂNGULO

- PORTANTO, A EQUAÇÃO:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{A'N'} &= \dot{V}_{A'N} + \dot{V}_{NN'} = \dot{I}_A \bar{Z}_A \\ \dot{V}_{B'N'} &= \dot{V}_{B'N} + \dot{V}_{NN'} = \dot{I}_B \bar{Z}_B \\ \dot{V}_{C'N'} &= \dot{V}_{C'N} + \dot{V}_{NN'} = \dot{I}_C \bar{Z}_C\end{aligned}$$

- PODE SER ESCRITA NA FORMA MATRICIAL:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N'} \\ \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{C'N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{V}_{NN'} \\ \dot{V}_{NN'} \\ \dot{V}_{NN'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_B & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix}$$

- SUBSTITUINDO $\dot{V}_{NN'}$ EM SUA FORMA MATRICIAL, OBTEM-SE:

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{\bar{Y}_A}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_B}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} \\ -\frac{\bar{Y}_A}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & 1 - \frac{\bar{Y}_B}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} \\ -\frac{\bar{Y}_A}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_B}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & 1 - \frac{\bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.8 - LINHA TRIF. COM MÚTUAS QUAISQUER ALIMENTANDO CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTR. ISOLADO OU EM TRIÂNGULO

- DE FORMA SIMPLIFICADA, TEM-SE:

$$[Y_T] \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- PORÉM DO CIRCUITO, TEM-SE:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} + [Z_{REDE}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- QUE NOS FORNECE:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - [Z_{REDE}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

$$[Y_T] \left\{ \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - [Z_{REDE}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} \right\} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

1.4 – S. T. COM INDUTÂNCIAS MÚTUAS QUAISQUER

1.4.8 - LINHA TRIF. COM MÚTUAS QUAISQUER ALIMENTANDO CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTR. ISOLADO OU EM TRIÂNGULO

- DO SLIDE ANTERIOR:

$$[Y_T] \left\{ \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} - [Z_{REDE}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} \right\} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- OU, AINDA:

$$[Y_T] \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = \{ [Y_T][Z_{REDE}] + [Z_{CARGA}] \} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- PORTANTO:

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \{ [Y_T][Z_{REDE}] + [Z_{CARGA}] \}^{-1} [Y_T] \begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix}$$

- CONHECENDO-SE AS CORRENTES, AS TENSÕES DE FASE NOS TERMINAIS DA CARGA PODEM SER OBTIDAS E, A PARTIR DESTAS, AS TENSÕES DE LINHA SÃO CALCULADAS UTILIZANDO-SE A LKT.

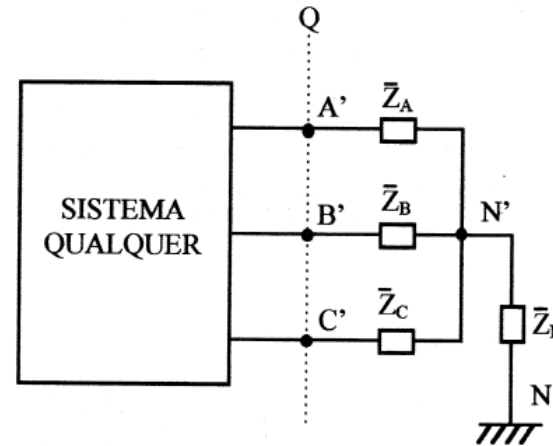
- EX. 13 E 14

1.5 – S. T. S. OU ASSIM. COM CARGAS DESEQ. CONHECIDAS AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA

1.5.1 - CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA

- SEJA O CIRCUITO DA FIG. 29:

FIG. 29 - SIST. TRIF. SIM. QUALQUER
COM CARGA DESEQ. EM ESTRELA
ATERRADA.



- SÃO CONHECIDAS AS TENSÕES DE FASE NOS TERMINAIS DA CARGA $\dot{V}_{A'N}$, AS IMPEDÂNCIAS DA CARGA E A DE ATERRAMENTO.
- DESEJA-SE DETERMINAR AS CORRENTES NAS FASES E NO ATERRAMENTO.
- NO ITEM 1.4.7 FOI VISTO QUE:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A + \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \\ \bar{Z}_N & \bar{Z}_B + \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \\ \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_C + \bar{Z}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix}$$

1.5 – S. T. S. OU ASSIM. COM CARGAS DESEQ. CONHECIDAS AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA

1.5.1 - CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA

- DA EQUAÇÃO:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A + \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \\ \bar{Z}_N & \bar{Z}_B + \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \\ \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_C + \bar{Z}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix}$$

- RESULTA QUE:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}]^{-1} \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A + \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \\ \bar{Z}_N & \bar{Z}_B + \bar{Z}_N & \bar{Z}_N \\ \bar{Z}_N & \bar{Z}_N & \bar{Z}_C + \bar{Z}_N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix}$$

- A CORRENTE NO ATERRAMENTO É DADA PELA LKC, OU SEJA:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$

1.5 – S. T. S. OU ASSIM. COM CARGAS DESEQ. CONHECIDAS AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA

1.5.1 - CARGA EM ESTRELA ATERRADA ATRAVÉS DE IMPEDÂNCIA

- OPCIONALMENTE, COMO AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA SÃO CONHECIDAS, PODEMOS DETERMINAR AS CORRENTES SEM A UTILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL, OU SEJA:

$$\dot{V}_{A'N} = \dot{I}_A \bar{Z}_A + \dot{I}_N \bar{Z}_N$$

$$\dot{V}_{B'N} = \dot{I}_B \bar{Z}_B + \dot{I}_N \bar{Z}_N$$

$$\dot{V}_{C'N} = \dot{I}_C \bar{Z}_C + \dot{I}_N \bar{Z}_N$$

- LEMBRANDO QUE:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N$$

- OBTEM-SE:

$$\dot{I}_N = \frac{\frac{\dot{V}_{A'N}}{\bar{Z}_A} + \frac{\dot{V}_{B'N}}{\bar{Z}_B} + \frac{\dot{V}_{C'N}}{\bar{Z}_C}}{1 + \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_A} + \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_B} + \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_C}}$$

- ISOLANDO AS CORRENTES TEM-SE:

$$\frac{\dot{V}_{A'N}}{\bar{Z}_A} - \dot{I}_N \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_A} = \dot{I}_A$$

$$\frac{\dot{V}_{B'N}}{\bar{Z}_B} - \dot{I}_N \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_B} = \dot{I}_B$$

$$\frac{\dot{V}_{C'N}}{\bar{Z}_C} - \dot{I}_N \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_C} = \dot{I}_C$$

- O QUE PERMITE CALCULAR AS CORRENTES NAS FASES.

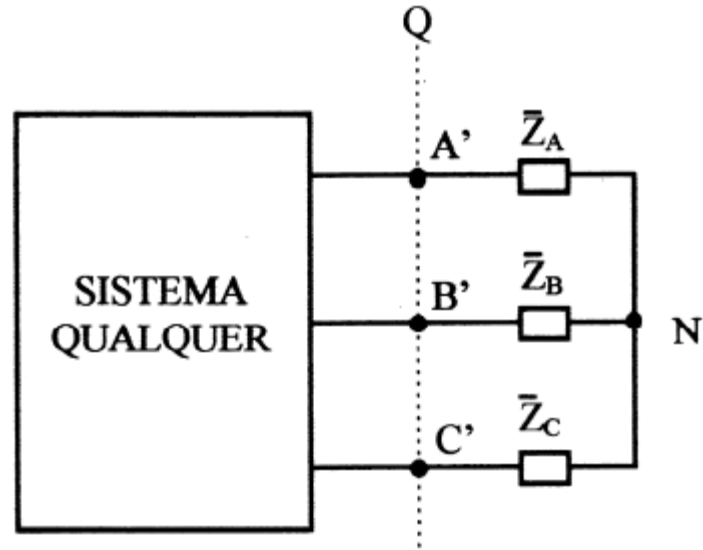
- EX. 15

1.5 – S. T. S. OU ASSIM. COM CARGAS DESEQ. CONHECIDAS AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA

1.5.2 - CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTRELA ISOLADO

- SEJA O CIRCUITO DA FIG. 30:

FIG. 30 - SIST. TRIF. QUALQUER COM
CARGA DESEQUILIBRADA EM
ESTRELA ISOLADA.



- SÃO CONHECIDAS AS TENSÕES DE FASE NOS TERMINAIS DA CARGA $\dot{V}_{A'N}$ E AS IMPEDÂNCIAS DA CARGA.
- DESEJA-SE DETERMINAR AS CORRENTES NAS TRÊS FASES.

- CALCULA-SE $\dot{V}_{NN'}$ UTILIZANDO A EXPRESSÃO DESENVOLVIDA NO ITEM 1.4.8

$$\dot{V}_{NN'} = - \frac{\bar{Y}_A \dot{V}_{A'N} + \bar{Y}_B \dot{V}_{B'N} + \bar{Y}_C \dot{V}_{C'N}}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C}$$

1.5 – S. T. S. OU ASSIM. COM CARGAS DESEQ. CONHECIDAS AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA

1.5.2 - CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTRELA ISOLADO

- A CORRENTE NA FASE **A** É DADA POR:

$$\dot{i}_A = \frac{\dot{V}_{A'N'}}{\bar{Z}_A}$$

- SENDO: $\dot{V}_{A'N'} = \dot{V}_{A'N} + \dot{V}_{NN'}$

- LOGO:
$$\dot{I}_A = \frac{\dot{V}_{A'N}}{\bar{Z}_A} + \frac{\dot{V}_{NN'}}{\bar{Z}_A} = \bar{Y}_A \dot{V}_{A'N} + \bar{Y}_A \dot{V}_{NN'}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{V}_{B'N}}{\bar{Z}_B} + \frac{\dot{V}_{NN'}}{\bar{Z}_B} = \bar{Y}_B \dot{V}_{B'N} + \bar{Y}_B \dot{V}_{NN'}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_{C'N}}{\bar{Z}_C} + \frac{\dot{V}_{NN'}}{\bar{Z}_C} = \bar{Y}_C \dot{V}_{C'N} + \bar{Y}_C \dot{V}_{NN'}$$

- O VALOR DAS TENSÕES $\vec{V}_{A'N'}$ PODEM SER CALCULADOS POR:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N'} \\ \dot{V}_{B'N'} \\ \dot{V}_{C'N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{V}_{NN'} \\ \dot{V}_{NN'} \\ \dot{V}_{NN'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_B & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix}$$

1.5 – S. T. S. OU ASSIM. COM CARGAS DESEQ. CONHECIDAS AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA

1.5.2 - CARGA EM ESTRELA COM CENTRO-ESTRELA ISOLADO

- SOLUÇÃO ALTERNATIVA:

- FOI VISTO NO ITEM 1.4.8 QUE:

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{\bar{Y}_A}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_B}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} \\ -\frac{\bar{Y}_A}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & 1 - \frac{\bar{Y}_B}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} \\ -\frac{\bar{Y}_A}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & -\frac{\bar{Y}_B}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} & 1 - \frac{\bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}] \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}$$

- LOGO, TEM-SE QUE:

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = [Z_{CARGA}]^{-1} [Y_T] \begin{bmatrix} \dot{V}_{A'N} \\ \dot{V}_{B'N} \\ \dot{V}_{C'N} \end{bmatrix}$$

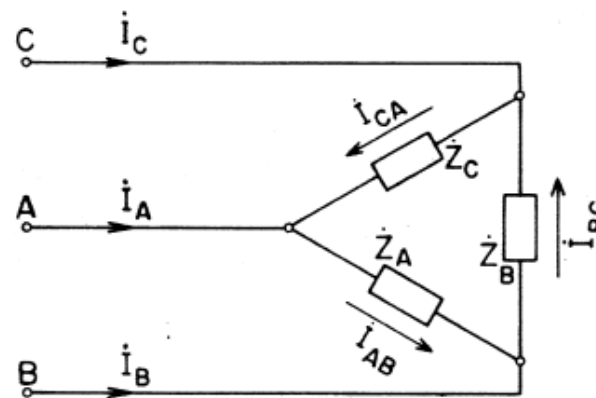
- EX. 16

1.5 – S. T. S. OU ASSIM. COM CARGAS DESEQ. CONHECIDAS AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA

1.5.3 - CARGA EM TRIÂNGULO

- SEJA O CIRCUITO DA FIG. 30:

FIG. 30 - CARGA DESEQUILIBRADA EM TRIÂNGULO.



- **SÃO CONHECIDAS AS TENSÕES DE LINHA E DESEJA-SE DETERMINAR AS CORRENTES DE LINHA E DE FASE.**

- PELA LEI DE OHM, AS CORRENTES NAS FASES SÃO DADAS POR:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{V}_{AB}}{\bar{Z}_A} \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{V}_{BC}}{\bar{Z}_B} \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{V}_{CA}}{\bar{Z}_C}$$

- UTILIZANDO MATRIZES, TEM-SE:

- LOGO:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_B & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{AB} \\ \dot{I}_{BC} \\ \dot{I}_{CA} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{AB} \\ \dot{I}_{BC} \\ \dot{I}_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_A & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_B & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Z}_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix}$$

1.5 – S. T. S. OU ASSIM. COM CARGAS DESEQ. CONHECIDAS

AS TENSÕES NOS TERMINAIS DA CARGA

1.5.3 - CARGA EM TRIÂNGULO

- AS CORRENTES DE LINHA SÃO OBTIDAS APLICANDO-SE A LKC, OU SEJA:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}$$

- OU, EM FORMA MATRICIAL:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{AB} \\ \dot{I}_{BC} \\ \dot{I}_{CA} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{I}_{CA} \\ \dot{I}_{AB} \\ \dot{I}_{BC} \end{bmatrix}$$

1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

- A POTÊNCIA INSTANTÂNEA ABSORVIDA POR UMA CARGA É DADA PELO PRODUTO DOS VALORES INSTANTÂNEOS DA TENSÃO E DA CORRENTE.

$$p = v i$$

- SENDO A TENSÃO E A CORRENTE EM UMA CARGA DADAS POR:

$$v = V_M \cos(\omega t + \theta)$$

$$i = I_M \cos(\omega t + \delta)$$

- A POTÊNCIA INSTANTÂNEA NA CARGA SERÁ:

$$p = v i = V_M I_M \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \delta)$$

- UTILIZANDO-SE A SEGUINTE IDENTIDADE TRIGONOMÉTRICA

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

- E FAZENDO $\alpha = \omega t + \theta$ e $\beta = \omega t + \delta$

- OBTÉM-SE:

$$p = \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\omega t + \theta - \omega t - \delta) + \cos(\omega t + \theta + \omega t + \delta)]$$

1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

- VIMOS QUE:
$$p = \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\omega t + \theta - \omega t - \delta) + \cos(\omega t + \theta + \omega t + \delta)]$$

- UTILIZANDO VALORES EFICAZES E ADOTANDO-SE:
$$\varphi = \theta - \delta$$

QUE É A DEFASAGEM ENTRE A TENSÃO E A CORRENTE, RESULTA:

$$p = V I \cos \varphi + V I \cos(2\omega t + \theta + \delta)$$

- VERIFICAMOS QUE A EXPRESSÃO DA POTÊNCIA APRESENTA DUAS COMPONENTES, A SABER:

- **A PRIMEIRA COMPONENTE**

$$V I \cos \varphi$$

NÃO VARIA COM O TEMPO E CORRESPONDE À POTÊNCIA QUE É ABSORVIDA PELA CARGA E TRANSFORMADA EM CALOR OU TRABALHO E QUE RECEBE O NOME DE **POTÊNCIA ATIVA**.

1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

- A SEGUNDA COMPONENTE

$$V I \cos (2 \omega t + \theta + \delta)$$

VARIA COM O TEMPO COM UMA FREQUÊNCIA QUE É O DOBRO DA FREQUÊNCIA DA TENSÃO E DA CORRENTE.

- ESTA COMPONENTE CORRESPONDE A UMA ENERGIA QUE, DURANTE UM QUARTO DO PERÍODO DA TENSÃO É “ABSORVIDA PELA CARGA” E ARMAZENADA EM SEU CAMPO MAGNÉTICO OU ELÉTRICO, CONFORME A NATUREZA DA CARGA.
- NA QUARTA PARTE SEGUINTE DO PERÍODO DA TENSÃO ESTA ENERGIA É “DEVOLVIDA” À REDE DE ALIMENTAÇÃO E TAMBÉM ARMAZENADA EM UM CAMPO MAGNÉTICO OU ELÉTRICO.
- ESTA COMPONENTE RECEBE O NOME DE **POTÊNCIA FLUTUANTE** E SEU VALOR MÉDIO É NULO.

1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

- **DEFINIÇÕES:**

- **POTÊNCIA APARENTE (S)** – É O PRODUTO DOS VALORES EFICAZES DA TENSÃO E DA CORRENTE.

$$S = V.I$$

- UNIDADE – VOLT-AMPÈRE – (VA) kVA - MVA - GVA

- **POTÊNCIA ATIVA (P)** – É O PRODUTO DA POTÊNCIA APARENTE PELO COSENO DO DEFASAMENTO ANGULAR ENTRE A TENSÃO E A CORRENTE.

- É A PARTE DA POTÊNCIA APARENTE ASSOCIADA COM A REALIZAÇÃO DE TRABALHO.

$$P = S.\cos\varphi = V.I.\cos\varphi$$

- UNIDADE – WATT – (W) KW - MW - GW

1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

- **POTÊNCIA REATIVA (Q)** – É O PRODUTO DA POTÊNCIA APARENTE PELO SENO DO DEFASAMENTO ANGULAR ENTRE A TENSÃO E A CORRENTE.
- É A PARTE DA POTÊNCIA APARENTE ASSOCIADA COM A ENERGIA ARMAZENADA NOS CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO.

$$Q = S \cdot \text{sen}\varphi = V \cdot I \cdot \text{sen}\varphi$$

- UNIDADE – VOLT-AMPÈRE REATIVO – (VAr) OU (Var) OU (var)
kVAr - MVar - GVar

1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

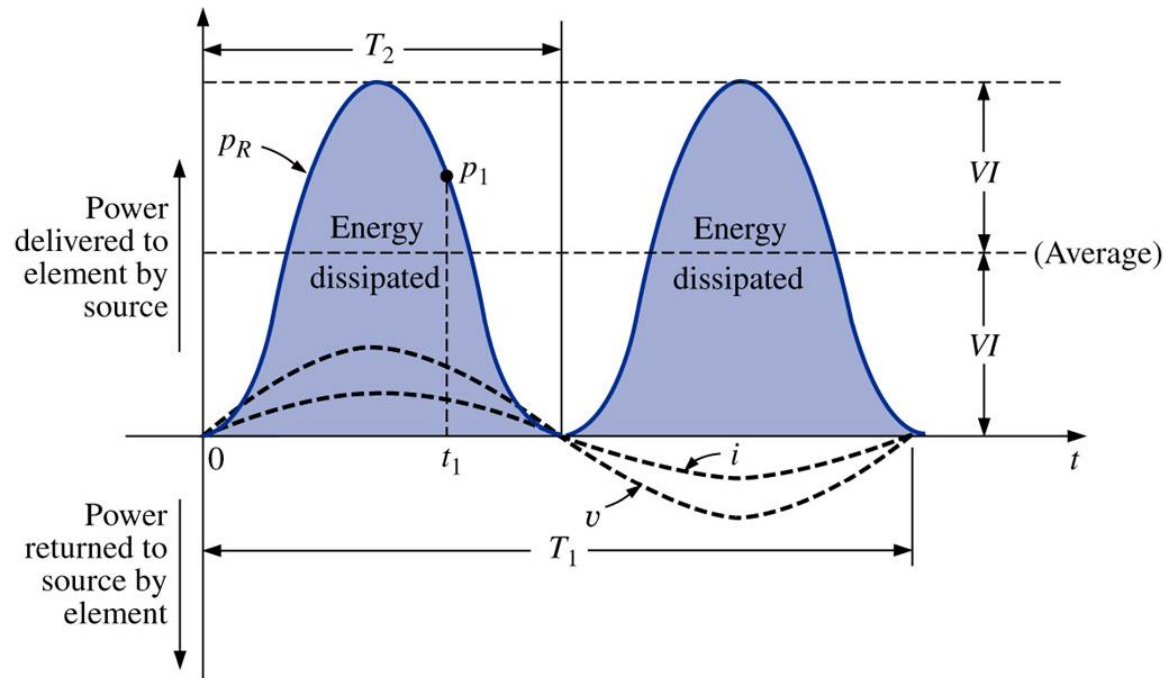
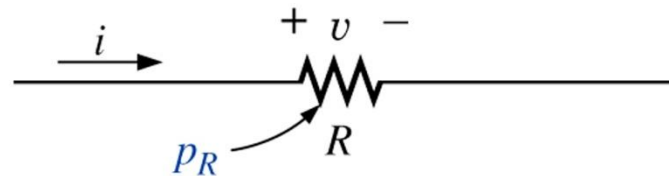


- CONSIDERANDO QUE:
- **CARGA INDUTIVA** $\rightarrow 0^\circ < \varphi < +90^\circ \rightarrow \cos\varphi > 0$ e $\text{sen}\varphi > 0$
- **CARGA CAPACITIVA** $\rightarrow 0^\circ > \varphi > -90^\circ \rightarrow \cos\varphi > 0$ e $\text{sen}\varphi < 0$
- CONCLUI-SE QUE: $(Q = S.\text{sen}\varphi = V.I.\text{sen}\varphi)$
- **CARGA INDUTIVA** $\rightarrow Q > 0$
- **CARGA CAPACITIVA** $\rightarrow Q < 0$
- EM OUTRAS PALAVRAS:
 - POTÊNCIA REATIVA ABSORVIDA POR UMA CARGA INDUTIVA É POSITIVA $(\varphi = \theta - \delta > 0^\circ)$;
 - POTÊNCIA REATIVA ABSORVIDA POR UMA CARGA CAPACITIVA É NEGATIVA $(\varphi = \theta - \delta < 0^\circ)$.

1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

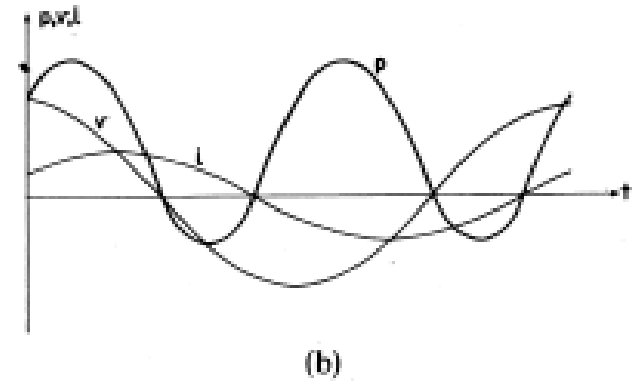
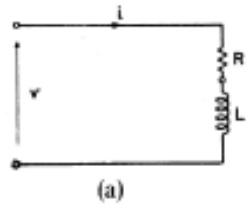
- **CARGA RESISTIVA** $\rightarrow \varphi = 0^\circ \rightarrow \cos\varphi = 1$ e $\sin\varphi = 0^\circ$ $Q = 0$



1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

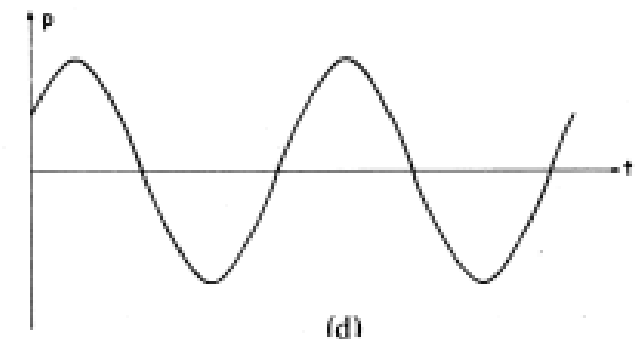
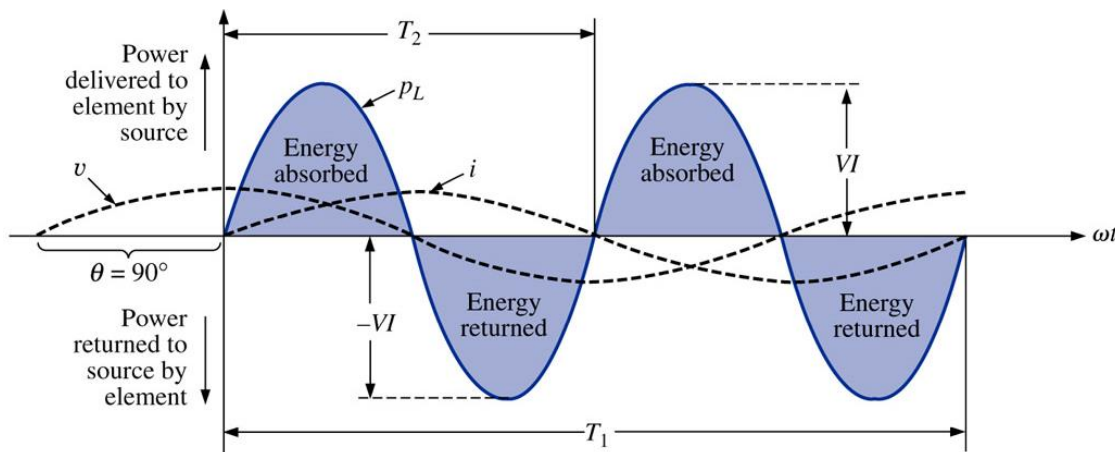
- **CARGA INDUTIVA** $\rightarrow 0^\circ < \varphi < +90^\circ \rightarrow \cos\varphi > 0$ e $\text{sen}\varphi > 0$ $Q > 0$



- **CARGA PURAMENTE INDUTIVA**

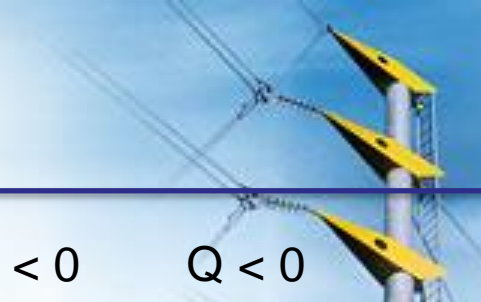
- $\varphi = +90^\circ \rightarrow \cos\varphi = 0$ e $\text{sen}\varphi = 1$

- $P = 0$ e $Q \neq 0$

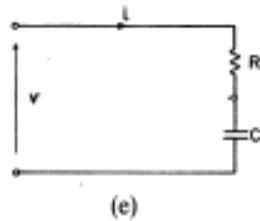


1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO



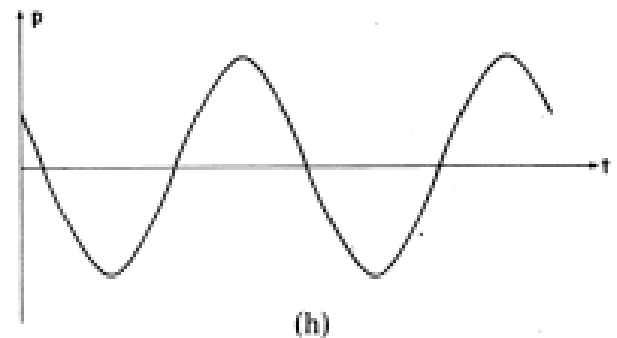
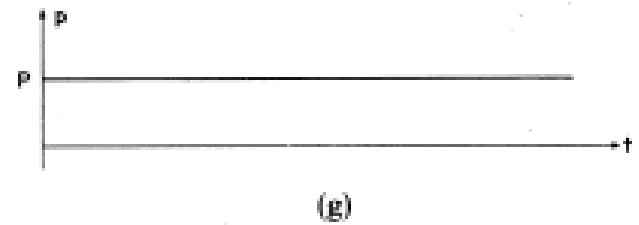
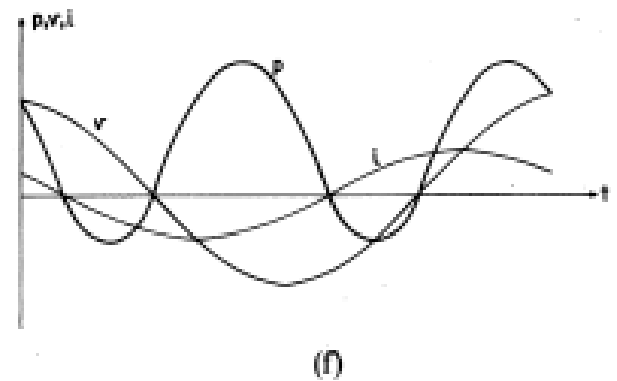
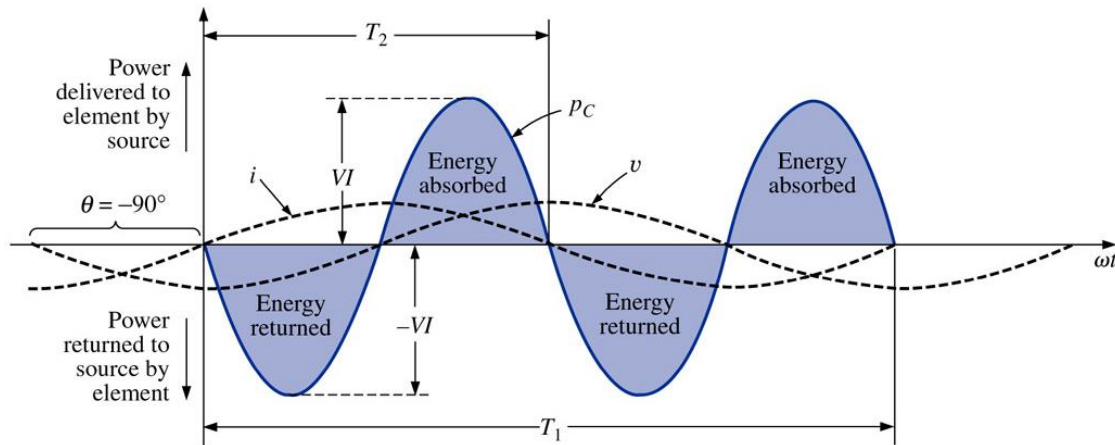
- **CARGA CAPACITIVA** $\rightarrow 0^\circ > \varphi > -90^\circ \rightarrow \cos\varphi > 0$ e $\text{sen}\varphi < 0$ $Q < 0$



- **CARGA PURAMENTE CAPACITIVA**

- $\varphi = -90^\circ \rightarrow \cos\varphi = 0$ e $\text{sen}\varphi = -1$

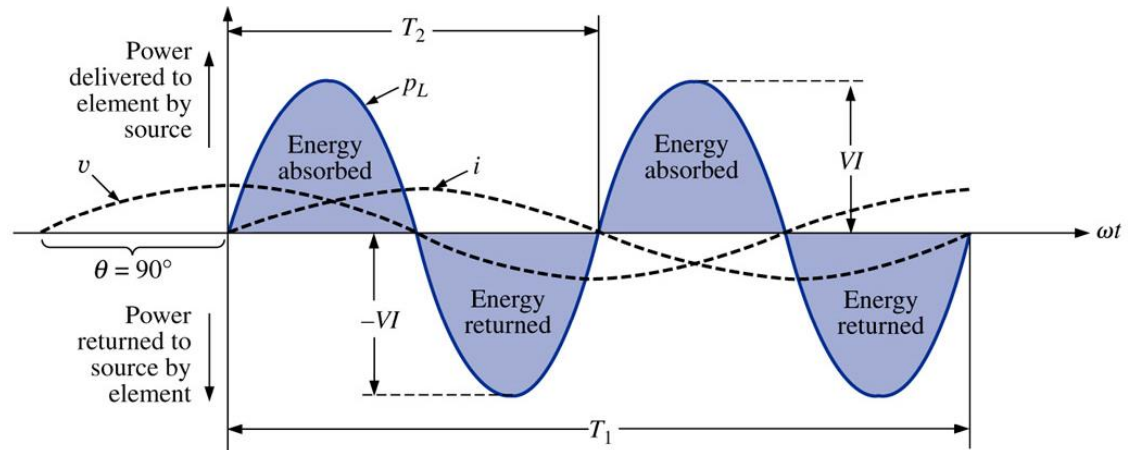
- $P = 0$ e $Q \neq 0$ (INVERTIDA – CASO ANTERIOR)



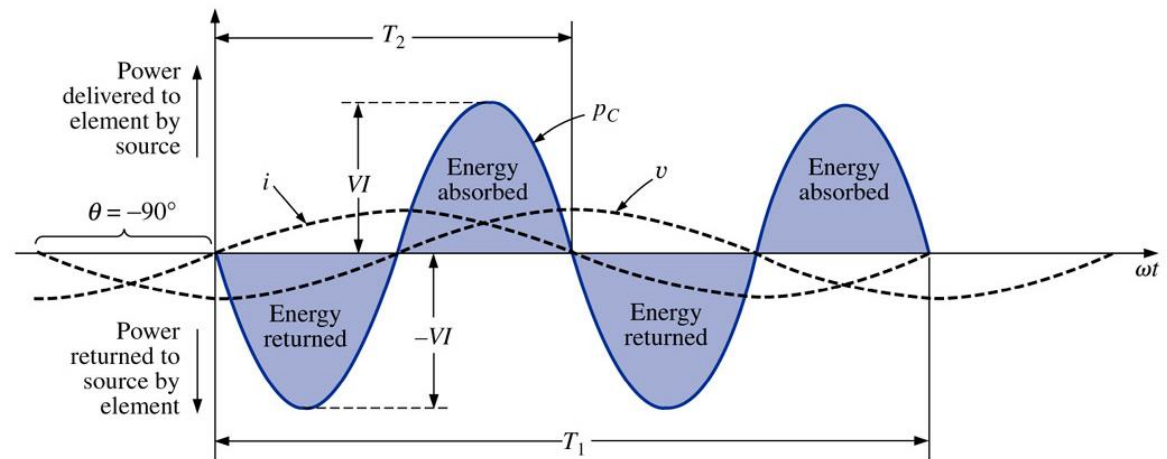
1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

- CARGA PURAMENTE INDUTIVA



- CARGA PURAMENTE CAPACITIVA



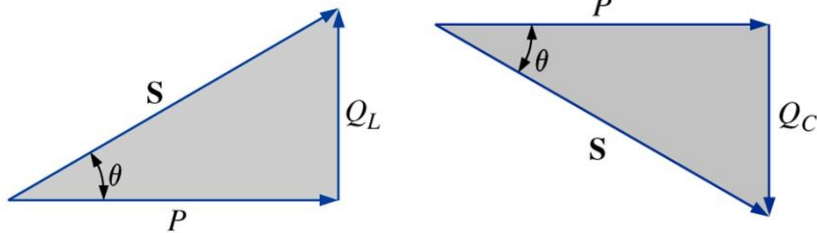
1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

- RELAÇÃO ENTRE AS POTÊNCIAS

- AS TRÊS POTÊNCIAS ESTÃO RELACIONADAS PELA EXPRESSÃO:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



O QUE CORRESPONDE À RELAÇÃO EXISTENTE ENTRE OS CATETOS E A HIPOTENUSA EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO.

- EM TERMOS **COMPLEXOS** CONSIDERA-SE A **POTÊNCIA ATIVA** COMO SENDO UM NÚMERO REAL E A **POTÊNCIA REATIVA** COMO SENDO UM NÚMERO IMAGINÁRIO E, PORTANTO, TEM-SE A DENOMINADA **POTÊNCIA COMPLEXA**:

$$\bar{S} = P + jQ = S \underline{|\varphi}$$

1.6 – POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

1.6.1 - INTRODUÇÃO

- VIMOS QUE: $\bar{S} = P + jQ = S|\underline{\varphi}$
- A POTÊNCIA COMPLEXA TAMBÉM PODE SER EXPRESSA EM TERMOS DOS FASORES DE TENSÃO E CORRENTE NUMA DADA CARGA, ISTO É:

$$\bar{S} = \dot{V} \cdot I^*$$

- OU SEJA, A POTÊNCIA COMPLEXA PODE SER CALCULADA PELO PRODUTO DO FASOR TENSÃO PELO COMPLEXO CONJUGADO DO FASOR CORRENTE, POIS, SENDO

$$\dot{V} = V|\underline{\theta} \qquad \dot{I} = I|\underline{\delta}$$

- RESULTA: $\dot{V} \cdot I^* = V|\underline{\theta} \cdot I|\underline{-\delta} = V \cdot I|\underline{\theta - \delta} = VI\cos(\theta - \delta) + jVI\sin(\theta - \delta)$

$$\dot{V} \cdot I^* = VI\cos\varphi + jVI\sin\varphi = P + jQ = \bar{S}$$

- EVIDENTEMENTE, O ÂNGULO $\varphi = \theta - \delta$ SERÁ POSITIVO QUANDO A CARGA FOR INDUTIVA, E SERÁ NEGATIVO QUANDO A CARGA FOR CAPACITIVA.

- EX. 17

1.6.2 - EXPRESSÃO GERAL DA POT. EM SIST. TRIF.

- SEJA UMA CARGA TRIFÁSICA NA QUAL OS VALORES INSTANTÂNEOS DAS TENSÕES E CORRENTES SÃO

$$\begin{aligned}v_A &= V_{A_M} \cos(\omega t + \theta_A) & i_A &= I_{A_M} \cos(\omega t + \delta_A) \\v_B &= V_{B_M} \cos(\omega t + \theta_B) & i_B &= I_{B_M} \cos(\omega t + \delta_B) \\v_C &= V_{C_M} \cos(\omega t + \theta_C) & i_C &= I_{C_M} \cos(\omega t + \delta_C)\end{aligned}$$

- A POTÊNCIA INSTANTÂNEA EM CADA FASE É:

$$\begin{aligned}p_A &= v_A i_A = V_{F_A} I_{F_A} \cos(\theta_A - \delta_A) + V_{F_A} I_{F_A} \cos(2\omega t + \theta_A + \delta_A) \\p_B &= v_B i_B = V_{F_B} I_{F_B} \cos(\theta_B - \delta_B) + V_{F_B} I_{F_B} \cos(2\omega t + \theta_B + \delta_B) \\p_C &= v_C i_C = V_{F_C} I_{F_C} \cos(\theta_C - \delta_C) + V_{F_C} I_{F_C} \cos(2\omega t + \theta_C + \delta_C)\end{aligned}$$

- SENDO

$$V_{F_A}, V_{F_B} \text{ e } V_{F_C}$$

$$I_{F_A}, I_{F_B} \text{ e } I_{F_C}$$

OS VALORES EFICAZES DAS TENSÕES E CORRENTES DE FASE

1.6.2 - EXPRESSÃO GERAL DA POT. EM SIST. TRIF

- FAZENDO-SE

$$\theta_A - \delta_A = \varphi_A$$

$$\theta_B - \delta_B = \varphi_B$$

$$\theta_C - \delta_C = \varphi_C$$

$$\delta_A = \theta_A - \varphi_A$$

$$\delta_B = \theta_B - \varphi_B$$

$$\delta_C = \theta_C - \varphi_C$$

- SUBSTITUINDO O VALOR DE δ NAS EXPRESSÕES DAS POTÊNCIAS, RESULTA:

(2.0_A)

$$P_A = V_{F_A} I_{F_A} \cos \varphi_A + V_{F_A} I_{F_A} \cos (2 \omega t + \theta_A - \varphi_A)$$

$$P_B = V_{F_B} I_{F_B} \cos \varphi_B + V_{F_B} I_{F_B} \cos (2 \omega t + \theta_B - \varphi_B)$$

$$P_C = V_{F_C} I_{F_C} \cos \varphi_C + V_{F_C} I_{F_C} \cos (2 \omega t + \theta_C - \varphi_C)$$

1.6.2 - EXPRESSÃO GERAL DA POT. EM SIST. TRIF.

- A POTÊNCIA TOTAL TRIFÁSICA INSTANTÂNEA É DADA POR:

$$P = P_A + P_B + P_C$$

- SENDO:

$$(2.\theta_A)$$

$$P_A = V_{F_A} I_{F_A} \cos \varphi_A + V_{F_A} I_{F_A} \cos (2 \omega t + \theta_A - \varphi_A)$$

$$P_B = V_{F_B} I_{F_B} \cos \varphi_B + V_{F_B} I_{F_B} \cos (2 \omega t + \theta_B - \varphi_B)$$

$$P_C = V_{F_C} I_{F_C} \cos \varphi_C + V_{F_C} I_{F_C} \cos (2 \omega t + \theta_C - \varphi_C)$$

- PORTANTO, O VALOR MÉDIO DA POTÊNCIA TRIFÁSICA É:

$$P = P_A + P_B + P_C = V_{F_A} I_{F_A} \cos \varphi_A + V_{F_B} I_{F_B} \cos \varphi_B + V_{F_C} I_{F_C} \cos \varphi_C$$

- A POTÊNCIA TRIFÁSICA COMPLEXA É:

$$\bar{S} = \bar{S}_A + \bar{S}_B + \bar{S}_C = \dot{V}_{F_A} I_{F_A}^* + \dot{V}_{F_B} I_{F_B}^* + \dot{V}_{F_C} I_{F_C}^*$$

1.6.2 - EXPRESSÃO GERAL DA POT. EM SIST. TRIF.

- NO CASO DE TRIFÁSICO SIMÉTRICO, COM SEQUÊNCIA DIRETA:

$$V_{F_A} = V_{F_B} = V_{F_C} = V_F$$

$$\theta_B = \theta_A - 2\pi/3$$

$$\theta_C = \theta_A + 2\pi/3$$

- NO CASO DE CARGA EQUILIBRADA, TEM-SE:

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$$

$$I_{F_A} = I_{F_B} = I_{F_C} = I_F$$

- PORTANTO, AS POTÊNCIAS INSTANTÂNEAS SÃO:

$$p_A = V_F I_F \cos \varphi + V_F I_F \cos (2 \omega t + \theta_A - \varphi) \quad (2.\theta_A)$$

$$p_B = V_F I_F \cos \varphi + V_F I_F \cos (2 \omega t + \theta_A - 4\pi/3 - \varphi)$$

$$p_C = V_F I_F \cos \varphi + V_F I_F \cos (2 \omega t + \theta_A + 4\pi/3 - \varphi)$$

- LOGO A POTÊNCIA INSTANTÂNEA TOTAL É:

$$p = p_A + p_B + p_C = 3V_F I_F \cos \varphi = P$$

- OU SEJA, NOS TRIF. SIM. E EQUIL., A POT. TRIF. INSTANTÂNEA TOTAL COINCIDE COM A POT. MÉDIA TRIFÁSICA.

1.6.2 - EXPRESSÃO GERAL DA POT. EM SIST. TRIFÁSICO

- A POTÊNCIA COMPLEXA SERÁ DADA POR:

$$\bar{S} = \bar{S}_A + \bar{S}_B + \bar{S}_C$$

$$\bar{S} = \dot{V}_{F_A} I_{F_A}^* + \alpha^2 \dot{V}_{F_A} (\alpha^2 I_{F_A})^* + \alpha \dot{V}_{F_A} (\alpha I_{F_A})^*$$

- MAS,

$$\alpha^* = \alpha^2 \quad \text{e} \quad (\alpha^2)^* = \alpha$$

- PORTANTO,

$$\bar{S} = \dot{V}_{F_A} I_{F_A}^* + \dot{V}_{F_A} I_{F_A}^* + \dot{V}_{F_A} I_{F_A}^* = 3 \dot{V}_{F_A} I_{F_A}^*$$

- QUE FORNECE:

$$\bar{S} = 3 V_F \angle \theta_A \cdot I_F \angle -\delta_A = 3 V_F I_F \angle \theta_A - \delta_A = 3 V_F I_F \angle \varphi$$

- LOGO,

$$\bar{S} = 3 V_F I_F \cos \varphi + j 3 V_F I_F \sin \varphi$$

- DE ONDE CONCLUÍMOS QUE, PARA VALORES DE FASE A POTÊNCIA TRIFÁSICA É:

$$S = 3 V_F I_F$$

$$P = 3 V_F I_F \cos \varphi$$

$$Q = 3 V_F I_F \sin \varphi$$

1.6.2 - EXPRESSÃO GERAL DA POT. EM SIST. TRIF.

- EM VALORES DE LINHA
- CARGA LIGADA EM ESTRELA

$$V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$$

$$I_F = I_L$$

- PORTANTO,

$$\vec{S} = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \varphi + j 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \sin \varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi + j \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi$$

- O QUE FORNECE:

$$S = \sqrt{3} V_L I_L$$

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi$$

1.6.2 - EXPRESSÃO GERAL DA POT. EM SIST. TRIF.

- EM VALORES DE LINHA
- CARGA LIGADA EM TRIÂNGULO

$$V_F = V_L \quad , \quad I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

- PORTANTO,

$$\vec{S} = 3 V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \varphi + j 3 V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \varphi = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi + j \sqrt{3} V_L I_L \operatorname{sen} \varphi$$

- O QUE FORNECE:

$$S = \sqrt{3} V_L I_L$$

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3} V_L I_L \operatorname{sen} \varphi$$

- **CONCLUSÃO: A EXPRESSÃO GERAL DA POTÊNCIA COMPLEXA PARA TRIFÁSICO SIMÉTRICO COM CARGA EQUILIBRADA INDEPENDE DO TIPO DE LIGAÇÃO DA CARGA**

1.6.2 - EXPRESSÃO GERAL DA POT. EM SIST. TRIF.

- FATOR DE POTÊNCIA

- O FATOR DE POTÊNCIA É DADO PELA EXPRESSÃO

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

- NO CASO DE UMA CARGA TRIFÁSICA EQUILIBRADA (**CARGA LINEAR**) O FATOR DE POTÊNCIA É DADO POR:

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi}{\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L} = \cos\varphi = F_D$$

- F_D - FATOR DE DESLOCAMENTO
- PARA UMA **CARGA NÃO LINEAR**:

$$fp = \frac{P}{S} = F_D \cdot F_d$$

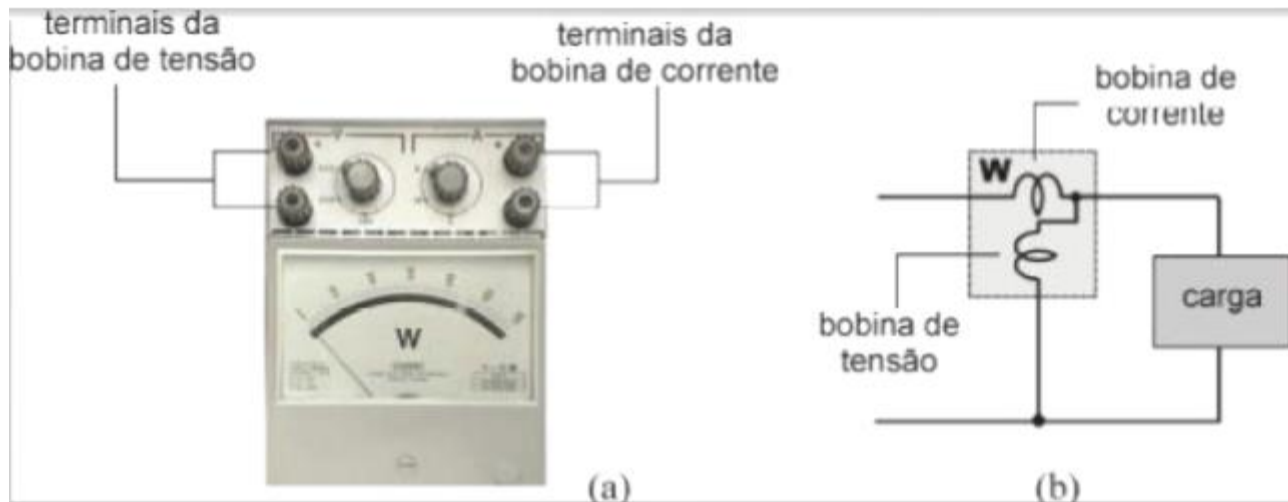
- F_d - FATOR DE DISTORÇÃO

EXEMPLOS 18 E 19

1.6.3 – MEDIDA DE POTÊNCIA EM SIST. TRIF.

- WATTÍMETRO

- COMPOSTO POR;
 - UMA BOBINA AMPERIMÉTRICA – POR ONDE CIRCULA A CORRENTE DE UMA DAS FASES
 - UMA BOBINA VOLTIMÉTRICA - ONDE SE APLICA A TENSÃO ENTRE DUAS FASES (TRIF. A 3 FIOS), OU ENTRE UMA FASE E O NEUTRO (TRIF. A 4 FIOS)
- CONSIDERA A INTERAÇÃO ENTRE OS CAMPOS MAGNÉTICOS DAS DUAS BOBINAS



- A POTÊNCIA LIDA NUM WATTÍMETRO É SEMPRE IGUAL AO VALOR MÉDIO DA POTÊNCIA INSTANTÂNEA POR ELE MEDIDA.

1.6.4 – MEDIDA DE POTÊNCIA EM SISTEMA TRIFÁSICO EM ESTRELA

- **TEOREMA DE BLONDEL - 1893**
- NUMA CARGA ALIMENTADA POR UM SISTEMA POLIFÁSICO DE m FASES E n FIOS, A POTÊNCIA TOTAL ABSORVIDA PELA CARGA É OBTIDA DA SOMA DAS LEITURAS EM $n-1$ WATTÍMETROS LIGADOS DE MODO QUE CADA UMA DAS BOBINAS AMPERIMÉTRICAS ESTEJA INSERIDA NUM DOS $n-1$ FIOS E AS BOBINAS VOLTIMÉTRICAS ESTEJAM LIGADAS TENDO UM TERMINAL EM COMUM COM A AMPERIMÉTRICA E O OUTRO TERMINAL DE TODAS ELAS SOBRE O n -ésimo FIO.

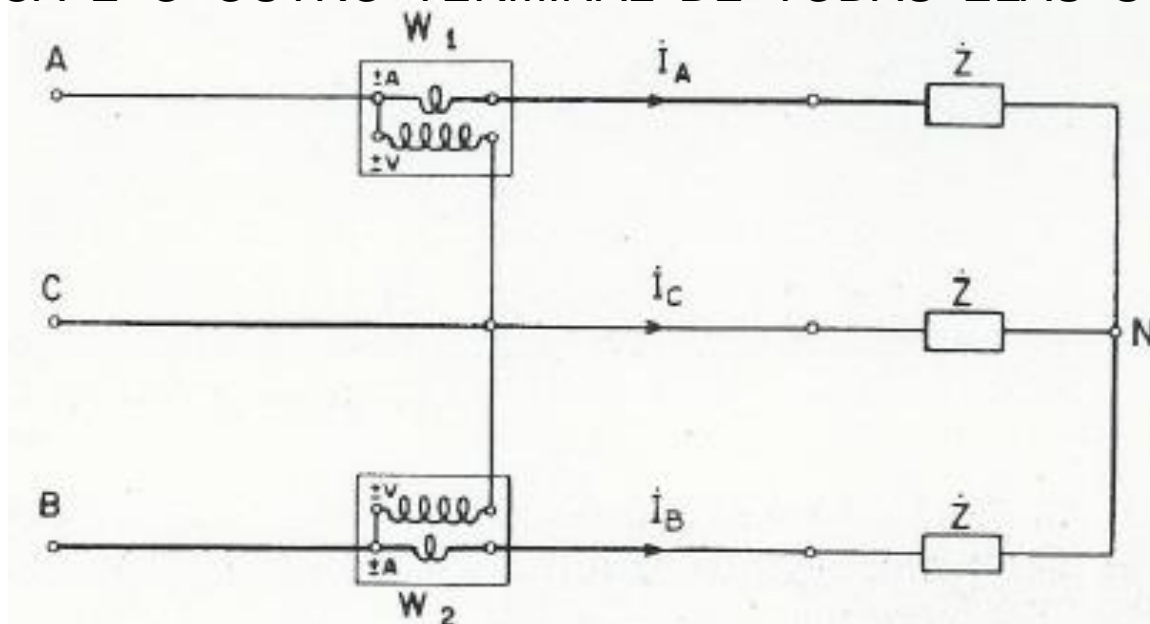


FIG. 32 - ESQUEMA DE LIGAÇÃO DOS WATTÍMETROS – CARGA EM ESTRELA

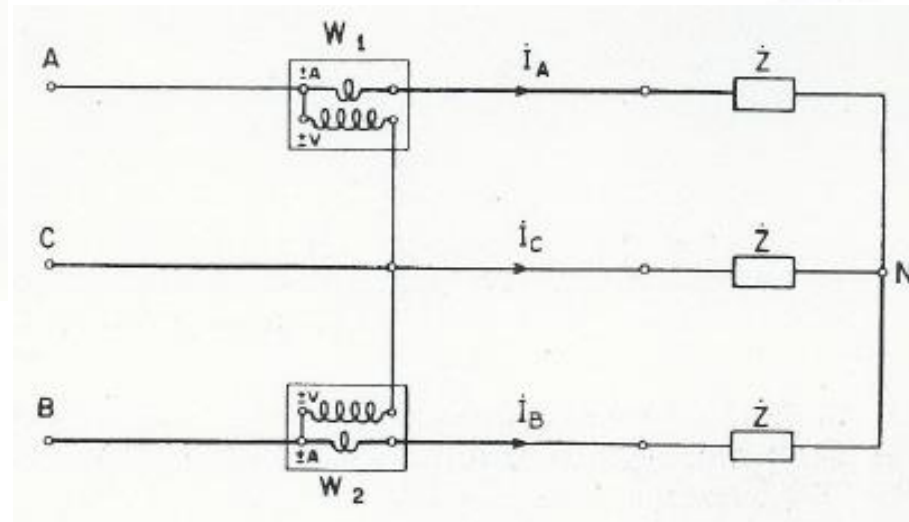
1.6.4 – MEDIDA DE POTÊNCIA EM SISTEMA TRIFÁSICO EM ESTRELA

- A POTÊNCIA LIDA NUM WATTÍMETRO É SEMPRE IGUAL AO VALOR MÉDIO DA POTÊNCIA INSTANTÂNEA POR ELE MEDIDA.
- SENDO T O PERÍODO DAS CORRENTES E TENSÕES, AS POTÊNCIAS LIDAS EM CADA UM DOS WATTÍMETROS VALEM:

$$W_1 = \frac{1}{T} \int_0^T p_1 dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_{AC} i_A dt$$
$$W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T p_2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_{BC} i_B dt$$

- MAS,

$$v_{AC} = v_{AN} + v_{NC} = v_{AN} - v_{CN}$$
$$v_{BC} = v_{BN} + v_{NC} = v_{BN} - v_{CN}$$



1.6.4 – MEDIDA DE POTÊNCIA EM SISTEMA TRIFÁSICO EM ESTRELA

$$v_{AC} = v_{AN} + v_{NC} = v_{AN} - v_{CN}$$

$$v_{BC} = v_{BN} + v_{NC} = v_{BN} - v_{CN}$$

- LOGO

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AC} i_A + v_{BC} i_B) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [v_{AN} i_A + v_{BN} i_B - v_{CN} (i_A + i_B)] dt$$

- APLICANDO-SE A LKC AO NÓ N, TEM-SE: $i_C = -(i_A + i_B)$

- LOGO,
$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_A + v_{BN} i_B + v_{CN} i_C) dt = P$$

- A potência Média Trifásica total coincide com a soma das leituras dos wattímetros, **quer se trate de carga equilibrada ou não**, pois mesmo no caso de carga desequilibrada a primeira lei de Kirchhoff se aplica. Observe que não foi imposta nenhuma condição de simetria.

- No caso de uma **carga em estrela com alimentação a 4 fios (neutro)**, a potência é fornecida pela soma da leitura em dois wattímetros **somente no caso de carga equilibrada**, quando a soma das correntes é nula.

- No caso de carga desequilibrada, devem ser utilizados três wattímetros.

1.6.5 – MEDIDA DE POTÊNCIA EM SISTEMA TRIFÁSICO EM TRIÂNGULO

- SEJA A FIGURA 33

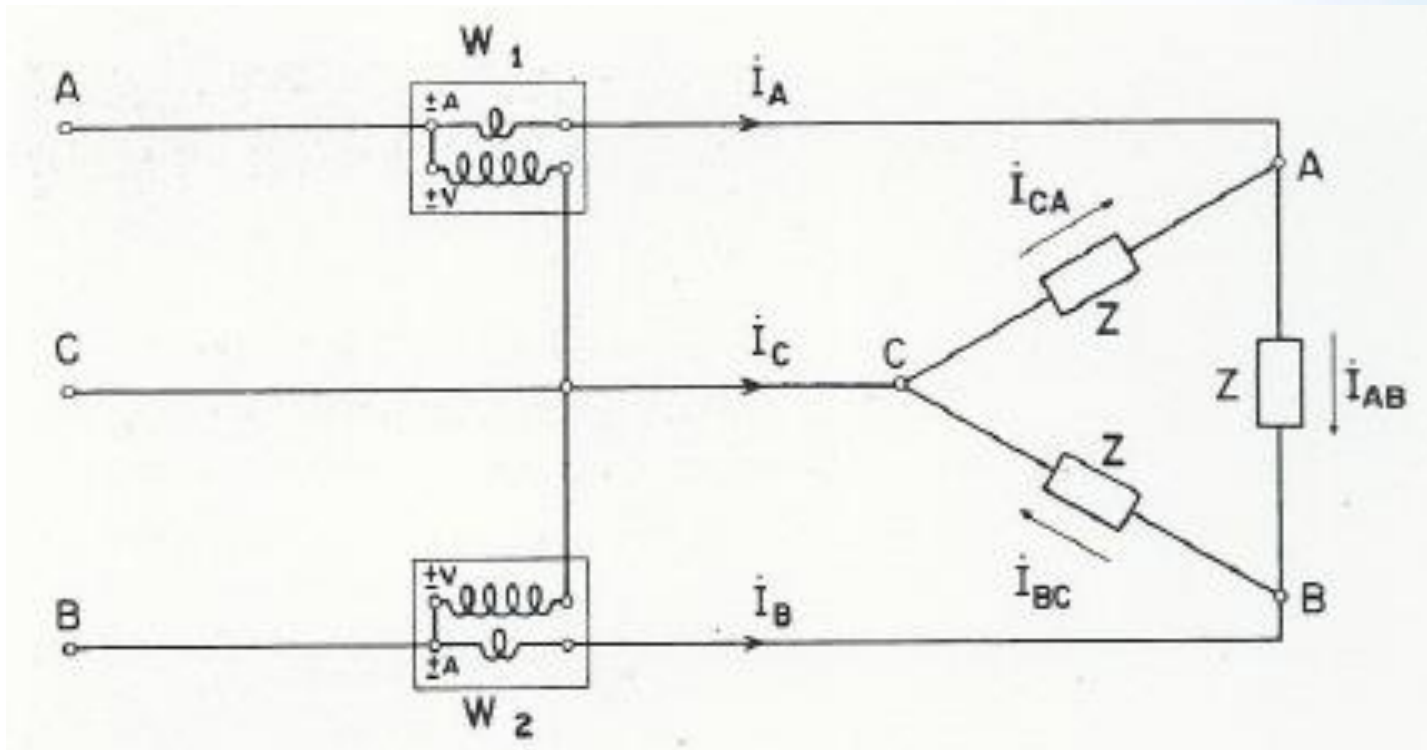


FIG. 33 - ESQUEMA DE LIGAÇÃO DOS WATTÍMETROS – CARGA EM TRIÂNGULO

1.6.5 – MEDIDA DE POTÊNCIA EM SISTEMA TRIFÁSICO EM TRIÂNGULO

- AS POTÊNCIAS LIDAS PELOS WATTÍMETROS VALEM:

$$W_1 = \frac{1}{T} \int_0^T p_1 dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_{AC} i_A dt$$

- SENDO

$$W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T p_2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_{BC} i_B dt$$

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AC} i_A + v_{BC} i_B) dt$$

- APLICANDO A LKC NOS NÓS A E B, TEM-SE:

$$i_A = i_{AB} - i_{CA}$$

$$i_B = i_{BC} - i_{AB}$$

- RESULTA

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T [-v_{CA} (i_{AB} - i_{CA}) + v_{BC} (i_{BC} - i_{AB})] dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T [v_{CA} i_{CA} + v_{BC} i_{BC} - i_{AB} (v_{CA} + v_{BC})] dt$$



1.6.5 – MEDIDA DE POTÊNCIA EM SISTEMA TRIFÁSICO EM TRIÂNGULO

- REPETINDO A EXPRESSÃO ANTERIOR:

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T [v_{CA} i_{CA} + v_{BC} i_{BC} - i_{AB}(v_{CA} + v_{BC})] dt$$

- MAS, SEJA A CARGA EQUILIBRADA OU NÃO, TEM-SE:

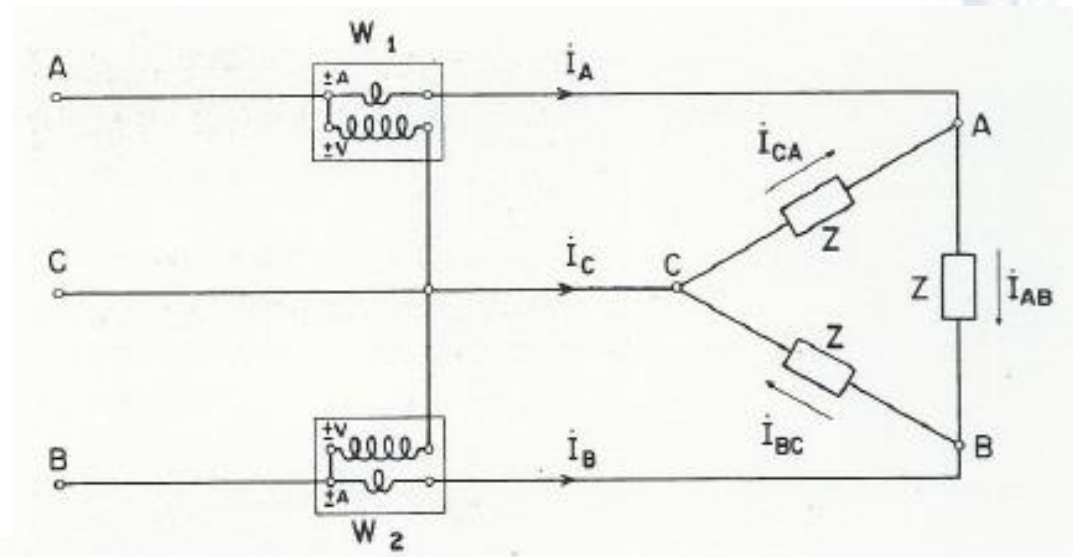
$$v_{AB} + v_{BC} + v_{CA} = v_{AA} = 0$$

- OU,

$$v_{AB} = -(v_{BC} + v_{CA})$$

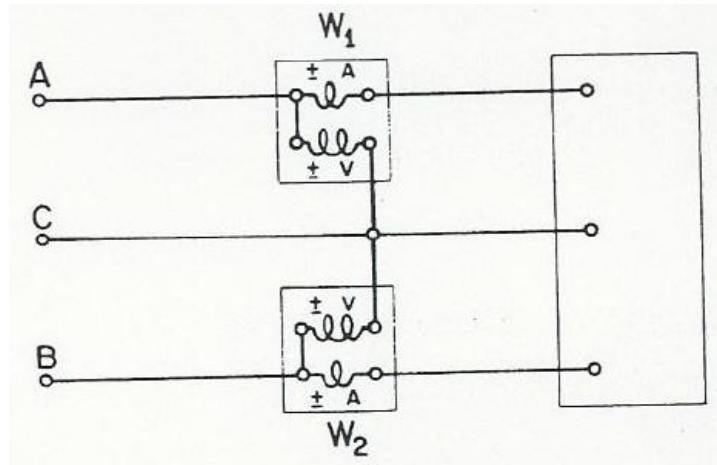
- LOGO,

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{CA} i_{CA} + v_{BC} i_{BC} + v_{AB} i_{AB}) dt = P$$



1.6.6 – LEITURA DOS WATTÍMETROS EM FUNÇÃO DO fp DA CARGA, DO MODO DE LIGAÇÃO E DA SEQUÊNCIA DE FASE

- SEJA UM SISTEMA TRIFÁSICO SIMÉTRICO E EQUILIBRADO, COM CARGA EQUILIBRADA:



- AS POTÊNCIAS LIDAS NOS WATTÍMETROS VALEM:

$$W_1 = \frac{1}{T} \int_0^T v_{AC} i_A dt = V_{AC} I_A \cos(\theta_{AC} - \delta_A) = \Re[\dot{V}_{AC} I_A^*]$$

$$W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T v_{BC} i_B dt = V_{BC} I_B \cos(\theta_{BC} - \delta_B) = \Re[\dot{V}_{BC} I_B^*]$$

1.6.6 – LEITURA DOS WATTÍMETROS EM FUNÇÃO DO φ DA CARGA, DO MODO DE LIGAÇÃO E DA SEQUÊNCIA DE FASE

- ADMITINDO-SE A SEQUÊNCIA DE FASE DIRETA, TEM-SE:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = V \underline{|\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- ONDE θ É O ÂNGULO DE FASE DA TENSÃO \dot{V}_{AB} .
- UMA VEZ QUE A CORRENTE DE FASE ESTÁ DEFASADA DE UM ÂNGULO φ DA TENSÃO DE FASE E ESTA ESTÁ ATRASADA DE 30° EM RELAÇÃO À TENSÃO DE LINHA CORRESPONDENTE, A DEFASAGEM ENTRE A TENSÃO \dot{V}_{AB} E A CORRENTE \dot{I}_A É $\varphi + 30^\circ$ (EX-1.18)

$$\theta - \delta_A = \varphi + 30^\circ$$

$$\delta_A = \theta - (\varphi + 30^\circ)$$

- LOGO:

$$\dot{I}_A = I_A \underline{|\delta_A} = I_A \underline{|\theta - (\varphi + 30^\circ)}$$

- CARGA INDUTIVA $\rightarrow \varphi > 0^\circ$

- CARGA CAPACITIVA $\rightarrow \varphi < 0^\circ$

1.6.6 – LEITURA DOS WATTÍMETROS EM FUNÇÃO DO φ DA CARGA, DO MODO DE LIGAÇÃO E DA SEQUÊNCIA DE FASE

- PORTANTO, AS CORRENTES DE LINHA SÃO DADAS POR:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = I \frac{\underline{\theta - (\varphi + 30^\circ)}}{\alpha^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- SENDO I O VALOR EFICAZ DA CORRENTE DE LINHA.
- LOGO AS LEITURAS DOS WATTÍMETROS CORRESPONDEM A:

$$\begin{aligned} W_1 &= \Re \left[\dot{V}_{AC} \dot{I}_A^* \right] = \Re \left[-\dot{V}_{CA} \dot{I}_A^* \right] = \Re \left[-\alpha V \underline{\theta} \cdot I \underline{-(\theta - (\varphi + 30^\circ))} \right] = \\ &= \Re \left[V \underline{\theta - 60^\circ} \cdot I \underline{-\theta + \varphi + 30^\circ} \right] = \Re \left[V I \underline{\varphi - 30^\circ} \right] = V I \cos(\varphi - 30^\circ) \end{aligned}$$

1.6.6 – LEITURA DOS WATTÍMETROS EM FUNÇÃO DO φ DA CARGA, DO MODO DE LIGAÇÃO E DA SEQUÊNCIA DE FASE

- SENDO $(\alpha^2)^* = \alpha$, TEM-SE:

$$\begin{aligned} W_2 &= \Re \left[\dot{V}_{BC} I_B^* \right] = \Re \left[\alpha^2 V \angle \theta \cdot \alpha I \angle -(\theta - (\varphi + 30^\circ)) \right] = \\ &= \Re \left[V \angle \theta - 120^\circ \cdot I \angle 120^\circ - \theta + \varphi + 30^\circ \right] = \Re \left[V I \angle \varphi + 30^\circ \right] = V I \cos(\varphi + 30^\circ) \end{aligned}$$

- ISTO É:

$$W_1 = V I \cos(\varphi - 30^\circ)$$

$$W_2 = V I \cos(\varphi + 30^\circ)$$

- COM PROCEDIMENTO ANÁLOGO PODE-SE DETERMINAR AS LEITURAS DOS WATTÍMETROS PARA QUALQUER MODO DE LIGAÇÃO E PARA QUALQUER SEQUÊNCIA DE FASE.
- CASO SE TENHA OS VALORES EFICAZES DA TENSÃO E DA CORRENTE PODE-SE CALCULAR O VALOR DE φ E, PORTANTO DO FATOR DE POTÊNCIA.

1.6.7 – CÁLCULO DO FATOR DE POTÊNCIA

- CONHECENDO-SE AS LEITURAS DOS WATTÍMETROS, O ESQUEMA DE LIGAÇÃO E A SEQUÊNCIA DE FASE, DESEJA-SE DETERMINAR O FATOR DE POTÊNCIA E A NATUREZA DA CARGA (ligação anterior)

- FOI VISTO QUE: $W_1 = V I \cos(\varphi - 30^\circ)$

$$W_2 = V I \cos(\varphi + 30^\circ)$$

- LOGO:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\cos(\varphi - 30^\circ)}{\cos(\varphi + 30^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi} = \frac{\sqrt{3} \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{3} \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi}$$

- DIVIDINDO-SE AMBOS OS MEMBROS POR $\cos \varphi$, TEM-SE:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \varphi}$$

1.6.7 – CÁLCULO DO FATOR DE POTÊNCIA

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\varphi}$$

- LOGO,

$$\operatorname{tg}\varphi \left(\frac{W_1}{W_2} + 1 \right) = \sqrt{3} \left(\frac{W_1}{W_2} - 1 \right)$$

- PORTANTO,

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \frac{W_1/W_2 - 1}{W_1/W_2 + 1} = \sqrt{3} \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}$$

- PODE-SE CONCLUIR QUE:

- $\operatorname{tg}\varphi > 0$ SE $W_1 > W_2 \rightarrow \varphi > 0$ - CARGA INDUTIVA

- $\operatorname{tg}\varphi < 0$ SE $W_1 < W_2 \rightarrow \varphi < 0$ - CARGA CAPACITIVA

- OBS – ISTO É VALIDO PARA AS CONDIÇÕES IMPOSTAS

- TRIFÁSICO SIMÉTRICO - CARGA EQUILIBRADA

- CONHECENDO-SE A NATUREZA DA CARGA PODE-SE CALCULAR O fp.

- FAZENDO-SE $W_1/W_2 = a$, PODE-SE DEDUZIR QUE:

$$\cos \varphi = \frac{1 + a}{2\sqrt{a^2 - a + 1}}$$

1.6.8 – MEDIDA DA POTÊNCIA REATIVA UTILIZANDO-SE WATTÍMETROS EM TRIF. SIMÉTRICOS E EQUILIBRADOS

- NESTE CASO PODE-SE UTILIZAR UM WATTÍMETRO PARA A DETERMINAÇÃO DA POT. REATIVA FORNECIDA À CARGA.

- CONFORME JÁ VISTO

$$Q = \sqrt{3} V I \operatorname{sen} \varphi$$

- OU, AINDA,

$$Q = \sqrt{3} V I \cos(\varphi - 90^\circ)$$

- PRECISAMOS DETERMINAR UM ESQUEMA DE LIGAÇÃO DO WATTÍMETRO DE FORMA QUE SUA LEITURA SEJA

$$W = \frac{Q}{\sqrt{3}} = V I \cos(\varphi - 90^\circ)$$

- PODEMOS DETERMINAR TAL ESQUEMA OBSERVANDO AS ROTAÇÕES DE FASE QUE EXISTEM ENTRE AS TENSÕES MEDIDAS ENTRE DOIS FIOS DA LINHA E A CORRENTE DO TERCEIRO FIO.

1.6.8 – MEDIDA DA POTÊNCIA REATIVA UTILIZANDO-SE WATTÍMETROS EM TRIF. SIMÉTRICOS E EQUILIBRADOS

- SENDO A SEQUÊNCIA DIRETA, TEM-SE:

$$\mathbf{V}_{AB} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = V \underline{\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_A = \begin{bmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = I \underline{\theta - (\varphi + 30^\circ)} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- NOTAMOS QUE A FASE DA TENSÃO \dot{V}_{BC} É $\theta - 120^\circ$ E DA CORRENTE \dot{I}_A É $\theta - (\varphi + 30^\circ)$
- LOGO, ENTRE \dot{V}_{BC} E \dot{I}_A HÁ UMA ROTAÇÃO DE FASE QUE VALE

$$(\theta - 120^\circ) - [\theta - (\varphi + 30^\circ)] = \varphi - 90^\circ$$

1.6.8 – MEDIDA DA POTÊNCIA REATIVA UTILIZANDO-SE WATTÍMETROS EM TRIF. SIMÉTRICOS E EQUILBRADOS

- DETERMINAÇÃO DA NATUREZA DA CARGA (INDUTIVA OU CAPACITIVA)
- SE A CARGA FOR INDUTIVA, TEREMOS $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ E, PORTANTO, $\cos(\varphi-90^\circ) > 0 \rightarrow$ A LEITURA DO WATTÍMETRO SERÁ POSITIVA
- SE A CARGA FOR CAPACITIVA, TEREMOS $-90^\circ \leq \varphi < 0^\circ$ E, PORTANTO, $\cos(\varphi-90^\circ) < 0 \rightarrow$ A LEITURA DO WATTÍMETRO ENTÃO SERÁ NEGATIVA
- PORÉM SE TOMARMOS A ROTAÇÃO DE FASE ENTRE $\dot{V}_{CB} = -\dot{V}_{BC}$ E A CORRENTE \dot{I}_A , TEM – SE:

$$(\theta + 60^\circ) - [\theta - (\varphi + 30^\circ)] = \varphi + 90^\circ$$

- LOGO, $\cos(\varphi + 90^\circ) > 0$

1.6.8 – MEDIDA DA POTÊNCIA REATIVA UTILIZANDO-SE WATTÍMETROS EM TRIF. SIMÉTRICOS E EQUILBRADOS

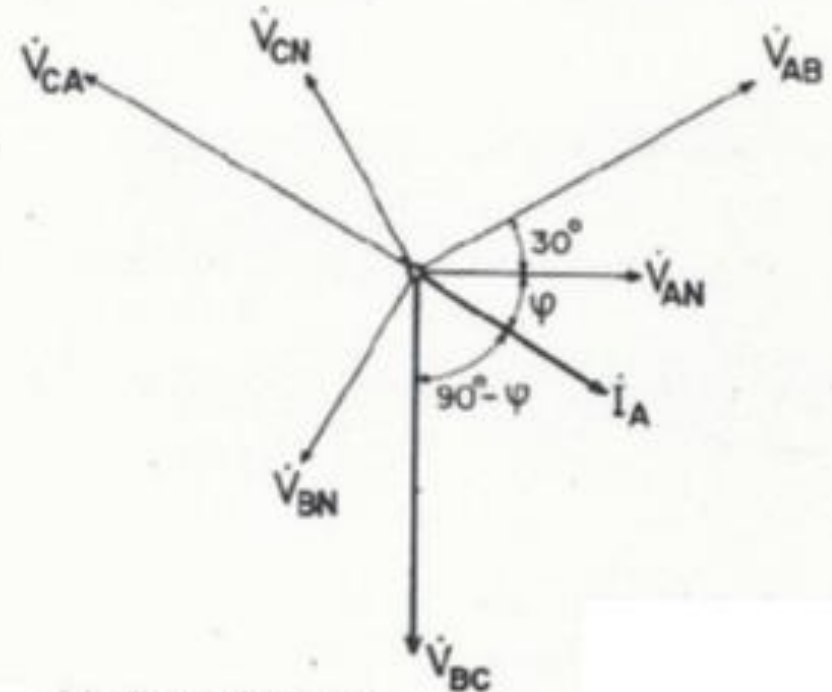
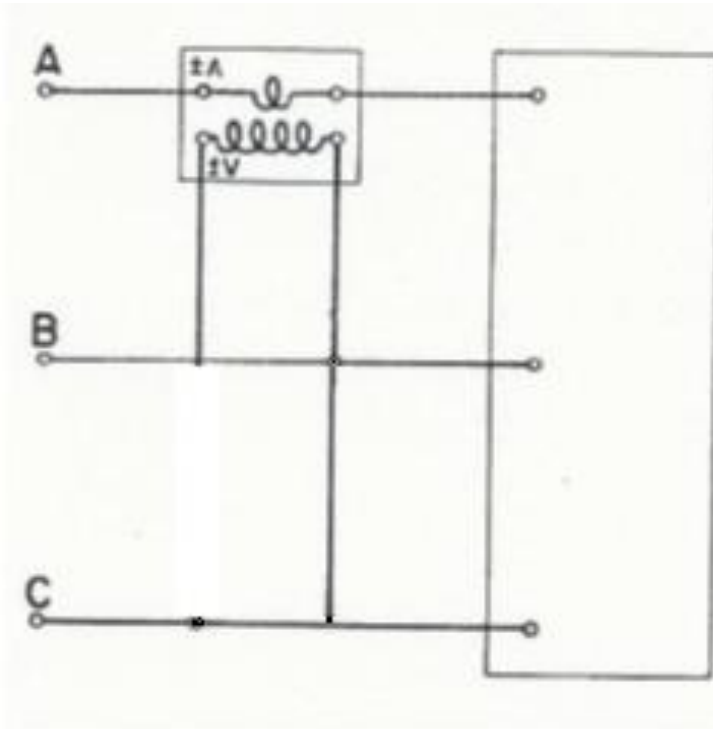
- **CONCLUSÃO:** LIGANDO-SE UM WATTÍMETRO COM A BOBINA AMPERIMÉTRICA INSERIDA NA LINHA **A** E A VOLTIMÉTRICA ENTRE AS FASES **B** E **C**, SUA LEITURA SERÁ

$$W = V I \cos (\text{ângulo entre } \dot{V}_{BC} \text{ e } \dot{I}_A)$$

- A LEITURA SERÁ POSITIVA NO CASO DE CARGA INDUTIVA
- A LEITURA SERÁ NEGATIVA NO CASO DE CARGA CAPACITIVA
 - NESTE CASO, INVERTENDO-SE A LIGAÇÃO DA BOBINA VOLTIMÉTRICA, A LEITURA PASSARÁ A SER POSITIVA.
- A POTÊNCIA REATIVA FORNECIDA À CARGA SERÁ O PRODUTO DO VALOR LIDO POR $\sqrt{3}$.

1.6.8 – MEDIDA DA POTÊNCIA REATIVA UTILIZANDO-SE WATTÍMETROS EM TRIF. SIMÉTRICOS E EQUILIBRADOS

- ESQUEMA DE LIGAÇÃO DO WATTÍMETRO PARA CARGA INDUTIVA



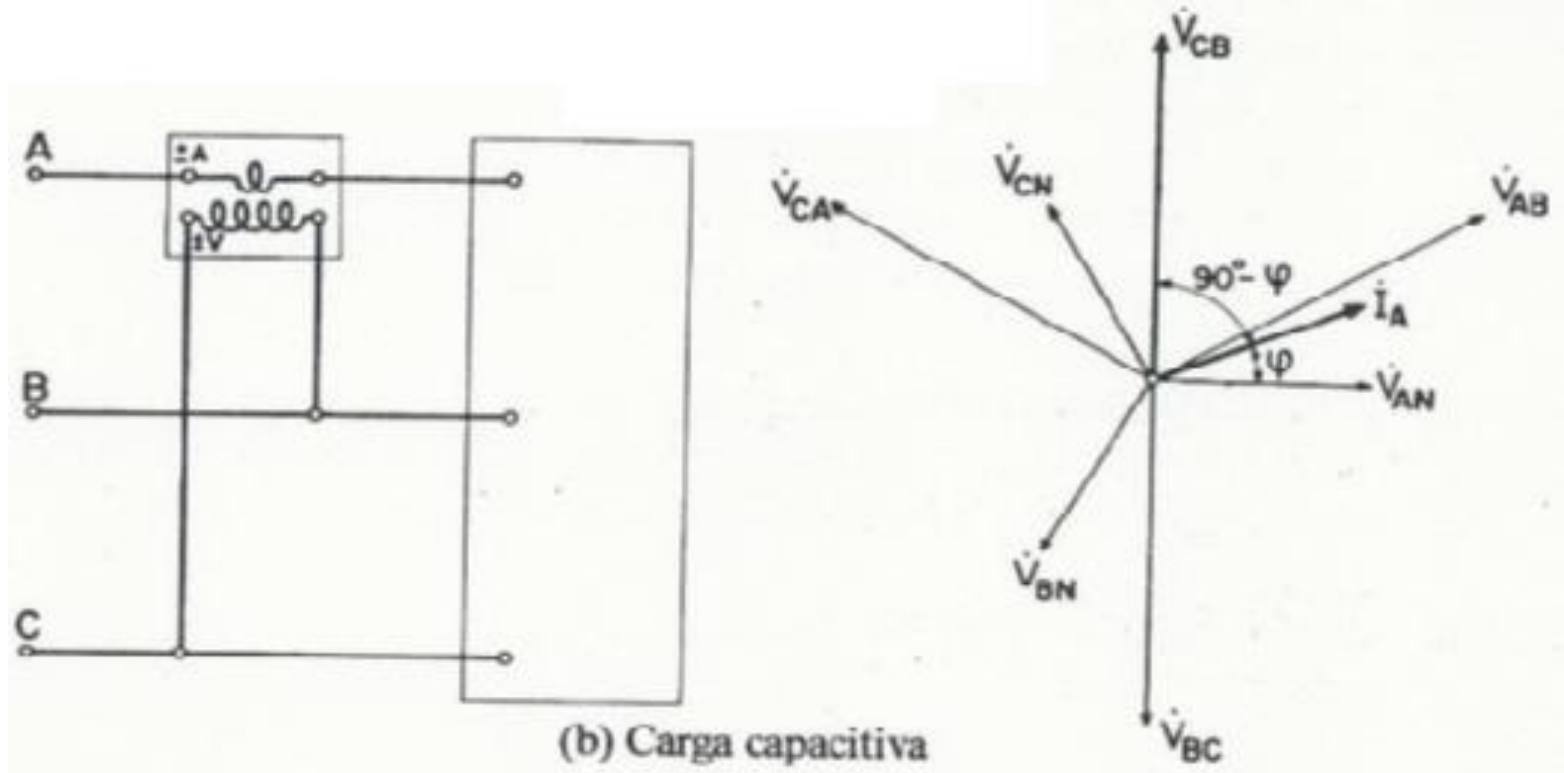
(a) Carga indutiva

$$Q = \sqrt{3} V I \cos(\varphi - 90^\circ)$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos(\varphi - 90^\circ)$$

1.6.8 – MEDIDA DA POTÊNCIA REATIVA UTILIZANDO-SE WATTÍMETROS EM TRIF. SIMÉTRICOS E EQUILIBRADOS

- ESQUEMA DE LIGAÇÃO DO WATTÍMETRO PARA CARGA CAPACITIVA



$$Q = \sqrt{3} V I \cos(\varphi - 90^\circ)$$

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos(\varphi - 90^\circ)$$

1.6.9 – MEDIDA DA POTÊNCIA REATIVA EM TRIFÁSICOS QUAISQUER

- O TEOREMA DE BLONDEL PODE SER ESTENDIDO À MEDIDA DE REATIVOS.
- SEJA UM TRIFÁSICO A TRÊS FIOS COM A CARGA LIGADA EM ESTRELA (OU EM TRIÂNGULO).
- A POTÊNCIA COMPLEXA FORNECIDA À CARGA É DADA POR:

$$\bar{S} = \bar{V}_{AN} I_A^* + \bar{V}_{BN} I_B^* + \bar{V}_{CN} I_C^*$$

- MAS,

$$I_A + I_B + I_C = 0$$

- LOGO,

$$I_C = -(I_A + I_B)$$

- PORTANTO,

$$\bar{S} = (\bar{V}_{AN} - \bar{V}_{CN}) I_A^* + (\bar{V}_{BN} - \bar{V}_{CN}) I_B^*$$

1.6.9 – MEDIDA DA POTÊNCIA REATIVA EM TRIFÁSICOS QUAISQUER

- VIMOS QUE:

$$\bar{S} = (\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{CN}) I_A^* + (\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN}) I_B^*$$

- NO ENTANTO,

$$\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{CN} = \dot{V}_{AC}$$

$$\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN} = \dot{V}_{BC}$$

- LOGO,

$$\bar{S} = \dot{V}_{AC} I_A^* + \dot{V}_{BC} I_B^*$$

- OU SEJA,

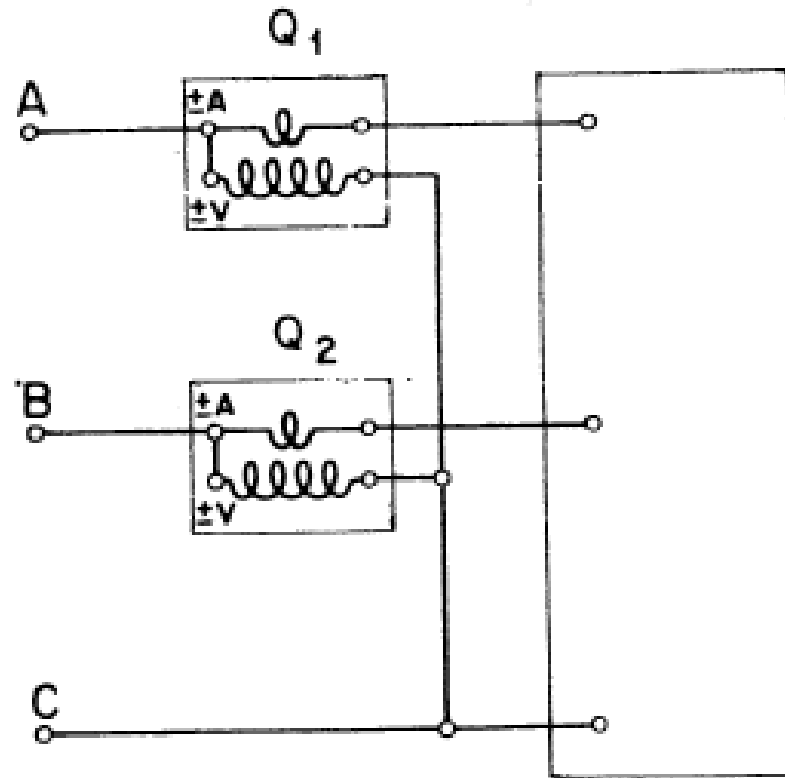
$$P = \Re e[\bar{S}] = \Re e[\dot{V}_{AC} I_A^* + \dot{V}_{BC} I_B^*]$$

$$Q = \Im m[\bar{S}] = \Im m[\dot{V}_{AC} I_A^* + \dot{V}_{BC} I_B^*]$$

- O MEDIDOR IRÁ REGISTRAR A POTÊNCIA ATIVA (WATTÍMETRO) OU A REATIVA (VARMETRO) DEPENDENDO DE SUA ESTRUTURA INTERNA.

1.6.9 – MEDIDA DA POTÊNCIA REATIVA EM TRIFÁSICOS QUAISQUER

- DETERMINA-SE A POTÊNCIA REATIVA FORNECIDA À CARGA PELA SOMA ALGÉBRICA DAS LEITURAS EM DOIS VARMETROS, CONECTADOS DE ACORDO COM A FIGURA A SEGUIR.



1.7 – MODELOS PARA REPRESENTAÇÃO DA CARGA



- A POTÊNCIA ABSORVIDA POR UMA CARGA DEPENDE DE SUA NATUREZA E PODE VARIAR EM FUNÇÃO DA TENSÃO A ELA APLICADA. EM GERAL TEM-SE:

$$P_F = f_1 (V_F)$$

$$Q_F = f_2 (V_F)$$

- SENDO:

P_F : potência ativa absorvida pela carga, por fase;

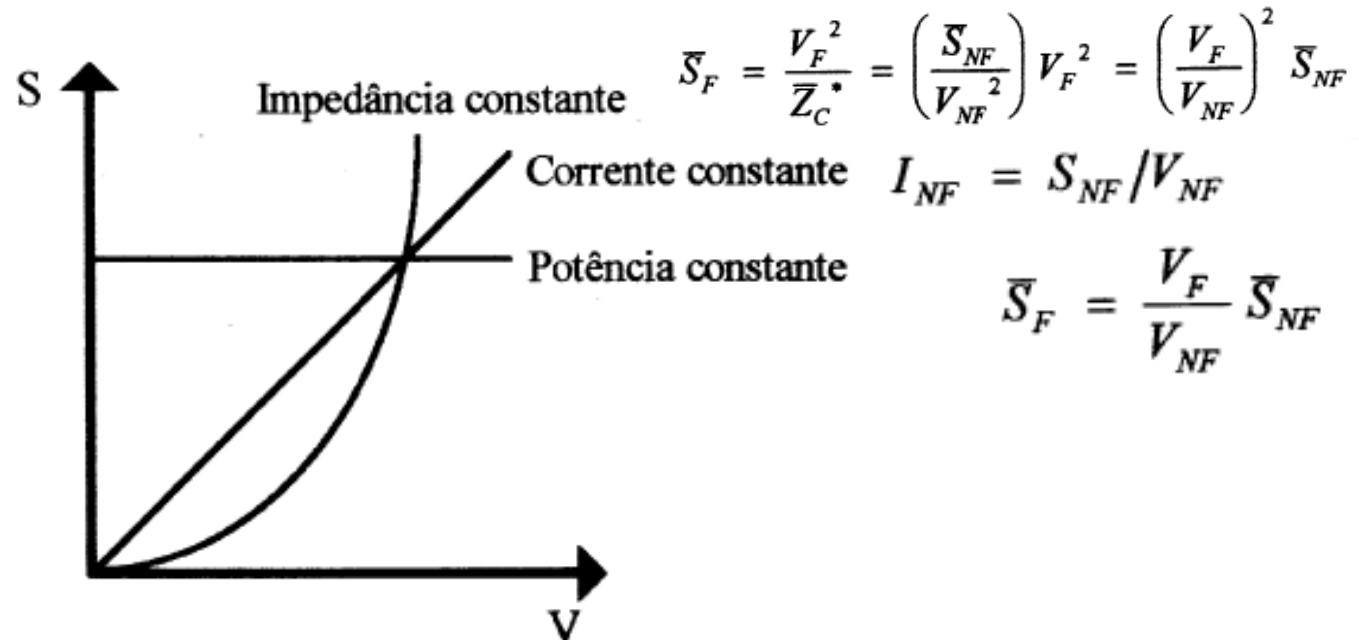
Q_F : potência reativa absorvida pela carga, por fase;

V_F : tensão de fase aplicada à carga;

$f_1 (V_F), f_2 (V_F)$: funções que relacionam as potências ativa e reativa ao módulo da tensão aplicada.

1.7 – MODELOS PARA REPRESENTAÇÃO DA CARGA

- AS CARGAS PODEM SER REPRESENTADAS (MODELADAS) POR:
 - CORRENTE CONSTANTE COM A TENSÃO;
 - POTÊNCIA CONSTANTE COM A TENSÃO;
 - IMPEDÂNCIA CONSTANTE COM A TENSÃO;
 - COMPOSIÇÃO DOS MODELOS ANTERIORES.
- A FIGURA A SEGUIR ILUSTA O COMPORTAMENTO DAS VÁRIAS MODELAGENS.



1.7.1 – CARGA DE CORRENTE CONSTANTE COM A TENSÃO

- SEJA

$$\bar{S}_{NF} = S_{NF} \underline{\varphi} = P_{NF} + jQ_{NF}$$

A POTÊNCIA NOMINAL ABSORVIDA NA FASE COM A TENSÃO NOMINAL

$$\dot{V}_{NF} = V_{NF} \underline{\theta}$$

- LOGO RESULTA A CORRENTE NA FASE

$$I_{NF} = \frac{\bar{S}_{NF}^*}{\dot{V}_{NF}^*} = \frac{S_{NF} \underline{-\varphi}}{V_{NF} \underline{-\theta}} = \frac{S_{NF}}{V_{NF}} \underline{\theta - \varphi} = I_{NF} \underline{\theta - \varphi}$$

EM QUE O MÓDULO DA CORRENTE ABSORVIDA

$$I_{NF} = S_{NF} / V_{NF}$$

E O FATOR DE POTÊNCIA (OU φ) PERMANECEM CONSTANTES.

1.7.1 – CARGA DE CORRENTE CONSTANTE COM A TENSÃO

- PARA UM VALOR QUALQUER DE TENSÃO NA FASE

$$\dot{V}_F = V_F \underline{|\theta_1}$$

APLICADA À CARGA, A CORRENTE NA FASE SERÁ:

$$\dot{I}_F = I_{NF} \underline{|\theta_1 - \varphi}$$

E A POTÊNCIA ABSORVIDA NA FASE SERÁ DADA POR:

$$\bar{S}_F = \dot{V}_F \dot{I}_F^* = V_F \underline{|\theta_1} \left(I_{NF} \underline{|\theta_1 - \varphi} \right)^* = V_F I_{NF} \underline{|\varphi} = V_F I_{NF} \cos \varphi + j V_F I_{NF} \operatorname{sen} \varphi$$

OU SEJA, A POTÊNCIA ABSORVIDA VARIA LINEARMENTE COM A TENSÃO A ELA APLICADA:

$$\bar{S}_F = \frac{V_F}{V_{NF}} \bar{S}_{NF}$$

1.7.2 – CARGA DE POTÊNCIA CONSTANTE COM A TENSÃO

- PARA ESTE MODELO, AS POTÊNCIAS ATIVA E REATIVA PERMANECEM CONSTANTES E IGUAIS A SEUS VALORES NOMINAIS, OU SEJA:

$$\bar{S}_{NF} = S_{NF} \underline{\varphi} = P_{NF} + jQ_{NF}$$

- NESTE CASO, A CORRENTE ABSORVIDA PELA CARGA, QUANDO ALIMENTADA COM UMA TENSÃO QUALQUER

$$\dot{V}_F = V_F \underline{\theta}_1$$

É OBTIDA POR:

$$I_F = \frac{\bar{S}_{NF}^*}{\dot{V}_F^*} = \frac{S_{NF} \underline{-\varphi}}{V_F \underline{-\theta}_1} = \frac{S_{NF}}{V_F} \underline{\theta}_1 - \varphi$$

- OU SEJA, A CORRENTE ABSORVIDA É INVERSAMENTE PROPORCIONAL À TENSÃO APLICADA.

1.7.3 – CARGA DE IMPEDÂNCIA CONSTANTE COM A TENSÃO

- NESTE MODELO, A IMPEDÂNCIA DA CARGA MANTÉM-SE CONSTANTE E É OBTIDA A PARTIR DAS POTÊNCIAS ATIVA E REATIVA ABSORVIDAS PELA CARGA QUANDO ALIMENTADA COM TENSÃO NOMINAL. LOGO,

$$\bar{S}_{NF} = S_{NF} \underline{\varphi} = P_{NF} + jQ_{NF}$$

É A POTÊNCIA ABSORVIDA COM A TENSÃO NOMINAL

$$\dot{V}_{NF} = V_{NF} \underline{\theta}$$

O QUE RESULTA A IMPEDÂNCIA

$$Z_C = \frac{V_{NF}^2}{\bar{S}_{NF}^*} = \frac{V_{NF}^2}{S_{NF}} \underline{\varphi} = R + jX$$

1.7.2 – CARGA DE IMPEDÂNCIA CONSTANTE COM A TENSÃO

- VIMOS QUE A IMPEDÂNCIA É DADA POR

$$Z_C = \frac{V_{NF}^2}{\bar{S}_{NF}^*} = \frac{V_{NF}^2}{S_{NF}} \underline{|\varphi} = R + jX$$

OU SEJA,

$$R = \frac{V_{NF}^2}{S_{NF}} \cos \varphi \quad X = \frac{V_{NF}^2}{S_{NF}} \operatorname{sen} \varphi$$

- PARA QUALQUER VALOR DE TENSÃO

$$\dot{V}_F = V_F \underline{|\theta_1}$$

APLICADA À CARGA, A POTÊNCIA ABSORVIDA SERÁ:

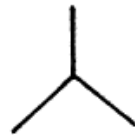
$$\bar{S}_F = \frac{V_F^2}{\bar{Z}_C^*} = \left(\frac{S_{NF}}{V_{NF}^2} \right) V_F^2$$

- OU SEJA, A POTÊNCIA ABSORVIDA PELA CARGA VARIA QUADRATICAMENTE COM A TENSÃO A ELA APLICADA.

1.8 – REPRESENTAÇÃO DE REDES TRIFÁSICAS POR DIAGRAMA UNIFILAR

- NO DIAGRAMA UNIFILAR UTILIZA-SE UM ÚNICO FIO PARA A REPRESENTAÇÃO DA REDE TRIFÁSICA.

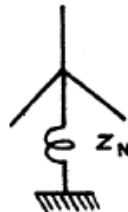
Tabela 1-2. Símbolos utilizados em diagramas unifilares



Elemento ligado em estrela com centro-estrela isolado



Elemento ligado em estrela com centro-estrela solidamente aterrado

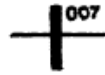


Elemento ligado em estrela com centro-estrela aterrado por impedância Z_N

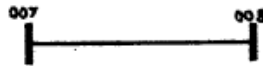


Elemento ligado em triângulo

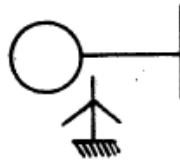
1.8 – REPRESENTAÇÃO DE REDES TRIFÁSICAS POR DIAGRAMA UNIFILAR



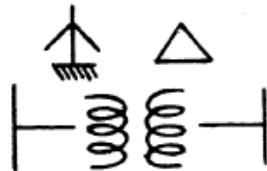
Barramento número 007



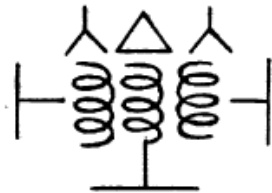
Linha entre barramentos 007 e 008



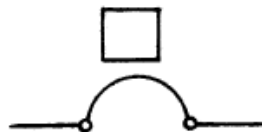
Gerador



Transformador de dois enrolamentos



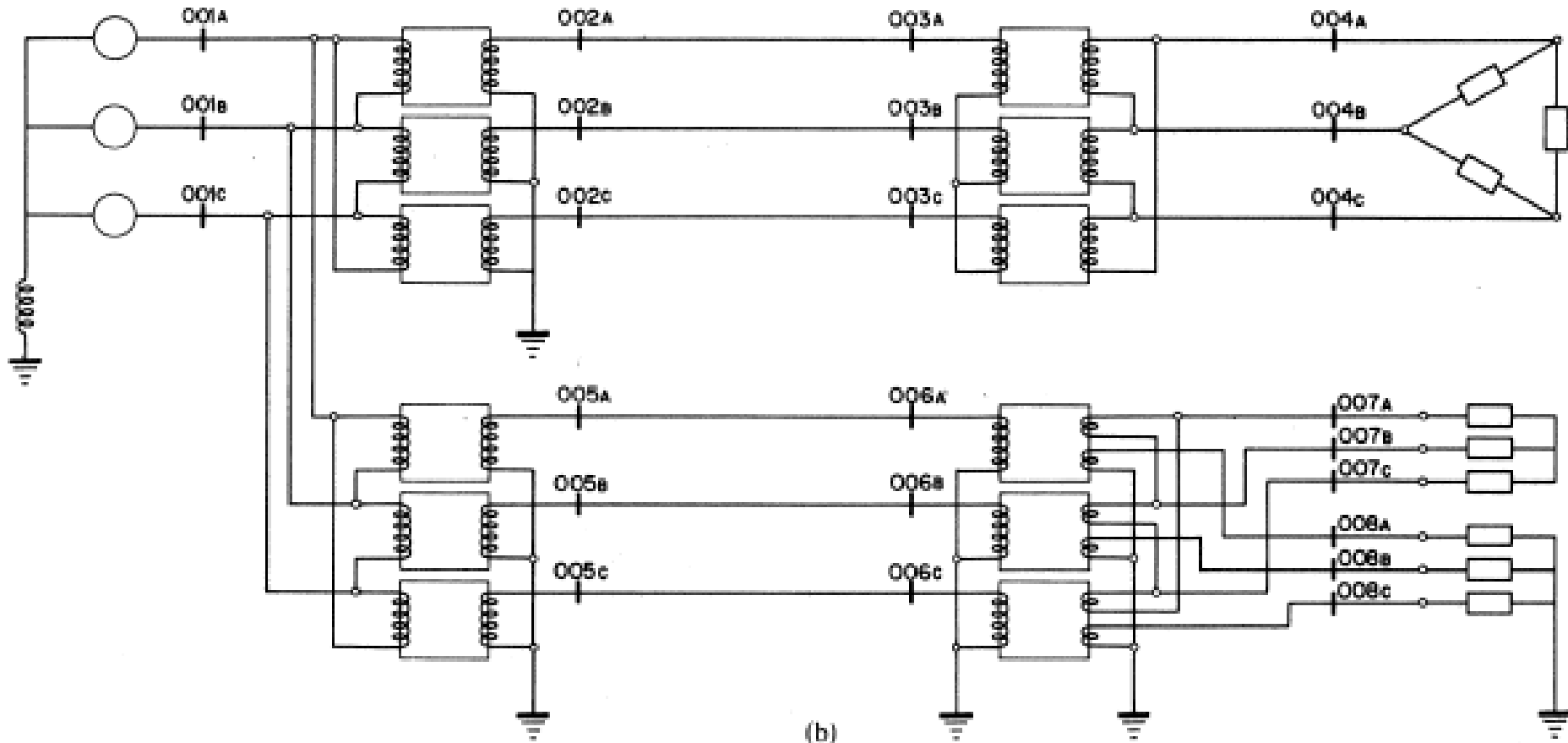
Transformador de três enrolamentos



Disjuntor

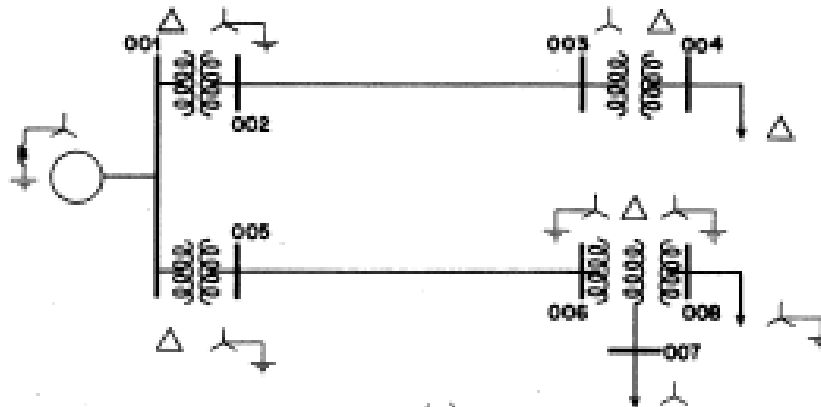


EXEMPLO DE DIAGRAMA TRIFILAR



(b)

DIAGRAMA UNIFILAR CORRESPONDENTE



(a)