

Processamento Digital de Sinais

Notas de Aula

Amostragem e Reconstrução de Sinais

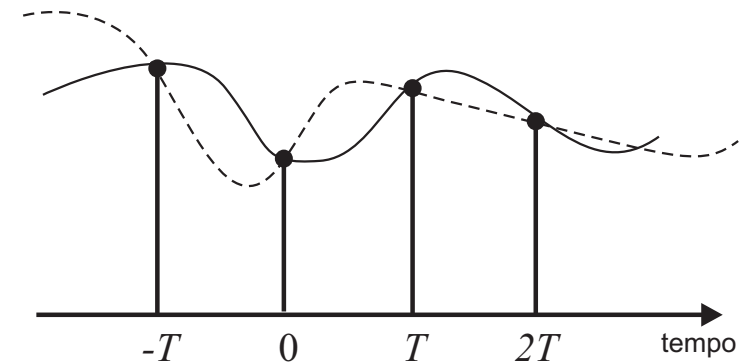
Ricardo Tokio Higuti

Departamento de Engenharia Elétrica - FEIS - Unesp

Observação: Estas notas de aula estão baseadas no livro: "Discrete-Time Signal Processing", A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, Prentice Hall, 1989/1999.

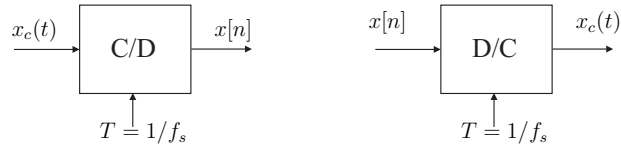
Amostragem de Sinais

- Sinais de tempo discreto: podem ser obtidos a partir de sinais de tempo contínuo $\rightarrow$ amostragem
- Amostras de um sinal: representação única??? A partir do sinal amostrado, pode-se recuperar o sinal de tempo contínuo? [Teorema de Nyquist]
- Aplicação: processamento discreto (digital) de sinais de tempo contínuo



Amostragem Periódica

Conversores Contínuo/Discreto (C/D) e Discreto/Contínuo (D/C):



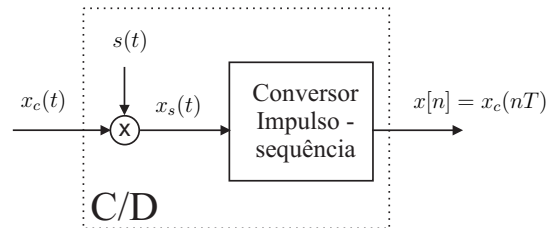
- Sinal de tempo contínuo: $x_c(t)$
- Sinal de tempo discreto: $x[n] = x_c(nT)$, $-\infty < n < \infty$
- Período de amostragem: T [s]
- Frequência de amostragem: $f_s = 1/T$ [Hz ou amostras/s]
- Frequência de amostragem: $\Omega_s = 2\pi f_s$ [rad/s]

Operações com a função Impulso de Tempo Contínuo

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
- $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$, $x(t)$ contínuo em $t = 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0)$, $x(t)$ contínuo em $t = 0$
- $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$, $x(t)$ contínuo em $t = t_0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0)$, $x(t)$ contínuo em $t = t_0$
- $x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = x(t)$
- $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

Representação Matemática da Amostragem

Amostragem periódica por impulsos - conversor Contínuo-Discreto (C/D)

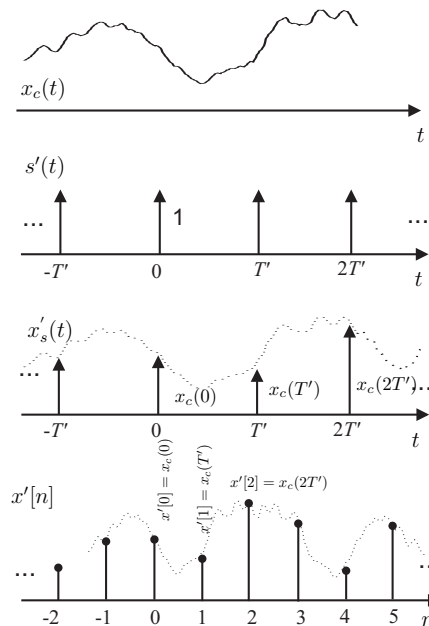
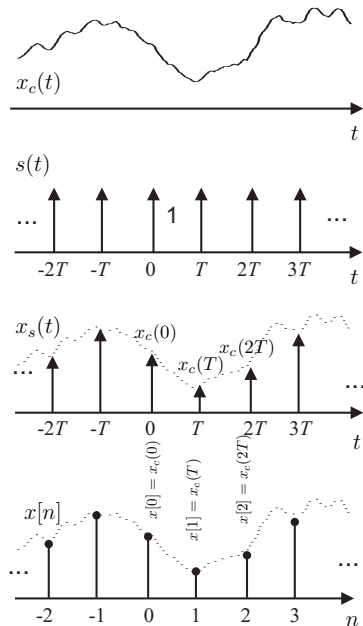


Trem de impulsos periódico: $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$

Sinal amostrado de tempo contínuo:

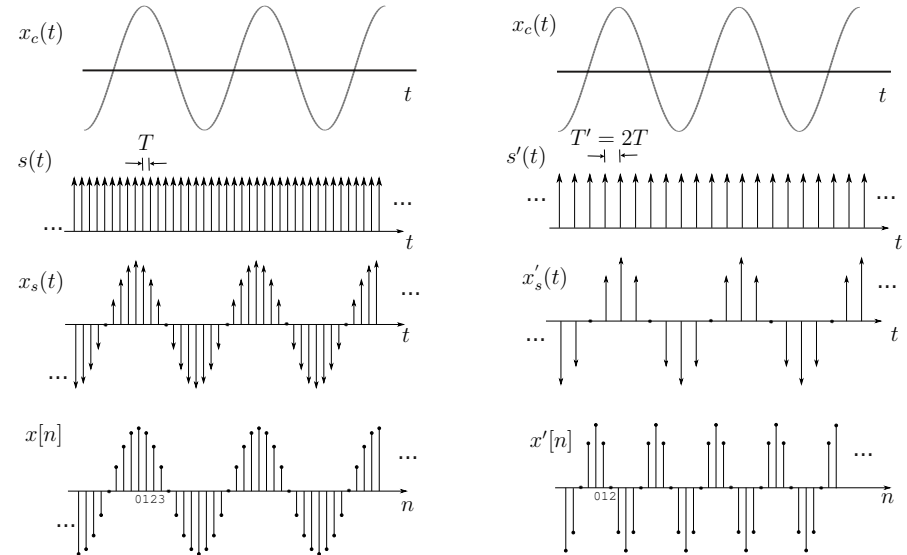
$$x_s(t) = x_c(t) \cdot s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$= \sum_n x_c(nT) \delta(t - nT)$$



Amostragem de sinal senoidal

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$$



- O sinal de tempo contínuo é o mesmo para os dois casos;
- $T' = 2T$, portanto no lado esquerdo a frequência de amostragem é maior;
- A frequência do sinal de tempo discreto $x[n]$ é menor que a frequência de $x'[n]$

Representação em Frequência

Multiplicação no tempo $\Rightarrow$ Convolução no domínio da frequência

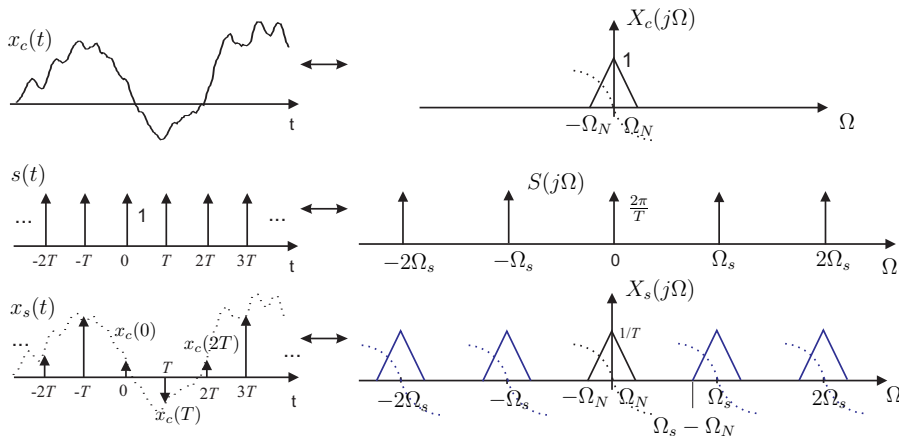
- Trem de impulsos periódico:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

- Sinal amostrado:

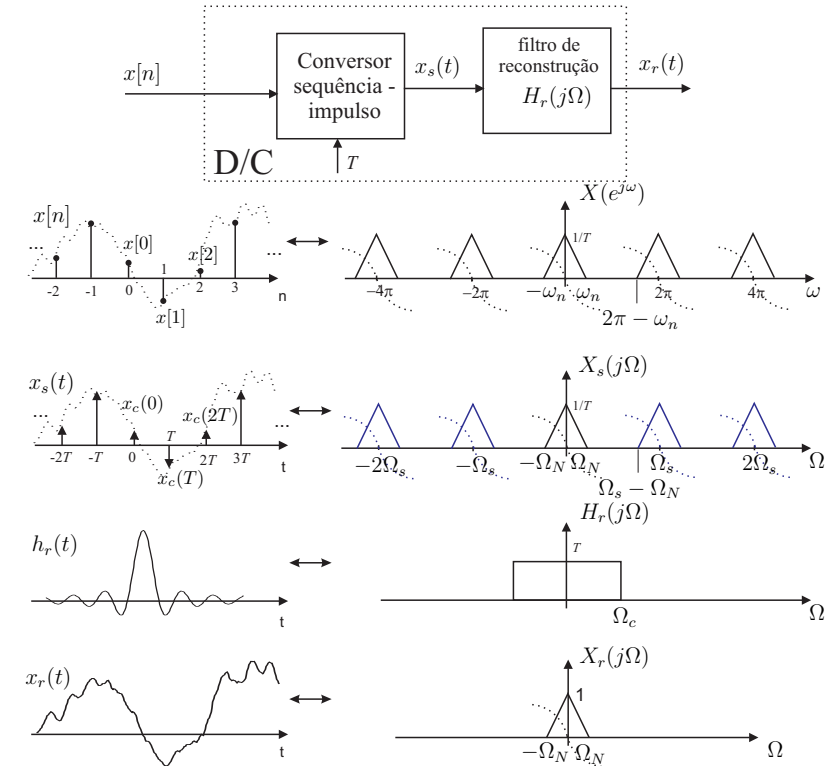
$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t) \cdot s(t) \\ &\Downarrow \\ X_s(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_k X_c(j\Omega - jk\Omega_s) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ O espectro do sinal amostrado, $X_s(j\Omega)$, é composto por cópias do espectro do sinal, $X_c(j\Omega)$, repetidas a cada Ω_s rad/s e escalonadas por $1/T = f_s$.



Recuperação do sinal original a partir das amostras

Observando-se o espectro do sinal amostrado, pode-se recuperar o sinal original por meio de um filtro passa-baixas.



O filtro de reconstrução $H_r(j\Omega)$ tem:

- Ganho T
- frequência de corte Ω_c , com $\Omega_N < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_N$ (tipicamente pode-se utilizar $\Omega_c = \Omega_s/2$)

Pode-se escrever o sinal de tempo contínuo reconstruído como:

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t) \leftrightarrow X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) X_s(j\Omega)$$

O filtro de reconstrução faz uma interpolação ideal entre os impulsos nos instantes nT .

Teorema de Nyquist

Seja $x_c(t)$ um sinal de banda limitada, com

$$X_c(j\Omega) = 0 \quad \text{para } |\Omega| > \Omega_N$$

Então $x_c(t)$ é *unicamente* determinado por suas amostras $x[n] = x_c(nT)$, $-\infty < n < +\infty$, se e somente se:

$$\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N,$$

ou seja,

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\Omega_N$$

Ou seja, para ser possível recuperar o sinal original a frequência de amostragem deve ser maior que duas vezes a máxima frequência do sinal a ser amostrado.

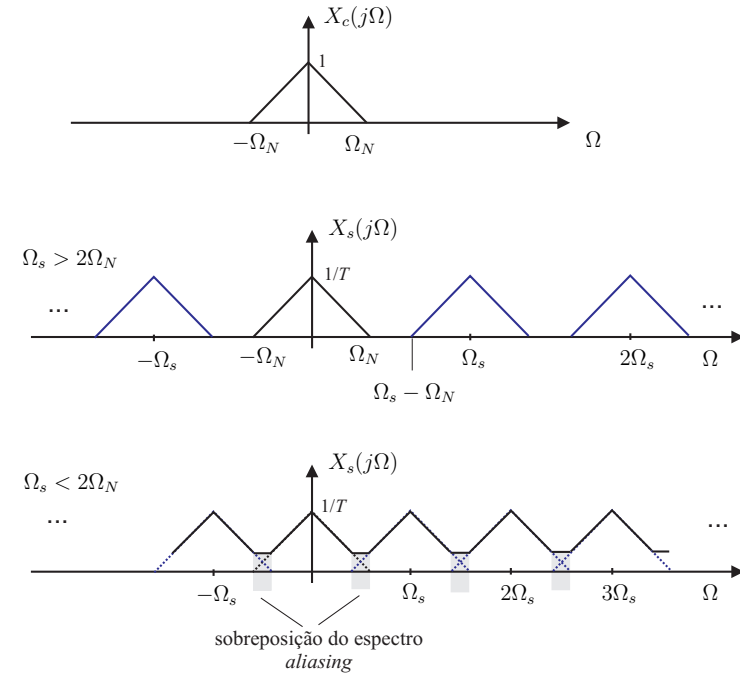
A frequência máxima do sinal também pode ser chamada de **frequência de Nyquist**.

Na prática, os valores utilizados são maiores que o valor teórico, devido à banda de transição finita dos filtros analógicos de reconstrução.

Por exemplo, para o CD: $f_N = 20$ kHz, $f_s = 44.1$ kHz.

Efeito de *Aliasing*

Caso a frequência de amostragem não seja suficientemente alta, ocorre a sobreposição do espectro (*aliasing*).



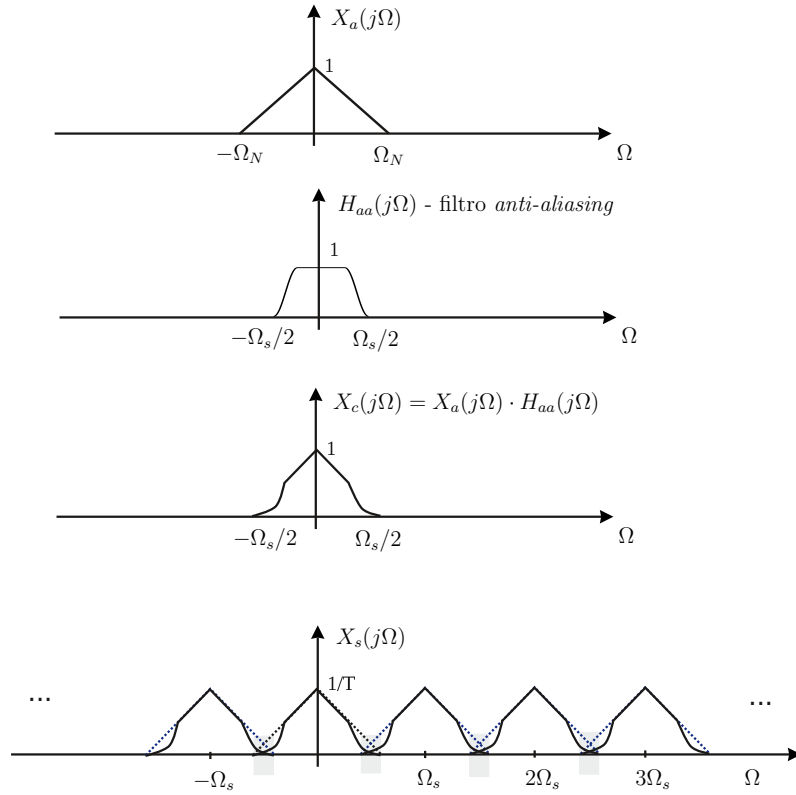
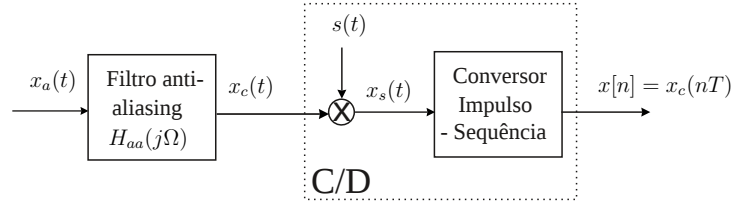
Quando ocorre este efeito, frequências originalmente altas no espectro do sinal aparecem em regiões de mais baixa frequência, impossibilitando a recuperação do sinal original.

Caso a frequência de amostragem não obedeça o teorema de Nyquist, deve-se colocar um filtro passa-baixas antes da aquisição de dados, que limite a máxima frequência do sinal à metade da frequência de amostragem. Este filtro é chamado de **filtro anti-aliasing**.

Filtro *Anti-Aliasing*

Caso a frequência de amostragem não obedeça o teorema de Nyquist, deve-se colocar um filtro analógico passa-baixas antes da aquisição de dados, que limite a máxima frequência do sinal à metade da frequência de amostragem.

Este filtro é chamado de **filtro *anti-aliasing***.



Relação entre $X_s(j\Omega)$ e $X(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_n x_c(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_n x_c(nT) e^{-j\Omega nT} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_n x[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_n x_c(nT) e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

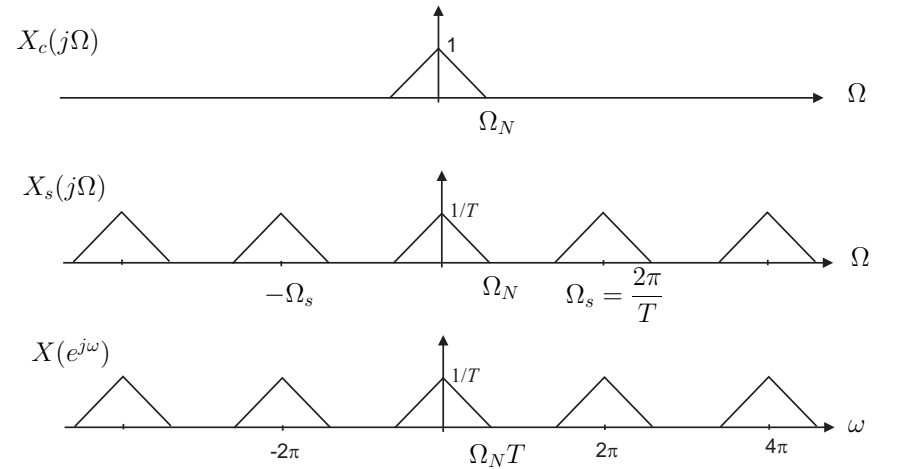
Portanto:

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$$

Ou, relacionando como sinal de tempo contínuo:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

Como a relação entre $x[n]$ e $x_c(t)$ pode ser obtida por uma normalização no eixo do tempo por T , algo parecido pode ser conseguido com as respectivas representações em frequência. A frequência $\Omega_s = 2\pi/T$ é normalizada para a frequência $\omega = 2\pi$.



Amostragem de sinal senoidal

Considere a amostragem de um sinal senoidal:

$$x_c(t) = A \cos(\Omega_0 t)$$

O sinal amostrado é:

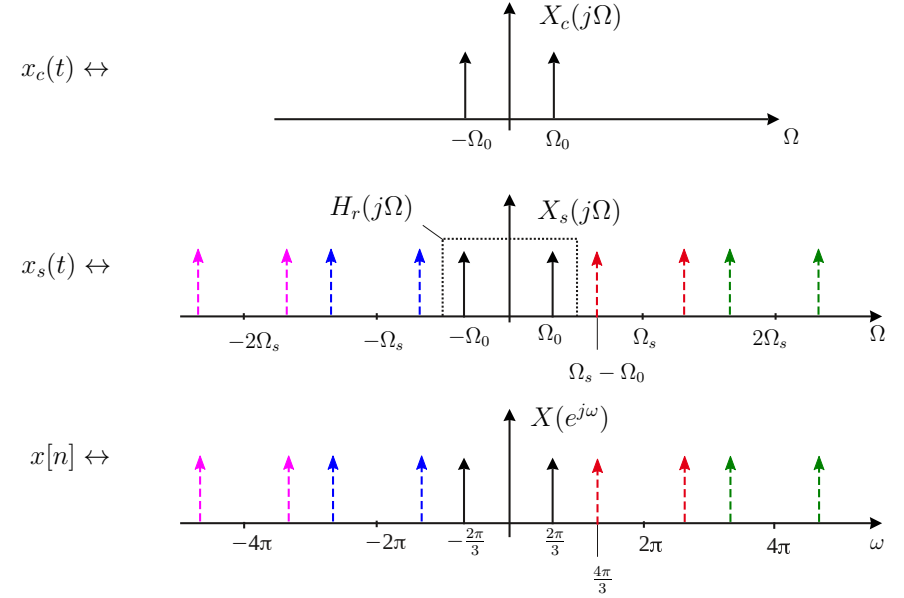
$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(t)|_{t=nT} \\ &= A \cos(\Omega_0 nT), \quad \Omega_0 = 2\pi f_0, \quad T = 1/f_s \\ &= A \cos\left(\frac{2\pi f_0}{f_s} n\right) \\ &= A \cos(\omega_0 n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi f_0}{f_s}. \end{aligned}$$

Portanto a frequência do sinal senoidal de tempo discreto também pode ser vista como uma frequência normalizada pela frequência de amostragem, neste caso.

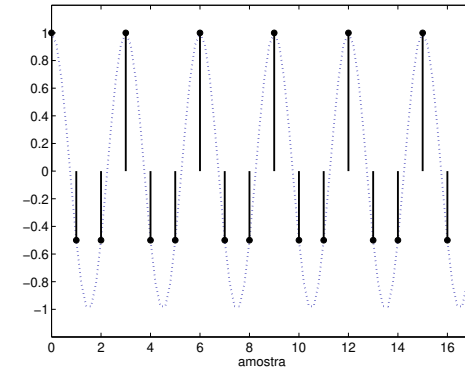
ATENÇÃO: Deve-se tomar cuidado quando há *aliasing*, pois a máxima frequência de um sinal senoidal de tempo discreto é π rad.

Amostragem de sinal senoidal

Utilizando uma taxa de amostragem f_s igual a 3 kHz, e frequência do sinal senoidal igual a 1 kHz, $\Omega_0 = 2\pi \times 10^3$ rad/s e os espectros dos sinais são:

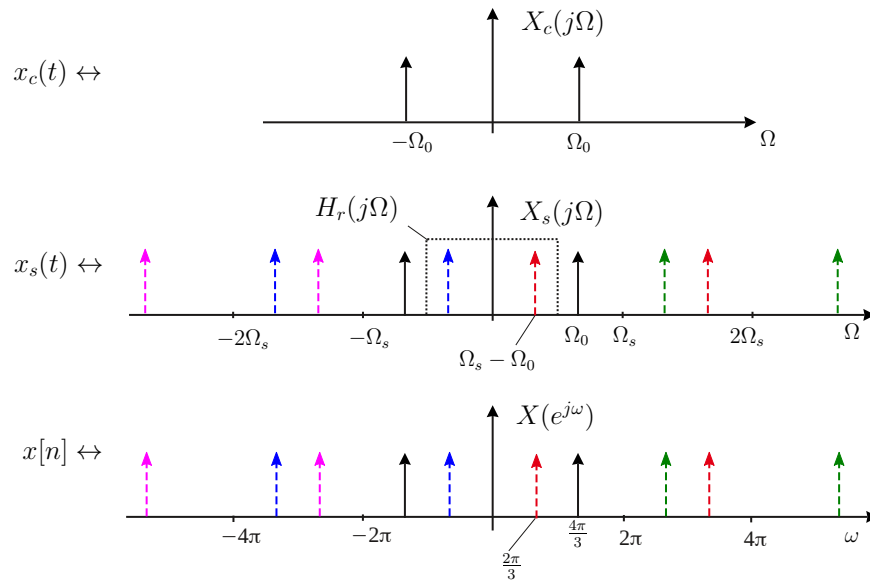


- Neste caso, não há *aliasing*, e pode-se recuperar o sinal original a partir das suas amostras.
- A frequência do sinal de tempo discreto é $\omega_0 = 2\pi/3$ rad
- A frequência do sinal reconstruído é: $\Omega_{0r} = 2\pi \times 10^3$ rad/s

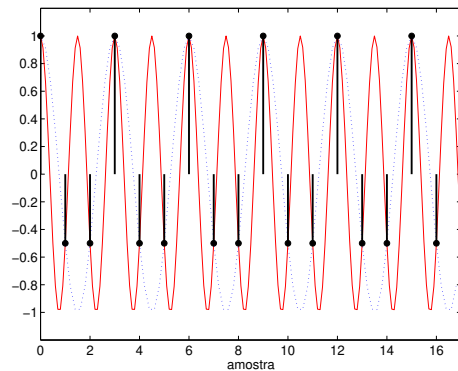


Amostragem de sinal senoidal (cont.)

Aumentando agora a frequência do sinal para $\Omega_0 = 2\pi \times 2 \times 10^3$ rad/s:



- Neste caso, ocorre *aliasing*, e $\frac{2\pi f_0}{f_s} = \frac{4\pi}{3} > \pi$ rad – esta NÃO é a frequência do sinal de tempo discreto.
- A frequência do sinal de tempo discreto é: $2\pi - \frac{4\pi}{3} = 2\pi/3$ rad
- A frequência do sinal reconstruído é: $\Omega_{0r} = \Omega_s - \Omega_0 = 2\pi \times 10^3$ rad/s — Um sinal de frequência mais alta aparece com frequência mais baixa, devido à subamostragem.



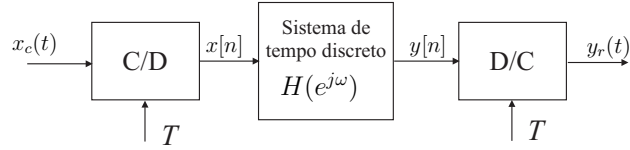
Amostragem de sinal senoidal (cont.)

Exercício:

Refaça (obtendo os gráficos de $X_c(j\Omega)$, $X_s(j\Omega)$ e $X(e^{j\omega})$) para as seguintes combinações de sinais:

- $\Omega_0 = 8\pi \times 10^3$ rad/s, $f_s = 3$ kHz;
- $\Omega_0 = 16\pi \times 10^3$ rad/s, $f_s = 3$ kHz;
- $\Omega_0 = 8\pi \times 10^3$ rad/s, $f_s = 5$ kHz;
- $\Omega_0 = 16\pi \times 10^3$ rad/s, $f_s = 5$ kHz;

Processamento Discreto de Sinais de Tempo Contínuo



Se o sistema for um SLIT com resposta em frequência $H(e^{j\omega})$,

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

a saída reconstruída será:

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y_s(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T})$$

Usando a relação entre $X(e^{j\omega})$ e $X_c(j\Omega)$, fica-se com:

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

Se o sinal $x_c(t)$ tiver a banda limitada e se tiver sido usada uma taxa de amostragem adequada, então o filtro de reconstrução cancela o fator $1/T$ e filtra apenas o termo de baixa frequência, ficando-se com:

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega), & |\Omega| \leq \pi/T \quad (= \Omega_s/2) \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

A resposta em frequência efetiva do sistema de tempo contínuo fica:

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| \leq \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

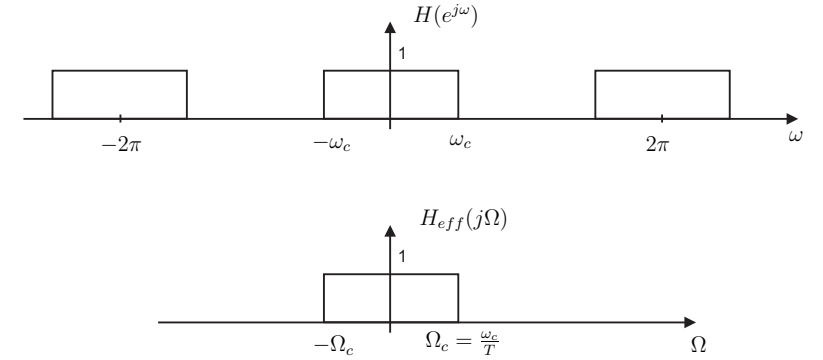
ou seja, se faz um escalonamento da resposta em frequência pelo período (frequência) de amostragem.

Exemplo: Filtro Passa-Baixas Ideal

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

A resposta em frequência efetiva analógica fica ($\omega \rightarrow \Omega T$)

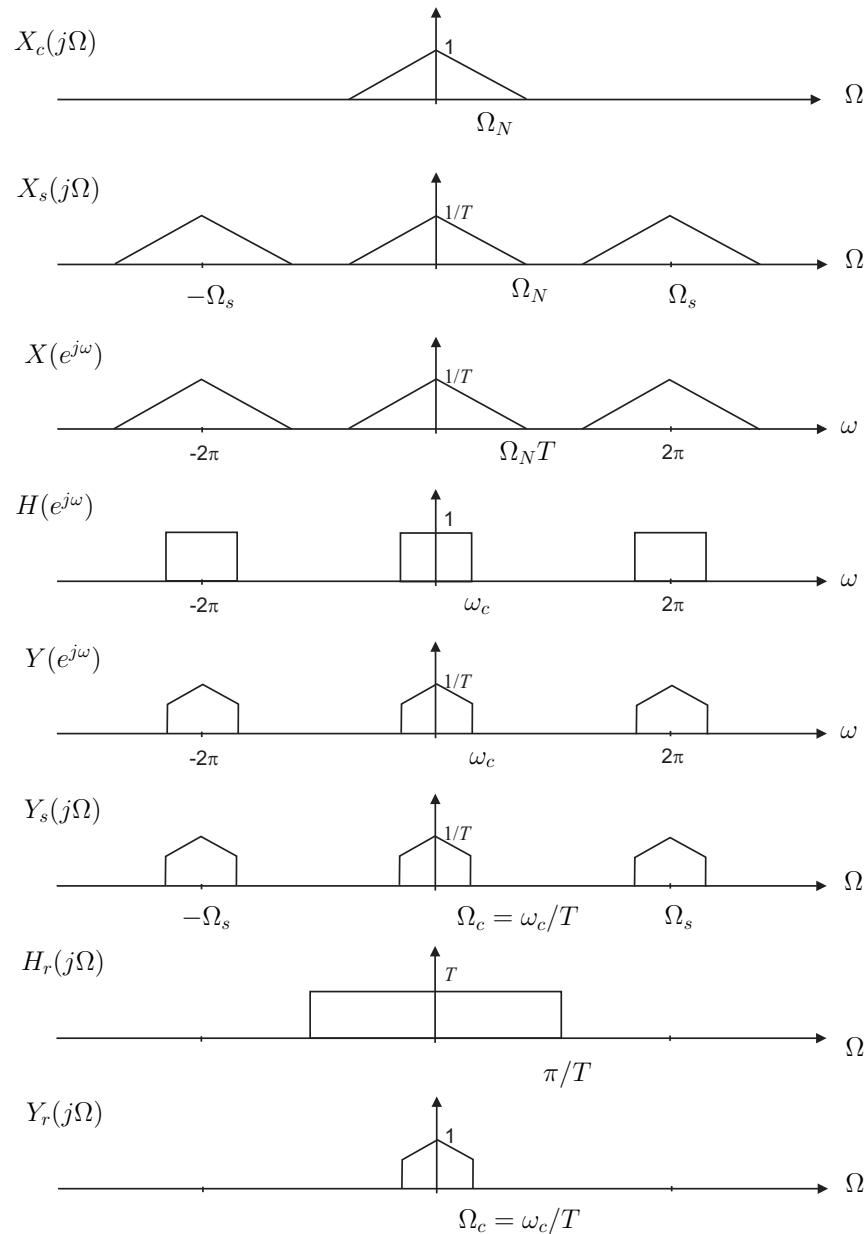
$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega T| \leq \omega_c \quad \text{ou} \quad |\Omega| \leq \omega_c/T \\ 0, & |\Omega T| > \omega_c \quad \text{ou} \quad |\Omega| > \omega_c/T \end{cases}$$



- A frequência de corte do filtro, Ω_c , depende da frequência de amostragem.
- Para mudar Ω_c , modifica-se a frequência de corte do filtro digital ω_c .
- Os parâmetros do filtro têm menor dependência de fatores de envelhecimento, temperatura.

Por exemplo, deseja-se um filtro passa-baixas analógico com frequência de corte igual a 1 kHz. A frequência de amostragem é igual a 8 kHz. A frequência de corte do filtro digital deve ser: $\omega_c = \Omega_c T = 2\pi f_c/f_s = \pi/4$.

Processamento Discreto de Sinais de Tempo Contínuo



Mudança da Taxa de Amostragem

É possível mudar a taxa de amostragem usando sistemas discretos.

Aplicações:

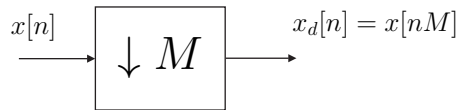
- Atrasadores de fase (atraso por uma fração de intervalo de amostragem;
- Interface entre sistemas com taxas de amostragem diferentes;
- Implementação de bancos de filtros (análise espectral, síntese de sinais).

$$x[n] = x_c(nT) \quad x'[n] = x_c(nT'), \quad T \neq T'$$

- T : período de amostragem original
- T' : novo período de amostragem

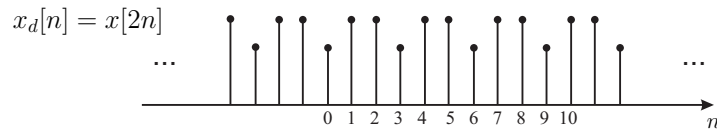
Redução da Taxa de Amostragem

Uma sequência pode ter a frequência de amostragem reduzida por um fator inteiro M , por meio de uma “nova amostragem” do sinal discreto, usando um dizimador:



$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT) = x_c(T')$$

- O dizimador apenas descarta amostras do sinal de entrada: para $M = 2$, uma de cada duas amostras é descartada, para $M = 3$, duas de cada três amostras são descartadas, e assim por diante.



Redução da Taxa de Amostragem

Observações

- $x_c(t)$ tem uma banda limitada a Ω_N ;
- Se não há *aliasing* na amostragem de $x[n]$, então:
 - $\Omega_s > 2\Omega_N$, ou $\pi/T > \Omega_N$, ou seja,
 - a máxima frequência do sinal de tempo discreto $x[n]$ deve ser: $\omega_N < \pi$
- Para não haver *aliasing* no sinal subamostrado $x_d[n]$, deve-se garantir que:
 - $\pi/T' > \Omega_N$, ou $\pi/MT > \Omega_N$
 - a máxima frequência do sinal de tempo discreto $x[n]$ (antes da subamostragem) deve ser: $\omega_N < \pi/M$

Ou seja, para não causar *aliasing* em $x_d[n]$, o sinal $x[n]$ deve ter sido amostrado a uma taxa M vezes maior que a mínima frequência de amostragem (pois esta será reduzida de M vezes pelo dizimador).

Redução da Taxa de Amostragem

Se fossem analisados os espectros a partir dos sinais amostrados, a representação em frequência do sinal amostrado com período T é:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

O sinal amostrado com período $T' = MT$ é obtido a partir de:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{MT} - j\frac{2\pi r}{MT}\right)$$

ou seja, nota-se um fator de amplitude e um escalonamento que relacionam as funções $X(e^{j\omega})$ e $X_d(e^{j\omega})$.

Fazendo-se a mudança de variável $r = i + kM$, onde $-\infty < k < +\infty$ e $0 \leq i \leq M-1$:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{MT} - j\frac{2\pi k}{T} - j\frac{2\pi i}{MT}\right) \right]$$

ou

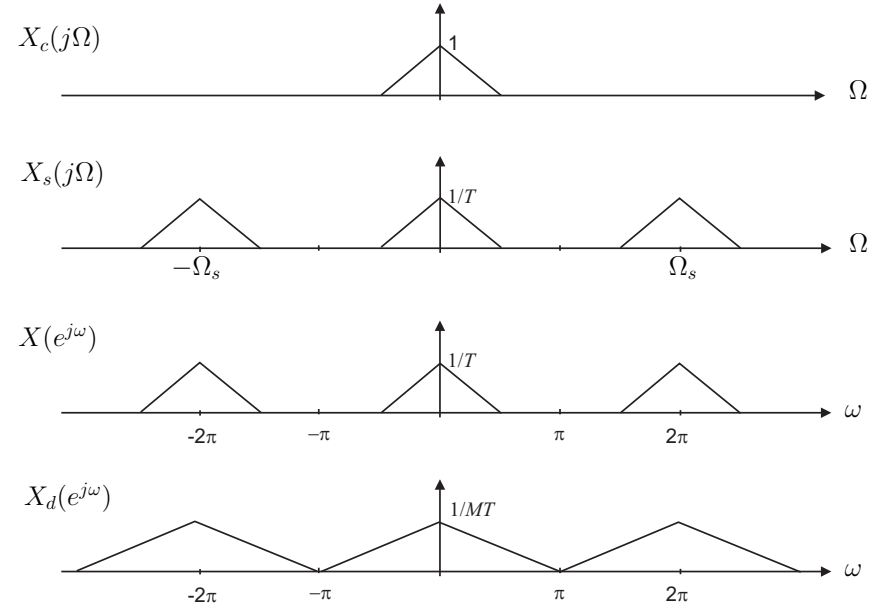
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j[(\omega-2\pi i)/M]})$$

ou seja, o espectro de $x_d[n]$ é composto por cópias escalonadas do espectro do sinal original. Nesta equação, deve-se lembrar que, para que não ocorra *aliasing* em $X_d(e^{j\omega})$:

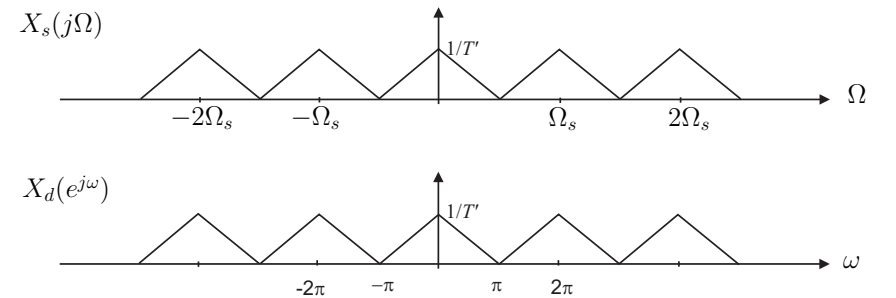
$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad \text{para } \pi/M \leq |\omega| \leq \pi$$

Redução da Taxa de Amostragem

Considerando um sinal amostrado a uma taxa igual a duas vezes a mínima, fica-se com os espectros:

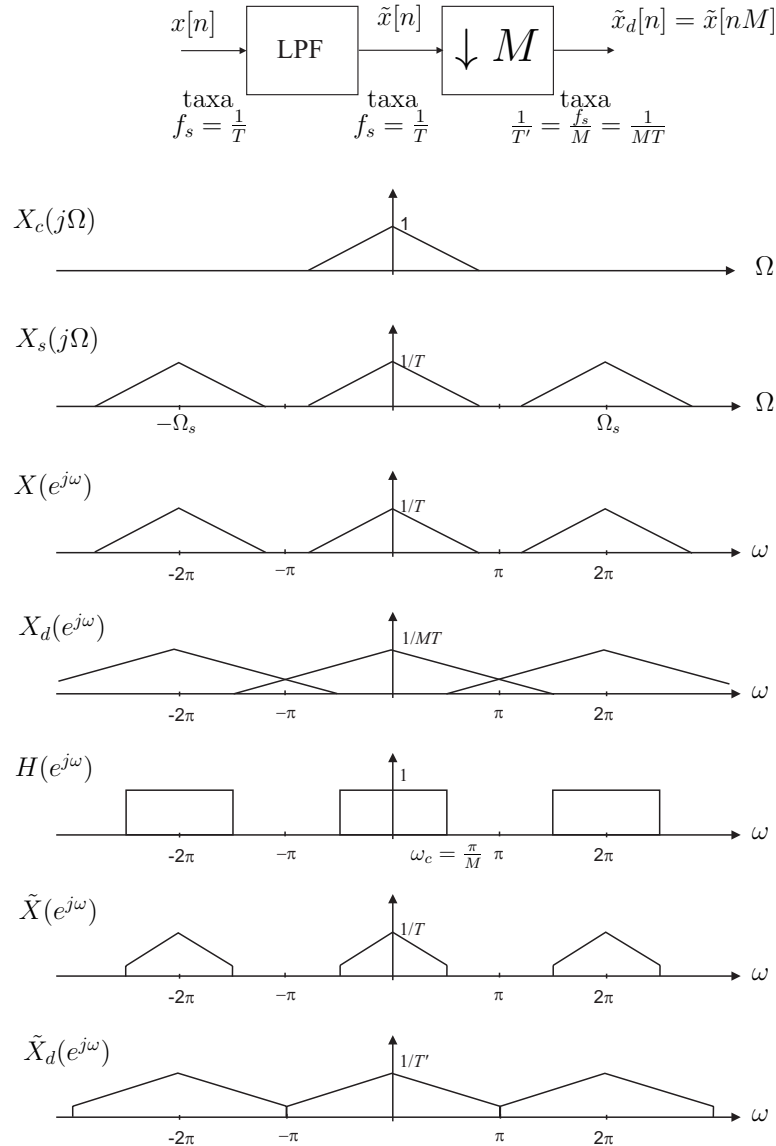


Se o sinal tivesse sido amostrado à metade da taxa original, ter-se-ia:



Redução da Taxa de Amostragem

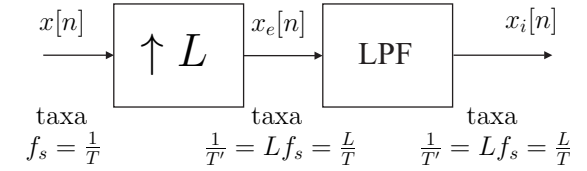
Para garantir que não ocorre *aliasing* no sinal subamostrado, pode-se utilizar um filtro passa-baixas com frequência de corte π/M antes de se realizar a redução da taxa.



Aumento da Taxa de Amostragem

Equivale a uma interpolação:

$$x_i[n] = x_c(nT'), \quad T' = T/L$$

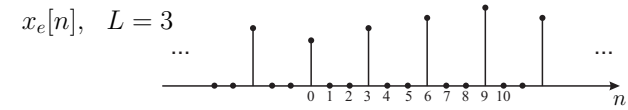
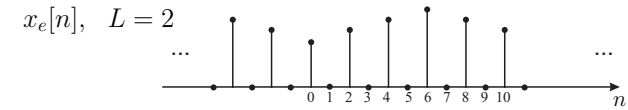


O sinal $x_e[n]$ é definido por:

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

ou

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - kL]$$



- O sinal $x_e[n]$ possui $(L - 1)$ zeros entre as amostras originais
- O filtro passa-baixas faz a interpolação entre essas amostras

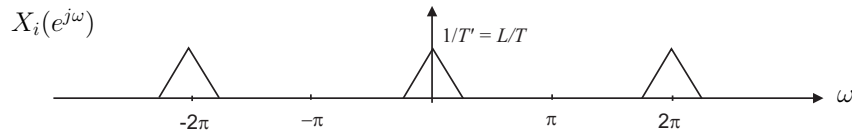
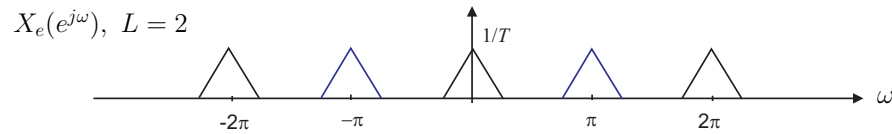
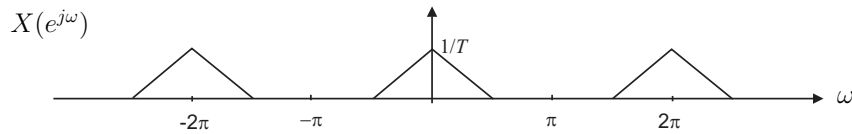
Aumento da Taxa de Amostragem

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - kL]$$

A DTFT de $x_e[n]$ é:

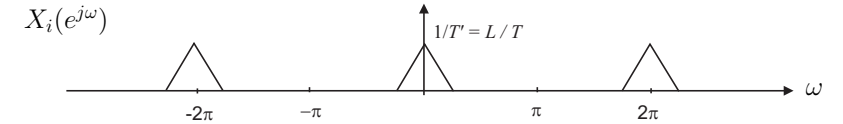
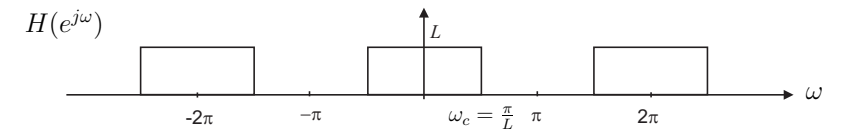
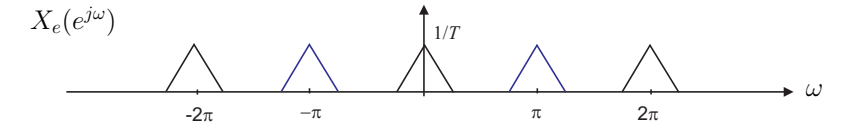
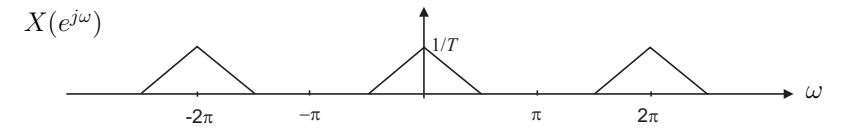
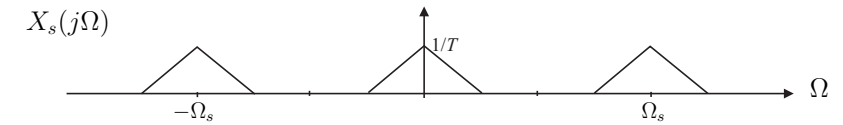
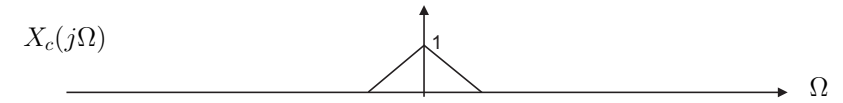
$$\begin{aligned} X_e(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - kL] \right) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]e^{-j\omega Lk} = X(e^{j\omega L}) \end{aligned}$$

O espectro do sinal $x_e[n]$ é composto pelo espectro do sinal original escalonado. No entanto, nesta operação aparecem porções de espectro que não existiriam caso o sinal fosse amostrado com T' diretamente. Por isto, é necessário o filtro passa-baixas com ganho L e frequência de corte πL para que o espectro fique como $X_i(e^{j\omega})$.



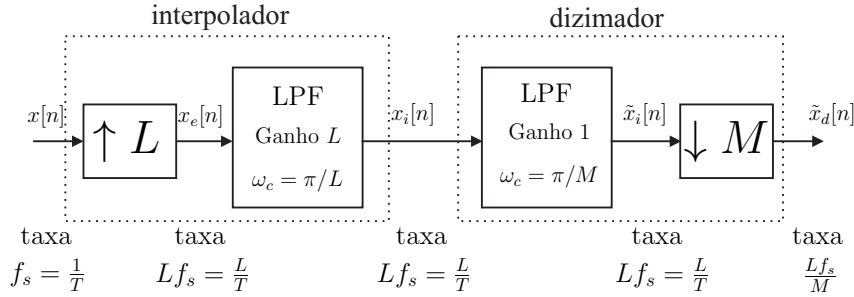
Aumento da Taxa de Amostragem

Exemplo para $L = 2$.

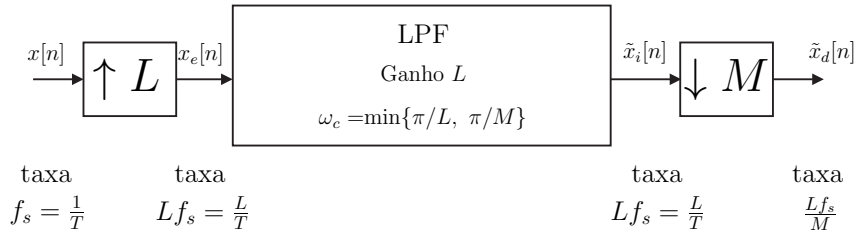


Mudança da Taxa de Amostragem por um fator não-inteiro

Agrupando em cascata um interpolador e um dizimador, pode-se mudar a taxa de amostragem por um fator racional:



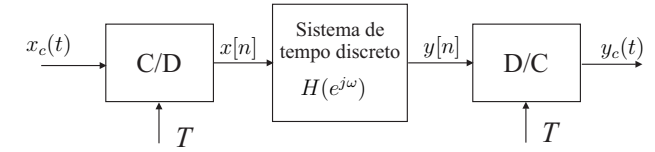
Utilizando o filtro passa-baixas como sendo aquele com menor frequência de corte e ganho L , fica-se com:



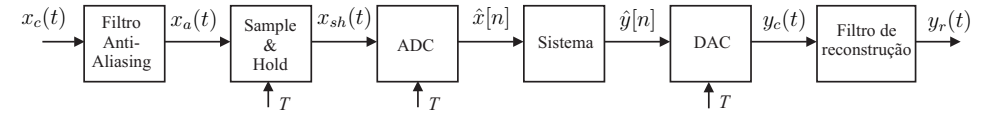
Aspectos Práticos

Num sistema real, os conversores C/D e D/C apresentam aspectos não-ideais:

- Filtros não-ideais (anti-aliasing, reconstrução);
- Conversão C/D: conversor A/D não-ideal:
 - número finito de bits (digital - amplitude discreta);
 - sample-and-hold

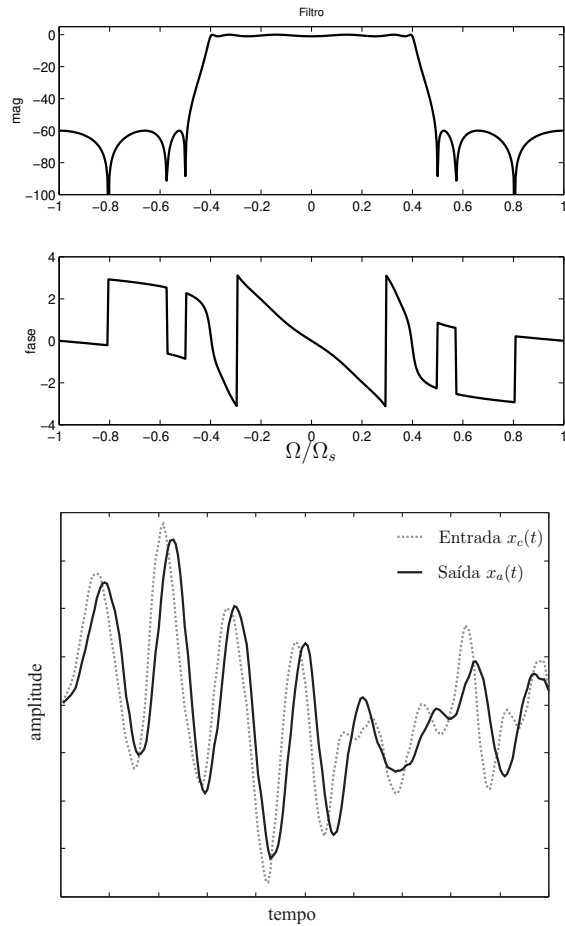


Um modelo mais próximo do real é:



Pré-filtragem - *anti* – *aliasing*

- Na prática: sinais podem não ter banda limitada;
- Filtro passa-baixas antes da amostragem: *anti* – *aliasing*;
- Atenua frequências acima de $\Omega_s/2$;
- Filtro analógico não-ideal (distorção de fase/amplitude).

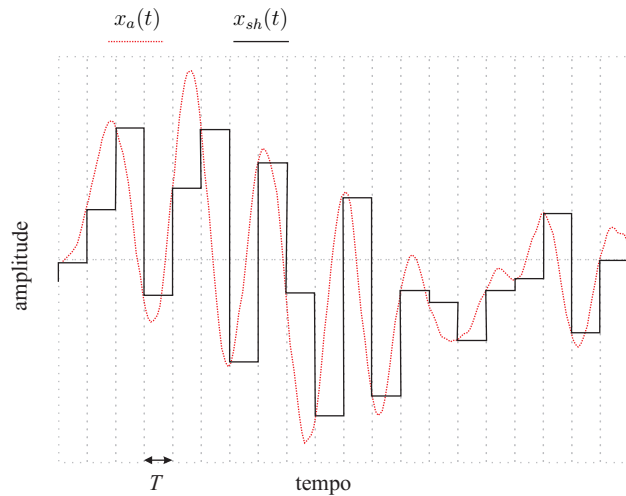


Conversão A/D

- Na prática: conversão A/D com **número finito de bits** - sinal **digital**;
- Amostras $\neq$ valores reais nos instantes de amostragem - **Ruído de quantização**;
- Conversor A/D - necessário um **sample-and-hold**;
- Sinal sofre distorção.

Sample-and-Hold - Amostragem com Retenção

Em razão da retenção, há uma distorção introduzida.



O sinal de saída do S/H pode ser escrito como:

$$x_{sh}(t) = x_s(t) * p(t)$$

em que:

- $x_s(t)$ é o sinal amostrado por impulsos
- $p(t)$ é um pulso retangular de duração T

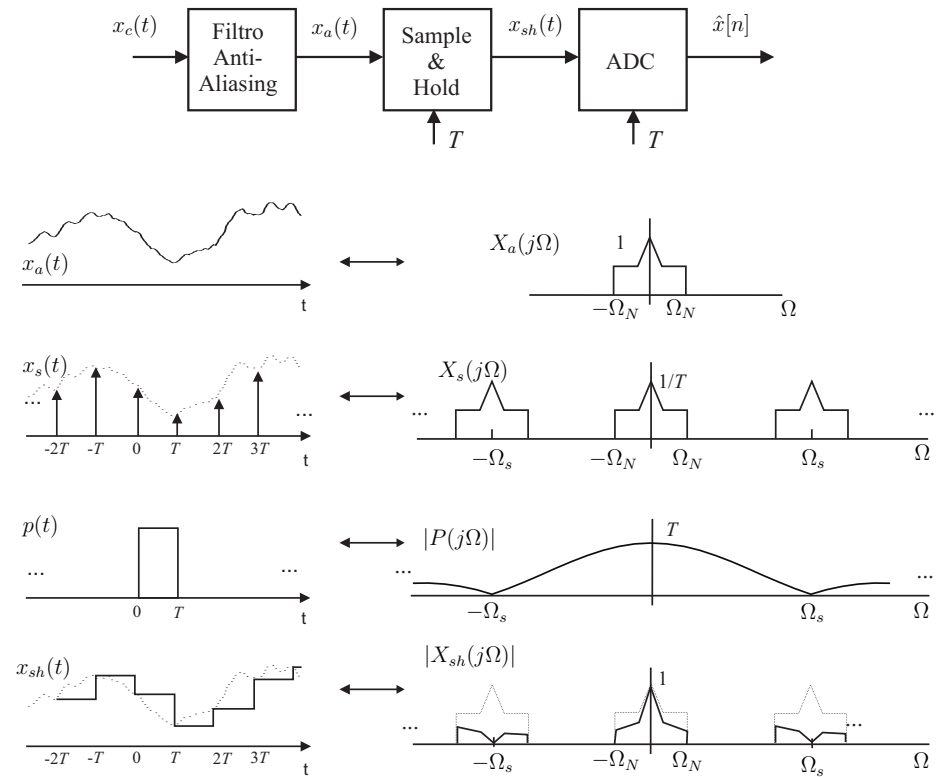
Logo, no domínio da frequência fica-se com:

$$X_{sh}(j\Omega) = X_s(j\Omega) \cdot P(j\Omega)$$

Como $X_s(j\Omega)$ é composto por cópias do espectro original, nota-se que há modificação deste devido à multiplicação por $P(j\Omega)$.

$$P(j\Omega) = T \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2} e^{-j\Omega T/2}$$

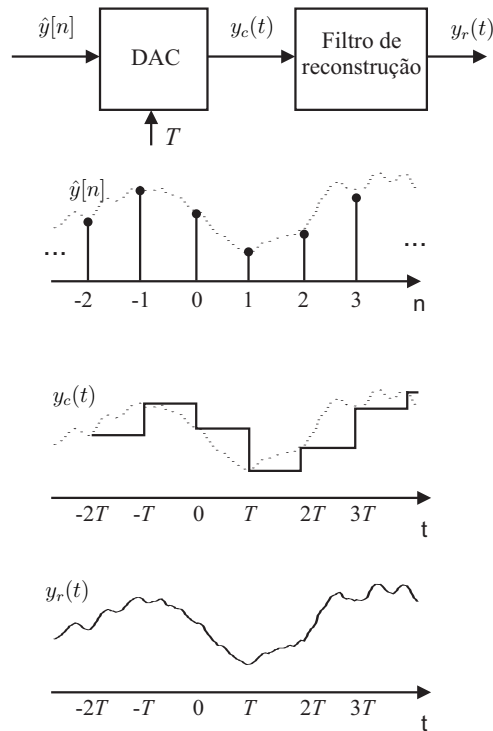
Sample-and-Hold



- A distorção introduzida pelo S/H pode ser compensada no sistema de tempo discreto/digital

Conversão D/A

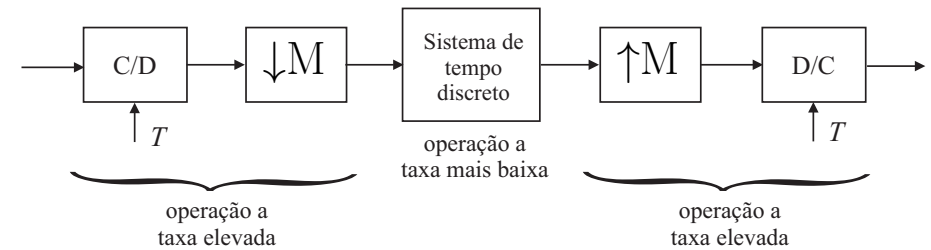
- Filtro de reconstrução não-ideal.
- A distorção pode ser compensada pelo sistema de tempo discreto/digital.



Sobreamostragem (oversampling)

Uma alternativa para simplificar os sistemas de tempo contínuo envolvidos na amostragem é utilizar uma taxa de amostragem bem mais elevada que a mínima necessária.

- Filtros anti-aliasing e de reconstrução analógicos de ordem mais baixa;
- Maior volume de dados (mais amostras por segundo);
- Podem-se usar dizimadores e interpoladores;
- Filtros digitais podem compensar as distorções da amostragem (S/H, DAC) e dos filtros analógicos.

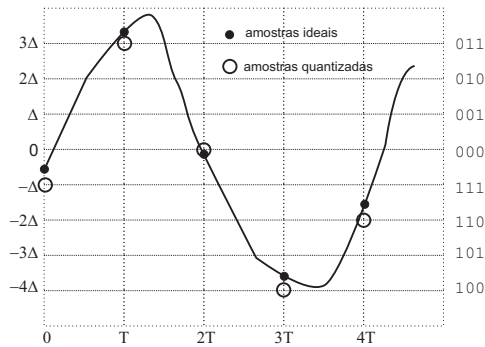


Efeitos de Quantização

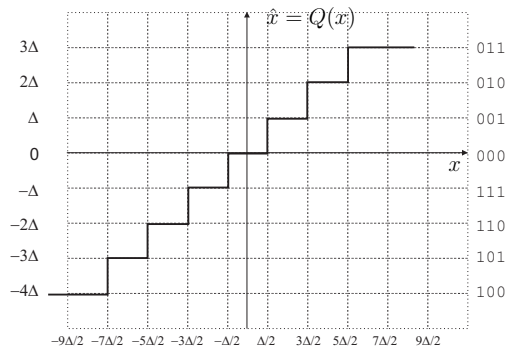
Conversão A/D:

- Representação do sinal com um número finito de bits;
- Introdução de erros/ruído de quantização

O quantizador converte um sinal de tempo discreto em um sinal digital com representação por um número finito de bits. Para um quantizador com três bits, com aproximação por arredondamento para o nível digital mais próximo (código binário em complemento de dois):



A curva que relaciona a entrada e a saída quantizada é:

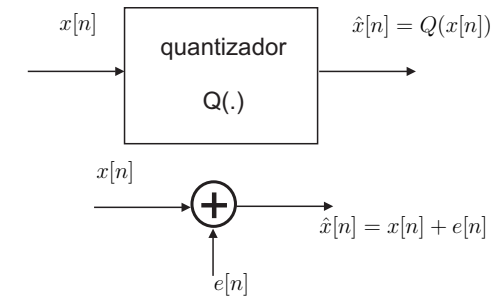


Considerando um quantizador com $B + 1$ bits, o número de níveis de quantização é dado por: 2^{B+1} . Se o conversor A/D possibilitar uma excursão de sinal entre X_m e $-X_m$, os passos de quantização terão amplitude dada por:

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$$

Efeitos de Quantização

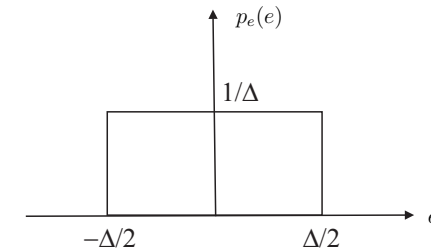
- Devido à quantização, há um erro $e[n]$ na representação do sinal:



- O erro, no caso de arredondamento, pode assumir valores:

$$-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2$$

- Para truncamento: $-\Delta < e[n] \leq 0$
- O erro $e[n]$ é uma sequência aleatória estacionária
- $e[n]$ não tem correlação com o sinal $x[n]$
- Duas amostras de ruído são não-correlacionadas - ruído branco
- A função densidade de probabilidade do erro é constante no intervalo de valores do erro de quantização



- Valor médio do ruído de arredondamento: $E\{e[n]\} = 0$
- Variância do ruído (potência): $\sigma_e^2 = E\{e^2[n]\} = \Delta^2/12 = 2^{-2B} X_m^2 / 12$

Efeitos de Quantização

- Potência do ruído:

$$\sigma_e^2 = 2^{-2B} X_m^2 / 12$$

- Potência do sinal: σ_x^2
- Relação sinal-ruído de quantização, em decibéis:

$$\begin{aligned} \text{SNR}_q &= 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_x^2}{X_m^2} \right) \\ &= 6.02B + 10.8 - 20 \log_{10} \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right) \end{aligned}$$

Analisando a equação de SNR_q :

- A relação sinal-ruído aumenta cerca de 6 dB a cada bit adicionado;
- Sobre o termo $-20 \log_{10}(\frac{X_m}{\sigma_x})$:
 - O fator X_m em geral é fixo para um sistema de aquisição;
 - O fator σ_x é o valor rms do sinal;
 - Quanto menor o valor rms em relação a X_m , menor será a SNR (o sinal está excursionando por poucos níveis de quantização do ADC);
 - Para valores rms maiores, a SNR aumenta, mas deve-se tomar cuidado para que os valores de pico não ultrapassem $\pm X_m$, pois isso introduzirá distorções no sinal quantizado.
 - Para um sinal com distribuição de amplitudes Gaussiana com valor rms (desvio padrão) σ_x , apenas 0.064% das amostras ultrapassa a amplitude de $4\sigma_x$. Considerando $\sigma_x = X_m/4$, fica-se com:

$$\text{SNR}_q \sim 6B - 1.25 \quad [\text{dB}]$$

- Para um sistema com 16 bits, a relação sinal-ruído de quantização fica em torno de 95 dB.

Interpolação linear - exemplo

