

---

---

# Confiabilidad en Ingeniería

Carlos J. Zapata



Universidad Tecnológica de Pereira

---

---

---

---

# Confiabilidad en Ingeniería

Primera Edición

2011

**Carlos J. Zapata**

Profesor Asociado

Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira, Colombia



---

---

Confiabilidad en Ingeniería

Primera edición: Año 2011

ISBN:

Autor: Carlos J. Zapata, Profesor Asociado,  
Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

© 2011 Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

Impresión: Publiprint Ltda

Centro Comercial La Popa, Local 14

Dosquebradas, Colombia

[publiprint@epm.net.co](mailto:publiprint@epm.net.co)

Primera impresión

Impreso en Colombia, Printed in Colombia

Prohibida la reproducción parcial o total de esta obra, por cualquier método sin la autorización escrita del editor.

---

---

---

---

Carlos Julio Zapata Grisales es ingeniero electricista de la Universidad Tecnológica de Pereira (1991), magíster en ingeniería eléctrica de la Universidad de Los Andes (1996) y doctor en ingeniería de la Universidad de Los Andes (2010). De enero de 1991 a enero de 2002 laboró para Consultoría Colombiana S. A - Concol S. A. Desde diciembre de 2001 labora como docente e investigador en la Universidad Tecnológica de Pereira.

Para comentarios o preguntas al autor, enviar un email al correo [czapata@utp.edu.co](mailto:czapata@utp.edu.co)

---

---

---

---

## Tabla de Contenido

	Página
1 Conceptos generales	1
2 Tipos de componentes y sistemas	12
3 Componentes no reparables	25
4 Componentes reparables	41
5 Sistemas no reparables	62
6 Sistemas reparables	70
7 Sistemas esfuerzo resistencia	80
8 Arboles de falla y de eventos	90

---

---

---

---

## Presentación

Confiabilidad en Ingeniería corresponde a las notas de clase de los cursos de postgrado que el autor ha dictado en la Universidad Tecnológica de Pereira (Pereira, Colombia) y en la Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia).

El principal objetivo de este documento es presentar los conceptos de confiabilidad de componentes y sistemas no reparables y reparables dentro del ámbito de la ingeniería.

En el desarrollo de este tema se enfatiza en los siguientes aspectos: La diferencia entre el modelamiento de componentes y sistemas reparables y no reparables, la información requerida para el modelamiento y los métodos para construir modelos de confiabilidad de componentes reparables y no reparables.

El enfoque de este texto es hacia las aplicaciones prácticas, ya que existen muchos libros donde la confiabilidad se aborda solamente desde el punto de vista teórico sin enseñar cómo es que se hace la aplicación de estos conceptos a situaciones reales. Así, el autor ha querido incorporar en estas notas la experiencia adquirida en los estudios de confiabilidad en que ha tenido la oportunidad de participar.

En este documento se asume el conocimiento por parte del lector de los conceptos básicos de probabilidad, estadística, procesos estocásticos y simulación de Montecarlo.

Carlos J. Zapata  
Cartago, Febrero de 2011

---

---

## CAPÍTULO 1 – CONCEPTOS GENERALES

### 1.1 NECESIDAD DE LA CONFIABILIDAD

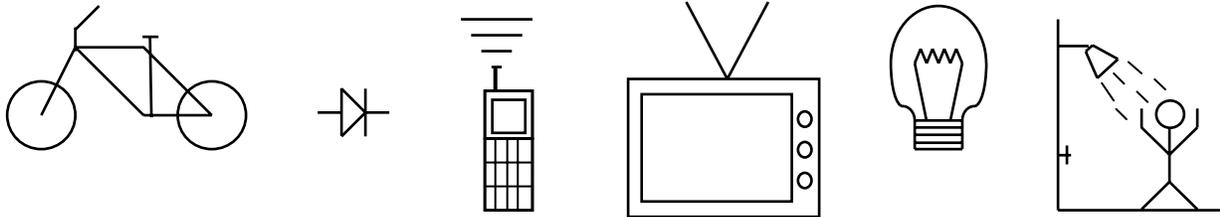


Figura 1.1 Algunos productos y servicios utilizados por las personas en la vida diaria

En la vida diaria de las sociedades modernas se utilizan muchos productos y servicios:

Ejemplos	
Productos	Servicios
Bombilla eléctrica	Electricidad
Televisor	Gas domiciliario
Generador eléctrico	Televisión
Bicicleta	Telefonía
Computador (hardware)	Agua potable
Software	Alumbrado público
Diodo	Riodifusión
Jeringa plástica	Correo
Lente de contacto	Transporte público

Los productos pueden ser simples o complejos, dependiendo de la cantidad de subcomponentes o partes que los conformen. En realidad, un componente puede ser un sistema de muchos subcomponentes. Los subcomponentes pueden ser clasificados funcionalmente por subsistemas. Sin embargo, sin importar la cantidad de subcomponentes, usualmente el producto se considera exteriormente un solo “componente”.

Ejemplo
<i>Una unidad de generación eléctrica está conformada por el sistema de suministro de combustible, el sistema mecánico que transforma la energía primaria en energía rotacional, el generador sincrónico, los controles de velocidad y voltaje, los servicios auxiliares, etc. Externamente, todo esto puede ser considerado un solo componente.</i>

Los servicios son suministrados por sistemas conformados por muchos componentes más las personas encargadas de su operación. Dado el gran tamaño y complejidad de algunos sistemas, éstos suelen subdividirse por zonas funcionales o subsistemas.

Ejemplo
<i>El servicio de electricidad es provisto por el sistema eléctrico de potencia, el cual suele subdividirse para su estudio y operación en sistema de generación, sistema de transmisión y sistema de distribución.</i>

A su vez, un sistema puede ser considerado desde un sistema mayor o más importante como un componente. Por lo tanto, en este texto las palabras “componente” y “sistema” son intercambiables.

Se denomina “falla” a la situación en que [5], [6]:

1	El componente o sistema deja cumplir parcialmente o totalmente su función
2	Existe una diferencia inaceptable entre el desempeño esperado y el observado

Las fallas pueden ocurrir debido a [6]:

1	Defectos técnicos o físicos	Incluye el diseño, materiales, manufactura, construcción, ensamblaje y mantenimiento
2	Errores operativos o procedimentales.	Administración y control de calidad, lo cuales están relacionados con factores humanos.

La fallas de los componentes o sistemas pueden causar efectos que van desde molestias e inconvenientes para algunos de los usuarios hasta un severo impacto en la sociedad.

Las fallas también pueden llevar a situaciones potencialmente peligrosas o de “riesgo” para los usuarios o el medio ambiente, diferentes a las aceptadas o permitidas.

Por lo tanto, se requiere que todo componente o sistema ofrezca calidad, seguridad y confiabilidad:

Calidad	Se refiere a su desempeño respecto a unas normas técnicas. Ejemplo: Calidad del agua, calidad de la imagen de televisión, calidad de la recepción de la una señal de audio, calidad del material.
Seguridad	Que su uso no implique potenciales peligros o “riesgos” para los usuarios o el medio ambiente diferentes a los aceptados o permitidos.
Confiabilidad	Que cumpla su función durante el tiempo requerido bajo unas condiciones operativas especificadas

Debe aclararse que las definiciones presentadas corresponden al contexto de la ingeniería pudiéndose encontrar otras definiciones particulares para otras áreas de aplicación y aún para sub-áreas de la ingeniería.

Ejemplos
<i>Confiabilidad en el área de las noticias: Se refiere al grado de veracidad de las mismas lo cual depende de factores como las fuentes de la información y su grado de detalle.</i>
<i>Seguridad en las transacciones bancarias: Se refiere al grado de protección existente para evitar el acceso de personas no autorizadas.</i>
<i>Seguridad en sistemas eléctricos de potencia: Se refiere a la habilidad para operar establemente ante disturbios como cortocircuitos, pérdida de componentes, etc.</i>

En la definición de confiabilidad aparece el aspecto temporal durante el cual se requiere que el componente cumpla su función. Las condiciones operativas especificadas incluyen el rango de utilización (capacidad nominal, condiciones ambientales, etc.) y los requerimientos de calidad y seguridad.

Existe una estrecha relación entre los aspectos de confiabilidad, calidad y seguridad: las mejoras en las dos últimas conllevan a la mejora de la confiabilidad.

El garantizar un nivel dado de calidad, seguridad y confiabilidad abarca todas las etapas de un componente o sistema: Planeamiento, diseño, fabricación, instalación y operación.

No es económicamente posible diseñar, fabricar y operar un componente o sistema que ofrezca una confiabilidad del 100% (cero fallas) bajo todas las condiciones pues los eventos internos y externos que afectan a los componentes y producen las fallas son aleatorios; es decir, no puede conocerse en forma exacta el tiempo de su ocurrencia. Por lo tanto, la llegada de fallas a un componente o sistema es un fenómeno aleatorio o con incertidumbre.

## 1.2 DEFINICIONES

### 1.2.1 Confiabilidad

*“Es la probabilidad de que un componente o sistema pueda cumplir su función en las condiciones operativas especificadas durante un intervalo de tiempo dado”*

Esta es la definición general de confiabilidad. Aplica a los componentes o sistemas orientados a una misión y se designa por la letra R (Reliability).

Esta definición no tiene sentido para los componentes o sistemas reparables puesto que éstos toleran las fallas; para estos sistemas se utiliza la disponibilidad.

### 1.2.2 Disponibilidad

*“Es la probabilidad de que un componente o sistema pueda cumplir su función en las condiciones operativas especificadas en un instante de tiempo dado”*

Se designa por la letra A (Availability). El complemento de la disponibilidad se denomina indisponibilidad y se designa por la letra U (Unavailability).

### 1.2.3 Seguridad

*“Es la probabilidad de evitar un evento peligroso”*

Se designa por la letra S (Security) e incluye:

1	La probabilidad de que ocurra el evento peligroso
2	La gravedad del evento, es decir, su grado de peligro potencial

El nivel de riesgo es función de estos dos ítems, tal como se muestra en la Figura 1.2

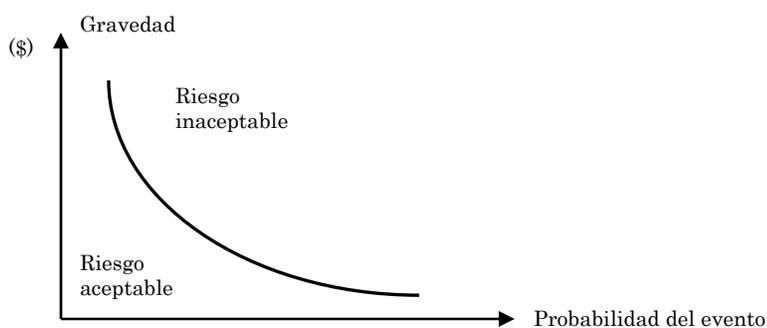


Figura 1.2 Función de riesgo en un análisis de seguridad

La gravedad de los eventos no proviene de la naturaleza de su origen sino de sus consecuencias para los usuarios, el medio ambiente y para el mismo componente o sistema. En un análisis de riesgos se hace inventario de todas las situaciones potencialmente peligrosas debido a la presencia y utilización del componente o sistema y se establece su gravedad como costo económico o en otro tipo de escala cualitativa o cuantitativa.

### 1.2.4 Mantenibilidad

*“Es la probabilidad de que una operación dada de mantenimiento pueda ser realizada en un intervalo de tiempo dado”*

Se designa por la letra M (Maintainability). El mantenimiento puede ser correctivo (Salidas no planeadas) o preventivo (Salida planeada).

### 1.3 OTRAS MEDIDAS PARA LA CONFIABILIDAD

La probabilidad es la medida clásica para valorar la confiabilidad. Sin embargo, existen muchas otras medidas utilizadas extensamente, por lo cual, “confiabilidad” es un término genérico que describe todas estas medidas sin que necesariamente estén relacionadas con la probabilidad.

Gran parte de estas medidas corresponden a promedios estadísticos o valores esperados que se denominan “índices de confiabilidad”. Algunos ejemplos se presentan a continuación.

Índice de confiabilidad	Definición	Ejemplo
Vida media	Tiempo esperado para que ocurra una falla en un componente no reparable	10000 horas
Frecuencia de fallas por año	Número de fallas esperadas por año	0.1 fallas/año
Indisponibilidad	Número esperado de horas de indisponibilidad por año	20 horas/año
Pérdida de carga	Valor esperado de carga no atendida por año	180.2 kW
Tiempo medio de reparación	Tiempo medio esperado para cada reparación	4 horas/reparación
LOLE	Número esperado de horas por año en que no se podrá atender la demanda	0.1 horas/año

Endurance	Número de operaciones que puede realizar un contactor, interruptor o seccionador antes de entrar en su periodo de obsolescencia	6000 operaciones
-----------	---	------------------

De otra parte, no existe una medida única que pueda aplicarse a todos los tipos de componentes o sistemas.

### 1.4 CÓMO MEJORAR LA CONFIABILIDAD

Existen dos formas básicas mediante las cuales puede mejorarse la confiabilidad de un componente o sistema:

Calidad	Redundancia
Se refiere a la calidad de los materiales utilizados y a su fabricación, pruebas, calibración, transporte y puesta en servicio.	Se colocan elementos de respaldo. Si un componente falla o sale, su función es asumida por componente de respaldo.  Existen dos tipos de redundancia: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Activa: El componente redundante siempre está conectado en paralelo con el componente al cual da respaldo.</li> <li>• Stand-by: El componente redundante se conecta en el momento en que el componente al cual da respaldo falla o sale.</li> </ul>

Otros métodos son: el mantenimiento preventivo, la diversidad de componentes, el stock de repuestos. La mejora de la confiabilidad conlleva a inversiones adicionales y cambios en el diseño que pueden afectar las prestaciones del componente o sistema.

### 1.5 COSTO DE LA CONFIABILIDAD

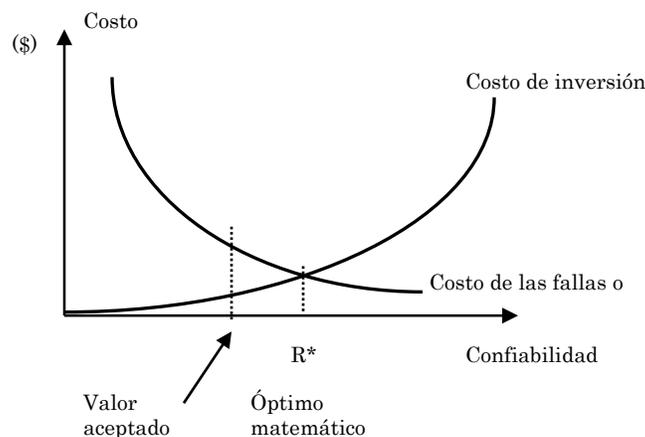


Figura 1.3 Función de costos de la confiabilidad

Conforme se aumenta el nivel de confiabilidad, se aumenta el nivel de inversión requerido y viceversa.

El costo de la confiabilidad debe compararse con los beneficios globales tanto para el usuario como para la sociedad.

El nivel aceptable de confiabilidad depende de lo que los usuarios y la sociedad en su conjunto estén dispuestos a pagar por esta. Este nivel aceptable de confiabilidad puede ser diferente del óptimo matemático.

Para justificar las inversiones en mejora de la confiabilidad se deben definir los costos asociados a las fallas o interrupciones del servicio (salidas) para los usuarios, las empresas distribuidoras y la sociedad.

El costo de interrupción se define como el valor de las pérdidas económicas debidas a la falla o salida.

Para el caso del servicio de electricidad los costos de interrupción del servicio pueden ser:

Empresa distribuidora	Usuarios
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Disminución de utilidades por energía no vendida</li> <li>• Pago de personal cesante</li> <li>• Pago de multas y sanciones</li> <li>• Pago de compensación a los usuarios</li> <li>• Imagen corporativa</li> </ul>	Dependen de: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Criticidad de la carga</li> <li>• Duración de la interrupción</li> <li>• Tiempo desde la última interrupción</li> <li>• Hora del día y época del año</li> <li>• Oportuno aviso de la interrupción</li> <li>• Experiencia en el manejo de este tipo de situación</li> </ul>

Mientras a nivel de empresas del sector eléctrico y usuarios industriales existen estudios de los costos asociados a las interrupciones, poco es lo que ha hecho con respecto a los otros tipos de usuarios.

Estudios realizados en los países desarrollados muestran que el costo de las interrupciones en el servicio de electricidad depende en gran manera del tipo de usuario y de la duración de la interrupción.

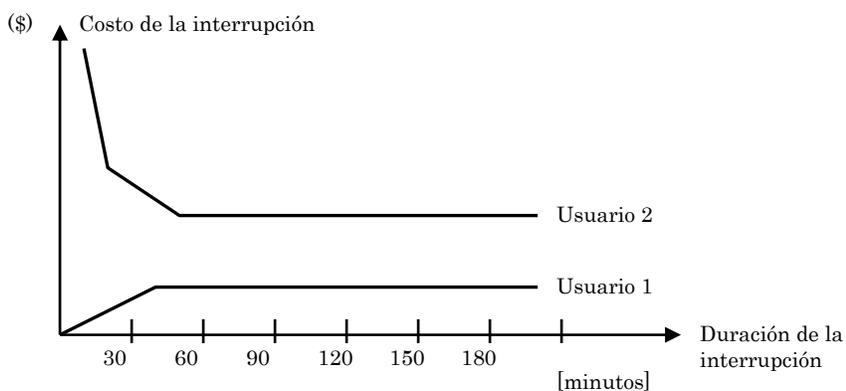


Figura 1.5 Ejemplos de funciones de costo de las interrupciones versus el tiempo

En la Figura 1.5 se muestra un ejemplo de la variación del costo de las interrupciones versus el tiempo de la interrupción para dos tipos diferentes de usuario. Esta función se conoce como función de daño del usuario (“customer damage function”).

Basados en el costo de las interrupciones, la empresa distribuidora y los usuarios deben definir cuál es el nivel de confiabilidad que están dispuestos a ofrecer y a pagar, respectivamente.

### 1.6 ENTIDADES QUE REGULAN LA CONFIABILIDAD

A nivel de componentes, la confiabilidad está regulada por las normas técnicas que cubren su diseño, fabricación y operación (Entorno de aplicación, rangos de uso). Ejemplo de estas entidades son:

Entidad		Alcance
IEC	Internacional Electrotechnical Commision	Equipo eléctrico
NFPA	National Fire Protection Association	Instalaciones eléctricas, equipo contra-incendio
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers	
UL	Underwriter Laboratories	Equipo eléctrico
ASME	American Association of Mechanical Engineers	Equipos mecánicos
ICONTEC	Instituto Colombiano de Normas Técnicas	Materiales, equipos eléctricos, postes de concreto, etc

A nivel de sistemas, la confiabilidad está regulada por las normas técnicas, leyes y resoluciones de entidades encargadas de regular y vigilar la calidad del servicio desde los puntos de vista técnico y comercial. Ejemplo de estas entidades son:

Comision de Regulación de Energía y Gas	Servicios de electricidad y gas
Comisión Nacional de Televisión	Servicio de televisión
Comisión Nacional de Telecomunicaciones	Servicios de radiodifusión y telefonía
Superintendencia de Servicios Públicos	Todos los servicios públicos domiciliarios
National Electric Reliability Council	Servicio de electricidad en Norteamérica

### 1.7 TIPOS DE ANÁLISIS Ó ESTUDIOS EN CONFIABILIDAD

#### 1.7.1 Cualitativo ó cuantitativo

Cualitativo	Cuantitativo
<p>Es una valoración subjetiva. No se establecen índices numéricos.</p> <p>Ejemplos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “No fallará”</li> <li>• “Es muy confiable”</li> <li>• “Este equipo es mejor que aquel”</li> </ul> <p>No sirve para comparar alternativas o hacer análisis económico.</p> <p>Se conoce como “juicio de ingeniería”</p>	<p>Es una valoración objetiva. Se establecen índices numéricos, que pueden ser determinísticos o probabilísticos.</p> <p>Ejemplos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• “Probabilidad de falla del 50%”</li> <li>• “Confiabilidad del 0.995”</li> <li>• “Margen del 20%”</li> </ul> <p>Sin embargo, la probabilidad puede ser establecida mediante un juicio de ingeniería por lo cual también sería subjetivo.</p>

1.7.2 Determinístico o probabilístico

Determinístico	Probabilístico
<p>Las variables se consideran fijas o con funciones que determinan su valor para cualquier instante del tiempo.</p> <p>Ejemplo: Potencia disponible en un generador</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>P = 100</math> [MW]</li> <li>• <math>P = 125 \cdot \sin^2(377 \cdot t \cdot 38^\circ)</math> [MW]</li> <li>• Demanda = (Potencia activa)<sup>1,2</sup></li> </ul> <p>Generalmente, se selecciona el peor escenario lo cual conlleva a sobrediseño.</p> <p>Se conocen todos los factores de las ecuaciones que modelan los componentes o el sistema.</p> <p>No existe incertidumbre con respecto a las ecuaciones a utilizar ni con respecto al valor de sus parámetros.</p>	<p>Las variables se consideran aleatorias, es decir no tienen un valor fijo ni existe una función que permita determinar su valor en un instante de tiempo dado.</p> <p>La ocurrencia de determinados valores de la variable se expresa en términos de probabilidad.</p> <p>Ejemplo: Potencia disponible en un generador</p> $P[MW \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot 10} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-100)^2}{2 \cdot 10^2}} dx$ <p>En este tipo de análisis se puede determinar el “riesgo” del análisis, que en este caso es la probabilidad de que lo que se asume ocurra o no.</p> <p>Existe incertidumbre con respecto al modelamiento del fenómeno físico bajo estudio.</p>

El tipo de modelamiento a utilizar depende de la información de que se disponga para estudiar el fenómeno o proceso de interés.

En los problemas reales de ingeniería se encuentra que lo más común es que no existe la suficiente información o la certidumbre como para establecer los modelos determinísticos. Sin embargo, esta es la forma clásica de modelamiento que es enseñado en las universidades [2], [3], [8].

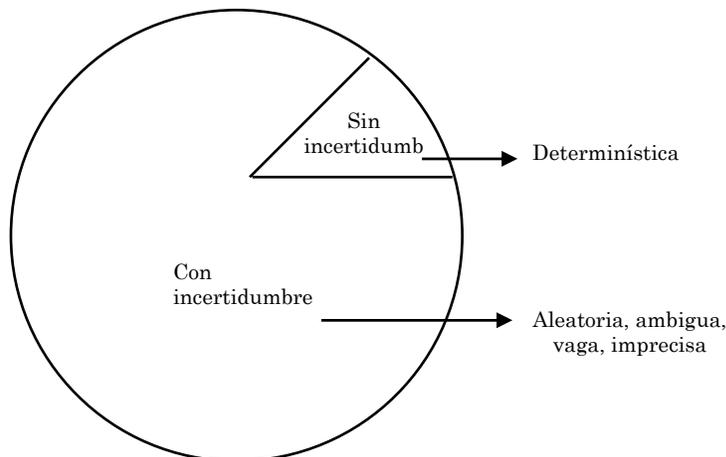


Figura 1.4 Conjunto de información para estudiar un fenómeno o proceso

Cuando se analiza la información disponible para estudiar los fenómenos físicos o procesos, se encuentra que solo una pequeña fracción de ésta es determinística o sin incertidumbre, tal como se muestra en la Figura 1.4 [6].

La incertidumbre en la información aparece por [6]:

1	La falta de conocimiento respecto al fenómeno o proceso bajo estudio
2	La incapacidad para medir u observar en forma precisa el fenómeno o proceso bajo estudio
3	La ambigüedad o vaguedad en la información
4	La complejidad del proceso o fenómeno bajo estudio
5	La aleatoriedad natural del fenómeno

Con el análisis probabilístico se modelan aquellos fenómenos físicos en los cuales existe o se asume que hay incertidumbre debido a la aleatoriedad en la información.

Otros métodos de estudio se utilizan para estudiar fenómenos con incertidumbre, por ejemplo, la lógica difusa. Por lo cual, el análisis probabilístico es sola una forma de modelamiento.

Finalmente, debe mencionarse lo manifestado por Albert Einstein: “Las grandes leyes de la naturaleza son determinísticas” [7], lo cual quiere decir que es nuestra falta de conocimiento o nuestra incapacidad para medir u observar en forma precisa los fenómenos físicos lo que hace que aparezca la incertidumbre y tengamos que utilizar modelamiento como el probabilístico.

Ejemplo
<p>El tiempo para que se forme o geste un ser humano.</p> <p>Este fenómeno físico o proceso es determinístico pues ha funcionado y funciona de la misma forma desde que se tiene conocimiento. Sin embargo, no existe un modelo matemático que permita determinar en forma exacta el momento en que ha de nacer el bebé. Lo único que se conoce empíricamente respecto a este tiempo es que tiene un <u>valor promedio</u> de 9 meses, por lo cual, las observaciones pueden ser mayores o menores a este dato.</p> <p>Entonces, este fenómeno físico tiene incertidumbre y se puede modelar mediante una distribución de probabilidad para el tiempo de nacimiento del bebé. Esta distribución, se construye a partir de los registros de datos de tiempo para varios nacimientos.</p>

### 1.7.3 Analítico o de simulación

Analítico	Simulación
<p>Se representa el componente o sistema bajo estudio por medio de un modelo matemático (ecuación o conjunto de ecuaciones) y se evalúan los índices de confiabilidad por medio de soluciones matemáticas directas.</p> <p>Ejemplos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>P[t_{falla} \leq t] = 1 - e^{-0.25*t}</math></li> <li>• Diagramas de bloques</li> <li>• Proceso de Markov</li> </ul>	<p>Se simula el comportamiento aleatorio del componente o sistema y se evalúan los índices de confiabilidad en forma indirecta por medio de técnicas numéricas.</p> <p>Ejemplo:</p> <p>Simulación de Montecarlo.</p> <p>Este método requiere conocer los modelos matemáticos de los componentes o de algunas variables del proceso aleatorio bajo estudio.</p> <p>Lo que se obtiene artificialmente es la solución de una o varias variables que son función de las variables conocidas y de los cambios en el proceso del sistema.</p>

**1.7.4 Histórico o predictivo**

Histórico	Predictivo
<p>Se estudia el componente o sistema basado en los datos de su comportamiento operativo pasado.</p> <p>Con estos datos se establecen índices históricos o medidas de desempeño que generalmente son estadísticas.</p> <p>Ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Frecuencia de fallas promedio: 8 por año por circuito primario</li> <li>• Tiempo promedio por interrupción: 4 horas</li> </ul>	<p>Mediante un estudio se predicen u obtienen los índices del componente o sistema para un instante de tiempo o periodo de tiempo futuro.</p> <p>Se determinan los valores esperados de los índices de confiabilidad o las funciones de probabilidad.</p> <p>Ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Frecuencia de fallas esperada: 9 por año por circuito primario</li> <li>• Tiempo esperado por interrupción: 3 horas</li> <li>• LOLE: 0.3 días por año</li> </ul> <p>La predicción es la función del planeamiento de sistemas de potencia.</p>

Los registros históricos se utilizan para construir los modelos probabilísticos con los cuales se hace la predicción de valores futuros de las variables aleatorias bajo estudio.

## 1.8 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Billinton R, Allan R, “Reliability evaluation of engineering systems - Concepts and Techniques”, segunda edición, Plenum Press, 1992.
- [2] Torres A, “Probabilidad, variables aleatorias, confiabilidad y procesos estocásticos en ingeniería eléctrica”, Universidad de los Andes, 1996.
- [3] Anders G, “Probability concepts in electric power systems”, Wiley and Sons, 1990.
- [4] Cabau E, “Introducción a la concepción de la garantía de funcionamiento”, Cuaderno Técnico No. 144, Schneider Electric, 2000. Disponible en [www.schneiderelectric.es](http://www.schneiderelectric.es)
- [5] Sotskov B, “Fundamentos de la teoría y del cálculo de fiabilidad de elementos y dispositivos de automatización y técnica de cálculo”, Editorial Mir, 1972.
- [6] Tan Y, “Damage of a distribution transformer due to through-fault currents: An electrical forensics viewpoint”, IEEE Trans. Industry Applications, Vol. 38, No. 1, Enero/Febrero, 2002.
- [7] Whitrow G. J, “Einstein – The man and his achievement”, Dover publications, 1973.
- [8] Ross T. J, “Fuzzy logic with engineering applications”, Mc-Graw Hill, 1995.
- [9] Billinton R, Allan R, “Reliability evaluation of power systems”, Plenum Press, 1996.
- [10] CIGRE, “Power system reliability analysis – Application guide”, 1987.
- [11] IEEE, “Power system reliability evaluation”, tutorial course 82 EHO 195-8-PWR, IEEE, 1982.
- [12] Ascher H, Feingold H, “Repairable systems reliability: Modeling, inference, misconceptions and their causes”, Marcel Dekker, 1984.

## CAPÍTULO 2 – TIPOS DE COMPONENTES Y SISTEMAS

### 2.1 QUÉ ES UN COMPONENTE Y QUÉ ES UN SISTEMA

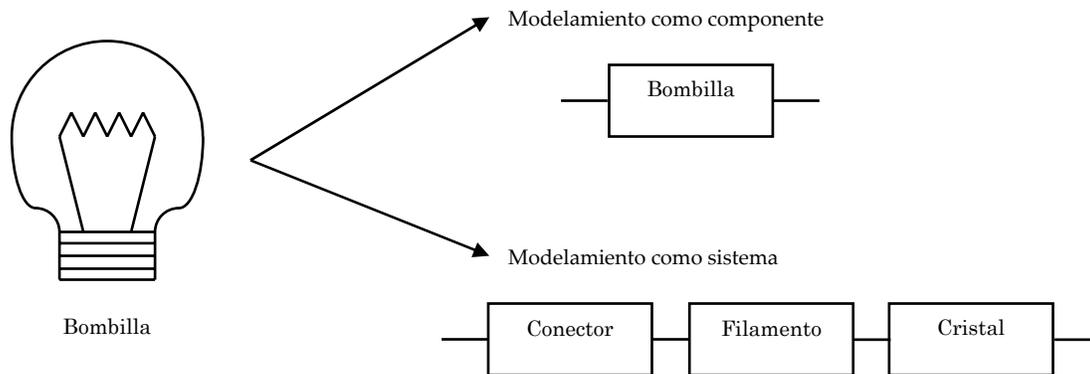


Figura 2.1 Ejemplo de modelamiento de un ítem como componente o sistema

La confiabilidad de un ítem dado depende de la confiabilidad de los componentes que lo conforman y de su configuración operativa, es decir, de sus modos de falla.

Si para un ítem dado interesa estudiar el efecto sobre su confiabilidad de la confiabilidad individual de cada uno de sus componentes y de su configuración operativa, el ítem debe ser tratado como un sistema.

Sí por el contrario, solo se desea estudiar la confiabilidad del ítem como un todo sin detallar en lo que sucede internamente, éste puede ser tratado como un componente.

En la Figura 2.1 se presenta un ejemplo de un ítem que es tratado como componente y como sistema.

Ascher y Feingold en la Referencia [1], presentan las siguientes definiciones:

Parte	Un ítem que no es sujeto a desensamblaje y se descarta la primera vez que falla.
Socket	Una posición en un circuito o equipo que en un momento dado porta una parte de un tipo dado.
Sistema	Una colección de dos o más sockets con sus partes asociadas los cuales están interconectados para realizar una o más funciones. Un sistema puede ser considerado como una “parte” de un sistema mayor.

En este documento se adoptan las siguientes definiciones:

<i>Se denomina componente a una parte, subsistema o sistema que será modelado como un ítem que hace parte de un sistema o que se estudiará aislado en forma global.</i>
<i>Se denomina sistema a una conjunto de componentes o subsistemas</i>

Así, las definiciones de componente y sistema son intercambiables, su uso depende del tipo de estudio a realizar.

## 2.2 CLASIFICACIÓN DE COMPONENTES Y SISTEMAS POR TIPO DE FUNCIONAMIENTO

### 2.2.1 Orientados a una misión

Deben operar sin falla durante un tiempo estipulado que se denomina “tiempo de misión”. Se aceptan fallas de algunos de los subcomponentes siempre y cuando el componente o sistema continúe cumpliendo su función.

En este tipo de componentes y sistemas, existen dos formas operativas:

- El componente o sistema empieza a operar una vez se chequea y se encuentra operable.

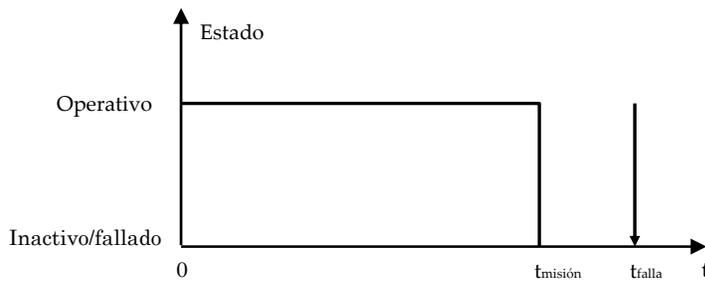


Figura 2.2 Ciclo operativo de un componente o sistema orientado a una misión

Ejemplos
Avión, cohete; en estos casos el tiempo de misión es el tiempo de vuelo

- El componente o sistema queda activo (“idle”) una vez se chequea y se encuentra operable. Después de un tiempo aleatorio empieza su misión.

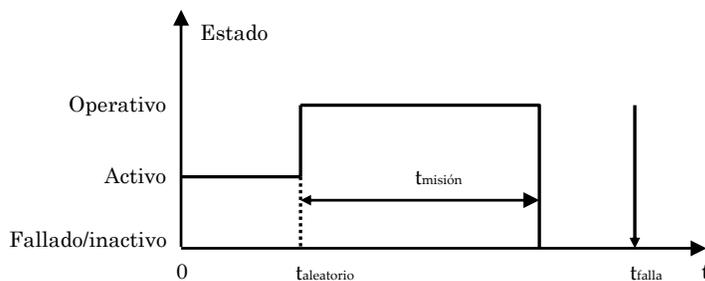


Figura 2.3 Ciclo operativo de un componente o sistema cuya misión empieza después de un tiempo aleatorio

Ejemplos
Relés de protección, alarma; En el primer caso, el tiempo de misión es el tiempo para disparo o setting del relé. El tiempo aleatorio en que se inicia la misión es el tiempo en que ocurre la falla en el componente o sistema protegido (no en el relé)

Para estos componentes o sistemas se establece la función de vida con la cual se puede determinar el tiempo esperado para falla o “vida media del componente”. Como las fallas son eventos de naturaleza aleatoria, la función de vida es una función de probabilidad.

Estos componentes o sistemas pueden someterse a procesos de reparación una vez fallan, o de mantenimiento preventivo una vez cumplen su misión. Generalmente, estos procesos no se incluyen en el

modelamiento que del componente o sistema se hace para la misión, por lo cual, se consideran “no reparables”. Sin embargo, no siempre tiene que ser así, pues también se puede modelar toda la vida operativa del componente o sistema (proceso de nacimiento y muerte).

### 2.2.2 Continuamente operados

Operan en forma continua. Se toleran los estados de indisponibilidad siempre y cuando estos no sean muy frecuentes o muy prolongados.

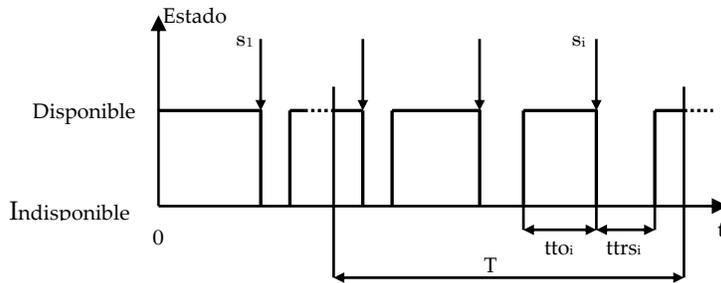


Figura 2.4 Ciclo operativo de un componente o sistema continuamente operado

Ejemplos	
Sistema eléctrico de potencia, Sistema de TV por cable, radiodifusión, sistema de agua potable, refrigerador.	

En estos componentes y sistemas se habla en general de las “salidas” que afectan su disponibilidad. Las salidas pueden ser:

Tipo de salida	Descripción	Ejemplo
No planeadas	No se conoce cuándo ocurrirán	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fallas propia de componente o sistema</li> <li>Vandalismo</li> <li>Incendios, inundaciones, terremotos, etc</li> </ul>
Planeadas	Se conoce de antemano cuándo ocurrirán. Se pueden posponer	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mantenimiento preventivo</li> <li>Ampliación/mejoramiento del sistema</li> <li>Solicitud de entidad externa</li> </ul>

Las salidas definen la secuencia operativa o secuencia de estados de disponibilidad e indisponibilidad mostrada en la Figura 2.4.

No se consideran en la secuencia mostrada: salidas simultáneas, que el componente pueda ser reparado mientras opera (falla parcial), ni que el componente vuelva a fallar mientras es reparado.

Cada salida ( $s_i$ ) tiene asociado un tiempo para salida ( $t_{toi}$ ) y un tiempo para restauración ( $t_{trsi}$ ), los cuales son independientes entre sí en cuanto a su duración.

Los  $t_{toi}$  de las salidas no planeadas son aleatorios; para las salidas planeadas son determinísticos, al menos para el corto plazo.

Los tiempos para restauración se denominan tiempos para reparación si la salida es no planeada; para las salidas planeadas se denomina tiempo para reconexión.

En general, los tiempos para restauración son aleatorios sin importar que la salida sea planeada o no planeada pues dependen del tipo de falla, la ubicación del componente que falló, la cantidad de personal y equipo para las actividades de mantenimiento, el entrenamiento del personal de mantenimiento, etc.

El cero en la secuencia operativa es el momento en el cual el componente inicia su operación “nuevo”. Sin embargo, usualmente solo se dispone de una muestra de datos registrados durante un periodo de tiempo T. El número de fallas en un periodo de tiempo T es aleatorio.

Estos componentes o sistemas pueden tener subcomponentes de tipo orientado a una misión los cuales, cuando fallan, se reparan mediante el reemplazo.

En este tipo de componente o sistema interesa conocer para un periodo de tiempo dado, generalmente de un año, cuál es la fracción de tiempo en la cual se encuentra cumpliendo su función u operando.

En el modelamiento del componente se incluyen los procesos de restauración de las salidas, por lo cual, se consideran “reparables”.

**2.2.3 Reparables y no reparables**

<p>Sistema o componente no reparable</p>	<p>Aquel que se descarta la primera vez que deja de operar satisfactoriamente (falla). Ejemplos: Pastilla de frenos, empaque plástico, aislador eléctrico</p>
<p>Sistema o componente reparable</p>	<p>Aquel que una vez falla en cumplir al menos una de sus funciones puede ser restaurado para que cumpla todas sus funciones mediante cualquier método (reparación, ajuste, etc.) excepto el reemplazo del componente o sistema completo. Ejemplos: Plancha eléctrica, sistema eléctrico de potencia</p>

Un sistema no reparable puede ser considerado como una “parte” de un sistema mayor no reparable o reparable; a su vez, el sistema no reparable también puede tener trayectorias reparables.

Un sistema reparable puede tener partes o subsistemas reparables y no reparables.

Como se observa, estas definiciones no permiten una clasificación única; un mismo ítem puede ser tratado como parte, como sistema reparable o como sistema no reparable; la aplicación de cada una de estas definiciones y del correspondiente tipo de modelamiento que cada una de ellas implica depende entonces del tipo de estudio de confiabilidad que se pretende realizar, es decir, de su nivel de detalle y objetivos.

**2.2.4 Cuál tipo de modelamiento utilizar?**

Un componente o sistema se puede considerar como orientado a una misión, continuamente operado, reparable o no reparable dependiendo del tipo de estudio a adelantar.

Tipo de componente o sistema	Modelo	Tipo de estudio
Orientado a una misión	Modelo no reparable	En estudios donde interesa la vida esperada del componente o sistema dentro de una misión.  Por ejemplo, para determinar la garantía que un fabricante puede ofrecer sobre el producto o para que el usuario determine el tiempo para reemplazo del componente.
	Modelo reparable	Estudios donde interesa el número esperado de misiones que puede servir antes de descartarlo.
Continuamente operado	Modelo reparable	Interesa estudiar la disponibilidad del componente y su efecto sobre el sistema al que pertenece.

Ejemplo: Un transformador de distribución
<ul style="list-style-type: none"> <li>El fabricante lo estudia con un modelo no reparable para determinar su vida esperada y ofrecer la garantía del producto. El modelo representará varios componentes iguales.</li> <li>El operador del sistema lo estudia con un modelo reparable para incluirlo en los estudios de fallas o de disponibilidad a nivel de sistema. Si las reparaciones se hacen con reemplazo, el modelo considera componentes que proceden de diversos fabricantes y tienen diferente edad.</li> </ul>

### 2.3 TIPOS DE ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD

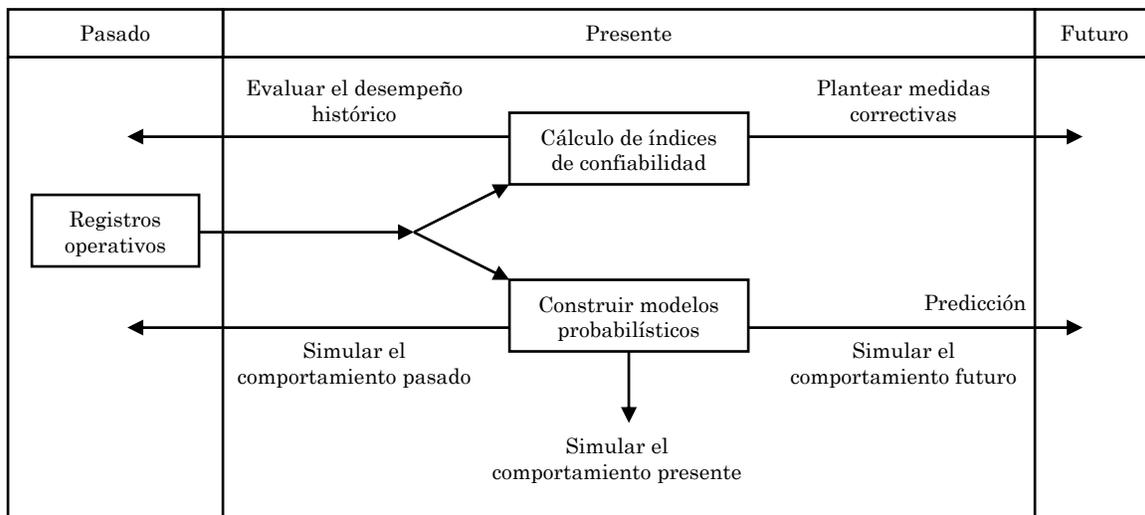


Figura 2.5 Tipos de análisis de confiabilidad de componentes

Basados en los registros operativos de un componente o grupo de componentes idénticos se pueden realizar las siguientes actividades:

1	Calcular índices de confiabilidad que son estadísticas descriptivas; por ejemplo, el tiempo promedio para falla, las horas de indisponibilidad por año, etc.
2	Construir modelos probabilísticos que representen al componente

Con los índices de confiabilidad se pueden hacer los siguientes análisis:

1	Evaluar el desempeño del componente con respecto a valores de referencia u objetivo
2	Plantear medidas correctivas para mejorar la confiabilidad del componente.

Con los modelos probabilísticos se pueden hacer los siguientes análisis:

1	Simular la operación pasada y presente del componente
2	Predecir el comportamiento futuro del componente

En este caso “simular” se refiere al hecho de que el modelo es una representación de un fenómeno real, no a que el método de solución sea numérico.

## 2.4 TIPOS DE MODELOS PROBABILÍSTICOS

### 2.4.1 Interno o externo

Modelo interno	Modelo externo
Se plantea un modelo probabilístico en términos de las variables que describen el fenómeno físico, físico-químico, biofísico etc que produce la transición del estado “bueno” al estado “fallado”.  Es decir se estudia lo que pasa dentro del componente.	Se plantea un modelo probabilístico únicamente en términos del tiempo de transición del estado “bueno” al estado “fallado”.  Este modelo es “externo” pues no se ocupa de lo que sucede internamente en el componente para que pase del estado “bueno” al estado “fallado”.  Este tipo de modelo es completamente estadístico.

En este documento solo se trata el tipo de modelamiento externo; para ejemplos del modelamiento interno consultar la Referencia [5].

2.4.2 Dos estados o multiestado

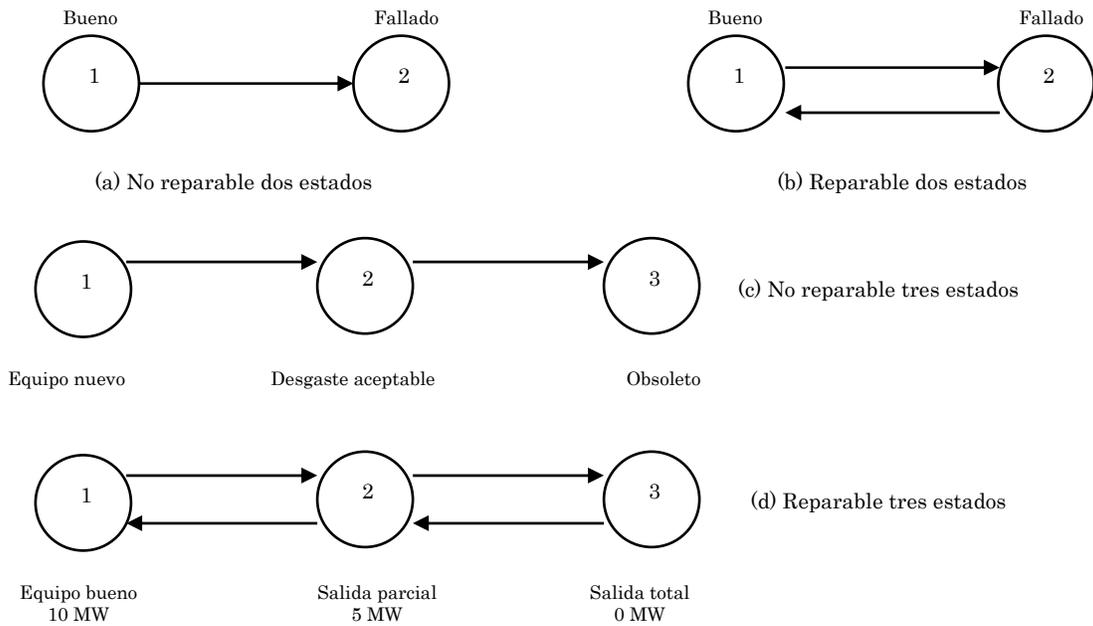


Figura 2.6 Ejemplos de diagramas de estados para componentes reparables y no reparables

Modelo de dos estados	Modelo multiestado
<p>En este modelo solo existen dos estados operativos de interés: el estado de operación satisfactoria y el estado de falla.</p> <p>Es el modelamiento más utilizado.</p> <p>Se utilizan distribuciones de probabilidad sencillas para el componente no reparable y procesos estocásticos para el componente reparable</p>	<p>En este modelo se definen varios estados operativos de interés.</p> <p>Cuando solo es posible la transición entre estados adyacentes, este modelo se denomina “proceso de nacimiento y muerte”.</p> <p>Se utilizan procesos estocásticos.</p>

En la figura 2.6 se presentan varios ejemplos de estos tipos de modelos.

### 2.5 REGISTROS OPERATIVOS REQUERIDOS

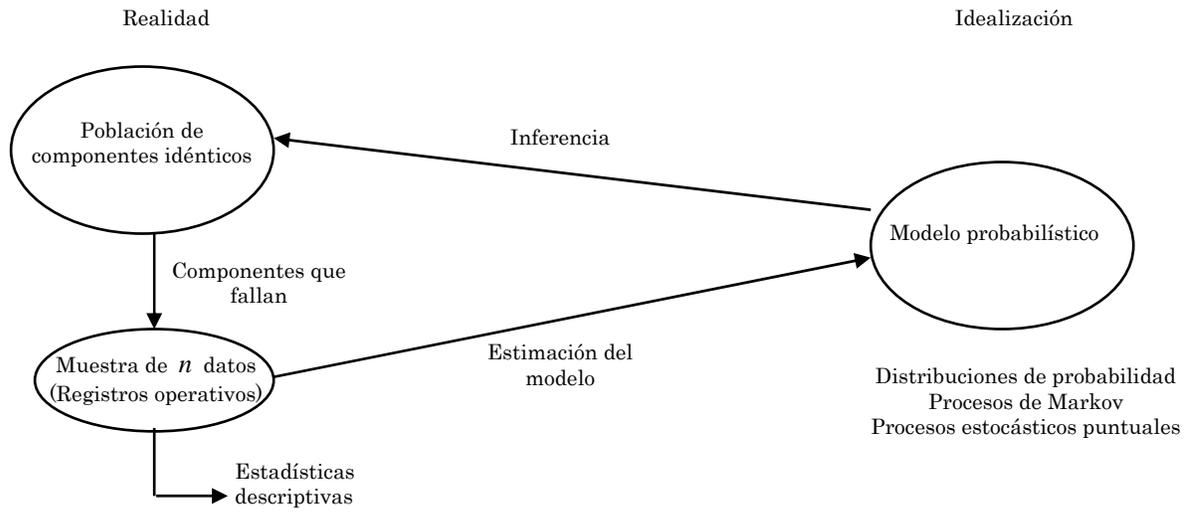


Figura 2.7 Procedimiento para construir modelos probabilísticos de componentes

En la Figura 2.7 se presenta el procedimiento de construcción de modelos probabilísticos y cálculo de los índices de confiabilidad; los registros operativos requeridos son:

Componente no reparable	Componente reparable
<p>Una muestra de <math>n</math> tiempos para falla <math>ttf_1, ttf_2, \dots, ttf_n</math>.</p> <p>Esta muestra corresponde a <math>n</math> componentes idénticos de una población dada que fallaron.</p>	<p>Una muestra de <math>n</math> tiempos para falla <math>ttf_1, ttf_2, \dots, ttf_n</math> con sus correspondientes tiempos para reparación <math>ttr_1, ttr_2, \dots, ttr_n</math>.</p> <p>Esta muestra puede corresponder a un componente que falló <math>n</math> veces ó a <math>n</math> fallas observadas en un grupo de componentes idénticos.</p>

Sin embargo, es común el disponer únicamente de la siguiente muestra:

Componente no reparable	Componente reparable
<p>El reporte de que <math>n</math> componentes idénticos de una población de tamaño <math>N</math> fallaron durante un periodo de observación <math>T</math>.</p>	<p>El reporte de que un componente ó un grupo de componentes idénticos de una población de tamaño <math>N</math> falló ó fallaron <math>n</math> veces durante un periodo de observación <math>T</math> y los correspondientes tiempos para reparación <math>ttr_1, ttr_2, \dots, ttr_n</math>.</p>

Nota: Si los componentes bajo estudio son de tipo lineal como líneas de transmisión, cables, tuberías, etc,  $N$  se expresa en unidades longitudinales, por ejemplo, en [km].

Este último tipo de muestra sólo permite calcular estadísticas descriptivas aproximadas que implican asumir la distribución exponencial, y por lo tanto, que los componentes están en su periodo de vida útil.

Es común el agrupar la información de varios componentes similares por las siguientes razones:

1	Se aumenta la muestra de datos. Esto es especialmente útil en componentes que tienen tasas de falla muy bajas o donde los tiempos de registro disponibles son pequeños
2	Se desea obtener índices de confiabilidad ó modelos probabilísticos para un solo componente que represente al grupo, no para cada uno de los componentes. Esta situación es común en sistemas con grandes cantidades de componentes del mismo tipo; por ejemplo, los sistemas de distribución de energía eléctrica

Algo muy importante a verificar cuando se hacen estas agrupaciones es la homogeneidad de la población y de los datos.

### 2.6 TASA DE FALLAS DURANTE LA VIDA DE UN COMPONENTE O SISTEMA

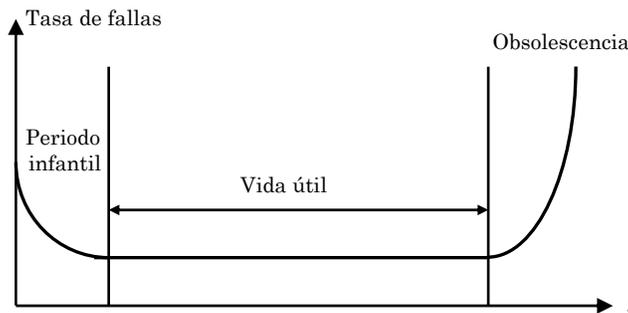


Figura 2.8 Tasa de fallas de un componente o sistema

*Se denomina tasa de fallas  $\lambda$  de un componente o sistema a la relación entre el número de fallas que experimenta el componente por unidad de tiempo en que se encuentra operando*

En confiabilidad es común asumir que la tasa de fallas durante la vida operativa de un componente reparable o no reparable sigue la curva en forma de tina (bath-tub) presentada en la Figura 2.8. La Referencia [3] cita que, al parecer, el origen de esta curva se remonta a 1693. Esta curva tiene tres periodos:

Infantil	Vida útil	Obsolescencia
<p>La tasa de fallas decrece con el tiempo.</p> <p>Las fallas ocurren debido a errores de diseño o fabricación.</p> <p>Una vez se revisa el diseño o se ajusta el componente empieza su vida útil.</p> <p>Otros nombres: early life, debugging time, break-in period, burn-in period.</p>	<p>La tasa de fallas es constante y tiene el valor más bajo.</p> <p>Las fallas ocurren en forma completamente aleatoria.</p> <p>Entonces, el asumir que un componente tiene tasa de fallas constante implica asumir que está en su vida útil y viceversa.</p>	<p>La tasa de fallas crece con el tiempo.</p> <p>Otros nombres: wear-out period.</p>

Si se asume que un componente tiene una tasa de fallas constante su función de vida será la distribución exponencial o el proceso de Poisson homogéneo y viceversa.

Dependiendo de la tasa de fallas encontrada en los registros operativos debe escogerse la distribución de probabilidad que modele los tiempos para falla del componente.

Algunos investigadores cuestionan la validez de esta curva [1], [3], sin embargo esta profusamente difundida en la literatura técnica y es ampliamente utilizada.

### 2.7 DIAGRAMAS DE RED

Un sistema se puede representar por medio de un diagrama de red, bloques o lógico en el cual, cada componente se representa como un bloque independiente de los otros componentes; la conexión entre componentes dependerá de la configuración operativa del sistema. Este tipo de modelamiento se puede aplicar si el sistema es una estructura monotónica, aquella donde se cumple que:

1	Cada componente solo tiene dos estados: “bueno” y “fallado”, “disponible” e “indisponible”, etc.
2	El sistema solo tiene dos estados: “bueno” y “fallado”, “disponible” e “indisponible”, etc.
3	El sistema está operando si todos los componentes están operando.
4	El sistema está fallado o indisponible si todos los componentes han fallado o están indisponibles
5	La falla de un componente en un sistema ya fallado no puede restaurar el sistema a la operación
6	La reparación de un componente en un sistema operativo no puede causar la falla del sistema.

Un diagrama de red indica cuáles combinaciones de fallas de los componentes resultarán en la falla del sistema. Si un componente falla o está indisponible, se remueve del diagrama de red. Si se retiran suficientes bloques del diagrama de red de tal forma que se interrumpe la conexión entre los puntos de entrada y salida, el sistema ha fallado o queda indisponible.

Para modelar un sistema por medio de un diagrama de red se sigue el siguiente procedimiento:

1	Dividir el sistema en componentes	Los modos de falla de las secciones o subsistemas del sistema que se representen como bloques del diagrama de red <u>tienen que ser independientes</u> entre sí.  Debido a la dependencia entre los modos de falla de los componentes y a lo complejo de las configuraciones operativas, a veces, puede ser difícil establecer el diagrama de red de un sistema.
2	Conectar entre sí los componentes según la configuración operativa del sistema	Se definen las conexiones básicas serie y paralelo desde el punto de vista de confiabilidad. Otras conexiones más complejas también son posibles.

Los tipos básicos de conexión de los bloques de un diagrama de red son:

Conexión serie	Conexión paralelo
 <p>Dos componentes están en serie desde el punto de vista de confiabilidad si ambos deben operar para que el sistema opere. Si uno de los componentes falla, el sistema falla.</p> <p>Esta conexión representa un sistema no redundante.</p>	 <p>Dos componentes están en paralelo desde el punto de vista de confiabilidad si únicamente un componente debe operar para que el sistema opere. Todos los componentes deben fallar para que el sistema falle.</p> <p>Esta conexión representa un sistema redundante.</p>

Tener en cuenta que:

1	<p>El diagrama de red y el sistema real no tienen necesariamente la misma topología.</p> <p>La topología física indica cómo están conectados entre sí los componentes en el sistema real, mientras que la topología del diagrama de bloques representa la configuración operativa del sistema, es decir, sus modos de falla.</p>
2	<p>Un sistema físico con una estructura topológica definida puede tener diferentes topologías de red en cuanto a confiabilidad dependiendo de los requerimientos a los cuales es sometido.</p>

**EJEMPLO 2.1**

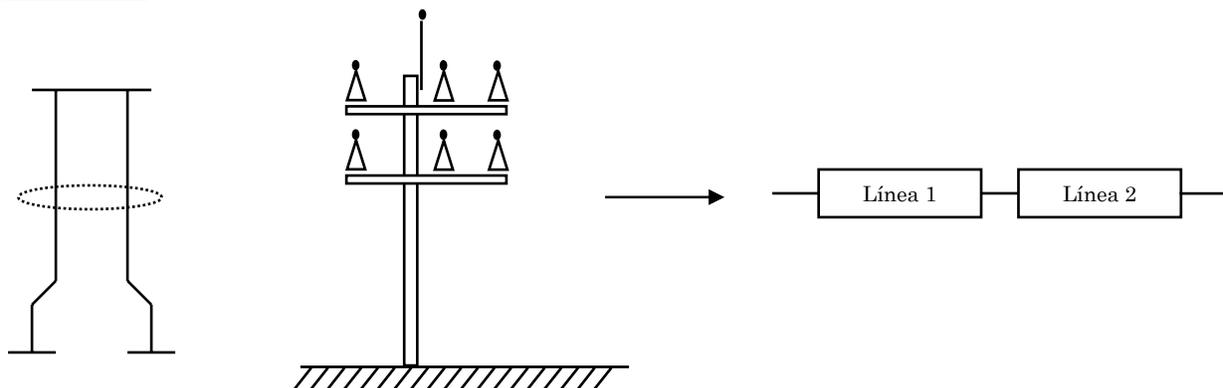


Figura 2.9 diagrama de red para dos líneas de distribución instaladas sobre la misma estructura

Un sistema eléctrico cuenta con dos líneas de distribución de media tensión las cuales salen de una misma subestación y van a dos puntos de producción diferentes. En la Figura 2.9 se muestra el diagrama eléctrico y la configuración física. Aunque las líneas de distribución están eléctricamente en paralelo, en cuanto a confiabilidad están conectadas en serie pues al compartir las mismas estructuras cualquier falla en éstas implica la salida de ambas líneas. Además, las labores de reparación o mantenimiento en una de las líneas requerirán la desconexión de la otra.

**EJEMPLO 2.2**

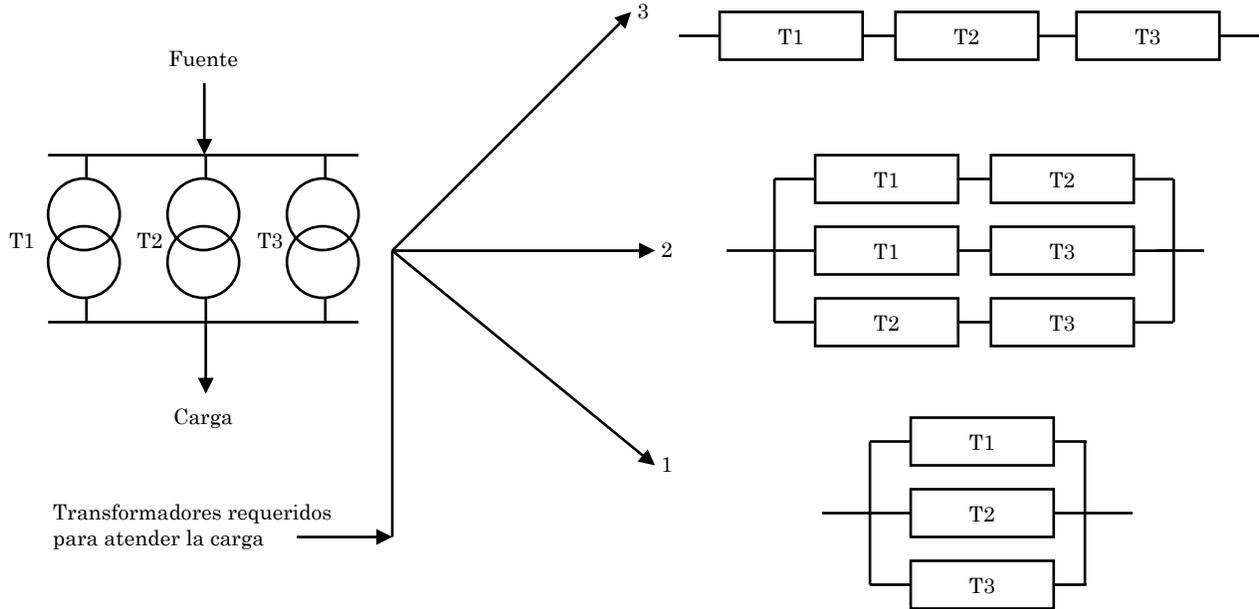


Figura 2.10 Diagramas de red para un sistema eléctrico con varios requerimientos operativos

Un sistema eléctrico cuenta con tres transformadores de distribución conectados en paralelo para atender una carga. En la Figura 2.10 se muestra el diagrama eléctrico y los diagramas de red de confiabilidad para diferentes requerimientos operativos.

## 2.8 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Billinton R, Allan R, “Reliability evaluation of engineering systems - Concepts and Techniques”, segunda edición, Plenum Press, 1992.
- [2] Torres A, “Probabilidad, variables aleatorias, confiabilidad y procesos estocásticos en ingeniería eléctrica”, Universidad de los Andes, 1996.
- [3] Anders G, “Probability concepts in electric power systems”, Wiley and Sons, 1990.
- [4] Cabau E, “Introducción a la concepción de la garantía de funcionamiento”, Cuaderno Técnico No. 144, Schneider Electric, 2000. Disponible en [www.schneiderelectric.es](http://www.schneiderelectric.es)
- [5] Sotskov B, “Fundamentos de la teoría y del cálculo de fiabilidad de elementos y dispositivos de automatización y técnica de cálculo”, Editorial Mir, 1972.
- [6] Tan Y, “Damage of a distribution transformer due to through-fault currents: An electrical forensics viewpoint”, IEEE Trans. Industry Applications, Vol. 38, No. 1, Enero/Febrero, 2002.
- [7] Whitrow G. J, “Einstein – The man and his achievement”, Dover publications, 1973.
- [8] Ross T. J, “Fuzzy logic with engineering applications”, Mc-Graw Hill, 1995.
- [9] Billinton R, Allan R, “Reliability evaluation of power systems”, Plenum Press, 1996.
- [10] CIGRE, “Power system reliability analysis – Application guide”, 1987.
- [11] IEEE, “Power system reliability evaluation”, tutorial course 82 EHO 195-8-PWR, IEEE, 1982.
- [12] Ascher H, Feingold H, “Repairable systems reliability: Modeling, inference, misconceptions and their causes”, Marcel Dekker, 1984.

### CAPÍTULO 3 – COMPONENTES NO REPARABLES

#### 3.1 MODELO DE DOS ESTADOS

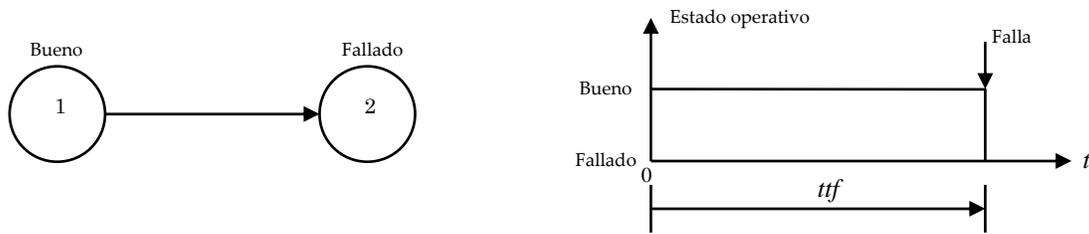


Figura 3.1 Diagrama de estados de un componente no reparable y su secuencia operativa en el tiempo

El modelo de confiabilidad básico y tradicional para componentes no reparables es el de dos estados que se muestra en la parte izquierda de la Figura 3.1. A la derecha de esta figura, se muestra la secuencia operativa del componente. La transición del estado “bueno” al estado “fallado” ocurre en un tiempo para falla aleatorio  $t_{ff}$  (time to failure), el cual indica cuánto vive el componente.

La variable  $t$  representa el tiempo de operación del componente. En  $t = 0$  el componente se pone en servicio estando nuevo y bueno. En  $t = \infty$  el componente habrá fallado.

El tiempo de operación  $t$  siempre se refiere a un periodo de tiempo que se encuentra referenciado con respecto al cero. No debe pensarse que  $t$  es un instante de tiempo.

La falla de un solo componente no reparable da:

1	Un dato de tiempo para falla
2	El registro de que ocurrió una falla en un periodo dado de observación $T$ , sin que necesariamente, se haya registrado el tiempo para falla del componente

Así, no es posible medir ni modelar la confiabilidad de un solo componente no reparable. Para esto, se requiere una muestra aleatoria representativa de tiempos para falla tomada de una población con  $N$  componentes idénticos al que interesa estudiar y en la cual  $n$  componentes fallaron. Esta muestra permite hallar el modelo de confiabilidad y los índices estadísticos de confiabilidad, tal como se ilustra en la Figura 3.2.

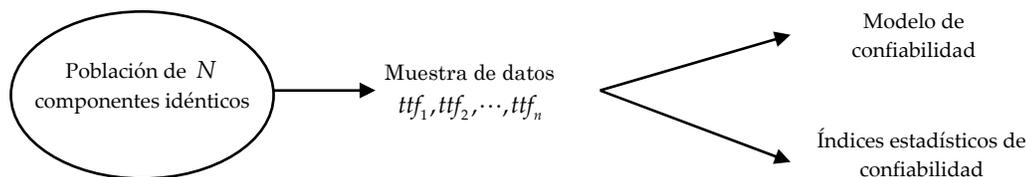


Figura 3.2 Muestra de tiempos para falla de componentes no reparables

El modelo de confiabilidad del componente no reparable es la función de distribución de probabilidad del tiempo para falla  $F(t)$  o la correspondiente función de densidad de probabilidad  $f(t)$ .

### 3.2 TOMA DE LA MUESTRA DE DATOS

La muestra de datos aleatoria y representativa puede tomarse:

1	Observando el proceso de fallas en la población de $N$ componentes hasta que se registren $n$ fallas.	En este caso, no se sabe cuál será el tiempo del estudio $T$ .
2	Observando el proceso de fallas en la población de $N$ componentes durante un periodo $T$ .	En este caso, no se sabe cuál será el tamaño de muestra $n$ .

En ambos casos, es importante conocer el error de estimación que existe para el tamaño de muestra  $n$ .

Tal como se muestra en la figura 3.3, cada  $t_{ff}$  se mide con respecto al instante en el cual el componente fallado fue puesto en servicio estando nuevo. Es decir, no es necesario que todos los componentes se pongan a operar en el mismo instante de tiempo.

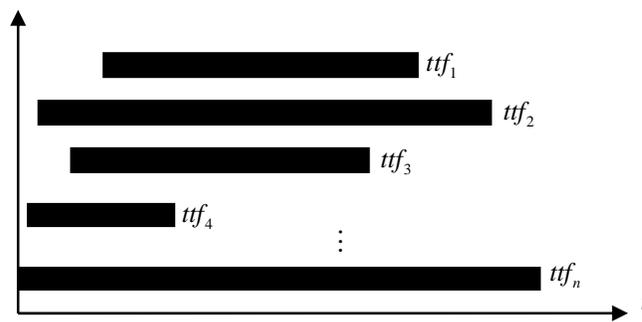


Figura 3.3 Muestra de tiempos para falla de componentes no reparables

En la práctica, es usual que la muestra de datos se tome de registros operativos y en muchas ocasiones aparecen los siguientes problemas:

1	Se tiene el registro de que $n$ fallas ocurrieron en un periodo $T$ pero no se cuenta con los tiempos para falla de cada uno de los componentes que fallaron.	En este caso, no se puede hallar el modelo de confiabilidad del componente, sólo índices estadísticos de confiabilidad.
2	Se tienen el registro del instante en que $n$ componentes fallaron en un periodo $T$ , pero no se conoce el instante en que estos componentes fueron puestos en servicio.	En este caso, no se puede hallar el modelo de confiabilidad del componente, sólo índices estadísticos de confiabilidad.
3	Se tienen los tiempos para falla de $n$ componentes que fallaron en un periodo $T$ pero no se conoce el tamaño de la población de componentes que estaba en servicio en este periodo.	En este caso, se puede hallar el modelo de confiabilidad del componente y los índices estadísticos de confiabilidad, pero no se puede establecer si esta muestra es representativa ni el error de estimación al utilizarla.

### 3.3 CÓMO CONSTRUIR EL MODELO PROBABILÍSTICO

Para hallar el modelo de confiabilidad de un componente no reparable, se recomienda aplicar el procedimiento mostrado en la Figura 3.4.

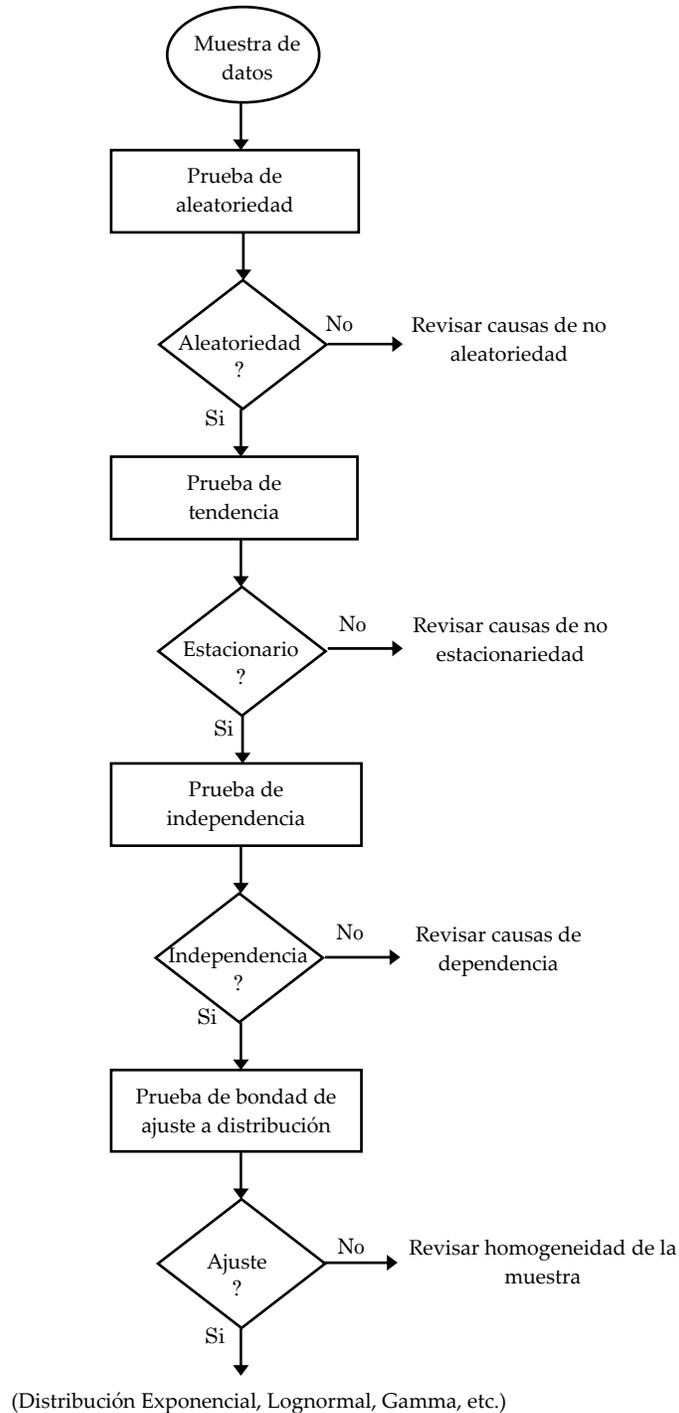


Figura 3.4 Procedimiento para hallar el modelo de confiabilidad de un componente no reparable

La aleatoriedad, tendencia e independencia se pueden hallar por medio de pruebas estadísticas o del análisis de las condiciones bajo las cuales se desarrolla el proceso de fallas de los componentes no reparables (razonamiento puro).

En la práctica, lo que ha sido recomendado en diversas referencias, es directamente probar el ajuste de los datos a una distribución, porque:

1	Los tiempos para falla son de naturaleza aleatoria
2	La falla de un componente es independiente de la falla de otros componentes
3	Sí los componentes bajo estudio son idénticos, tienen la misma distribución de probabilidad (homogeneidad)

Sin embargo, no se menciona en estos argumentos el concepto de tendencia.

Algo importante a tener en cuenta cuando se aplican las pruebas para la aleatoriedad, tendencia e independencia, es que si éstas se realizan sobre una muestra de tiempos para falla referenciados a un mismo origen, dichas pruebas fallan porque los datos aparecen cronológicamente ordenados en forma creciente. Así, en este caso, un procedimiento a seguir antes de aplicar estas pruebas es:

1	Obtener los tiempos inter-arribo de fallas $tbf$ (Time between failures). Ver la Figura 3.5.
2	Aplicar a la muestra de tiempos inter-arribo de fallas las pruebas de aleatoriedad, tendencia e independencia. Recordar, que para estas pruebas es obligatorio conservar el orden cronológico de los datos.

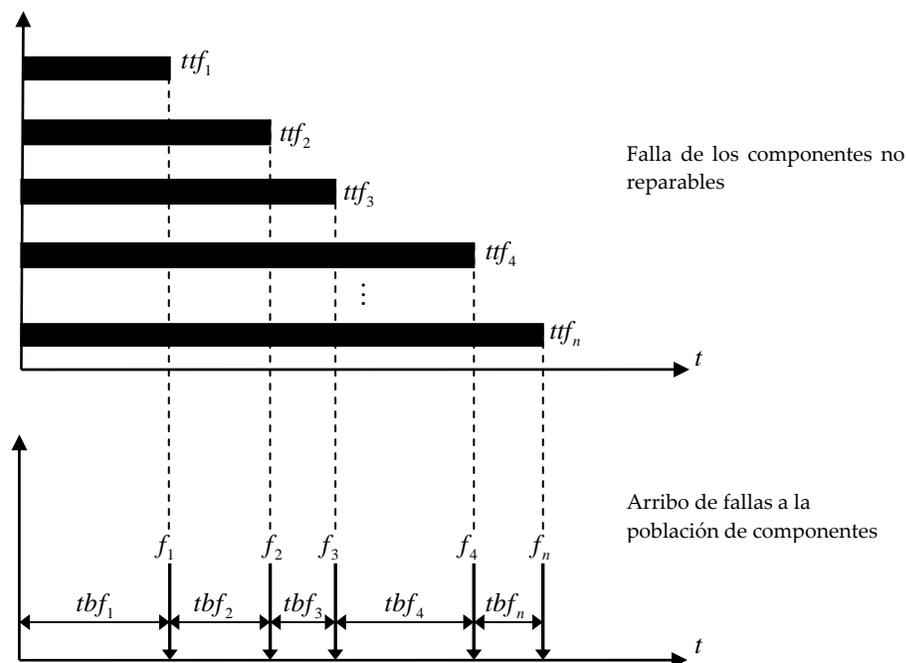


Figura 3.5 Cálculo de los tiempos inter-arribo de fallas

La muestra de tiempos inter-arribo de fallas también permite estudiar el proceso de llegada de fallas a la población de componentes no reparables.

### 3.4 EL MODELO DE CONFIABILIDAD DEL COMPONENTE

El modelo de confiabilidad del componente no reparable se define mediante:

$F(t)$	La función de distribución de probabilidad del tiempo para falla	$F(t) = P[ttf \leq t]$	$F(0) = P[ttf \leq 0] = 0$ $F(\infty) = P[ttf \leq \infty] = 1$
$f(t)$	La función de densidad de probabilidad del tiempo para falla	$f(t) = dF(t) / dt$	$F(t) = \int_0^t f(t)dt$

De este modelo también se definen:

$E(ttf)$	El valor medio o esperado de tiempo para falla del componente. También, es la vida media o esperada.	$E(ttf) = \int_0^{+\infty} t f(t).dt$
$VAR(ttf)$	La varianza del tiempo para falla del componente	$VAR(ttf) = \int_0^{+\infty} [t - E(t)]^2 f(t).dt$

El valor esperado es un pronóstico sobre cuánto vivirá el componente no reparable, no es el valor más probable ni el más frecuente.

La varianza indica cuanto se desviarán los tiempos para falla de los componentes con respecto al valor esperado. Es decir, indica lo acertado o pobre del pronóstico dado por el valor esperado.

La confiabilidad del componente no reparable se define como:

$R(t)$	Es la probabilidad de sobrevivir a un tiempo dado	$R(t) = 1 - F(t) = P[ttf > t]$	$R(0) = P[ttf > 0] = 1$ $R(\infty) = P[ttf > \infty] = 0$
--------	---	--------------------------------	--

El modelo probabilístico obtenido corresponde a un componente medio o típico que representa a cualquiera de los componentes de la población.

La relación entre las funciones  $F(t)$  y  $f(t)$  también se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{P[t < ttf \leq (t + \Delta t)]}{\Delta t}$$

De donde se obtiene que:

$$P[t < ttf \leq (t + \Delta t)] \approx f(t)\Delta t$$

### 3.5 LA TASA DE FALLAS

Considere un componente no reparable que ha operado hasta un tiempo  $t$  y se quiere conocer cuál es la probabilidad de que falle en un periodo subsiguiente  $\Delta t$ .

Definiendo:

$A$  : El evento de que el componente falle en  $\Delta t$

$B$  : El evento de que el componente sobreviva hasta  $t$

Se tiene que:

$$P[B] = P[ttf > t] = 1 - P[ttf \leq t] = 1 - F(t) = R(t)$$

$$P[A \cap B] = P[t \leq ttf \leq (t + \Delta t)] = F(t + \Delta t) - F(t) = R(t) - R(t + \Delta t)$$

$$P[A | B] = P[t < ttf \leq (t + \Delta t) | ttf > t]$$

$$P[A | B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)}$$

Dividiendo esta probabilidad condicional por  $\Delta t$  y haciendo que  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[A | B]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[t < ttf \leq (t + \Delta t) | ttf > t]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{1 - F(t)}$$

Se obtiene la tasa de fallas  $\lambda(t)$ :

$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$
--

Las unidades de  $\lambda(t)$  son [1/unidad de tiempo] pero se le asigna [fallas/unidad de tiempo].

Nótese que:

$$P[t < ttf \leq (t + \Delta t) | ttf > t] \approx \lambda(t)\Delta t$$

En la Tabla 3.1 se presenta la ecuación de la tasa de fallas para varias distribuciones de probabilidad. En la Fig. 3.6 se presenta la forma de estas tasas de fallas. Como se observa, solo para la distribución exponencial  $\lambda(t)$  es constante.

Tabla 3.1 Tasa de fallas para algunas distribuciones de probabilidad

Distribución	Parámetros	$f(t)$	$\lambda(t)$
Exponencial	$\theta$	$\theta e^{-\theta t}$	$1/\theta$
Uniforme	$a$ $b$	$1/(b-a)$	$1/(b-t)$
Normal	$\mu$ $\sigma$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	Hallarla numéricamente
Weibull	$\alpha$ $\beta$	$\alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta}$	$\alpha * \beta * t^{\beta-1}$
Gamma	$\alpha$ $\beta$	$\frac{\beta^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)}$	Hallarla numéricamente
Pareto	$a$ $b$	$\frac{a}{b} * (\frac{b}{t})^{a+1}$	$a/t$

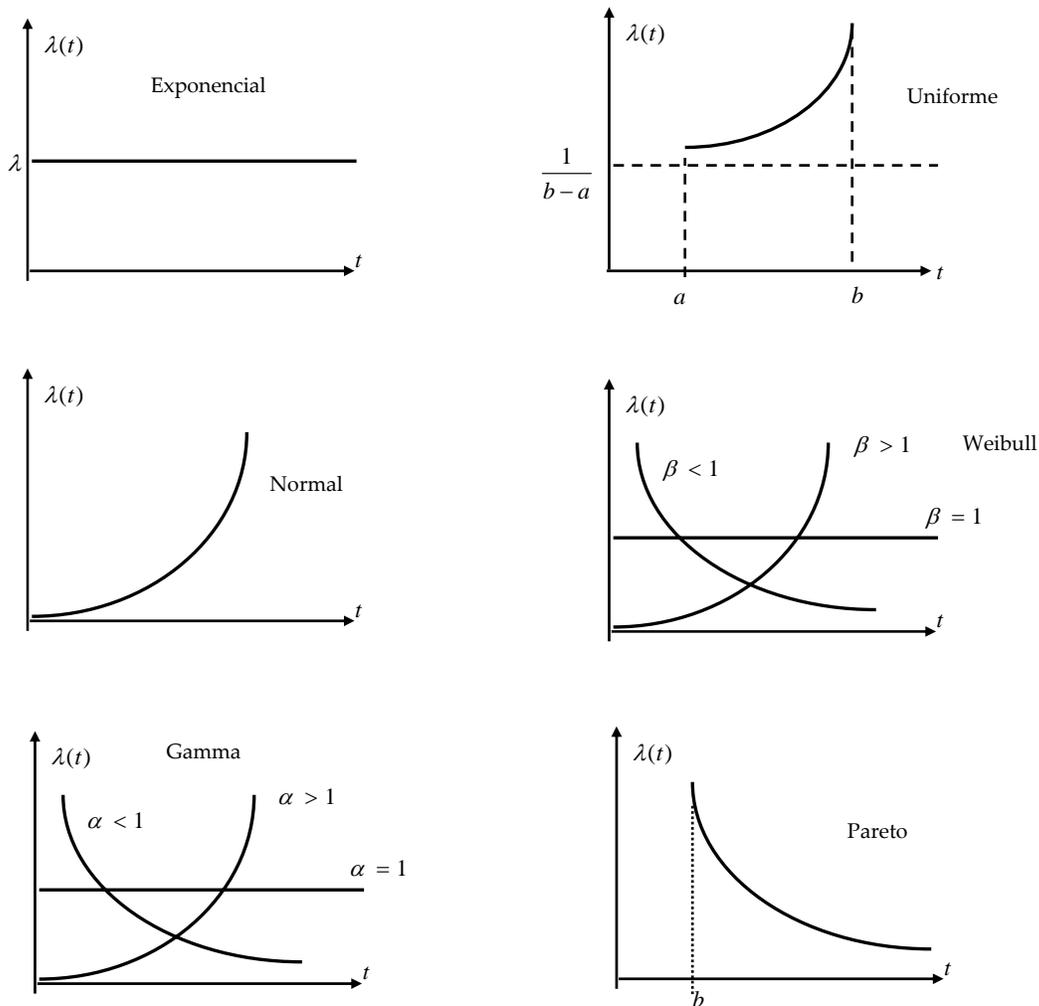


Figura 3.6 Forma de la tasa de fallas para varias distribuciones de probabilidad

La función general de confiabilidad de un componente no reparable es la relación entre la confiabilidad y su tasa de fallas. Esta función se obtiene de la siguiente manera:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{dF(t)}{dt} \frac{1}{R(t)} = \frac{d(1-R(t))}{dt} \frac{1}{R(t)} = -\frac{dR(t)}{dt} \frac{1}{R(t)}$$

$$\lambda(t)dt = -\frac{dR(t)}{R(t)}$$

$$\ln(R(t)) = -\int_0^t \lambda(t)dt$$

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

Algunos errores de concepto con respecto a la tasa de fallas de un componente no reparable son:

1	$\lambda(t)$ es una tasa de ocurrencia de eventos	Esto no es cierto, ya que un componente no reparable no puede soportar varias fallas.
2	$\lambda(t)$ es una probabilidad	Esto no es cierto, ya que $\lambda(t)$ no es adimensional y sus valores pueden superar 1.0 en magnitud.

La tasa de fallas se refiere a lo susceptible que se hace el componente a la falla conforme pasa más tiempo en operación. Así,  $\lambda(t)$  indica su estado de confiabilidad: deterioro, mejora, o periodo de vida útil.

**EJEMPLO 3.1**

Se tiene la siguiente muestra de los tiempos de falla de 40 baterías de un mismo tipo:

Tiempos para falla [años]				
1.0132	0.9602	0.8494	0.9938	0.9309
0.9047	0.8218	0.8579	0.8307	0.9606
0.9161	0.6697	0.9438	0.7976	0.818
1.0665	1.148	0.8221	0.9608	0.8021
0.8575	0.9222	0.8416	1.143	1.1397
1.1172	1.0491	1.2209	1.0193	1.0017
1.0853	1.0351	1.0084	1.0985	0.9032
0.8767	1.0032	0.8174	0.8248	1.1209

Algunas distribuciones de probabilidad que se ajustan mediante la prueba Komogorov-Smirnov con nivel de confianza del 95%:

Normal	$\mu = 0.9538$ años y $\sigma = 0.1246$ años
Weibull	$\alpha = 1.0064$ años y $\beta = 9.1630$
Gamma	$\alpha = 58.5928$ y $\beta = 0.0163$ años
Uniforme	$a = 0.6697$ años y $b = 1.2209$ años
Lognormal	$\mu = -0.0557$ años y $\sigma = 0.1301$

Como se observa, todos estos modelos tienen tasa de fallas creciente.

Cualquiera de ellos es una representación válida desde el punto de vista estadístico, pero cuál se selecciona?

**EJEMPLO 3.2**

La función de vida de un transformador de distribución es la distribución exponencial con parámetro  $\lambda = 0.2$  fallas/año.

- Cómo se interpreta que la tasa de fallas sea constante?

La tasa de fallas constante significa que el componente está en su periodo de vida útil ya que su confiabilidad no mejora ni se deteriora.

- Cuál es el tiempo esperado para falla?

$$E(ttf) = 1 / 0.2 = 5 \text{ [años]}$$

- Cuál es la probabilidad de que un transformador de estos falle durante el primer año?

$$P[ttf \leq 1] = F(1) = 1 - e^{-0.2*1} = 18.12\%$$

- Cuál es la probabilidad de que un transformador de estos falle durante los primeros cinco años?

$$P[t_{tf} \leq 5] = F(5) = 1 - e^{-0.2*5} = 63.21\%$$

Aunque la vida media esperada es de 5 años, existe una probabilidad muy alta de que el transformador falle antes de dicho tiempo.

- Cuál es la probabilidad de que un transformador de estos NO falle durante los primeros 10 años?

$$P[t_{tf} > 10] = R(10) = e^{-0.2*10} = 13.53\%$$

### **EJEMPLO 3.3**

Un componente tiene una función de vida uniformemente distribuida durante un tiempo de vida máximo de 2400 horas

- Cómo es la tasa de fallas del componente y qué significa?

La tasa de fallas es creciente y significa que la confiabilidad del componente se deteriora desde el inicio de su vida.

- Cuál es el tiempo esperado para falla?

$$E(t_{tf}) = \frac{0 + 2400}{2} = 1200 \text{ [horas]}$$

- Cuál es la probabilidad de que un componente de estos falle durante las primeras 1200 horas?

$$P[t_{tf} \leq 1200] = F(1200) = \frac{1200}{2400} = 50\%$$

Aunque la vida media esperada es de 1200 horas años, existe una probabilidad muy alta de que el componente falle antes de dicho tiempo.

### **EJEMPLO 3.4**

La función de vida de una batería es la distribución Weibull con parámetros  $\alpha = 0.1$  horas y  $\beta = 0.5$ .

- Cómo es la tasa de fallas?

Como  $\beta < 1$ , la tasa de fallas es decreciente. Esto indica que la confiabilidad del componente mejora conforme pasa el tiempo.

- Cuál es el vida esperada de esta batería?

$$E(t_{tf}) = \alpha^{-(1/\beta)} * \Gamma(1 + \beta^{-1}) = 0.1^{-2.0} * \Gamma(1 + 2) = 0.1^{-2.0} * \Gamma(3) = 0.1^{-2.0} * 2 = 200 \text{ [horas]}$$

- Cuál es la probabilidad de que una batería de estas falle durante las primeras 200 horas?

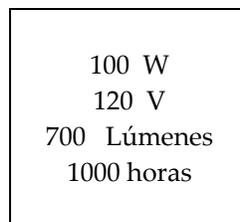
$$P[ttf \leq 200] = F(200) = 1 - e^{-\alpha \cdot x^\beta} = 1 - e^{-0.1 \cdot (200)^{0.5}} = 75.68\%$$

- Cuál es la probabilidad de que una batería de éstas viva más de 300 horas?

$$P[ttf > 300] = R(300) = e^{-\alpha \cdot x^\beta} = e^{-0.1 \cdot (300)^{0.5}} = 17.7\%$$

**EJEMPLO 3.5**

Una persona compra una bombilla con las siguientes características:



Si el valor esperado de vida de la bombilla es 1000 horas, cuál es la probabilidad de que la bombilla se dañe durante las primeras 1000 horas?

1000 horas es la vida media esperada, para evaluar la probabilidad de que la bombilla falle antes de este valor se debe conocer la función de vida del componente, por ejemplo:

Si es Gaussiana: La probabilidad de falla antes de la vida esperada es del 50%

Si es exponencial: La probabilidad de falla antes de la vida esperada es del 63.21%

Si es uniforme: La probabilidad de falla antes de la vida esperada es del 50%

**EJEMPLO 3.6**

Una persona instala una cortina de luces navideñas que consta 2000 bombillas con una función de vida Gaussiana de valor medio 1000 horas y una desviación estándar de 200 horas.

- Cómo es la tasa de fallas del componente y qué significa?

La tasa de fallas es creciente y significa que este componente, desde el inicio de su vida, sufre deterioro.

- Cuántas bombillas puede esperarse que fallen en las primeras 1000 horas?

$$z = \frac{t - \mu}{\sigma} = \frac{700 - 1000}{200} = -1.5 \rightarrow F(t = 700) = P[z = -1.5] = 6.68\%$$

$$n = 2000 * 0.0668 = 133.6 \approx 134 \text{ bombillas.}$$

La probabilidad de que fallen 134 de las 2000 bombillas debe hallarse por medio de la distribución binomial o la aproximación de la distribución Gausiana a la binomial.

- Cuántas bombillas puede esperarse que fallen entre las 900 y 1300 horas?

$$z_1 = \frac{t_1 - \mu}{\sigma} = \frac{1300 - 1000}{200} = +1.5 \quad \rightarrow \quad F(t = 1300) = P[z = +1.5] = 0.9332$$

$$z_2 = \frac{t_2 - \mu}{\sigma} = \frac{900 - 1000}{200} = -0.5 \quad \rightarrow \quad F(t = 900) = P[z = -0.5] = 0.3085$$

$$F(900 \leq t \leq 1300) = F(1300) - F(900) = P[z_1] - P[z_2] = 0.9332 - 0.3085 = 0.6247$$

$$n = 2000 * 0.6247 = 1249.4 \approx 1250 \text{ bombillas.}$$

La probabilidad de que fallen 1250 de las 2000 bombillas debe hallarse por medio de la distribución binomial o la aproximación de la distribución Gausiana a la binomial.

- Después de qué periodo de tiempo se espera que haya fallado el 10% de las bombillas?

Hay que determinar el valor de  $z$  para el cual  $P[z]=0.1$

$$\begin{aligned} \text{De tablas:} \quad z = -1.28 &\quad \rightarrow \quad P = 0.1003 \\ z = -1.29 &\quad \rightarrow \quad P = 0.0985 \end{aligned}$$

$$\text{Interpolando:} \quad P[z = -1.2817] = 0.1$$

$$-1.2817 = \frac{t - 1000}{200} \quad \rightarrow \quad t = 743.7 \text{ horas}$$

### 3.6 ÍNDICES ESTADÍSTICOS DE CONFIABILIDAD

#### 3.6.1 Tasa promedio de fallas $\lambda$

$\lambda = n / (N * T)$
$\lambda = (\sum_{j=1}^k n_j) / (\sum_{j=1}^k N_j * T_j)$

La primera ecuación se aplica cuando se ha registrado que durante un tiempo de estudio  $T$ , fallaron  $n$  componentes en una población de tamaño  $N$  pero no se tienen los tiempos de falla de cada uno de los componentes.

La segunda ecuación se aplica cuando la población de componentes bajo estudio varía y en cada subperiodo  $T_j$  se inició con  $N_j$  componentes en operación y de éstos  $n_j$  fallaron.

$\lambda$  tiene unidades de [fallas/año-componente] ó [fallas/año-km] para componentes longitudinales.

#### 3.6.2 Tiempo promedio para falla $\overline{tff}$

$\overline{tff} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n tff_i$
---

Para aplicar esta ecuación se requiere tener una muestra de tiempos para falla  $tff_1, tff_2, \dots, tff_n$ ; no se requiere conocer el tamaño de la población de componentes.

$\overline{tff}$  es el estimador del tiempo esperado para falla, es decir,  $\overline{tff} = \hat{E}(tff)$ . La calidad de este estimador depende del tamaño de la muestra (Ley Fuerte de los Grandes Números).

#### 3.6.3 Relación entre $\overline{tff}$ y $\lambda$

Si se tiene el cálculo de  $\overline{tff}$  o  $\lambda$ , el otro índice puede hallarse mediante la relación:

$\overline{tff} = 1 / \lambda \qquad \lambda = 1 / \overline{tff}$
--

Los valores de  $\overline{tff}$  obtenidos mediante esta ecuación son muy altos ya que se asume que la tasa de eventos del componente es constante.

#### 3.6.4 Calculo de los índices por subperiodos

Obsérvese que mientras la tasa de fallas del modelo probabilístico puede ser una función creciente o decreciente en el tiempo, la tasa de fallas promedia siempre es una constante.

Por lo tanto, es recomendable calcular la tasa de fallas promedia para varios sub-intervalos del periodo de observaciones  $T$  para observar en una gráfica su comportamiento y así poder seleccionar el modelo probabilístico que incorpore apropiadamente este comportamiento.

**EJEMPLO 3.7**

Las estadísticas para falla de transformadores en un sistema eléctrico con 100 de estos equipos son:

Año	Fallas
1	17
2	15
3	25
4	22
5	18
6	23
Σ años = 6	Σ fallas = 120

$$\lambda = n / (N * T) = 120 / (100 * 6) = 0.2 \text{ fallas/año-transformador}$$

$$\overline{tff} = 1 / \lambda = 1 / 0.2 = 5 \text{ [años] para falla de un transformador}$$

Algunos comentarios respecto a estos cálculos:

1	No se conocen los tiempos para falla, por lo cual, no se puede obtener el modelo probabilístico.
2	La tasa de fallas calculada es un estimado pues no se tienen los tiempos para falla
3	La tasa de fallas calculada se refiere a un equipo típico o promedio que representa a toda la población
4	El tiempo promedio para falla calculado es un estimado que asume que la tasa de fallas es constante

**EJEMPLO 3.8**

Para un rodamiento dado se tienen los siguientes registros para falla:

Año	Población	Fallas
2005	100	5
2006	125	7
2007	98	4
2008	110	6
2009	115	6
	548	28

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^k n_j}{\sum_{j=1}^k N_j * T_j} = \frac{5 + 7 + 4 + 6 + 6}{100 * 1 + 125 * 1 + 98 * 1 + 110 * 1 + 115 * 1}$$

$$\lambda = \frac{28}{548} = 0.05109 \text{ [fallas/año-rodamiento]}$$

$$\overline{tff} = 1 / \lambda = 1 / 0.05109 = 19.57 \text{ [años] para falla de un rodamiento}$$

### 3.7 VIDA RESIDUAL

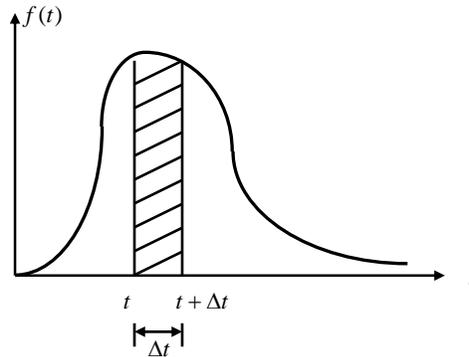


Figura 3.7 Vida residual de un componente no reparable

Considere un componente no reparable que ha operado hasta un tiempo  $t$ .

La probabilidad de falla en un intervalo de tiempo subsiguiente  $\Delta t$  es dependiente del comportamiento hasta el tiempo  $t$ .

Hay dos formas de valorar la vida residual del componente:

Probabilidad de falla	Confiabilidad
<p>Sean:</p> <p><math>A</math> : El evento de fallar en el periodo de tiempo <math>\Delta t</math>  <math>B</math> : El evento de funcionar hasta el tiempo <math>t</math></p> $P[A   B] = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = F(\Delta t)$ $F(\Delta t) = \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(t)dt}{\int_t^{\infty} f(t)dt} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)}$	<p>Sean:</p> <p><math>A</math> : El evento de sobrevivir un periodo de tiempo <math>\Delta t</math>  <math>B</math> : El evento de sobrevivir al tiempo <math>t</math></p> $P[A   B] = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = R(\Delta t)$ $R(\Delta t) = \frac{\int_{t+\Delta t}^{\infty} f(t)dt}{\int_t^{\infty} f(t)dt} = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)}$

El análisis presentado también se denomina probabilidad de falla a-posteriori.

**EJEMPLO 3.9**

Un transformador de potencia típico tiene una función de vida Gausiana con  $\mu = 45$  años y  $\sigma = 10$  años.

- Cómo es la tasa de fallas de este componente?

La tasa de fallas creciente, lo cual quiere decir que el componente está en su etapa de obsolescencia.

- Si el transformador no ha fallado en los primeros 30 años, cuál es la probabilidad de que falle en los siguientes 20 años?

$$F(20) = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{F(30 + 20) - F(30)}{1 - F(30)} = \frac{0.6915 - 0.0668}{1 - 0.0668} = 0.6694$$

- Si el transformador no ha fallado en los primeros 30 años, cuál es la probabilidad de que sobreviva 20 años más?

$$R(20) = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)} = \frac{1 - F(t + \Delta t)}{1 - F(t)} = \frac{1 - F(30 + 20)}{1 - F(30)} = \frac{1 - 0.6915}{1 - 0.0668} = 0.3306$$

- Si el transformador no ha fallado en los primeros 40 años, cuál es la probabilidad de que falle en los siguientes 20 años?

$$F(20) = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{F(40 + 20) - F(40)}{1 - F(40)} = \frac{0.9332 - 0.3085}{1 - 0.3085} = 0.9043$$

- Si el transformador no ha fallado en los primeros 50 años, cuál es la probabilidad de que falle en los siguientes 20 años?

$$F(20) = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{F(50 + 20) - F(50)}{1 - F(50)} = \frac{0.9938 - 0.6915}{1 - 0.6915} = 0.9799$$

Conforme el transformador está más tiempo en servicio, la probabilidad de fallar en los siguientes 20 años es cada vez mayor. Esto sucede porque la tasa de fallas es creciente.

**EJEMPLO 3.10**

Para un componente dado se encuentra que su función de vida es exponencial con valor esperado de 5 años.

- Modelo de vida

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}t} \quad E(ttf) = \theta \quad \lambda(t) = 1/\theta$$

$$\lambda = 1/E(x) = 1/5 = 0.2 \text{ años para falla}$$

La tasa de fallas es constante, lo cual indica que el componente no presenta envejecimiento ni mejora en su confiabilidad.

- Si un componente de éstos no ha fallado en 3 años, cuál es la probabilidad de que falle en los siguientes 2 años?

$$F(2) = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{F(3 + 2) - F(3)}{1 - F(3)} = \frac{0.6321 - 0.4512}{1 - 0.4512} = 0.3297$$

- Si un componente de éstos no ha fallado en 4 años, cuál es la probabilidad de que falle en los siguientes 2 años?

$$F(2) = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{F(4 + 2) - F(4)}{1 - F(4)} = \frac{0.6988 - 0.5507}{1 - 0.5507} = 0.3297$$

- Si un componente de éstos no ha fallado en 5 años, cuál es la probabilidad de que falle en los siguientes 2 años?

$$F(2) = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{F(5 + 2) - F(5)}{1 - F(5)} = \frac{0.7534 - 0.6321}{1 - 0.6321} = 0.3297$$

La probabilidad de fallar en los dos siguientes años es la misma sin importar cuánto ha vivido el componente!

Esto solo ocurre con el modelo exponencial y se debe a que la tasa de fallas es constante.

Por esto se dice que la distribución exponencial es un modelo “sin memoria”.

### 3.8 MODELO DE LLEGADA DE FALLAS AL GRUPO DE COMPONENTES

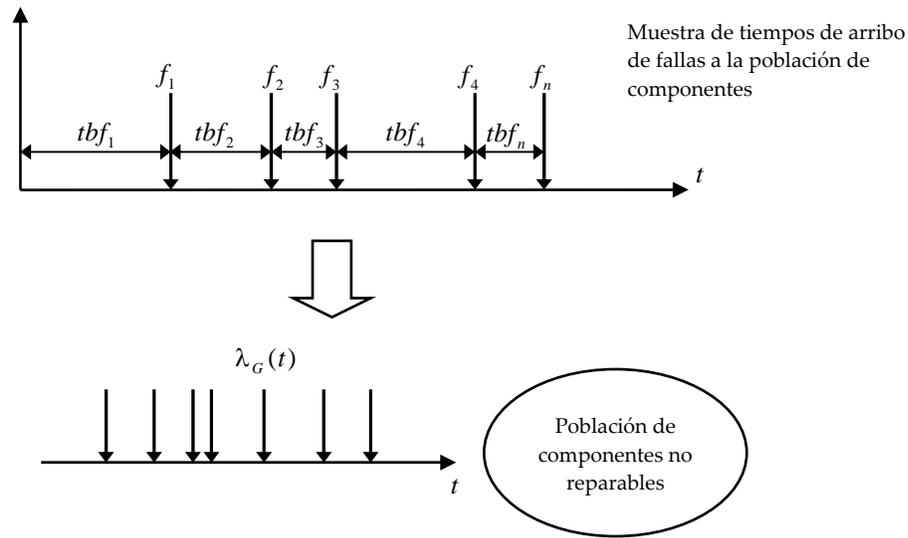


Figura 3.8 Llegada de fallas a la población de componentes no reparables

La muestra de tiempos inter-arribo de fallas se puede ajustar a un modelo puntual con función de intensidad  $\lambda_G(t)$  el cual representa el arribo de fallas a la población de componentes no reparables. Esto se presenta esquemáticamente en la Figura 3.8.

En este caso,  $\lambda_G(t)$  se define como:

$$\lambda_G(t) = \frac{dE[n(t)]}{dt}$$

Es decir,  $\lambda_G(t)$  si es una tasa de eventos, lo cual, es contrario a lo que sucede con  $\lambda(t)$ .

Este tipo de modelamiento es de especial interés cuando:

1	Se tiene una población infinita de componentes no reparables, por lo cual, el proceso de llegada de fallas a la población es infinito
2	Se tiene una población finita de componentes no reparables y se quiere comparar la función de intensidad de llegada de fallas con la tasa de fallas de los componentes.

**EJEMPLO 3.11**

Para el grupo de 40 baterías del ejemplo 3.1 se toman los tiempos entre fallas y se realiza el procedimiento de ajuste a un modelo puntual:

- Estadístico de Laplace:  $U_L = 5.9632$

Por lo cual, con un 95% de confianza se rechaza la hipótesis de que la tendencia de la muestra de tiempos inter-arribo de fallas tiene la tendencia de un proceso de Poisson homogéneo

- Estadístico de Lewis Robinson:  $U_{LR} = 1.7166$

Por lo cual, con un 95% de confianza se acepta la hipótesis de que la tendencia de la muestra de tiempos inter-arribo de fallas tiene la tendencia de un proceso de renovación

- La muestra de tiempos entre fallas es independiente (Probar esto)
- Aplicando la prueba de bondad de ajuste a procesos de renovación, se encuentra que con un 95% de confianza el modelo puntual que ajusta es:

Proceso de renovación Lognormal con parámetros  $\mu = -4.7744$  y  $\sigma = 1.6032$  y función de intensidad  $\lambda_G(t) = 32.7627$  fallas/año.

## CAPÍTULO 4 – COMPONENTES REPARABLES

### 4.1 MODELO DE DOS ESTADOS

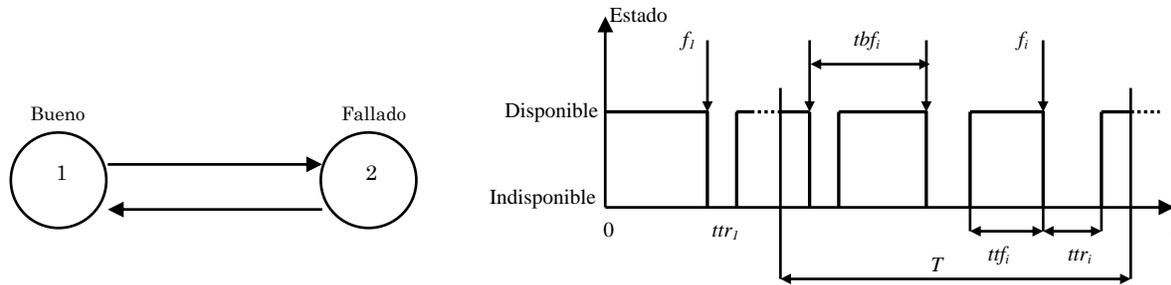


Figura 4.1 Diagrama de estados de un componente reparable y su secuencia operativa en el tiempo

El modelo clásico para componentes no reparables es el de dos estados que se muestra en la parte izquierda de la Figura 4.1.

A la derecha de la Figura 4.1 se muestra la secuencia operativa del componente que es definida por las fallas y reparaciones; esta es una secuencia de estados de disponibilidad e indisponibilidad.

No se consideran en este modelamiento:

1	Fallas simultáneas
2	Que el componente pueda ser reparado mientras opera (falla parcial)
3	Que el componente vuelva a fallar mientras es reparado

Cada falla ( $f_i$ ) tiene asociado un tiempo para falla ( $ttf_i$ ) y un tiempo para reparación ( $ttr_i$ ), los cuales son aleatorios e independientes entre sí, en cuanto a su duración. Otra medida en la secuencia operativa es el tiempo entre fallas ( $tbfi$ ).

El número de fallas  $n_f$  en un periodo de tiempo  $T$  es aleatorio. Por consiguiente, el número de reparaciones  $n_r$  en un periodo de tiempo  $T$  también lo es.

El cero, en la secuencia operativa, es el momento en el cual el componente inicia su operación “nuevo”.

Para el modelamiento se requieren muestras aleatorias representativas de:

1	Tiempos para falla ( $ttf_1, ttf_2, \dots, ttf_n$ )
2	Tiempos para reparación ( $ttr_1, ttr_2, \dots, ttr_n$ )

Estas muestras se toman de:

1	El componente que se quiere modelar
2	Una población de componentes idénticos al que se quiere modelar (Data pooling)

### 4.2 MODELO DE DOS ESTADOS COMO UNA CADENA DE MARKOV

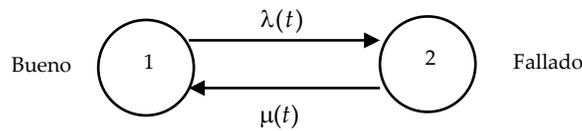


Figura 4.2 Modelo de Cadena de Markov de dos estados para un componente reparable

La secuencia de fallas y reparaciones de un componente reparable define un proceso aleatorio que se puede representar como una cadena de Markov de dos estados discretos y tiempo continuo cuya representación se muestra en la Figura 4.2.

Las tasas de transición entre estados se definen como:

De 1 a 2	Tasa de fallas	$\lambda(t) = 1 / E(ttf) = \frac{dE[n_f(t)]}{dt}$
De 2 a 1	Tasa de reparaciones	$\mu(t) = 1 / E(ttr) = \frac{dE[n_r(t)]}{dt}$

#### 4.2.1 Deducción del modelo matemático

Considere un intervalo de tiempo  $dt$  el cual es muy pequeño de tal manera que la probabilidad de que ocurran más de una falla o más de una reparación sea muy pequeña y por lo tanto pueda despreciarse la ocurrencia de estos eventos. Así:

Probabilidad de una falla en $t$ = Probabilidad de una falla en $(t + dt) = \lambda(t)dt$
Probabilidad de una reparación en $t$ = Probabilidad de una reparación en $(t + dt) = \mu(t)dt$

La probabilidad de estar en el estado operativo después de un intervalo de tiempo  $dt$  es igual a la probabilidad de estar operativo en  $t$  y no haber fallado en  $dt$  + probabilidad de estar fallado en  $t$  y haber sido reparado en  $dt$  :

$$P_1(t + dt) = P_1(t)[1 - \lambda(t)dt] + P_2(t)[\mu(t)dt]$$

La probabilidad de estar en el estado de reparación (fallado) después de un intervalo de tiempo  $dt$  es igual a la probabilidad de estar fallado en  $t$  y no haber sido reparado en  $dt$  + probabilidad de estar no fallado en  $t$  y haber fallado en  $dt$  :

$$P_2(t + dt) = P_2(t)[1 - \mu(t)dt] + P_1(t)[\lambda(t)dt]$$

Así, reorganizando términos en ambas ecuaciones:

$P_1(t + dt) = P_1(t)[1 - \lambda(t)dt] + P_2(t)[u(t)dt]$	$P_2(t + dt) = P_2(t)[1 - \mu(t)dt] + P_1(t)[\lambda(t)dt]$
$P_1(t + dt) = P_1(t) - \lambda(t)dtP_1(t) + u(t)dtP_2(t)$	$P_2(t + dt) = P_2(t) - \mu(t)dtP_2(t) + \lambda(t)dtP_1(t)$
$P_1(t + dt) - P_1(t) = [-\lambda(t)P_1(t) + u(t)P_2(t)]dt$	$P_2(t + dt) - P_2(t) = [\lambda(t)P_1(t) - \mu(t)P_2(t)]dt$
$\frac{P_1(t + dt) - P_1(t)}{dt} = -\lambda(t)P_1(t) + u(t)P_2(t)$	$\frac{P_2(t + dt) - P_2(t)}{dt} = \lambda(t)P_1(t) - \mu(t)P_2(t)$
$\left. \frac{P_1(t + dt) - P_1(t)}{dt} \right _{dt \rightarrow 0} = -\lambda(t)P_1(t) + u(t)P_2(t)$	$\left. \frac{P_2(t + dt) - P_2(t)}{dt} \right _{dt \rightarrow 0} = \lambda(t)P_1(t) - \mu(t)P_2(t)$
$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda(t)P_1(t) + u(t)P_2(t)$	$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda(t)P_1(t) - \mu(t)P_2(t)$

Lo cual resulta en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda(t)P_1(t) + u(t)P_2(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda(t)P_1(t) - \mu(t)P_2(t)$$

El cual se puede expresar en alguna de las siguientes formas:

$$\begin{pmatrix} \frac{dP_1(t)}{dt} \\ \frac{dP_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & u(t) \\ \lambda(t) & -\mu(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & u(t) \\ \lambda(t) & -\mu(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\overline{\dot{P}(t)} = H^t \overline{P(t)}$$

$H$  es la matriz estocástica de tasas de transición entre estados.

### 4.2.2 Cómo obtener y resolver este modelo

Para definir cómo se resuelve el modelo matemático de la cadena de Markov de dos estados, antes es necesario analizar la tendencia e independencia de las muestras de tiempos para falla y de tiempos para reparación, según el procedimiento mostrado en la Figura 4.3.

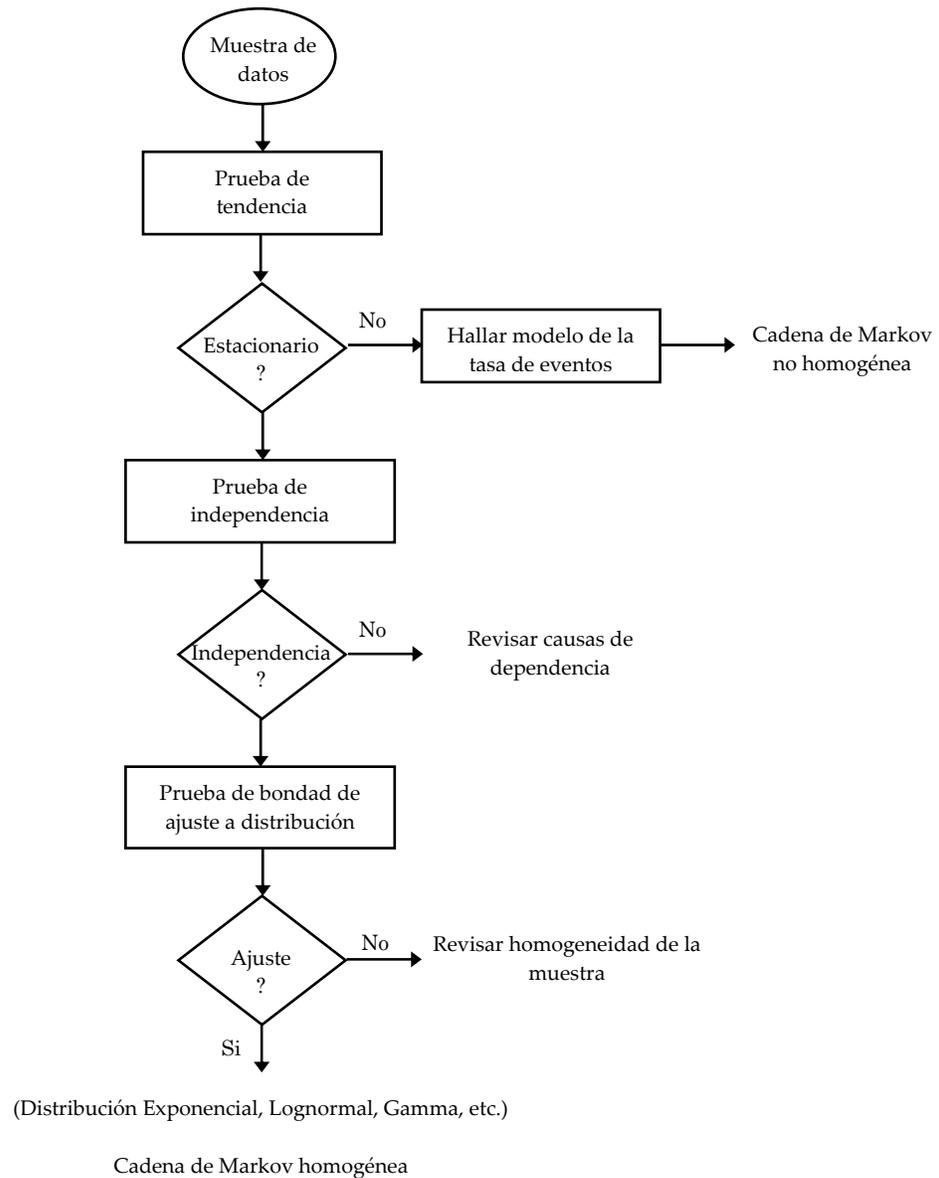


Figura 4.3 Procedimiento de análisis de las muestras de tiempos para falla y reparación para ajuste a modelo de cadena de Markov

El resultado de aplicación de este procedimiento es una distribución de probabilidad o la función que modela la tasa de eventos (tasa de fallas o tasa de reparaciones).

Así, tres casos aparecen para la solución de este modelo:

	Condiciones	Modelo	Características	Método de solución
1	Los tiempos para falla y de reparación son estacionarios, independientes y exponencialmente distribuidos.	Cadena de Markov homogénea exponencial	$\lambda(t)$ constante $\mu(t)$ constante	1. Analítica 2. Métodos numéricos 3. Simulación de Montecarlo
2	Los tiempos para falla y de reparación son estacionarios, independientes, pero ambos no están exponencialmente distribuidos.	Cadena de Markov homogénea general	$\lambda(t)$ constante $\mu(t)$ constante	1. Simulación de Montecarlo 2. Mecanismo de las etapas 3. Adición de variables
2	Los tiempos para falla o los de reparación son no estacionarios	Cadena de Markov no homogénea	$\lambda(t)$ y $\mu(t)$ son variables o uno variable y el otro constante.	1. Analítica para algunos casos 2. Métodos numéricos

### 4.2.3 Modelamiento de tasas de eventos no constantes

Para el caso de procesos de fallas o de reparaciones no estacionarios, el modelo de la tasa de eventos puede hallarse haciendo el ajuste, con el método de mínimos cuadrados, de una función a los valores de tasa de eventos en sub-periodos (días, semanas, meses, años, etc.) del periodo  $T$  cubierto por la muestra de datos. En la Figura 4.4 se ilustra este procedimiento, donde  $h(t)$  denota tasa de eventos.

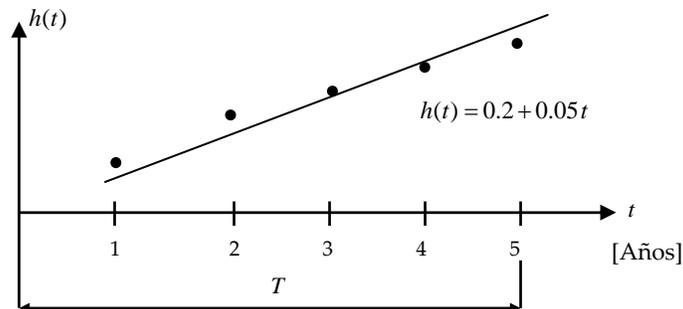


Figura 4.4 Gráficas de la tasa de eventos con respecto al tiempo

Las tasas de eventos para un sub-periodo  $k$  se pueden hallar de la siguiente forma:

$\lambda_k = \frac{n_{fk}}{\sum_k ttf} = \frac{n_{fk}}{T_k - \sum_k ttr} = \frac{1}{\frac{\sum_k ttr}{n_{fk}}}$	$\mu_k = \frac{n_{rk}}{\sum_k ttr} = \frac{n_{rk}}{T_k - \sum_k ttf} = \frac{1}{\frac{\sum_k ttf}{n_{rk}}}$
---	---

Donde:

$n_{fk}$  : Es el numero de fallas que ocurrieron en el subperiodo  $k$  .

$n_{rk}$  : Es el numero de reparaciones que se realizaron ocurrieron en el subperiodo  $k$  .

$\sum_k$  : Es la sumatoria de los tiempos asociados a las fallas o reparaciones que ocurrieron o se realizaron durante el subperiodo  $k$  .

#### 4.2.4 Interpretación de la forma de las tasas de eventos

Según la forma de las tasas de eventos, se tienen las siguientes interpretaciones:

Forma	Tasa de fallas	Tasa de reparaciones
Constante	No hay deterioro ni mejora de la confiabilidad del componente	No hay mejora ni deterioro en el desempeño del personal que realiza las reparaciones
Creciente	Deterioro en la confiabilidad del componente	Deterioro en el desempeño del personal que realiza las reparaciones
Decreciente	Mejora en la confiabilidad del componente	Mejora en el desempeño del personal que realiza las reparaciones

#### 4.2.5 Interpretación de la solución

La solución de la cadena de Markov son las probabilidades de ocurrencia de los estados 1 y 2 como una función del tiempo:

$P_1(t) = A(t)$	Es la disponibilidad instantánea del componente.	Es la probabilidad de encontrar el componente en el estado “bueno” en algún <u>instante</u> del tiempo.
$P_2(t) = U(t)$	Es la indisponibilidad instantánea del componente.	Es la probabilidad de encontrar el componente en el estado “fallado” en algún <u>instante</u> del tiempo.

Si el proceso aleatorio de fallas y reparaciones converge a un estado estable, también se definen:

$P_1(\infty) = A$	La disponibilidad del componente.	Es la probabilidad de encontrar el componente en el estado “bueno” en el largo tiempo.
$P_2(\infty) = U$	La indisponibilidad del componente.	Es la probabilidad de encontrar el componente en el estado “fallado” en el largo tiempo.

La notación  $A$  y  $U$  vienen de los términos en inglés para disponibilidad (Availability) e indisponibilidad (Un-availability), respectivamente.

La disponibilidad  $A$  y la indisponibilidad  $U$  presentadas se denominan “inherentes” pues solo consideran la salida del componente debido a fallas, aunque la disponibilidad también está afectada por otro tipo de salidas planeadas y no planeadas.

Si las muestras de datos se tomaron de varios componentes, el modelo probabilístico obtenido corresponde a un componente que representa o “tipifica” a todos los componentes de la población.

### 4.2.6 Cadenas de Markov homogéneas

Si los procesos de fallas y de reparaciones del componente reparable son estacionarios, independientes y ajustan a distribuciones de probabilidad, se podrá entonces utilizar como modelo de confiabilidad una cadena de Markov homogénea.

Como las tasas de fallas y de reparación son constantes, éstas se pueden escribir como:

$\lambda(t) = \lambda = 1 / E(ttf)$	$\mu(t) = \mu = 1 / E(ttr)$
-------------------------------------	-----------------------------

La cadena de Markov homogénea se define entonces por:

$F_{ttr}(t)$	La función de distribución de probabilidad de los tiempos para falla	También se puede utilizar la correspondiente función de densidad de probabilidad $f_{ttr}(t)$
$F_{ttf}(t)$	La función de distribución de probabilidad de los tiempos para reparación	También se puede utilizar la correspondiente función de densidad de probabilidad $f_{ttf}(t)$

Con base en estos modelos también se definen:

$E(ttf)$	El valor esperado de tiempo para falla	$E(ttf) = 1 / \lambda$ $E(ttf) = \int_0^{\infty} f_{ttr}(t) t dt$ $\widehat{E}(ttf) \approx \overline{ttf}$
$E(ttr)$	El valor esperado de tiempo de reparación	$E(ttr) = 1 / \mu$ $E(ttr) = \int_0^{\infty} f_{ttf}(t) t dt$ $\widehat{E}(ttr) \approx \overline{ttr}$

Una cosa importante, es que este proceso aleatorio de fallas y reparaciones es de “renovación” ya que cada vez que el componente es reparado éste vuelve al mismo estado de confiabilidad que tenía antes de fallar ya que la tasa de fallas permanece igual. Por esta razón, las reparaciones se denominan “mínimas”; si las reparaciones no fueran mínimas, entonces cambiarían el valor de la tasa de fallas.

### 4.2.7 Solución analítica de la cadena de Markov homogénea exponencial

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{\overline{P}}(t) = H^t \overline{P}(t)$  del modelo de confiabilidad de dos componentes es:

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} P_1(t) = A(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \\ P_2(t) = U(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \end{aligned}$$

Se observa que esta solución tiene una parte transitoria y otra de estado estable y que en todo instante del tiempo, la suma de probabilidades es igual a 1.0.

En el estado estable se tiene:

$$A = P_1(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \qquad U = P_2(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

#### 4.2.8 Simulación de Montecarlo para resolver una cadena de Markov homogénea

Puede resolverse la cadena de Markov homogénea de dos estados, con cualquier combinación de distribuciones, con el siguiente algoritmo de simulación de Montecarlo secuencial:

Al inicio de la simulación:  $t = 0, i = 0$

Paso 1: Incremente el contador de iteraciones haciendo  $i = i + 1$

Paso 2: Genere un tiempo para falla  $t_{tf_i}$  utilizando la distribución de los tiempos para falla

Paso 3: Genere un tiempo para falla  $t_{tr_i}$  utilizando la distribución de los tiempos para reparación

Paso 4: Incremente el reloj de la simulación haciendo  $t_i = t_{i-1} + t_{tf_i} + t_{tr_i}$

Paso 5: Evalúe el criterio de parada. Si éste se cumple terminar; de lo contrario, regresar al paso 1

Al terminar la simulación calcular:

$$P_1(\infty) = A = \frac{\sum t_{tf}}{t} \qquad P_2(\infty) = U = \frac{\sum t_{tr}}{t}$$

Como criterio de parada se puede utilizar un número pre-especificado de iteraciones o la convergencia a  $A$  ó  $U$ .

#### 4.2.9 Solución estadística de una cadena de Markov homogénea

Si se tiene evidencia de que las muestras de tiempos para fallas y de tiempos para reparación son estacionarias, también es posible calcular en forma estadística las disponibilidades e indisponibilidades de estado estable y las tasas de eventos del modelo de confiabilidad del componente reparable de dos estados, de la siguiente forma:

$$P_1(\infty) = A = \frac{\sum t_{tf}}{T} \qquad P_2(\infty) = U = \frac{\sum t_{tr}}{t}$$

$$\lambda = \frac{n_r}{T - \sum t_{tr}} = \frac{n_r}{\sum t_{tf}} = 1 / \overline{t_{tf}} \qquad \mu = \frac{n_r}{T - \sum t_{tf}} = \frac{n_r}{\sum t_{tr}} = 1 / \overline{t_{tr}}$$

Obviamente, la calidad de estos cálculos depende del tamaño de la muestra.

#### 4.2.10 Solución de una cadena de Markov no homogénea

En este caso, solo es posible hallar soluciones analíticas para ciertas formas de las funciones matemáticas utilizadas para las tasas de transición entre eventos. El método de solución a aplicar depende entonces de la forma de estas funciones. Otra limitación con este tipo de proceso es que no hay un método analítico general para analizar la estabilidad matemática de la solución. Así lo recomendado en este texto es utilizar métodos numéricos para ecuaciones diferenciales como Runge-Kutta.

Otro aspecto importante a analizar al aplicar este modelamiento es si las tasas de transición entre estados varían con el tiempo global o con un tiempo local, ya que el modelo  $\overline{\dot{P}}(t) = H^t \overline{P}(t)$  considera que es en forma global.

Para algunos tipos de componentes puede argumentarse lo siguiente:

1	La tasa de fallas de la mayoría de componentes se incrementa con su uso. Así, ésta es función del tiempo de operación del componente. Entonces, si el componente está inactivo o bajo mantenimiento, la tasa de fallas no crece durante esos periodos. En este caso, la tasa de fallas sería entonces función de un tiempo local $\tau_f$ referido a la operación, no del tiempo global $t$ de observación del proceso el cual es la suma de los tiempos de falla y reparación.
2	La tasa de reparaciones de la mayoría de componentes depende de factores propios del proceso de reparación: la carga de trabajo de los operarios, la pérdida de rendimiento de los operarios debido al envejecimiento, la falta de incentivos laborales, etc. En este caso, la tasa de reparaciones sería función de un tiempo local $\tau_r$ , referido al tiempo de labor, no del tiempo global $t$ de observación del proceso el cual es la suma de los tiempos de falla y reparación.

Así, si las tasas de transición varían con un tiempo local y no con el tiempo global, al aplicar el modelamiento  $\overline{\dot{P}}(t) = H^t \overline{P}(t)$  se obtiene una predicción sobre-estimada de las probabilidades de ocurrencia de los estados del proceso.

#### **EJEMPLO 4.1**

Si las tasas de eventos del proceso de fallas y reparaciones son:

$$\lambda(t) = 9t^{0.5} \text{ [Fallas/año]}$$

$$\mu(t) = 146 \text{ [Reparaciones/año]}$$

El modelo matemático del sistema es:

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_1(t) \\ \dot{P}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9t^{0.5} & 146 \\ 9t^{0.5} & -146 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

La solución numérica (Método Runge-Kutta) para diez años es:

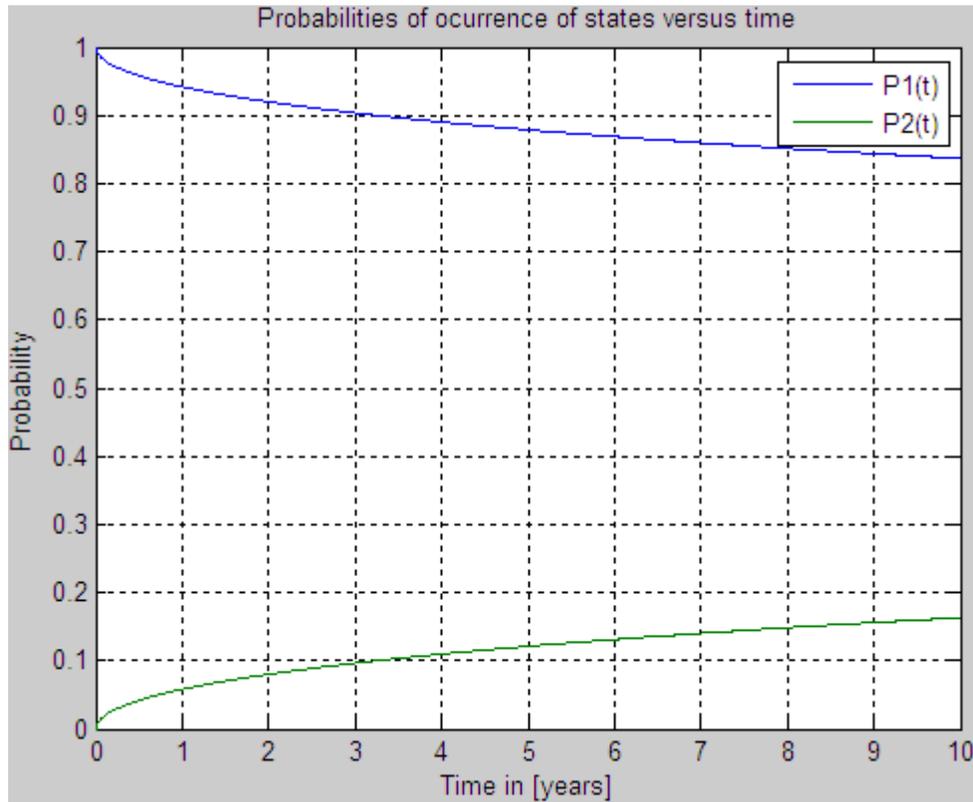


Figura 4.5 Resultados para el problema 4.1

Como se observa en la Figura 4.5, si las fallas aumentan con el tiempo y los recursos para reparar se mantienen constantes, la probabilidad de que el componente esté en el estado de indisponible crece a un valor muy alto (18%).

4.3 MODELOS MULTIESTADO

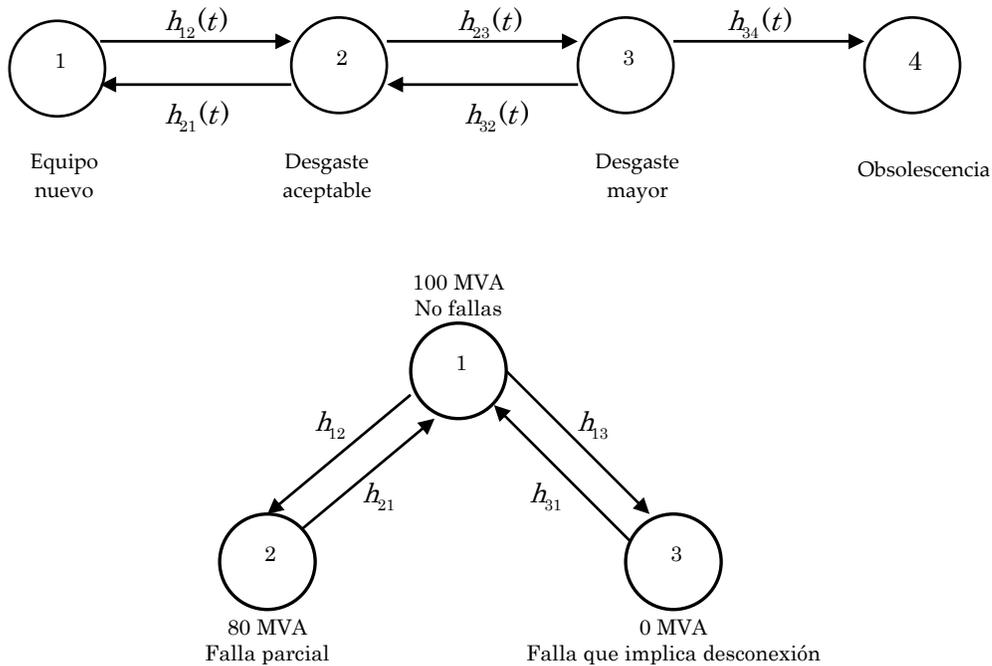


Figura 4.6 Ejemplos de modelos multiestado

También se pueden definir modelos multi-estado para los componentes reparables. La Figura 4.6 presenta dos ejemplos de este tipo de modelamiento.

En este caso, los estados se refieren a situaciones de desgaste o estados operativos relacionados con la capacidad de producción del componente.

Todos los estados no tienen que estar conectados entre sí.

Las tasas de transición entre estados  $i$  y  $j$  se refieren a diversos tipos de fallas y reparaciones y se definen en forma general como:

$$h_{ij}(t) = 1 / E(t_{ij}) = \frac{dE[n_{ij}]}{dt}$$

Para construir este tipo de modelos se requiere de una muestra de datos para cada uno de los tiempos de transición entre estados. A cada una de estas muestras:

1	Se le aplica el procedimiento de análisis de tendencia e independencia mostrado en la Figura 4.3
2	Para el caso de procesos no estacionarios, se halla el modelo de la tasa de eventos, tal como se indicó en el numeral 4.2.3

### 4.4 MODELO MULTIESTADO COMO UNA CADENA DE MARKOV

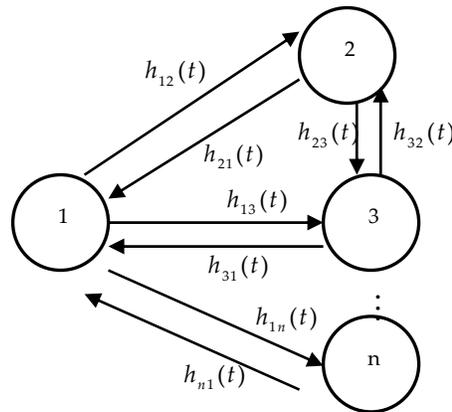


Figura 4.7 Cadena de Markov continua en el tiempo

En la Figura 4.7 se muestra una representación de este tipo de modelo.

Tres casos aparecen en el estudio de este proceso estocástico:

	Condiciones	Nombre	Características	Método de solución
1	Todos $t_{ij}$ son estacionarios, independientes y exponencialmente distribuidos.	Cadena de Markov homogénea exponencial	Todos los $h_{ij}$ son constantes	1. Analítica 2. Métodos numéricos 3. Simulación de Montecarlo
2	Todos los $t_{ij}$ son estacionarios, independientes, pero no todos están exponencialmente distribuidos.	Cadena de Markov homogénea general	Todos los $h_{ij}$ son constantes	1. Simulación de Montecarlo 2. Mecanismo de las etapas 3. Adición de variables
2	Algunos $t_{ij}$ son no estacionarios	Cadena de Markov no homogénea	Algunos o todos los $h_{ij}$ varían con el tiempo	1. Simulación de Montecarlo 2. Mecanismo de las etapas 3. Adición de variables

#### 4.4.1 Modelo matemático

Generalizando el sistema de ecuaciones obtenido en 4.2. 1 para  $n$  estados se tiene:

$$\overline{\dot{P}}(t) = H^t \overline{P}(t)$$

Donde:

$\overline{P}(t)$ : Es el vector fila de las probabilidades de cada uno de los estados como función del tiempo

$\overline{\dot{P}(t)}$ : Es el vector fila de las derivadas con respecto al tiempo de las probabilidades de cada uno de los estados como función del tiempo

$H$ : Es la matriz estocástica de tasas de transición entre estados. Es el generador infinitesimal de la cadena. Sus términos se definen como:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1n}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1}(t) & h_{n2}(t) & \cdots & h_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$h_{ii}(t)$ : Es el negativo de la sumatoria de todas las tasas de transición que salen del estado  $i$

$h_{ij}(t)$ : Es la tasa de transición que sale del estado  $i$  al estado  $j$

Las filas de la matriz  $T$  deben sumar 0.0.

$T$  no necesariamente es simétrica ya que  $h_{ij}(t)$  no tiene que ser igual a  $h_{ji}(t)$ .

La solución del sistema de este sistema de ecuaciones diferenciales entrega las probabilidades de cada estado en función del tiempo.

#### 4.4.2 Solución analítica de la cadena de Markov homogénea exponencial

En este modelo todos los tiempos de transición entre estados están distribuidos exponencialmente, por lo cual, todas las tasas de transición entre estados son constantes ya que los tiempos de transición entre estados son estacionarios e independientes. Así,  $T$  es una matriz de coeficientes constantes:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

El modelo matemático  $\overline{\dot{P}(t)} = H^t \overline{P(t)}$  corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales de coeficientes constantes cuya solución es independiente de las condiciones iniciales.

Este sistema se resuelve cualquiera de los métodos que se enseñan en los cursos de ecuaciones diferenciales.

El análisis de valores propios de la matriz  $H$  indica si el modelo implementado tiene solución convergente o divergente.

**EJEMPLO 4.2**

Para un transformador de potencia 220/115 kV, 80/100 MVA, ONAN/ONAF se definen los siguientes estados operativos:

Estado	Descripción	Capacidad en MVA
1	Equipo sin falla	100
2	Falla del sistema de aire forzado (ventiladores)	80
3	Fallas que implican la desconexión del equipo	0

- Diagrama de transición de estados

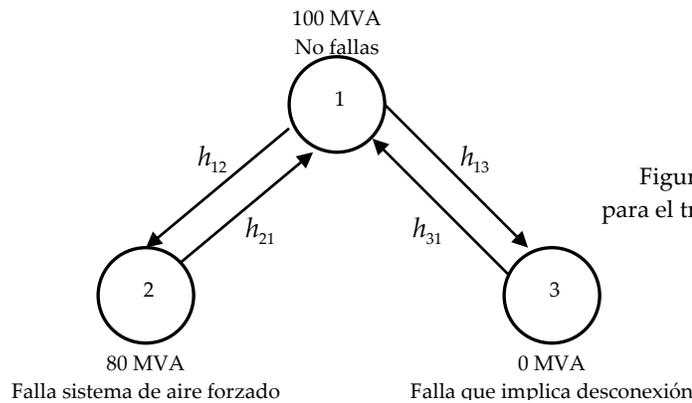


Figura 4.8 Diagrama de transición de estados para el transformador de potencia del Ejemplo 4.2

- Los tiempos de transición entre estados están exponencialmente distribuidos con los siguientes valores esperados:

1	El tiempo esperado para que se produzca una falla del sistema de aire forzado es 3 meses (0.25 años).
2	El tiempo esperado para reparar una falla del sistema de aire forzado es 5 días (0.0137 años)
3	El tiempo esperado para que se produzca una falla que implique la salida total del equipo es 6 meses (0.5 años).
4	El tiempo esperado para reparar una falla que implica la salida total del equipo es de 20 días (0.0548 años).

- Tasas de transición entre estados  $h_{ij} = 1 / E(t_{ij})$

Tasa de transición	Descripción	Valor
$h_{12}$	Es la tasa de fallas del sistema de aire forzado	$\lambda_{12} = 4$ [fallas/año]
$h_{21}$	Es la tasa de reparación del sistema de aire forzado	$\mu_{21} = 73$ [reparaciones/año]
$h_{13}$	Es la tasa de fallas que implican desconexión del equipo	$\lambda_{13} = 2$ [fallas/año]
$h_{31}$	Es la tasa de reparación del las fallas que implican desconexión del equipo	$\mu_{31} = 18.25$ [reparaciones/año]

- Matriz de tasas de transición entre estados

$$H = \begin{pmatrix} -6.00 & +4.00 & +2.00 \\ +73.00 & -73.00 & 0.00 \\ +18.25 & 0.00 & -18.25 \end{pmatrix}$$

- Asumiendo que el sistema comienza la operación en el estado 1 (sin fallas):

$$P(0) = (1.0 \quad 0.0 \quad 0.0)$$

La solución es del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$P_1(t) = +0.0554e^{-77.1406*t} + 0.8588e^{-0.0*t} + 0.0858e^{-20.1094*t} = 0.8588 + 0.0554e^{-77.1406*t} + 0.0858e^{-20.1094*t}$$

$$P_2(t) = -0.0535e^{-77.1406*t} + 0.0471e^{-0.0*t} + 0.0065e^{-20.1094*t} = 0.0471 - 0.0535e^{-77.1406*t} + 0.0065e^{-20.1094*t}$$

$$P_3(t) = -0.0019e^{-77.1406*t} + 0.0941e^{-0.0*t} - 0.0922e^{-20.1094*t} = 0.0941 - 0.0019e^{-77.1406*t} - 0.0922e^{-20.1094*t}$$

En la Figura 4.9 se muestra la evolución de estas probabilidades en el tiempo.

En estas ecuaciones se observa que:

- En cualquier instante de tiempo la suma de las tres probabilidades es 1.0.
- Las tres ecuaciones constan de un término constante y un término transitorio que decrece con el tiempo. Los términos constantes son las probabilidades de estado estable.
- $P_1(\infty) = 0.8588$ . El primer estado (Transformador sin fallas) es el que tiene mayor probabilidad de ser encontrado en cualquier instante de tiempo. Esto corresponde a lo deseado para cualquier equipo.
- La indisponibilidad del transformador es igual a  $P_3(\infty) = 0.0941$

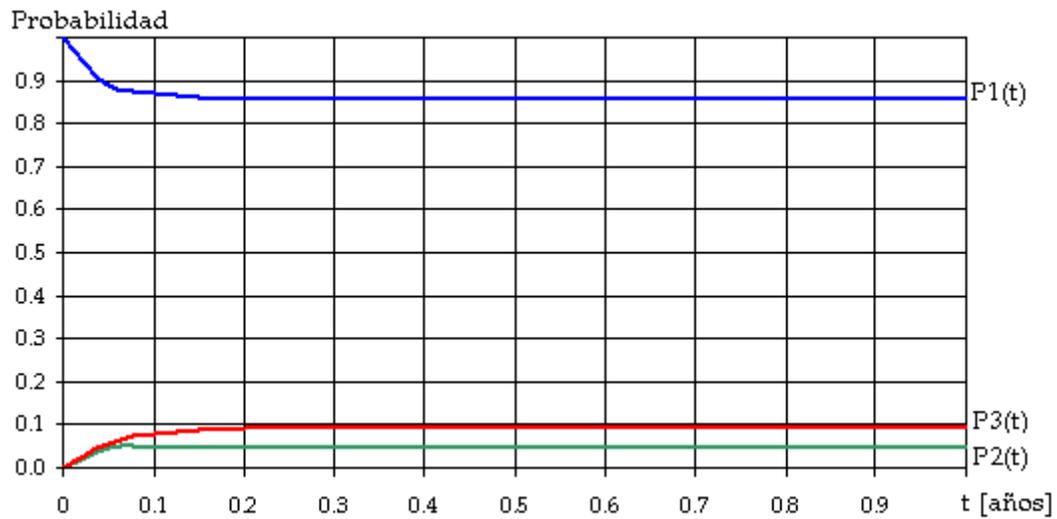


Figura 4.9 Solución del Ejemplo 4.2

#### 4.4.3 Frecuencia y duración en cadenas de Markov homogéneas

En el estado estable de una cadena de Markov homogénea se pueden obtener:

<p>La frecuencia de ocurrencia de un estado <math>i</math></p>	<p>Es la probabilidad de ocurrencia del estado <math>i</math> por la sumatoria de las tasas de salida desde ese estado.</p> $f_i = P_i(\infty) * \sum_{j \neq i}^n h_{ij}$ <p>También se puede calcular como la probabilidad de NO encontrar el estado <math>i</math> por la sumatoria de las tasas de entrada a ese estado.</p>
<p>La duración media en un estado <math>i</math></p>	<p>El tiempo medio gastado en un estado <math>i</math> o duración media en este estado es el inverso de sumatoria de las tasas de salida desde ese estado.</p> $m_i = 1 / \sum_{j \neq i}^n h_{ij}$

Además, se cumple que  $\sum_{i=1}^n f_i * m_i = \Delta t$

Donde  $\Delta t$  es el tiempo de referencia del estudio o la unidad que se mide el tiempo.

Para hallar la frecuencia de ocurrencia de un estado acumulado o la duración media en este estado acumulado, solo se toman en cuenta los estados que se comunican a través de la frontera de acumulación.

**EJEMPLO 4.3**

Para el transformador de potencia del Ejemplo 4.2 hallar la frecuencia y duración de cada estado.

Estado $i$	$P_i(\infty)$	$f_i$ [Veces/año]	$m_i$ [Días]
1	0.8588	$f_1 = 0.8588 * (4 + 2) = 5.1529$	$m_1 = 1/(4 + 2) * 365 = 60.8333$
2	0.0471	$f_2 = 0.0471 * 73 = 3.4353$	$m_2 = 1/73 * 365 = 5.0$
3	0.0941	$f_3 = 0.0941 * 18.25 = 1.7176$	$m_3 = 1/18.25 * 365 = 20.0$

La probabilidad de que el transformador se encuentre disponible para operar a su máxima capacidad nominal (100 MVA) es de 85.88%. Esta condición operativa se da 5.1529 veces por año y tiene una duración media de 60.8333 días.

La probabilidad de que el transformador solo se encuentre disponible para operar a una capacidad máxima de 80 MVA es de 4.71%. Esta condición operativa se da 3.4353 veces por año y tiene una duración media de 5 días (El mismo tiempo promedio para reparación de daños del sistema de enfriamiento).

La probabilidad de que el transformador no se encuentre disponible para operar es de 9.41%. Esta condición operativa se da 1.7176 veces por año y tiene una duración media de 20 días (El mismo tiempo promedio para reparación de daños que implican la desconexión del equipo).

Obsérvese que:

$$m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3 = 5.1529 * 60.8333 + 3.4353 * 5 + 1.7176 * 20 = 365 \text{ [días]}$$

Es decir, un año que corresponde al tiempo de referencia del estudio ó a la referencia para la medida de las unidades de tiempo.

**4.4.4 Simulación de Montecarlo para resolver una cadena de Markov homogénea**

Definiendo:

$t$  : Tiempo de la simulación que corresponde al tiempo operativo del proceso

$t_i$  : Tiempo en que el proceso está en el estado  $i$

$n_i$  : Número de veces que el proceso entra al estado  $i$

Al iniciar la simulación:

$$t = 0 \qquad t_i = 0 \quad \forall i \qquad n_i = 0 \quad \forall i$$

Los pasos de la simulación son:

1. Ubíquese en el estado  $k$  donde inicia el proceso y súmele 1 al contador  $n_k$  (súmele 1)
2. Para los estados a los cuales hay conexión desde el estado actual genere un tiempo de transición entre estados utilizando las correspondientes distribuciones de probabilidad.
3. Seleccione el menor tiempo de transición del estado actual a los estados a los cuales existe conexión.

El proceso pasa al estado  $j$  para el cual hay el menor tiempo de transición  $t_{kj}$ .

Súmele 1 al contador  $n_j$

Cuente una transición entre estados; esta transición corresponde a una iteración de la simulación.

4. Súmele  $t_{kj}$  al tiempo de la simulación ( $t$ ) y al contador de tiempo del estado  $k$  ( $t_k$ )
5. Ubíquese en el estado  $j$  para el cual se hizo la transición y vuelva al paso 2
6. Repetir hasta un número pre-especificado de iteraciones u otro criterio de parada
7. Calcule las salidas de la simulación:

Probabilidad de encontrar el estado $k$	$P_k = t_k / t$
Tasa de salidas desde el estado $k$	$\lambda_k = n_k / t_k$
Frecuencia de encontrar el estado $k$	$f_k = \lambda_k * p_k$
Tiempo medio en el estado $k$	$m_k = 1 / \lambda_k$

Con este método solo se obtienen las probabilidades de estado estable del proceso.

No debe confundirse el estado transitorio de la simulación (estados en los cuales la muestra de datos no se ha estabilizado en una distribución) con el estado transitorio de la solución en el tiempo del proceso.

**EJEMPLO 4.4**

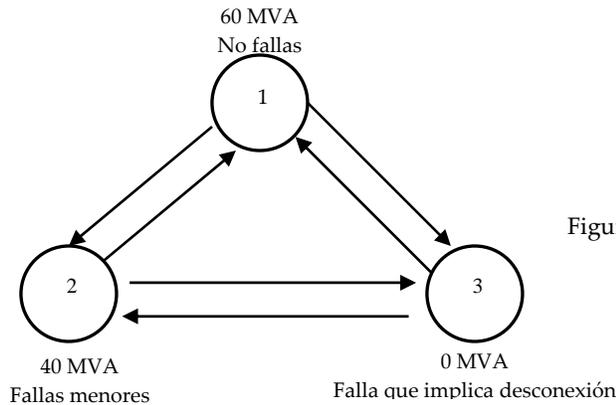


Figura 4.10 Diagrama de transición de estados para una unidad de generación

Una unidad de generación hidráulica tiene los siguientes estados operativos:

Estado	Descripción	Capacidad en MVA
1	Equipo sin falla	60
2	Fallas menores en turbina, generador e instalaciones hidráulicas	40
3	Fallas que implican la desconexión del equipo	0

Las distribuciones de probabilidad que definen el proceso estocástico son:

	Distribución de Probabilidad
$t_{12}$	Gamma con parámetros $\alpha = 1.5$ y $\beta = 0.0548$ años (20 días), $E(t_{12}) = 30$ días
$t_{13}$	Gamma con parámetros $\alpha = 2.5$ y $\beta = 0.1315$ años (48 días), $E(t_{13}) = 120$ días
$t_{21}$	Gamma con parámetros $\alpha = 0.8$ y $\beta = 0.0103$ años (90 horas), $E(t_{21}) = 3$ días
$t_{23}$	Gamma con parámetros $\alpha = 2.5$ y $\beta = 0.1315$ años (48 días), $E(t_{23}) = 120$ días
$t_{31}$	Gamma con parámetros $\alpha = 0.7$ y $\beta = 0.0274$ años (240 horas), $E(t_{23}) = 7$ días
$t_{32}$	Gamma con parámetros $\alpha = 0.8$ y $\beta = 0.0068$ años (60 horas), $E(t_{21}) = 2$ días

Hallar las probabilidades de estado estable de cada uno de los estados, las tasas de salida desde cada uno de los estados, el tiempo medio gastado en cada estado y la frecuencia esperada de encontrar cada uno de los estados.

Resultados con 1'000,000 de iteraciones				
Estado	$P_k$	$\lambda_k$ [eventos/año]	$f_k$ [veces/año]	$m_k$ [años]
1	0.9017	13.0439	11.7623	0.0767
2	0.0945	121.7060	11.4963	0.0986
3	0.0038	265.1824	1.0071	0.0038

4.5 MODELO DE DOS ESTADOS COMO UN PROCESOS PUNTUAL

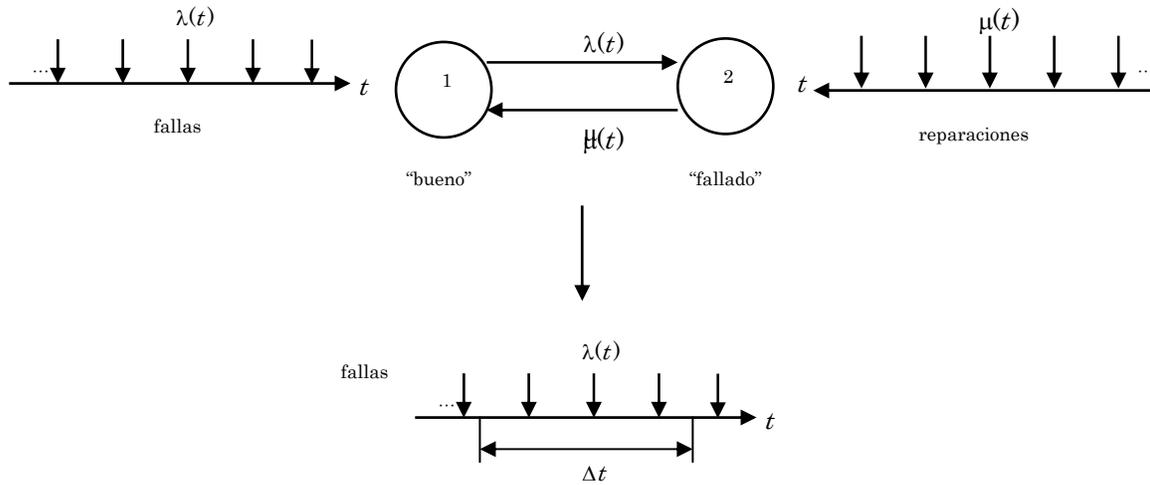


Figura 4.11 Modelo de fallas de un componente reparable de dos estados mediante proceso puntual

El proceso de Markov de 2 estados discretos, continuo en el tiempo, es producido por dos fuentes de eventos puntuales (Fuentes de Poisson).

Para el caso de los componentes reparables, cuando la magnitud de los tiempos de las reparaciones es muy pequeña comparada con respecto a la magnitud de los tiempos para falla, es usual desacoplar el proceso de Markov y estudiar únicamente el proceso de llegada de las fallas; también se puede estudiar en forma independiente el proceso de llegada de las reparaciones aunque esto es menos usual.

El modelar el componente reparable mediante un proceso estocástico puntual de las fallas implica:

1	Las fallas ocurren una a la vez	Algunos investigadores argumentan que esto es válido pues en términos prácticos es difícil probar que dos fallas ocurren en el mismo instante de tiempo.
2	La indisponibilidad del componente es despreciable	Esto se cumple para muchos componentes; sin embargo, se recomienda verificarlo para cada caso bajo estudio.
3	Las reparaciones son "mínimas"	En este tipo de modelamiento se asume que las reparaciones no cambian el estado de confiabilidad del componente

Nótese que aunque solo se está estudiando el proceso de fallas del componente, implícitamente se considera que este tiene dos estados operativos.

En el proceso puntual se cuenta la cantidad de fallas  $n_f$  que ocurren en un periodo de tiempo  $\Delta t$ . Es común asumir que el periodo de interés inicia en un tiempo cero correspondiente al instante de tiempo donde empiezan los registros operativos o datos estadísticos que documentan el proceso; en este caso  $\Delta t = t - 0 = t$ , y, entonces, solo aparecerá  $t$  en las ecuaciones del proceso. No debe confundirse entonces a  $t$  con un instante de tiempo.

### 4.5.1 Modelo matemático

El modelo matemático de este proceso se define mediante la tasa de fallas  $\lambda(t)$  o función de intensidad del proceso de fallas.

Según la forma de esta tasa de fallas (constante, creciente en el tiempo, decreciente en el tiempo) se interpreta el estado de confiabilidad del componente, en igual forma como se indicó en la sección 2.4.4.

Esta función de intensidad permite calcular:

- **El valor esperado**

$$\Lambda(t) = E[n_f(t)] = \int_0^t \lambda(t) dt$$

- **La varianza**

$$VAR(t) = \Lambda(t)$$

- **La función de probabilidad de masa**

La probabilidad de que en un periodo dado  $t$  lleguen o ocurran exactamente  $k$  fallas está dada por:

$$P[n_f(t) = k] = \frac{1}{k!} [\Lambda(t)]^k * e^{-\Lambda(t)} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

- **Función de distribución de probabilidad**

$$P[n_f(t) \leq k] = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} [\Lambda(t)]^i * e^{-\Lambda(t)}$$

En este modelo matemático se cumple que:

1	Los eventos llegan uno a la vez
2	$n_f(t)$ es un valor entero
3	$n_f(0) = 0$
4	$n_f(t) \geq 0$
5	Si $s < t$ , $n_f(t) - n_f(s)$ es igual al número de eventos que han ocurrido en el intervalo $(s, t)$

### 4.5.2 Cómo obtener este modelo

Para obtener el modelo matemático de proceso puntual, es necesario analizar la tendencia e independencia de las muestras de tiempos para falla, según el procedimiento mostrado en la Figura 4.12.

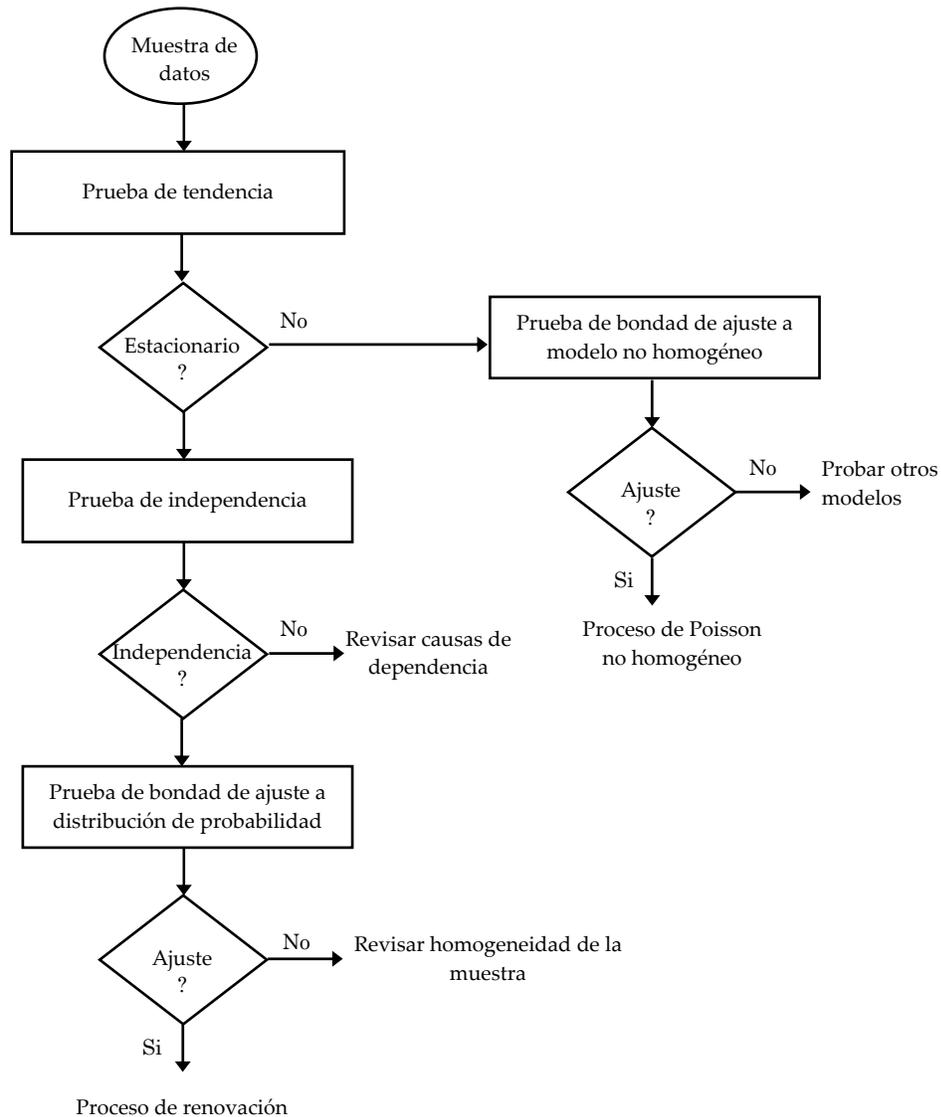


Figura 4.12 Procedimiento de análisis de las muestras de tiempos para falla para ajuste a un modelo puntual

El resultado de aplicación de este procedimiento es un proceso de renovación o un proceso de Poisson no homogéneo.

En la Figura 4.13 se presentan algunos de modelos puntuales. El proceso de renovación exponencial también se conoce como proceso de Poisson homogéneo.

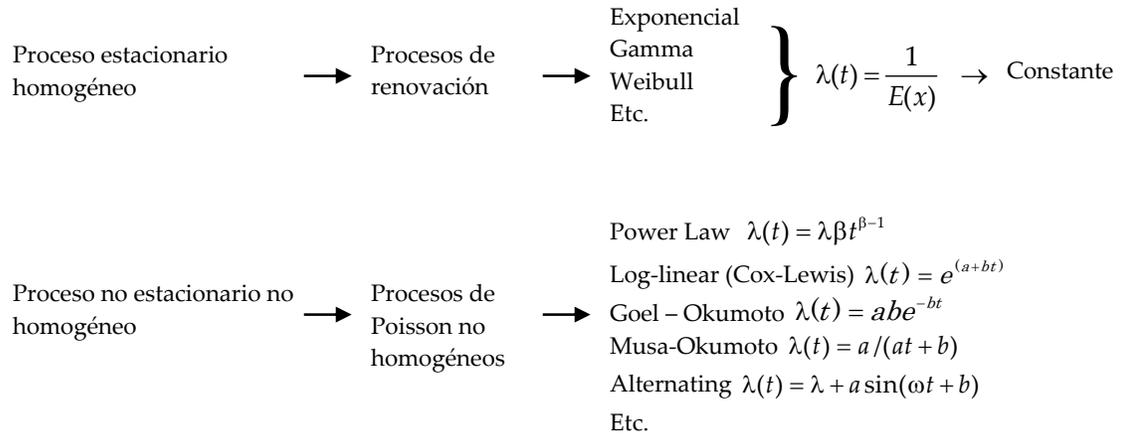


Figura 4.13 Clasificación de los procesos estocásticos puntuales ( $\lambda, \beta, a, b, \omega$  son constantes)

### 4.5.3 Cómo seleccionar un modelo puntual no homogéneo

Para el caso de procesos de falla con tendencia, previo a escoger el modelo puntual, es necesario analizar la forma de la tasa de eventos de la muestra de datos, para seleccionar el modelo puntual con función de intensidad que la represente bien.

Para esto, se calcula la tasa de fallas por subperiodo tal como se indicó en la sección 4.2.3

### 4.5.4 Proceso de fallas según el origen de la muestra de datos

Algo muy importante es entender a qué se refiere el modelo puntual de fallas obtenido según el origen de la muestra de datos de tiempos para falla:

1	Un componente reparable	<p>En este caso el modelo de falla y su función de intensidad se refieren a las fallas que llegan a un único componente.</p> <p>Esta tasa de fallas es igual a la que se obtendría en una cadena de Markov.</p>
2	Un grupo de componentes reparables idénticos	<p>En este caso el modelo de falla y su función de intensidad se refieren a las fallas que llegan a la población de componentes reparables de la cual se tomo la muestra de datos.</p> <p>Si se desea el modelo puntual o la tasa de fallas por componente, es necesario descomponer el modelo o la función de intensidad obtenidos para el grupo.</p> <p>Recordar que solo para el proceso de Poisson homogéneo es posible descomponer fácilmente la función de intensidad dividiéndola entre el número de componentes en la población. El proceso de fallas de cada componente individual también es un proceso de Poisson homogéneo.</p>

**EJEMPLO 4.5**

Para un transformador de distribución se ha verificado que el proceso de llegadas de las fallas es un proceso de Poisson homogéneo (Proceso de renovación exponencial) con una tasa de ocurrencia de eventos  $\lambda = 0.2$  fallas/año.

- Valores esperados de fallas:  $E[N(t)] = 0.2 * t$

$t$ [años]	$E[N(t)]$ [fallas]
1	0.2
5	1
10	2

Conforme se aumenta el periodo de tiempo en que el equipo permanece en funcionamiento, mayor número de fallas se espera que ocurran.

- Probabilidad de llegada de fallas en diferentes periodos de tiempo:

$$P[N(t) = k] = \frac{1}{k!} [0.2t]^k * e^{-0.2t}$$

$k$ [Fallas]	$t$ [años]		
	1	5	10
0	0,818731	0,367879	0,135335
1	0,163746	0,367879	0,270671
2	0,016375	0,183940	0,270671
3	0,001092	0,061313	0,180447
4	0,000055	0,015328	0,090224
5	0,000002	0,003066	0,036089
6	0,000000	0,000511	0,012030
7	0,000000	0,000073	0,003437
8	0,000000	0,000009	0,000859
9	0,000000	0,000001	0,000191
10	0,000000	0,000000	0,000038

Como se observa, las probabilidades de ocurrencia de un número dado de fallas cambian conforme se cambia el periodo de tiempo.

También se observa que son bajas las probabilidades de que ocurran los valores esperados de fallas calculados en el paso anterior para periodos de 5 (1 falla) y 10 años (2 fallas).

Esto último ilustra sobre el cuidado que se debe tener al tomar valores esperados para los procesos de decisión, pues en general, estos valores tienen poca probabilidad de ocurrir.

Probabilidad de tener “al menos” una falla en diferentes periodos de tiempo:

$$P[N(t) = 1, 2, \dots] = 1 - P[N(t) = 0]$$

$t$ [años]	$P[N(t) = 1, 2, \dots]$
1	0.181269
5	0.632121
10	0.864665

- Probabilidad de que la primera falla ocurra en un tiempo menor o igual dado  $t$

$$F_{t_1}(t) = P[t_1 \leq t] = 1 - e^{-0.2t}$$

$t$ [años]	$P[t_1 \leq t]$
1	0.181269
5	0.632121
10	0.864665

Como se observa, las probabilidades de que ocurra la primera falla en un tiempo menor o igual a 1, 5 y 10 años corresponden a los mismos resultados de probabilidad de que ocurra al menos una falla en estos mismos periodos de tiempo en el HPP, que se calcularon en el paso anterior.

4.6 MODELO MULTI ESTADOS MEDIANTE PROCESOS PUNTUALES

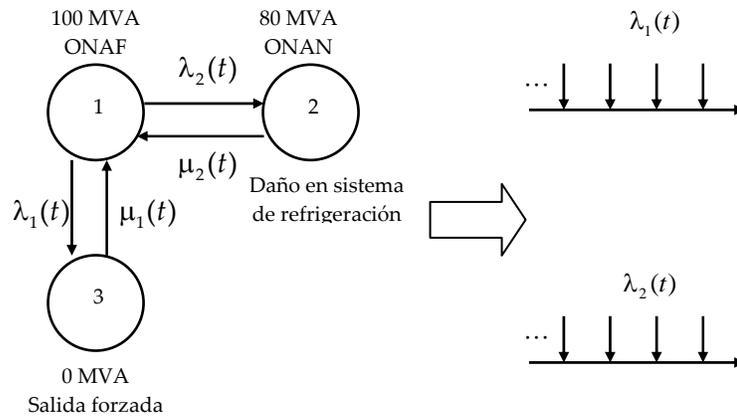


Figura 4.14 Componente reparable con dos modos de falla

Para un componente reparable con varios estados operativos también se puede utilizar el modelamiento mediante procesos puntuales. Para esto, se define un proceso puntual por cada modo de falla o tiempo de transición entre estados, tal como se muestra en el ejemplo de la Figura 4.14.

Los modelos puntuales de cada modo de falla se obtienen de las respectivas muestras de tiempos de transición entre estados a las cuales se les aplica el procedimiento mostrado en la Figura 4.12.

Obviamente, se mantienen aquí las condiciones para modelamiento con procesos puntuales que se indicaron en la sección 4.5.

#### 4.7 MODELO DE FRECUENCIA Y DURACIÓN

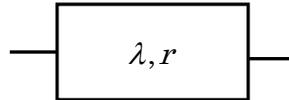


Figura 4.15 Modelo de frecuencia y duración de un componente

En este método, el componente se considera como un “bloque” que se define con los siguientes parámetros:

$\lambda$	Una tasa de fallas constante
$r$	Un tiempo medio para reparación constante

Estos parámetros se obtienen de estadísticas (Sección 4.2.9) o de los modelos de cadenas de Markov homogéneas.

La indisponibilidad del componente en [%] o [horas/año] se calcula como:

$U = \lambda * r$
-------------------

Este tipo de modelamiento se denomina de “frecuencia y duración” pues se deriva de la técnica del mismo nombre del proceso de Markov homogéneo y porque  $\lambda$  es la frecuencia de fallas y  $r$  es la duración de las fallas.

Este modelo se desarrolla como una aproximación a la solución de una cadena de Markov exponencial para combinaciones serie y paralelo de componentes, por lo tanto, no tiene mayor sentido utilizarlo aislado.

Solo se recomienda utilizar este tipo de modelamiento si la indisponibilidad anual del componente es menor al 10% [6].

Las soluciones de este método solo dan valores esperados, pues son una simplificación a la solución exacta dada por la cadena de Markov homogénea.

Como este modelo se deriva de la cadena de Markov homogénea exponencial, una condición o supuesto es que los tiempos para falla y reparación están exponencialmente distribuidos. Esto debería verificarse antes de aplicar este tipo de modelamiento.

#### 4.8 OTRAS SALIDAS QUE AFECTAN A UN COMPONENTE REPARABLE

Hasta el momento sólo se han considerado las fallas para el modelamiento de los componentes reparables. Sin embargo, la disponibilidad de estos componentes se ve afectada por los siguientes tipos de salidas:

1	Otras salidas no planeadas	Vandalismo, accidentes, fenómenos atmosféricos, temblores	Son de naturaleza aleatoria en cuanto a su ocurrencia y duración.
2	Salidas planeadas	Mantenimiento preventivo, inspección, toma de medidas	Son determinísticas en cuanto a su ocurrencia pero aleatorias en cuanto a su duración. Una característica muy importante de las salidas planeadas es que pueden post-ponerse si afectan severamente la seguridad o desempeño del sistema.

Las otras salidas no planeadas también pueden incorporarse a los modelos ya vistos.

Las salidas planeadas pueden tratarse de la siguiente manera:

1	Determinar la programación de salidas planeadas del componente	En este caso al estudiar o generar la secuencia operativa del componente se debe mirar en que periodos de tiempo estará indisponible según el programa de mantenimiento preventivo.
2	Incorporarlas al modelo probabilístico	Implica asumir que se conoce que el componente tendrá salidas planeadas, pero no se conoce su programación. Valido para estudios de largo plazo o para componentes donde el mantenimiento preventivo no obedece a un programa riguroso.

Otro asunto, es que las otras salidas no planeadas y las salidas planeadas deben incorporarse en los índices de confiabilidad pues para algunos componentes del sistema eléctrico éstas salidas pueden tener una participación muy alta.

### 4.9 ÍNDICES DE CONFIABILIDAD ESTADÍSTICOS

Definiendo:

$T$	Tiempo de estudio o periodo de los registros, generalmente [años]
$n$	Número total de salidas en el periodo T
$n_f$	Número de fallas en el periodo T
$N$	Número de componentes o longitud total del(os) componente(s)
$X$	Longitud desconectada en una salida o falla dada
$X_{pr}$	Longitud promedia desconectada en una salida o falla
$tto$	Tiempo para salida planeada, no planeada o falla
$r$	Tiempo medio para reparación
$MTTRS$	Tiempo medio para restauración (reconexión de salidas planeadas y no planeadas)

Tasas de salidas	
Ecuación	Observación
$\lambda_o = n / (N * T - \sum_{i=1}^n ttr_i)$	Aplica a uno o varios componentes no longitudinales
$\lambda_o = n / (N(T - \sum_{i=1}^n ttr_i))$	Aplica a uno o varios componentes longitudinales, sí en cada salida se desconecta toda la longitud.
$\lambda_o = n / (NT - \sum_{i=1}^n ttr_i X_i)$	Aplica a uno o varios componentes longitudinales sí en cada salida se desconecta una longitud diferente.
$\lambda_o = n / (NT - X_{pr} \sum_{i=1}^n ttr_i)$	Aplica a uno o varios componentes longitudinales, sí en cada salida se desconecta una longitud promedia.
$\lambda_o = 1 / MTTRS$	

Tasas de fallas	
Ecuación	Observación
$\lambda = n_f / (N * T - \sum_{i=1}^n ttr_i)$	Aplica a uno o varios componentes no longitudinales
$\lambda = n_f / (N(T - \sum_{\forall i \in falla}^{n_f} ttr_i))$	Aplica a uno o varios componentes longitudinales, sí en cada falla se desconecta toda la longitud.
$\lambda = n_f / (NT - \sum_{\forall i \in falla}^{n_f} ttr_i X_i)$	Aplica a uno o varios componentes longitudinales, sí en cada falla se desconecta una longitud diferente.
$\lambda = n_f / (NT - X_{pr} \sum_{\forall i \in falla}^{n_f} ttr_i)$	Aplica a uno o varios componentes longitudinales, sí en cada falla se desconecta una longitud promedia.
$\lambda = 1 / r$	
$\lambda = n_f / (NT)$	Expresión aproximada, muy utilizada en la práctica

Tasas de restauración y reparación	
Ecuación	Observación
$\mu_o = 1 / MTTRS$	Tasa de restauración
$\mu = 1 / r$	Tasa de reparación

Tiempos medios		
Tiempo medio para salida	$MTTO = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n tto_i$	Aclarar si los tto se refieren a un componente o a un grupo de componentes.
	$MTTO = 1 / \lambda_o$	Se aplica cuando no se tienen los tiempos para salida
Tiempo medio para falla	$MTTF = m = \frac{1}{n_f} \sum_{i=1}^{n_f} ttf_i$	Aclarar si los ttf se refieren a un componente o a un grupo de componentes.
	$MTTF = 1 / \lambda$	Se aplica cuando no se tienen los tiempos para falla
Tiempo medio para restauración	$MTTRS = (\sum_{i=1}^n ttr_i) / n$	
Tiempo medio para reparación	$MTTR = r = (\sum_{\forall i \in falla}^{n_f} ttr_i) / n_f$	

Disponibilidades e indisponibilidades		
Disponibilidad operacional	$A_o = (1 - \sum_{i=1}^n ttr_i / (N * T)) * 100\%$	Aplica para componentes no longitudinales
	$A_o = (1 - U_o / 8760) * 100\%$	
Indisponibilidad operacional anual	$U_o = (\sum_{i=1}^n ttr_i) / (N * T) * 8760$	Aplica para componentes no longitudinales. Está expresada en horas; también puede expresarse como % ó probabilidad.
	$U_o = \lambda_o * MTTRS$	
Disponibilidad inherente	$A_I = (1 - \sum_{i=1}^{n_f} ttr_i / (N * T)) * 100\%$	Aplica para componentes no longitudinales
	$A_I = (1 - U_I / 8760) * 100\%$	
Indisponibilidad inherente anual	$U_i = (\sum_{\forall i \in falla}^{n_f} ttr_i) / (N * T) * 8760$	Aplica para componentes no longitudinales. Está expresada en horas; también puede expresarse como % ó probabilidad.
	$U_I = \lambda * r$	

Otros índices de confiabilidad pueden definirse. Se presentan aquí solo algunos de los más comunes y prácticos.

Otras ecuaciones se pueden plantear para resolver los índices de confiabilidad presentados.

Cuando se calculan índices de confiabilidad basados en los tto, ttf, tbo ó tbf es necesario revisar si con la información disponible el índice aplica a un componente o a un grupo de componentes, pues es usual que este tipo de información no pueda ser desagregada a nivel de componentes individuales.

**EJEMPLO 4.6**

Un sistema de distribución urbano cuenta con 790 transformadores monofásicos de 13.2 kV.

En un periodo de 4 años se registraron 31 fallas en estos equipos.

La sumatoria de los tiempos de reparación es de 86.5833 horas y el tiempo promedio de las reparaciones es de 2.7930 horas.

Índice	Valor	Unidad
$\lambda$	0.0098	Fallas/año-componente
MTTF	102.0050	Años/falla
r	2.7930	Horas/reparación
$\mu$	3136.4	Reparaciones/año
$A_I$	99.9997	%
$U_I$	0.0274	Horas/año

Estos índices se refieren a un componente típico o medio que representa a cada uno de los 790 transformadores.

El MTTF es el estimador de la vida media del componente o es el tiempo esperado para que un componente de estos sufra una falla.

**EJEMPLO 4.7**

Un sistema de distribución urbano cuenta con 263.17 km de red secundaria subterránea.

La cantidad de red secundaria que en promedio maneja cada transformador de distribución es de 2.392 km; esta es la cantidad de red desconectada cada que se presenta una salida, pues los dispositivos de maniobra y protección consisten en cortacircuitos con fusibles montados en el lado de media tensión del transformador. En un periodo de 4 años se registraron 368 salidas planeadas y no planeadas con una sumatoria de los tiempos de restauración de 1201.6 horas. El tiempo promedio de las restauraciones es de 3.2651 horas.

Índice	Valor	Unidad
$\lambda_o$	0.3495	Salidas/año-km
MTTO	2.8616	Años-km/salida
$U_o$	1.1410	Horas/año-km
$A_o$	99.9870	%
MTTRS	3.2651	Horas/restauración
$\mu_o$	2682.9	Restauraciones/año

Estos índices se refieren a un km de red típico o media que representa a cada uno de los 263.17 km. El MTTO es el estimador de la vida media operativa de un km de red o es el tiempo esperado para que un km de este tipo de red sufra una salida planeada o no planeada.

**EJEMPLO 4.8**

Un sistema de distribución urbano cuenta con 4 circuitos primarios de distribución subterráneos. Las estadísticas de las fallas aclaradas en la subestación en un periodo de 3 años son:

Circuito	Longitud [km]	Total fallas	Tiempo sin servicio [Horas]
1	5.5	32	28
2	4.5	28	32
3	6.5	15	41
4	3.5	9	40
Total	20	84	141

Índice	Valor	Unidad
$\lambda$	1.4019	Fallas/año-km
MTTF	0.7133	Años-km/falla
r	1.6786	Horas/reparación
$\mu$	5218.72	Reparaciones/año
$A_1$	99.9731	%
$U_1$	2.3532	Horas/año

Estos índices se refieren a un km de red típico o medio que representa a cada uno de los 20 km de red primaria subterránea. El MTTF es el estimador de la vida media operativa de un km de red o es el tiempo esperado para que un km de este tipo de red sufra una falla.

## 4.10 CÓMO CONSTRUIR MODELOS CUANDO NO HAY DATOS O LA MUESTRA DE DATOS ES MUY PEQUEÑA

### 4.10.1 Justificación

En estudios de confiabilidad, el conseguir datos para construir los modelos probabilísticos de los componentes presenta los siguientes problemas:

1	<p>Las fallas son fenómenos aleatorios, por lo tanto, se debe esperar a que ocurran para registrar los datos asociados a estos eventos.</p> <p>Esto difiere de otras áreas de estudio como el mercadeo o la demografía, donde se puede consultar tantos individuos de la población bajo estudio como se requiera para obtener un nivel de error dado</p>
2	<p>Algunos de los componentes del sistema eléctrico tienen tasas de fallas muy bajas durante su periodo de vida útil; al observar su operación por largos periodos de tiempo es posible que registren muy pocas fallas o no se registre ninguna.</p> <p>Esto es común en equipos que no tienen partes móviles como pararrayos, transformadores de instrumentación, reactores, condensadores, etc.</p>

Para resolver estos problemas, es común agrupar los datos de componentes similares. Sin embargo, pese a la agrupación, es común que se presenten las siguientes situaciones:

1	No hay fallas en el periodo de tiempo de los registros
2	Se dispone de un solo dato, por lo cual no pueden utilizarse los métodos clásicos de estimación de parámetros o ajuste a una distribución de probabilidad.
3	Existen muy pocos datos y su gráfica en forma de histograma tiene una o muy pocas clases por lo cual, no puede aplicarse el procedimiento de ajuste a una cadena de Markov o proceso puntual, ó aunque éste procedimiento se aplique, no se cumplen la pruebas de bondad de ajuste.

Como no es realista asumir que existen componentes 100% confiables, se deben estudiar los métodos para construir modelos probabilísticos ante situaciones de cantidades limitadas o ausencia de datos de falla. A continuación, se presentan un método.

### 4.10.2 Solución mediante un proceso puntual de renovación

Para un componente que durante un largo periodo de tiempo  $T$  ha registrado muy pocas fallas o ninguna, se asume que está en su periodo de vida útil pues únicamente durante este periodo de vida el componente puede tener una baja tasa de fallas.

Sea  $x$  la variable aleatoria del número de fallas de un componente en un periodo de tiempo  $t$ , en un proceso de de renovación.

La probabilidad de que ocurran k fallas está dada por:

$$P[x = k] = (\lambda * t)^k / k! * e^{-\lambda * t}$$

La probabilidad acumulada o probabilidad de que ocurran k o menos fallas está dada por:

$$P[x \leq k] = \sum_{i=0}^k (\lambda * t)^i / i! * e^{-\lambda * t}$$

Utilizando la muestra de n fallas en un periodo de tiempo T, se determina el valor de la tasa de fallas estimada para el cual se alcanza la probabilidad crítica o de rechazo (α):

$$\alpha = 1 - \delta = \sum_{i=0}^n (\hat{\lambda} * T)^i / i! * e^{-\hat{\lambda} * T}$$

Entonces, con un δ% de confianza se puede afirmar que λ < λ̂. Es decir, existe un intervalo de confianza unilateral para estimar λ donde λ̂ es la cota superior aproximada del δ% de confianza.

Sólo es fácil resolver esta última ecuación para el caso de cero fallas. En el resto de los casos es necesario utilizar métodos numéricos. La Tabla 4.1 presenta resultados para λ̂ con α = 5% y varios valores de T y n. La Fig. 4.16 presenta la gráfica de algunos de estos valores.

Tabla 4.1  
Valores de λ̂ [fallas/año] para α = 5% utilizando un proceso de renovación

n [fallas]	T [años]				
	5	10	15	20	25
0	0.5991	0.2996	0.1997	0.1498	0.1198
1	0.9488	0.4744	0.3163	0.2372	0.1898
2	1.2592	0.6296	0.4197	0.3148	0.2518
3	10.1	0.7754	0.5169	0.3877	0.3101
4	10.1	6.2738	0.6102	0.4577	0.3661
5	10.1	10.1	4.5643	1.3932	0.4205
6	10.1	10.1	10.1	4.0297	1.4449
7	10.1	10.1	10.1	10.1	3.9056
8	10.1	10.1	10.1	10.1	10.1

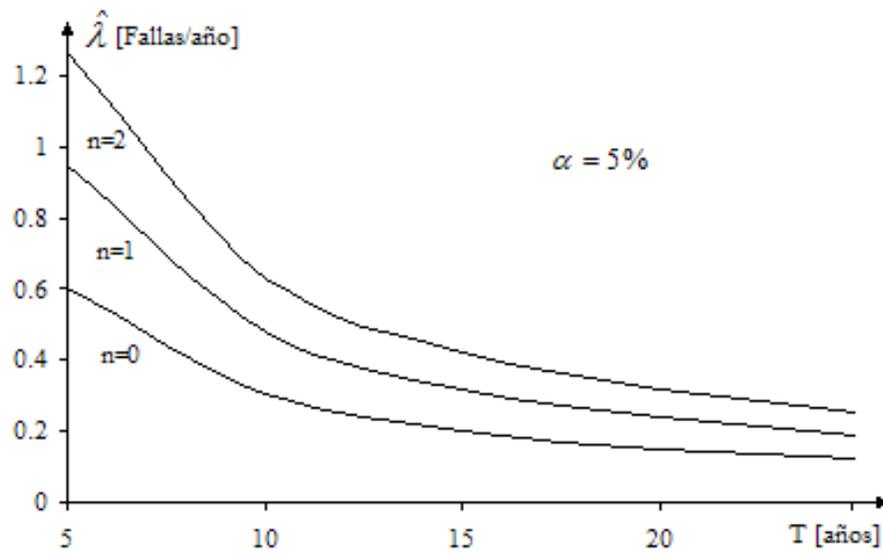


Figura 4.16 Variación de la tasa de fallas estimada con un proceso de renovación

### 4.10.3 Grupos de componentes

Si durante un periodo de tiempo  $T$  se observan  $n$  fallas en un grupo de  $X$  componentes similares, entonces:

$$\hat{\lambda} = n / (X * T) = n / T' = \hat{\lambda}' / X$$

En este caso,  $\hat{\lambda}$  se refiere a un componente “típico” o “promedio” que representará a cada uno de los componentes del grupo. Artificialmente, se obtienen registros operativos del componente promedio para un periodo de tiempo  $T' = X * T$  en el cual sufre  $n$  fallas.

Si se cumple, o se asume, que todos los componentes del grupo están en su periodo de vida útil y que el proceso de llegada de las fallas a cada uno de ellos es un proceso de Poisson homogéneo, se pueden aplicar los dos métodos presentados anteriormente.

Bajo estas condiciones, el proceso de llegada de las fallas al grupo de componentes, también es un proceso de Poisson homogéneo con parámetro  $\lambda' = \hat{\lambda} * X$ .

**EJEMPLO 4.9**

Revisando bitácoras que comprenden un período de 5 años (1998-2003), solo se encontraron registradas 2 fallas para un banco de transformadores 115/33 kV 75 MVA.

- Estimadores puntuales

$$\hat{\lambda} = \bar{\lambda} = n/T = 2/5 = 0.4 \text{ Fallas/año}$$

$$\hat{E}(tff) = 1/\hat{\lambda} = 1/0.4 = 2.5 \text{ Años para falla}$$

- Intervalo de confianza unilateral

$$\hat{\lambda} = 1.2592 \text{ Fallas/año para } \alpha = 5\% \text{ (Tabla 4.1)}$$

$$\hat{E}(tff) = 1/\hat{\lambda} = 1/1.2592 = 0.7942 \text{ Años para falla}$$

Entonces, con un 95% de confianza se puede afirmar:

$$\lambda \leq 1.2592 \text{ Fallas/año y } E(tff) \geq 0.7942 \text{ Años/falla}$$

- Modelo probabilístico del componente

Este modelo se define con el tiempo para fallas en un proceso de Poisson homogéneo

$$f_{tff}(t) = \hat{\lambda} * e^{-\hat{\lambda} * t} = 1.2592 * e^{-1.2592 * t}$$

$$F_{tff}(t) = 1 - e^{-1.2592 * t}$$

También es válido definir este modelo utilizando los otros valores del intervalo de confianza unilateral.

Existe aquí el supuesto que el proceso de renovación es exponencial. Podría ser otro!

**EJEMPLO 4.10**

Revisando las órdenes de reparación emitidas por el sistema de atención a los usuarios de la Empresa de Energía de Pereira, se encontró una sola falla en un periodo de cuatro años (2000-2003) para un grupo de 37 transformadores de distribución de 33 kV.

- Estimadores puntuales

$$\hat{\lambda} = \bar{\lambda} = n/(X * T) = 1/(4 * 37) = 0.006756 \text{ Fallas/año}$$

$$\hat{E}(ttf) = 1 / \hat{\lambda} = 1 / 0.006756 = 148 \text{ Años para falla}$$

- Intervalo de confianza unilateral

$$\hat{\lambda} = 0.0321 \text{ fallas/año}$$

$$\hat{E}(ttf) = 1 / \hat{\lambda} = 1 / 0.0321 = 31.1526 \text{ Años para falla}$$

Entonces, con un 95% de confianza se puede afirmar:

$$\lambda \leq 0.0321 \text{ Fallas/año y } E(ttf) \geq 31.1526 \text{ Años/falla}$$

- Modelo probabilístico del componente típico que representa al grupo de componentes:

$$f_{ttf}(t) = \hat{\lambda} * e^{-\hat{\lambda} * t} = 0.0321 * e^{-0.0321 * t}$$

$$F_{ttf}(t) = 1 - e^{-0.0321 * t}$$

Existe aquí el supuesto que el proceso de renovación es exponencial. Podría ser otro!

**EJEMPLO 4.11**

Revisando bitácoras que comprenden un periodo de 11 años (1993-2003), no se encontraron registros de fallas para un grupo de 12 TP's de 13.2 kV.

- Estimadores puntuales: No se pueden calcular.
- Intervalo de confianza unilateral

$$\hat{\lambda} = 0.0227 \text{ fallas/año}$$

$$\hat{E}(ttf) = 1 / \hat{\lambda} = 1 / 0.0227 = 44.0529 \text{ Años para falla}$$

Entonces, con un 95% de confianza se puede afirmar:

$$\lambda \leq 0.0227 \text{ Fallas/año y } E(ttf) \geq 44.0529 \text{ Años/falla}$$

- Modelo probabilístico del componente típico que representa al grupo de componentes:

$$f_{ttf}(t) = \hat{\lambda} * e^{-\hat{\lambda} * t} = 0.0227 * e^{-0.0227 * t}$$

$$F_{ttf}(t) = 1 - e^{-0.0227 * t}$$

Existe aquí el supuesto que el proceso de renovación es exponencial. Podría ser otro!

#### 4.11 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ascher H, Feingold H, "Repairable systems reliability: Modeling, inference, misconceptions and their causes", Marcel Dekker, 1984.
- [2] Ellis K. E, Gibson Gregory J, "Trend Analysis of repair times", IEEE Proceedings of Annual Reliability and Maintainability Symposium, 1991.
- [3] Hale P. S, Arno R. G, "Survey of reliability and availability information for power distribution, power generation and HVAC components for commercial, industrial and utility installations", IEEE Trans. Industry Applications, vol. 37, pp. 191-196, Feb. 2001.
- [4] IEEE standard 493, "Recommended Practice for the Design of Reliable Industrial and Commercial Systems, IEEE, 1990.
- [5] C. J. Zapata, "Estimación de tasa de fallas de componentes en casos de ausencia de datos o cantidades limitadas de datos", Revista Scientia et Technica, ISSN 0122-1701, No. 27, 2005.
- [6] Billinton R, Allan R. N, "Reliability evaluation of engineering systems - Concepts and Techniques", Plenum Press, 1992.
- [7] Miller I. R, Freund J. E, Johnson R, "Probability and statistics for engineers", Prentice Hall, 1992.
- [8] Zapata C. J, Cataño D, Suárez H. F, "Índices de confiabilidad de transformadores de distribución", Revista Mundo Eléctrico, No. 57, 2004.
- [9] Zapata C. J, Garcés L. P, Gómez O, "Modelamiento de componentes de sistemas compuestos generación-transmisión para estudios de confiabilidad", Revista Scientia et Technica, No. 25, 2004.
- [10] Zapata C. J, Garcés A. M, Restrepo W, "Índices de confiabilidad de acometidas", Revista Mundo Eléctrico, No. 60, 2005.
- [11] Zapata C. J, Cardona M. C, Zapata J. E, "Índices de confiabilidad de contadores de energía", Revista Mundo Eléctrico, No. 60, 2005.
- [12] Zapata C. J, Giraldo A, "Índices de confiabilidad de pararrayos de distribución", Revista Mundo Eléctrico, No. 63, 2006.
- [13] Zapata C. J, Gómez J. A, Garzón Luís E, "Índices de confiabilidad de redes secundarias de distribución", Revista Mundo Eléctrico, No. 64, 2006.

## CAPÍTULO 5 – ANÁLISIS DE SISTEMAS POR DIAGRAMAS DE RED

### 5.1 TIPOS DE COMPONENTES EN CUANTO A LOS MODOS DE FALLA

Los componentes de un sistema reparable o no reparable se pueden clasificar en:

Componentes independientes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La falla de un componente no afecta la probabilidad de falla de otros componentes del sistema.</li> <li>• No hay fallas que afecten simultáneamente a varios componentes</li> </ul>
Componentes dependientes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La falla de un componente aumenta o disminuye la probabilidad de falla de otros componentes. El caso de estudio más importante es, obviamente, cuando la falla de un componente aumenta la probabilidad de falla de otros componentes.</li> <li>• Existen fallas que afectan simultáneamente a varios componentes.</li> </ul>

Las fallas dependientes se pueden clasificar en:

Salidas de modo común o causa común	Varios componentes salen simultáneamente o en un intervalo de tiempo muy corto debido a una misma causa.
Salidas en cascada	La falla de un componente desata una secuencia de fallas de otros componentes en un “efecto dominó”

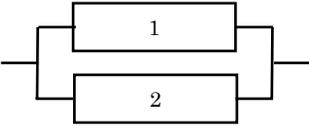
### 5.2 SISTEMAS QUE PUEDEN SER MODELADOS COMO UNA RED

Un sistema reparable o no se reparable de componentes independientes se puede representar por medio de un diagrama de red, bloques o lógico si cumple las condiciones de una estructura monotónica:

1	Cada componente solo tiene dos estados operativos: “bueno” y “fallado”, “disponible” e “indisponible”, etc.
2	El sistema solo tiene dos estados operativos: “bueno” y “fallado”, “disponible” e “indisponible”, etc.
3	El sistema está operando o disponible si todos los componentes están operando.
4	El sistema está fallado o indisponible si todos los componentes han fallado o están indisponibles.
5	La falla de un componente en un sistema ya fallado no puede restaurar el sistema a la operación.
6	La reparación de un componente en un sistema operativo no puede causar la falla del sistema.

En un diagrama de red, cada componente se representa como un bloque independiente de los otros componentes; la conexión entre componentes dependerá de la configuración operativa del sistema.

Los tipos básicos de conexión de los bloques de un diagrama de red son:

Conexión serie	Conexión paralelo
 <p>Dos componentes están en serie desde el punto de vista de confiabilidad si ambos deben operar para que el sistema opere.</p> <p>Si uno de los componentes falla, el sistema falla.</p> <p>Esta conexión representa un sistema no redundante.</p>	 <p>Dos componentes están en paralelo desde el punto de vista de confiabilidad si únicamente un componente debe operar para que el sistema opere.</p> <p>Todos los componentes deben fallar para que el sistema falle.</p> <p>Esta conexión representa un sistema redundante.</p>

Un diagrama de red indica cuáles combinaciones de fallas de los componentes resultarán en la falla del sistema. Si un componente falla o está indisponible, se remueve del diagrama de red. Si se retiran suficientes bloques del diagrama de red de tal forma que se interrumpe la conexión entre los puntos de entrada y salida, el sistema ha fallado o queda indisponible.

Para modelar un sistema por medio de un diagrama de red se sigue el siguiente procedimiento:

1	Dividir el sistema en componentes	<p>Los modos de falla de las secciones o subsistemas del sistema que se representen como bloques del diagrama de red <u>tienen que ser independientes</u> entre sí.</p> <p>Debido a la dependencia entre los modos de falla de los componentes y a lo complejo de las configuraciones operativas, a veces, puede ser difícil establecer el diagrama de red de un sistema.</p>
2	Conectar entre sí los componentes según la configuración operativa del sistema	Se definen las conexiones básicas serie y paralelo desde el punto de vista de confiabilidad. Otras conexiones más complejas también son posibles.

Tener en cuenta que:

1	<p>El diagrama de red y el sistema real no tienen necesariamente la misma topología.</p> <p>La topología física indica cómo están conectados entre sí los componentes en el sistema real, mientras que la topología del diagrama de bloques representa la configuración operativa del sistema, es decir, sus modos de falla.</p>
2	Un sistema físico con una estructura topológica definida puede tener diferentes topologías de red en cuanto a confiabilidad dependiendo de los requerimientos a los cuales es sometido. Ver el ejemplo 5.1.

**EJEMPLO 5.1**

En la Figura 5.1 se muestra el diagrama eléctrico y los diagramas de red de confiabilidad para diferentes requerimientos operativos.

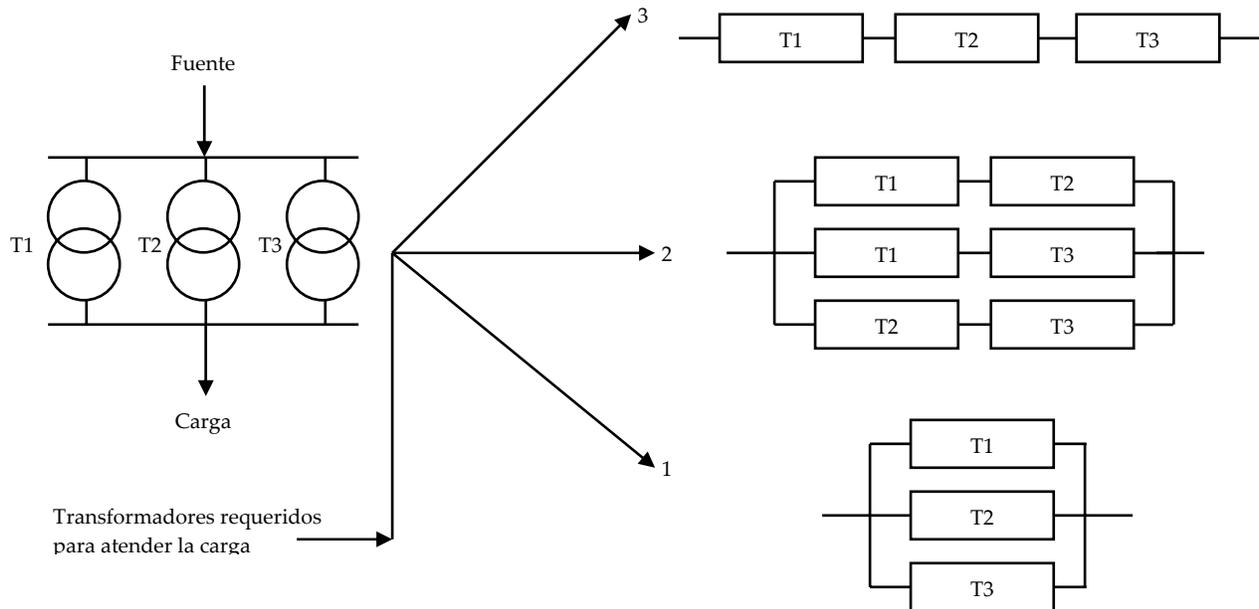


Figura 5.1 Diagramas de red para un sistema eléctrico con varios requerimientos operativos

**5.3 PARÁMETROS DE LOS COMPONENTES**

Cada componente  $i$  de un diagrama de red que representa un sistema reparable o no reparable se caracteriza con alguno de los siguientes parámetros:

Componente no reparable	La probabilidad de falla $F_i$ o la confiabilidad $R_i$
Componente reparable	La disponibilidad $A_i$ o la indisponibilidad $U_i$
	La probabilidad de falla $F_i$ o la confiabilidad $R_i$

En general, estos parámetros son funciones del tiempo, pero pueden aparecer como valores puntuales si:

1	Se evalúan en forma estadística
2	La probabilidad de falla y la confiabilidad se evalúan para un periodo de tiempo dado
3	La disponibilidad e indisponibilidad corresponden al estado estable ( $t = \infty$ )

A continuación se desarrollan las ecuaciones para valorar la confiabilidad para sistemas serie, paralelo y complejos. En estas ecuaciones se utilizan  $F_i$  y  $R_i$ ; los resultados obtenidos aplican de igual forma si estos parámetros se reemplazan por  $U_i$  y  $A_i$ , respectivamente.

**5.4 CONFIABILIDAD DE UN SISTEMA SERIE**



Figura 5.2 Sistema de dos componentes independientes en serie

Considere un sistema conformado por dos componentes independientes A y B conectados en serie desde el punto de vista de confiabilidad:

Sean:

- A: El evento de que el componente A este en el estado operativo
- B: El evento de que el componente B este en el estado operativo

Para que el sistema funcione, ambos componentes deben funcionar, entonces:

$$R_{SISTEMA} = P[A \cap B] = P[A]P[B] = R_A R_B$$

$R_A$  y  $R_B$  son las confiabilidades individuales de los componentes A y B, como función del tiempo o como un valor numérico.

En forma general, para un sistema de  $n$  componentes no reparables en serie se tiene:

$R_{SISTEMA}(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$
$F_{SISTEMA}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n R_i(t)$

Se puede concluir que la confiabilidad de un sistema conformado por componentes conectados en serie siempre será menor que la confiabilidad del componente menos confiable.

La confiabilidad de un sistema de componentes conectados en serie se puede mejorar de las siguientes maneras:

1	Reduciendo el número de componentes	
2	Aumentando la confiabilidad individual de cada componente	Equivale a mejorar la calidad de los componentes, lo cual implica un aumento en los costos.

**EJEMPLO 5.2**

Un sistema consistente de 2 componentes requiere que ambos funcionen para que el sistema funcione.

Las confiabilidades individuales para un periodo de 5 años son  $R_1(t = 5años) = 0.98$  y  $R_2(t = 5años) = 0.95$ .

- Confiabilidad del sistema en un periodo de 5 años

$$R(t = 5años) = \prod_{i=1}^2 R_i(5años) = 0.98 * 0.95 = 0.9310$$

- Probabilidad de falla del sistema en un periodo de 5 años

$$F(t = 5años) = 1 - R(t = 5años) = 1 - 0.9310 = 0.069$$

**EJEMPLO 5.3**

El diseño de un sistema requiere que 10 componentes idénticos funcionen para que el sistema funcione.

La confiabilidad del sistema en un periodo de 20 años no puede ser menor a 0.98. Cuál debe ser la confiabilidad mínima de los componentes?

$$R(t = 20años) = \prod_{i=1}^{20} R_i(20años) = R_i^{20} \geq 0.98 \quad \rightarrow \quad R_i \geq 0.98^{1/20} \quad \rightarrow \quad R_i \geq 0.997981$$

### 5.5 CONFIABILIDAD DE UN SISTEMA PARALELO

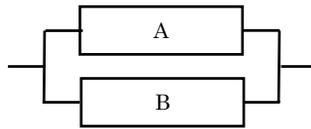


Figura 5.3 Sistema de dos componentes independientes en paralelo

Considere un sistema conformado por dos componentes independientes A y B conectados en paralelo desde el punto de vista de confiabilidad:

Sean:

- A: El evento de que el componente A no funcione
- B: El evento de que el componente B no funcione

Para que el sistema falle, ambos componentes deben fallar, entonces:

$$F_{SISTEMA} = P[A \cap B] = P[A]P[B] = F_A F_B$$

$F_A$  y  $F_B$  son las probabilidades de falla individuales de los componentes A y B, como función del tiempo o como un valor numérico.

En forma general, para un sistema de  $n$  componentes no reparables en paralelo se tiene:

$F_{SISTEMA}(t) = \prod_{i=1}^n F_i(t)$
$R_{SISTEMA}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n Q_i(t)$

Se puede concluir que la confiabilidad de un sistema conformado por componentes conectados en paralelo se aumenta conforme se aumenta el número de componentes.

Sin embargo, el aumentar el número de componentes redundantes tiene las siguientes desventajas:

1	Se aumenta el costo del sistema	Costo de inversión y operativo
2	Se aumentan las dimensiones del sistema	El aumento en peso y volumen puede afectar las prestaciones del sistema.

**EJEMPLO 5.4**

Un sistema consta de 2 componentes redundantes. Las confiabilidades individuales para un periodo de 5 años son  $R_1(t = 5años) = 0.98$  y  $R_2(t = 5años) = 0.95$ .

- Confiabilidad del sistema en un periodo de 5 años

$$R(t = 5años) = 1 - \prod_{i=1}^2 Q_i(5años) = 1 - (1 - 0.98)(1 - 0.95) = 0.9990$$

- Probabilidad de falla del sistema en un periodo de 5 años

$$F(t = 5años) = 1 - R(t = 5años) = 1 - 0.9990 = 0.001$$

**EJEMPLO 5.5**

Un componente de un sistema tiene una confiabilidad individual de 0.8 en un periodo de tiempo dado.

Evalúe el efecto sobre la confiabilidad del sistema al añadir componentes similares redundantes.

# Componentes del sistema	Confiabilidad del sistema	Incremento en confiabilidad	% Incremento
1	0.80000	-----	-----
2	0.96000	0.160000	20.000
3	0.99200	0.032000	3.333
4	0.99840	0.006400	0.645
5	0.99968	0.001280	0.128

Conclusión: La mayor ganancia en confiabilidad se obtiene al colocar el primer componente redundante.

**EJEMPLO 5.6**

El diseño de un sistema requiere una confiabilidad total en un periodo de 20 años de 0.96. Se utilizarán componentes individuales con una confiabilidad de 0.7 en 20 años. Cuál es el número mínimo de componentes redundantes requerido?

$$F(20años) = 1 - 0.96 = 0.04 = \prod_{i=1}^n (1 - R_i(20años))$$

$$(1 - 0.7)^n = 0.04$$

$$0.3^n = 0.04 \quad \rightarrow \quad n * Ln(0.3) = Ln(0.04) \quad \rightarrow \quad n = 2.6735 \approx 3$$

Conclusión: Se requieren mínimo 3 componentes en paralelo.

### 5.6 REDUCCIÓN DE UNA RED MEDIANTE COMBINACIONES SERIE Y PARALELO

Los sistemas serie y paralelo forman la base para analizar configuraciones más complicadas que estén formadas por combinaciones de ellas.

El método general es reducir secuencialmente la red haciendo combinaciones de componentes en serie y paralelo hasta obtener un solo elemento equivalente.

El elemento final que se obtiene después de hacer la reducción de red representa al sistema.

Si una red o una parte de ella no puede reducirse mediante combinaciones serie y paralelo, se deben aplicar otros metodologías, algunas de las cuales se presentan a continuación.

#### EJEMPLO 5.7

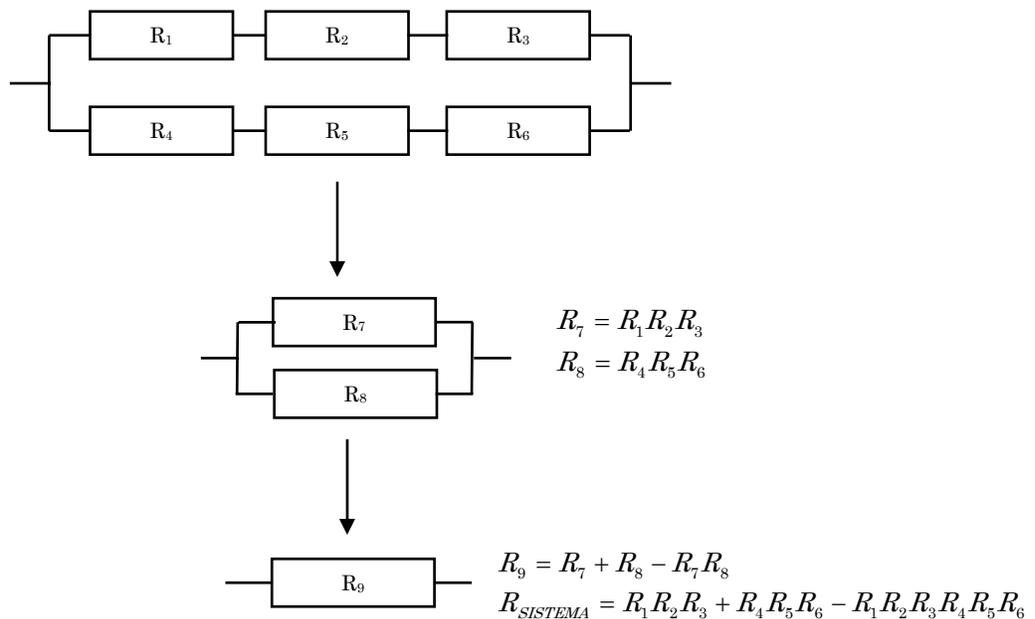


Figura 5.4 Ejemplo de reducción de un sistema mediante combinaciones serie y paralelo

### 5.7 SOLUCIÓN DE REDES CON TOPOLOGÍAS COMPLEJAS

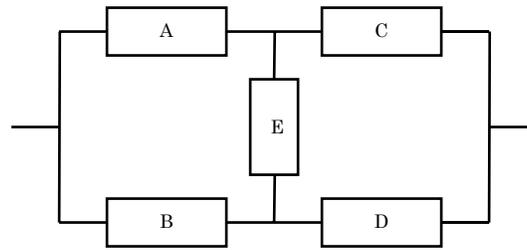


Figura 5.5 Estructura tipo puente

Cuando un sistema o una parte de este no pueden reducirse mediante combinaciones serie o paralelo de sus componentes, se dice que el sistema tiene una topología compleja.

Un ejemplo clásico de este tipo de sistemas es la estructura “puente” mostrada en la Figura 5.5

Para valorar la confiabilidad de este tipo de sistemas se debe aplicar alguno de los siguientes métodos:

1	Árboles de eventos
2	Árboles de falla
3	Conjuntos de cortes
4	Conjuntos de lazos
5	Matriz de conexión
6	Probabilidad condicional
7	Simulación de Montecarlo

En este capítulo se presentarán los métodos de conjuntos de cortes y conjuntos de lazos.

Los árboles de eventos y árboles de fallas se presentan en el capítulo 8.

Los algoritmos de simulación de Montecarlo son diferentes para sistemas reparables y sistemas de no reparables. Así, éstos son presentados en los capítulos de confiabilidad de sistemas reparables y no reparables.

5.8 CONJUNTOS DE CORTES

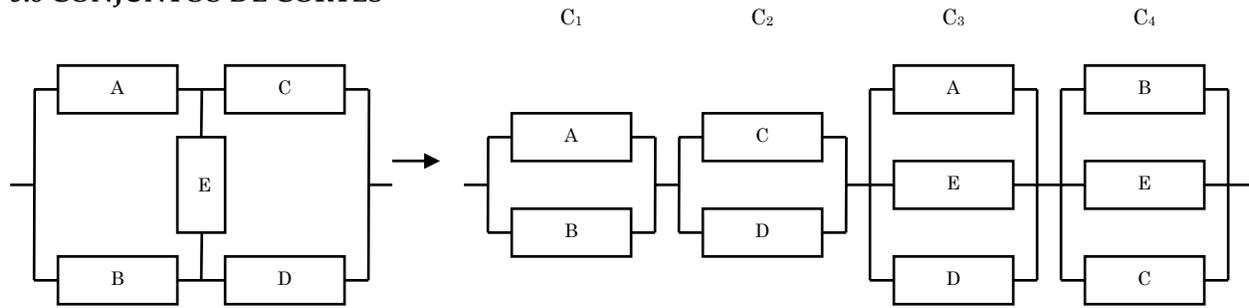


Figura 5.6 Conjuntos de cortes de una red tipo puente

Un corte (Cut) es aquella combinación de componentes que si fallan, hacen fallar al sistema.

Todos los componentes de un corte deben fallar para causar la falla del sistema, por lo cual, su conexión está en paralelo.

Los cortes de un sistema se conectan entre sí en serie ya que la falla de cualquiera de ellos produce la falla del sistema. Así, se obtiene el conjunto de cortes (Cut sets) del sistema.

En la Figura 5.6 se presenta el conjunto de cortes mínimos para la red tipo puente.

**EJEMPLO 5.8**

Hallar la probabilidad de falla para el sistema mostrado en la Figura 5.6 mediante el método de conjuntos mínimos de cortes.

$$F_{C_1} = F_A F_B \qquad F_{C_2} = F_C F_D \qquad F_{C_3} = F_A F_E F_D \qquad F_{C_4} = F_B F_E F_C$$

$$F_{SISTEMA} = F[C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4] = F[C_1] + F[C_2] + F[C_3] + F[C_4] - F[C_1 C_2] - F[C_1 C_3] - F[C_1 C_4] - F[C_2 C_3] - F[C_2 C_4] - F[C_3 C_4] + F[C_1 C_2 C_3] + F[C_1 C_2 C_4] + F[C_1 C_3 C_4] + F[C_2 C_3 C_4] - F[C_1 C_2 C_3 C_4]$$

Aplicando las siguientes ecuaciones:

$$P[x_1 \cup x_2] = P[x_1] + P[x_2] - P[x_1 x_2]$$

$$P[x_1 \cup x_2 \cup x_3] = P[x_1] + P[x_2] + P[x_3] - P[x_1 x_2] - P[x_1 x_3] - P[x_2 x_3] + P[x_1 x_2 x_3]$$

Se obtiene:

$$F_{SISTEMA} = F_A F_B + F_C F_D + F_A F_D F_E + F_B F_C F_E - F_A F_B F_C F_D - F_A F_B F_D F_E - F_A F_B F_C F_E - F_B F_C F_D F_E + 2F_A F_B F_C F_D F_E$$

Sí  $F_i = F \rightarrow F_{SISTEMA} = 2F^2 + 2F^3 - 5F^4 + 2F^5$

### 5.9 CONJUNTOS DE LAZOS

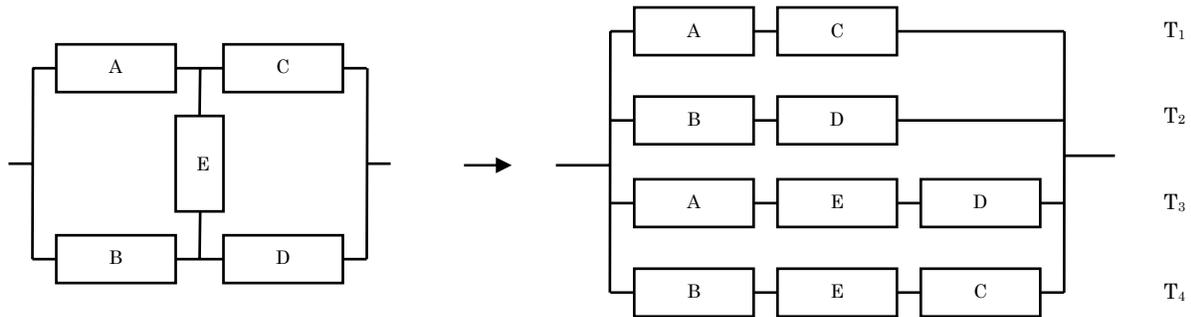


Figura 5.7 Conjuntos de lazos de una red tipo puente

Un lazo (Tie) es aquella combinación de componentes que si operan, garantizan la operación del sistema.

Si alguno de los componentes de un lazo fallan no se garantiza la operación del sistema mediante esa trayectoria o combinación, por lo cual, la conexión de sus componentes está en serie.

Los lazos de un sistema se conectan entre sí en paralelo ya que la operación de cualquiera de ellos garantiza la operación del sistema. Así, se obtiene el conjunto de lazos (Tie sets) del sistema.

En la Figura 5.7 se presenta el conjunto de lazos mínimos para la red tipo puente.

#### EJEMPLO 5.9

Hallar la probabilidad de falla para el sistema mostrado en la Figura 5.7 mediante el método de conjuntos mínimos de cortes.

$$R_{T_1} = R_A R_B \qquad R_{T_2} = R_C R_D \qquad R_{T_3} = R_A R_E R_D \qquad R_{T_4} = R_B R_E R_C$$

$$R_{SISTEMA} = R[T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4] = R[T_1] + R[T_2] + R[T_3] + R[T_4] - R[T_1 T_2] - R[T_1 T_3] - R[T_1 T_4] - R[T_2 T_3] - R[T_2 T_4] - R[T_3 T_4] + R[T_1 T_2 T_3] + R[T_1 T_2 T_4] + R[T_1 T_3 T_4] + R[T_2 T_3 T_4] - R[T_1 T_2 T_3 T_4]$$

Aplicando las siguientes ecuaciones:

$$P[x_1 \cup x_2] = P[x_1] + P[x_2] - P[x_1 x_2]$$

$$P[x_1 \cup x_2 \cup x_3] = P[x_1] + P[x_2] + P[x_3] - P[x_1 x_2] - P[x_1 x_3] - P[x_2 x_3] + P[x_1 x_2 x_3]$$

Se obtiene:

$$R_{SISTEMA} = R_A R_B + R_C R_D + R_A R_D R_E + R_B R_C R_E - R_A R_B R_C R_D - R_A R_B R_D R_E - R_A R_B R_C R_E - R_B R_C R_D R_E + 2R_A R_B R_C R_D R_E$$

Sí  $R_i = R \rightarrow R_{SISTEMA} = 2R^2 + 2R^3 - 5R^4 + 2R^5$

### 5.10 MÉTODO DE ENUMERACIÓN DE ESTADOS

Si un sistema reparable o no reparable de componentes puede ser representado por un diagrama de red, esto quiere decir que el sistema tiene  $2^n$  estados operativos.

Los estados operativos del sistema resultan de las combinaciones de estados operativos y de falla de los componentes.

El conjunto de estados operativos del sistema se denomina el espacio de estado.

La probabilidad de ocurrencia de uno de los estados operativos se puede hallar mediante la fórmula de probabilidad de ocurrencia simultánea de eventos independientes:

$$P[E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n] = P[E_1]P[E_2] \dots P[E_n] = \prod_{i=1}^n P[E_i]$$

Donde los eventos  $E_i$  puede definirse de la siguiente manera:

$$E_i = F_i \quad \rightarrow \quad \bar{E}_i = R_i$$

$$E_i = U_i \quad \rightarrow \quad \bar{E}_i = A_i$$

La probabilidad de falla del sistema se halla sumando las probabilidades de ocurrencia de todos aquellos estados operativos que implican falla del sistema.

Nótese que para aplicar este método debe realizarse una enumeración exhaustiva de todos los estados operativos posibles, lo cual, puede ser una tarea complicada incluso para sistemas con pocos componentes.

#### EJEMPLO 5.10

Considere el sistema reparable mostrado en la figura 5.8.

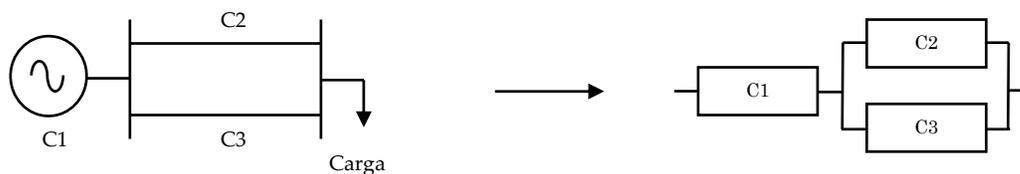


Figura 5.8 Sistema eléctrico y su modelo de confiabilidad

La tabla de estados de operación del sistema mostrado en la figura 5.8 es:

i	Componentes disponibles			P[estado i]
	C1	C2	C3	
1	SI	SI	SI	$A_{C1} A_{C2} A_{C3}$
2	SI	SI	NO	$A_{C1} A_{C2} U_{C3}$
3	SI	NO	SI	$A_{C1} U_{C2} A_{C3}$
4	NO	SI	SI	$U_{C1} A_{C2} A_{C3}$
5	NO	NO	SI	$U_{C1} U_{C2} A_{C3}$
6	NO	SI	NO	$U_{C1} A_{C2} U_{C3}$
7	SI	NO	NO	$A_{C1} U_{C2} U_{C3}$
8	NO	NO	NO	$U_{C1} U_{C2} U_{C3}$

La disponibilidad e indisponibilidad del sistema se halla de la siguiente forma:

$$A_{SISTEMA} = P[\text{estado 1}] + P[\text{estado 2}] + P[\text{estado 3}]$$

$$U_{SISTEMA} = P[\text{estado 4}] + P[\text{estado 5}] + P[\text{estado 6}] + P[\text{estado 7}] + P[\text{estado 8}]$$

En este ejercicio se asume que cualquiera de las dos líneas de transmisión puede transportar toda la energía requerida por la carga.

## CAPÍTULO 6 – SISTEMAS NO REPARABLES

### 6.1 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Para valorar la confiabilidad de un sistema no reparable se pueden aplicar los siguientes métodos:

1	Diagramas de red
2	Simulación de Montecarlo

### 6.2 DIAGRAMAS DE RED

Este método y sus formas de solución se explicaron en el capítulo anterior.

Recordar que este método solo aplica para sistemas de componentes independientes que cumplen las condiciones de una estructura coherente.

En el capítulo 3 se explica cómo obtener  $R$  y  $F$  para un componente no reparable.

### 6.3 SIMULACIÓN DE MONTECARLO

El método de simulación de Montecarlo permite valorar la confiabilidad de un sistema no reparable de cualquier número de componentes, cualquier topología y cualquier tipo de distribución de la función de vida de los componentes.

La confiabilidad se valora para un tiempo de interés  $T$ .

#### PROCEDIMIENTO GENERAL

1. Represente el sistema por su red serie, paralelo, conjunto mínimo de cortes o lazos.
2. Genere un tiempo para falla  $t_{ff}$  para cada uno de los componentes a partir de su correspondiente distribución de la función de vida.
3. Evaluar:
  - Si todos los tiempos para falla son mayores que  $T$  cuente este evento como un “éxito”.
  - Sistema serie: Si alguno de los tiempos para falla es menor que  $T$  cuente este evento como un “fracaso”.
  - Sistema paralelo: Si alguno de los tiempos para falla es mayor que  $T$  cuente este evento como un “éxito”.
  - Sistema complejo: El tiempo para falla de cada conjunto de corte será el del componente con mayor tiempo de falla. El tiempo de falla del sistema será el menor tiempo para falla de los conjuntos de corte.

El tiempo para falla de cada conjunto de lazos será el del componente con menor tiempo de falla. El tiempo de falla del sistema será el mayor tiempo para falla de los conjuntos de lazos.

Si el tiempo para falla del sistema es mayor o igual a  $T$  cuente este evento como un “éxito”, de lo contrario es un “fracaso”.

4. Repita los pasos 1 a 3 hasta un cumplir el criterio de parada.

5. Evalúe:

- $R = \# \text{éxitos} / N$

- $F = \# \text{fracasos} / N$

- $$\bar{t}_{falla} = \frac{\sum_{i=1}^{\# \text{fallas}} ttf_i}{\# \text{fallas}}$$

Donde  $N$  es el número de iteraciones realizado.

Para hallar la distribución de probabilidad del tiempo para falla del sistema, se debe correr el anterior algoritmo para diversos valores de  $T$ .

## CAPÍTULO 7 – SISTEMAS REPARABLES

### 7.1 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Para valorar la confiabilidad de un sistema reparable se pueden aplicar los siguientes métodos:

1	Diagramas de red
2	La técnica de bloques de frecuencia y duración
3	Cadenas de Markov
4	Simulación de Montecarlo

Algo muy importante a tener en cuenta es que un sistema reparable puede tener componentes reparables y no reparables.

Los componentes no reparables se consideran que son reparables mediante reemplazo. Así, el tiempo de reparación de estos componentes será el tiempo requerido para su reemplazo.

### 7.2 DIAGRAMAS DE RED

Este método y sus formas de solución se explicaron en el capítulo anterior.

Recordar que este método solo aplica para sistemas de componentes independientes que cumplen las condiciones de una estructura coherente.

En el capítulo 4 se explica cómo obtener  $A$  y  $U$  para un componente reparable.

La probabilidad de falla y la confiabilidad en un periodo  $\Delta t$  para un componente que es modelado mediante un proceso estocástico puntual con función de intensidad de fallas  $\lambda(t)$  se hallan de la siguiente forma:

$$F = P[n_f(\Delta t) > 1] = \frac{1}{1!} [\Lambda(\Delta t)]^1 * e^{-\Lambda(\Delta t)}$$

$$R = P[n_f(\Delta t) = 0] = \frac{1}{0!} [\Lambda(\Delta t)]^0 * e^{-\Lambda(\Delta t)}$$

Donde:

$$\Lambda(\Delta t) = E[n_f(\Delta t)] = \int_0^{\Delta t} \lambda(t) dt$$

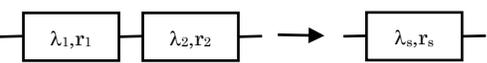
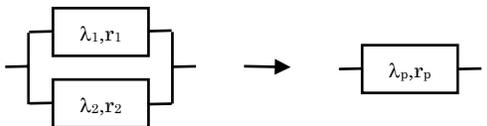
### 7.3 TÉCNICA DE BLOQUES DE FRECUENCIA Y DURACIÓN

Este método es una aproximación derivada de la cadena de Markov homogéneo exponencial y en el cual cada componente se considera como un “bloque” que se define con los siguientes parámetros:

$\lambda$	La tasa de fallas, generalmente expresada en [fallas/año]
$r$	El tiempo medio para reparación, generalmente expresado en [horas]

$\lambda$  es la frecuencia de fallas y  $r$  es la duración de las fallas.

Las ecuaciones para reducir la red son:

Conexión serie	Conexión paralelo
 $\lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2 \quad r_s = \frac{(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)}$	 $\lambda_p = \lambda_1 \lambda_2 (r_1 + r_2) \quad r_p = \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)}$

La indisponibilidad de cualquier componente o del sistema se calcula como:

$U = \lambda r$
-----------------

$U$  generalmente se expresa en [horas de indisponibilidad/año]. Si este resultado se divide por 8760 horas se obtendrá su valor en probabilidad

También se puede aplicar este método conjuntos de cortes o lazos mínimos.

Algunas consideraciones con respecto a este modelamiento:

1	Al utilizar tasas de fallas y reparación constantes, se considera que los procesos de fallas y reparaciones de los componentes y, por consiguiente del sistema, son estacionarios. Esto debería verificarse antes de aplicar este método.
2	Como este método se deriva de la cadena de Markov homogénea exponencial, los tiempos para falla y reparación deben estar exponencialmente distribuidos. Esto debería verificarse antes de aplicar este método.
3	Las soluciones de este método para $\lambda$ , $r$ , $U$ solo dan valores esperados, pues son una simplificación a la solución exacta dada por la cadena de Markov homogénea exponencial.
4	Como éste método es una simplificación derivada de la cadena de Markov homogénea exponencial, la distribución asociada a los tiempos para falla y reparación del sistema no son exponenciales.
5	Solo se recomienda utilizar este tipo de modelamiento si la indisponibilidad anual de los componentes es menor al 10%.
6	Como este método opera sobre un diagrama de red, entonces, los componentes tienen que ser independientes y cumplirse las condiciones de una estructura coherente.

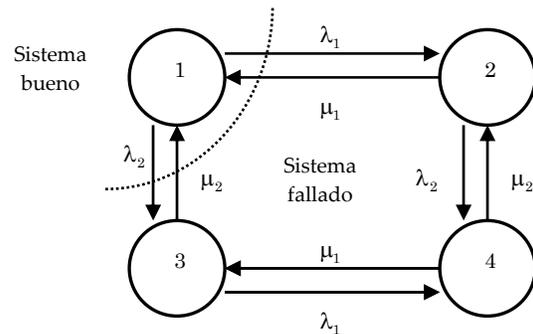
**DEMOSTRACIÓN DE LAS ECUACIONES PARA EL SISTEMA SERIE**

- Para un componente reparable con dos estados discretos y distribuciones exponenciales para los tiempos de falla y reparación, la probabilidad de encontrar el componente en el estado “bueno” en un tiempo futuro es:

$$P_{UP}(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- Para un sistema de dos componentes reparables en serie, cada uno con dos estados discretos y distribuciones exponenciales para los tiempos de falla y reparaciones se tiene:

Estado	Componente		Resultado
	1	2	
1	bueno	bueno	bueno
2	fallado	bueno	fallado
3	bueno	fallado	fallado
4	fallado	fallado	fallado



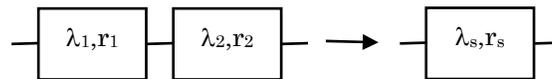
Probabilidad de encontrar el sistema “bueno”:

$$P_{UP}(\infty) = \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}$$

Tasa de salida del estado “bueno”:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

- Haciendo:



$$\frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\mu_s}{\lambda_s + \mu_s}$$

- Reemplazando las tasas de reparación por sus inversos y solucionando para  $r_s$ :

$$\frac{1}{r_1 r_2 (\lambda_1 + \frac{1}{r_1})(\lambda_2 + \frac{1}{r_2})} = \frac{1}{r_s (\lambda_s + \frac{1}{r_s})} \rightarrow \frac{1}{(\lambda_1 r_1 + 1)(\lambda_2 r_2 + 1)} = \frac{1}{(\lambda_s r_s + 1)}$$

$$(\lambda_1 r_1 + 1)(\lambda_2 r_2 + 1) = (\lambda_s r_s + 1) \rightarrow (\lambda_1 r_1 + 1)(\lambda_2 r_2 + 1) = (\lambda_s r_s + 1)$$

$$\lambda_s r_s + 1 = \lambda_1 r_1 \lambda_2 r_2 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + 1 \rightarrow \lambda_s r_s = \lambda_1 r_1 \lambda_2 r_2 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$$

$$\text{Haciendo } \lambda_1 r_1 \lambda_2 r_2 \ll (\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) \rightarrow \lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ y } r_s = (\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2) / (\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\text{Generalizando para } n \text{ componentes: } \lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ y } r_s = (\sum_{i=1}^n \lambda_i r_i) / \lambda_s$$

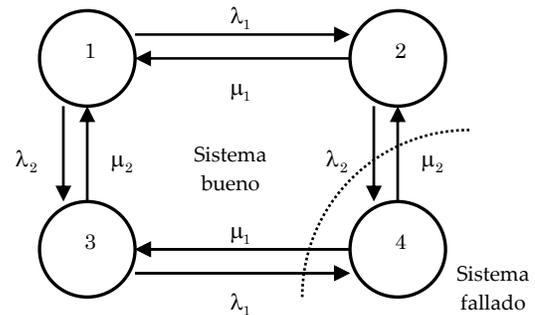
**DEMOSTRACIÓN DE LAS ECUACIONES PARA EL SISTEMA PARALELO**

- Para un componente reparable con dos estados discretos y distribuciones exponenciales para los tiempos de falla y reparación, la probabilidad de encontrar el componente en el estado “fallado” en un tiempo futuro es:

$$P_{DOWN}(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

- Para un sistema de dos componentes reparables en paralelo, cada uno con dos estados discretos y distribuciones exponenciales para los tiempos de falla y reparaciones se tiene:

Estado	Componente		Resultado
	1	2	
1	bueno	bueno	bueno
2	fallado	bueno	bueno
3	bueno	fallado	bueno
4	fallado	fallado	fallado



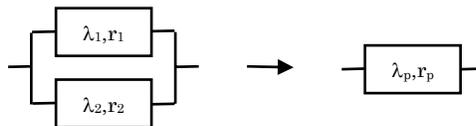
Probabilidad de encontrar el sistema “fallado”:

$$P_{DOWN}(\infty) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}$$

Tasa de salida del estado “fallado”:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

- Haciendo:



$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \mu_p}$$

- Reemplazando las tasas de reparación por sus inversos y solucionando para  $r_p$ :

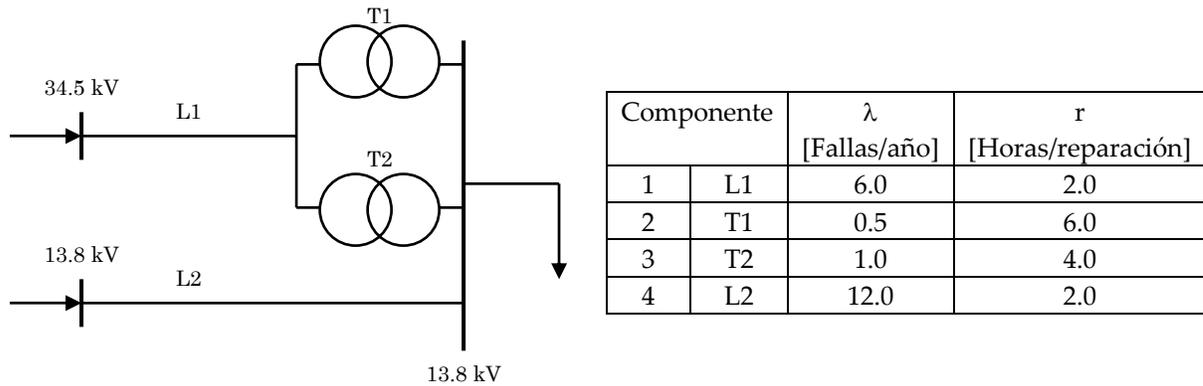
$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \frac{1}{r_1})(\lambda_2 + \frac{1}{r_2})} = \frac{\lambda_p}{\lambda_p + \frac{1}{r_p}} \rightarrow \frac{\lambda_1 \lambda_2 r_1 r_2}{(\lambda_1 r_1 + 1)(\lambda_2 r_2 + 1)} = \frac{\lambda_p r_p}{\lambda_p r_p + 1}$$

$$\mu_p = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \rightarrow r_p = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \rightarrow \frac{\lambda_1 \lambda_2 r_1 r_2}{(\lambda_1 r_1 \lambda_2 r_2 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + 1)} = \frac{\lambda_p r_1 r_2}{(\lambda_p \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + 1)(r_1 + r_2)}$$

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 r_1 \lambda_2 r_2 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + 1} = \frac{\lambda_p}{\lambda_p r_1 r_2 + (r_1 + r_2)}$$

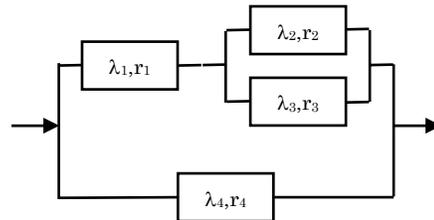
$$\lambda_1 r_1 \ll 1, \lambda_2 r_2 \ll 1, \lambda_1 r_1 \lambda_2 r_2 \ll 1 \text{ y } \lambda_p r_1 r_2 \ll (r_1 + r_2) \rightarrow \lambda_p = \lambda_1 \lambda_2 (r_1 + r_2)$$

**EJEMPLO 7.1**



Valorar la confiabilidad del sistema eléctrico mostrado en la figura.

1. Reducción secuencial de red:



- Combinando los componentes 2 y 3 en un nuevo componente “x”:

$$\lambda_x = \lambda_2 \lambda_3 (r_2 + r_3) / 8760 = 0.000571 \text{ [Fallas/año]}$$

$$r_x = r_2 r_3 / (r_2 + r_3) = 2.4 \text{ [Horas/reparación]}$$

- Combinando los componentes 1 y “x” en un nuevo componente “y”:

$$\lambda_y = \lambda_1 + \lambda_x = 6.000571 \text{ [Fallas/año]}$$

$$r_y = (\lambda_1 r_1 + \lambda_x r_x) / (\lambda_1 + \lambda_x) = 2.0000385 \text{ [Horas/reparación]}$$

- Combinando los componentes “y” y 4:

$$\lambda_{SISTEMA} = \lambda_y \lambda_4 (r_y + r_4) / 8760 = 0.03288 \text{ [Fallas/año]}$$

$$r_{SISTEMA} = r_y r_4 / (r_y + r_4) = 1.000010 \text{ [Horas/reparación]}$$

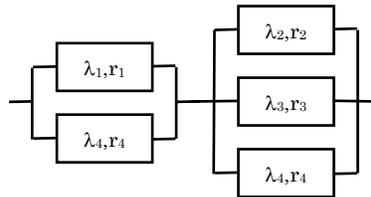
$$U_{SISTEMA} = 0.03288 \text{ [Horas/año]}$$

Los resultados obtenidos corresponden a valores esperados.

**EJEMPLO 7.2**

Resolver el Ejemplo 7.2 utilizando conjuntos de cortes.

- Conjunto de cortes mínimos



- Combinando los componentes 1 y 4 en un nuevo componente “x”:

$$\lambda_x = \lambda_1 \lambda_4 (r_1 + r_4) / 8760 = 0.03287 \text{ [Fallas/año]}$$

$$r_x = r_1 r_4 / (r_1 + r_4) = 1.000000 \text{ [Horas/reparación]}$$

- Combinando los componentes 2 y 3 en un nuevo componente “y”:

$$\lambda_y = \lambda_2 \lambda_3 (r_2 + r_3) / 8760 = 0.000571 \text{ [Fallas/año]}$$

$$r_y = r_2 r_3 / (r_2 + r_3) = 2.40000 \text{ [Horas/reparación]}$$

- Combinando los componentes “y” y 4 en un nuevo componente “z”:

$$\lambda_z = \lambda_y \lambda_4 (r_y + r_4) / 8760 = 0.000005 \text{ [Fallas/año]}$$

$$r_z = r_y r_4 / (r_y + r_4) = 1.090909 \text{ [Horas/reparación]}$$

- Combinando los componentes “x” y “z” :

$$\lambda_{SISTEMA} = \lambda_x + \lambda_z = 0.032881 \text{ [Fallas/año]}$$

$$r_{SISTEMA} = (\lambda_x r_x + \lambda_z r_z) / (\lambda_x + \lambda_z) = 1.000011 \text{ [Horas/reparación]}$$

$$U_{SISTEMA} = 0.032881 \text{ [Horas/año]}$$

Los resultados obtenidos corresponden a valores esperados.

Como se observa, se obtienen los mismos resultados que con el método anterior.

### 7.4 CADENAS DE MARKOV

Este es el método más utilizado para valorar la confiabilidad de sistemas reparables.

Esta preferencia se debe a que con este método:

1	Se pueden considerar componentes con cualquier número de estados operativos
2	Se pueden considerar componentes independientes y con modos de falla dependientes
3	Se pueden utilizar tasas de fallas y reparaciones constantes o variables en el tiempo
4	Se representa la secuencia de estados operativos de los componentes que llevan a un determinado estado operativo del sistema

El procedimiento a aplicar es:

1	Definir los estados operativos del sistema y hacer su diagrama.
2	Dependiendo de la forma de las tasas de transición entre estados (constantes o variables en el tiempo) y de la distribución de probabilidad asociadas a las tasas de transición constantes, seleccionar el método de solución para el sistema de ecuaciones diferenciales que describen el sistema.
3	Determinar cuáles estados significan disponibilidad e indisponibilidad del sistema
4	Acumular estados para hallar la indisponibilidad o disponibilidad del sistema

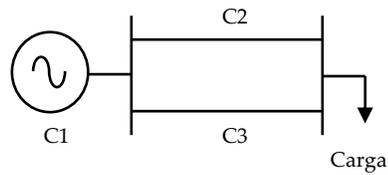
Para un sistema de  $n$  componentes con dos estados operativos el número de estados del operativos del sistema es tiene  $2^n$  estados operativos.

Nótese que para aplicar este método debe realizarse una enumeración exhaustiva de todos los estados operativos posibles, lo cual, puede ser una tarea complicada incluso para sistemas con pocos componentes.

Este modelo también puede ser resuelto mediante simulación de Montecarlo, sin embargo, con éste método solo se obtiene el estado estable.

**EJEMPLO 7.3**

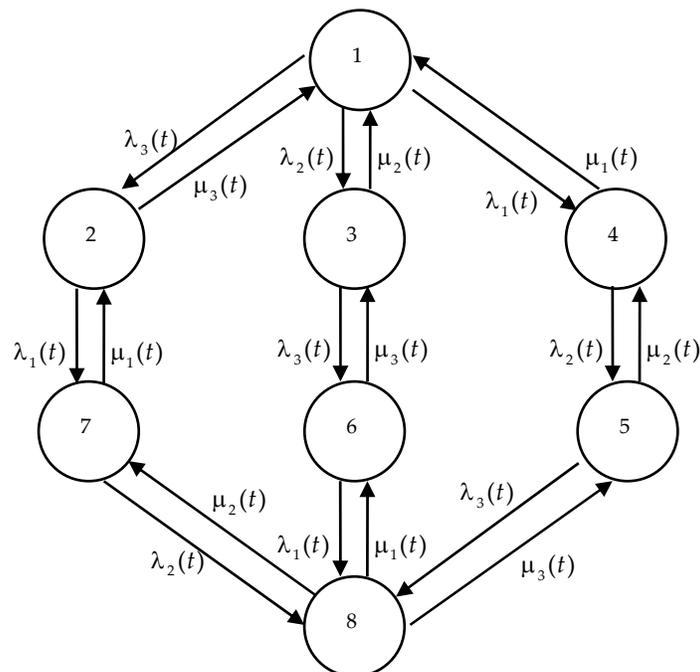
Considere el sistema reparable mostrado en la siguiente figura



La tabla de estados de operación del sistema es:

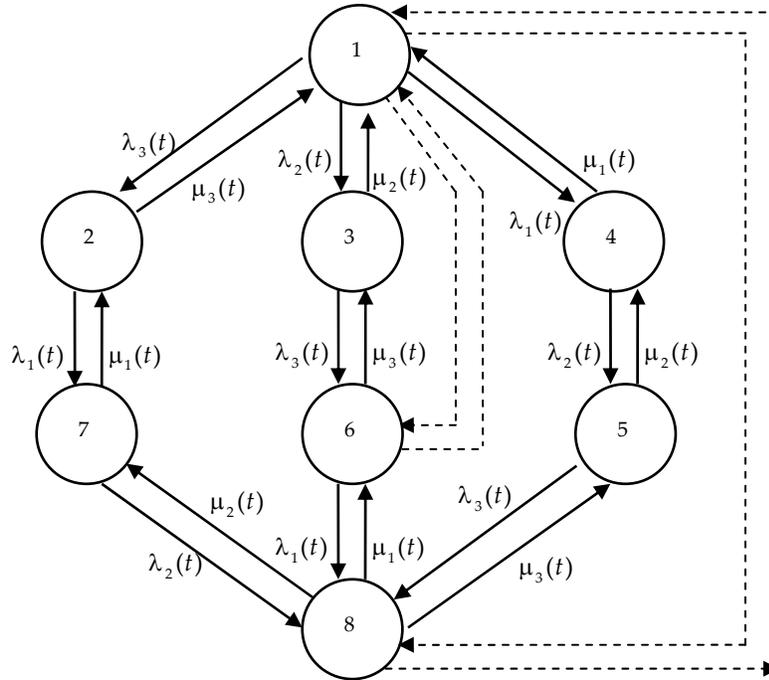
i	Componentes disponibles		
	C1	C2	C3
1	SI	SI	SI
2	SI	SI	NO
3	SI	NO	SI
4	NO	SI	SI
5	NO	NO	SI
6	SI	NO	NO
7	NO	SI	NO
8	NO	NO	NO

Diagrama de estados:



Nótese que en este diagrama de transición de estados se está considerando que las fallas de los componentes ocurren de a una. Es decir, no existen fallas de modo común.

En este método también pueden considerarse modos de falla común que afecten de a dos o tres componentes a la vez. Por ejemplo, un modo de falla común para las dos líneas de transmisión y un modelo de falla común para los tres componentes:



Para los modos de falla común hay que definir las tasas de falla y de reparación.

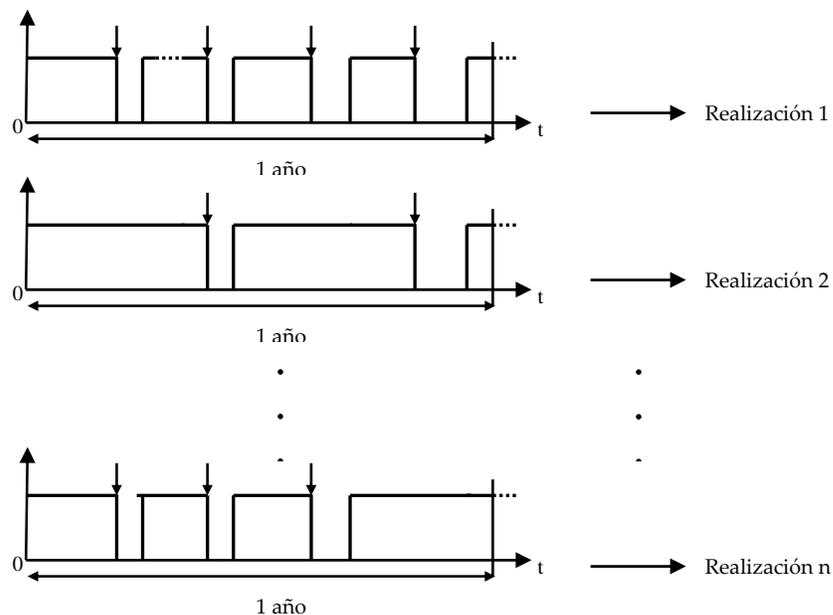
### 7.5 SIMULACIÓN DE MONTECARLO

Este método permite mezclar diversos tipos de modelamiento de los componentes, modos de falla común, secuencias operativas, diversas logísticas para reparación, operación balanceada o desbalanceada y lo más importante, se puede combinar con otros procesos iterativos como algoritmos genéticos, flujos de carga, etc.

Su mayor desventaja radica en el alto tiempo computacional y capacidad de memoria RAM requeridos, lo cual se agrava en sistemas que tienen componentes con tasas de fallas muy bajas.

A continuación, se presenta un algoritmo básico para realizar estudios de confiabilidad en sistemas reparables considerando el criterio de pérdida de componentes  $n - 1$ .

En este algoritmo se simula la operación de un sistema reparable durante un periodo de tiempo de interés  $T$ , generalmente 1 año, el cual se denomina un “escenario”. Este procedimiento se repite  $n$  veces o realizaciones con las cuales se obtiene una muestra para cada una de las salidas. En la siguiente figura se esquematiza esto.



#### PROCEDIMIENTO

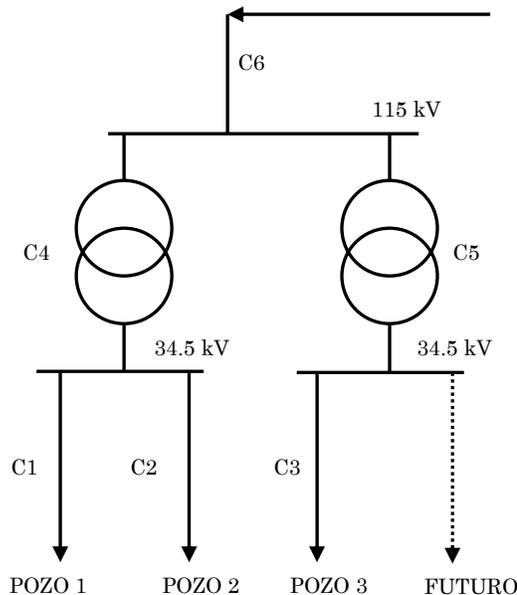
1.  $t_i = 0$
2. Generar un tiempo para falla  $ttf$  para cada uno de los componentes a partir de su correspondiente modelo de falla
3. Determinar el componente  $x$  con menor tiempo para falla y hacer  $t = t + \min(ttf)$
4. Si  $t$  es mayor o igual a 1 año, no hay falla en el sistema en esta iteración. Ir al paso 8.

5. Generar un tiempo para reparación  $ttr$  para el componente  $x$  utilizando el correspondiente modelo de reparación
6. Calcular el tiempo acumulado de operación del sistema:  $t_i = t_{i-1} + ttf + ttr$
7. Determinar el efecto de la falla sobre el sistema: Usuarios desconectados, demanda no servida (MW, MW-h), pérdida de producción, violación de las condiciones operativas (calidad de la potencia, seguridad, sobrecargas, etc.). La valoración de este último aspecto puede requerir ejecutar otras funciones como flujo de carga, flujo de carga armónico, etc.
8. Acumular los índices de desempeño del sistema: Número de fallas en los puntos de carga, horas de indisponibilidad en los puntos de carga, pérdida de producción, demanda no servida, número de violaciones de voltaje, etc.
9. Si  $t_i < 1$  año volver al paso 2
10. Si  $t_i \geq 1$  año se ha simulado un año de operación del sistema. Se considera que esta es una iteración.

Ajustar el último  $ttf$  o  $ttr$  para que el tiempo total  $t$  sea igual a 1 año y volver al paso 1.

11. Repetir hasta un número pre-especificado de iteraciones u otro criterio de parada
12. Procesar datos de cada salida: histograma, estadísticas descriptivas, ajuste a una distribución.

**EJEMPLO 7.4**



Considere el sistema eléctrico de un campo petrolero que tiene tres pozos los cuales producen, cada uno, 5 barriles de petróleo por hora.

Las distribuciones de probabilidad de los equipos son:

Equipo	$t_{falla}$	$t_{reparacion}$
C1, C2, C3	Exponencial $h = 2$ fallas/año	Exponencial $r = 24$ horas
C4, C5	Gamma $\alpha = 2$ $\beta = 3$ años	Gamma $\alpha = 1.5$ , $\beta = 108$ horas
C6	Uniforme $a = 0$ años $b = 1$ año	Exponencial $r = 48$ horas

Para un periodo de un año, estimar para cada pozo: el número de fallas del sistema eléctrico las horas de indisponibilidad anual, la cantidad de barriles que se dejan de producir.

Para el campo, estimar las pérdidas anuales si cada barril de petróleo se vende a US\$50.

- Este problema no tiene solución analítica y corresponde a una simulación secuencial.
- Existe un evento de finalización de la simulación que es cuando se alcance 1 año

Aplicar el criterio  $n-1$  (Pérdida de un solo componente, no salidas simultáneas) para las salidas de los componentes.

*Ejecute en Matlab el programa probejesim8.m para varios números de iteraciones y cambiando la instrucción de re-inicio de la generación de los números aleatorios.*

## CAPÍTULO 8 – ÁRBOLES DE EVENTOS Y DE FALLAS

### 8.1 INTRODUCCIÓN

Contrario a los métodos de análisis de confiabilidad basados en diagramas de red, los árboles de eventos y árboles de fallas permiten analizar:

1	Sistemas donde existe dependencia entre los componentes
2	Sistemas donde importa la secuencia en la cual ocurren las fallas
3	Componentes o sistemas con más de dos estados operativos o diversos modos de falla

Una de las aplicaciones más importantes de estas dos técnicas es el análisis de confiabilidad de los sistemas o componentes cuya misión es garantizar la seguridad en un equipo, sistema o proceso (Safety systems) tales como:

1	Sistemas de protección	Protecciones de equipos o sistemas eléctricos o mecánicos Protecciones de procesos industriales Etc
2	Sistemas de vigilancia y seguridad	Sistema contra incendio Sistema contra robo o intrusión Sistema contra inundaciones Etc.

Para estos tipos de sistemas se definen los siguientes aspectos de confiabilidad:

Dependencia (Dependency)	Que el equipo o sistema opere cuando es requerido que opere o es llamado a operar	Este aspecto es generalmente analizado mediante arboles de eventos.
Seguridad (Security)	Que el equipo o sistema no produzca falsas operaciones	Este aspecto es generalmente analizado mediante arboles de fallas.

### 8.2 ÁRBOLES DE EVENTOS

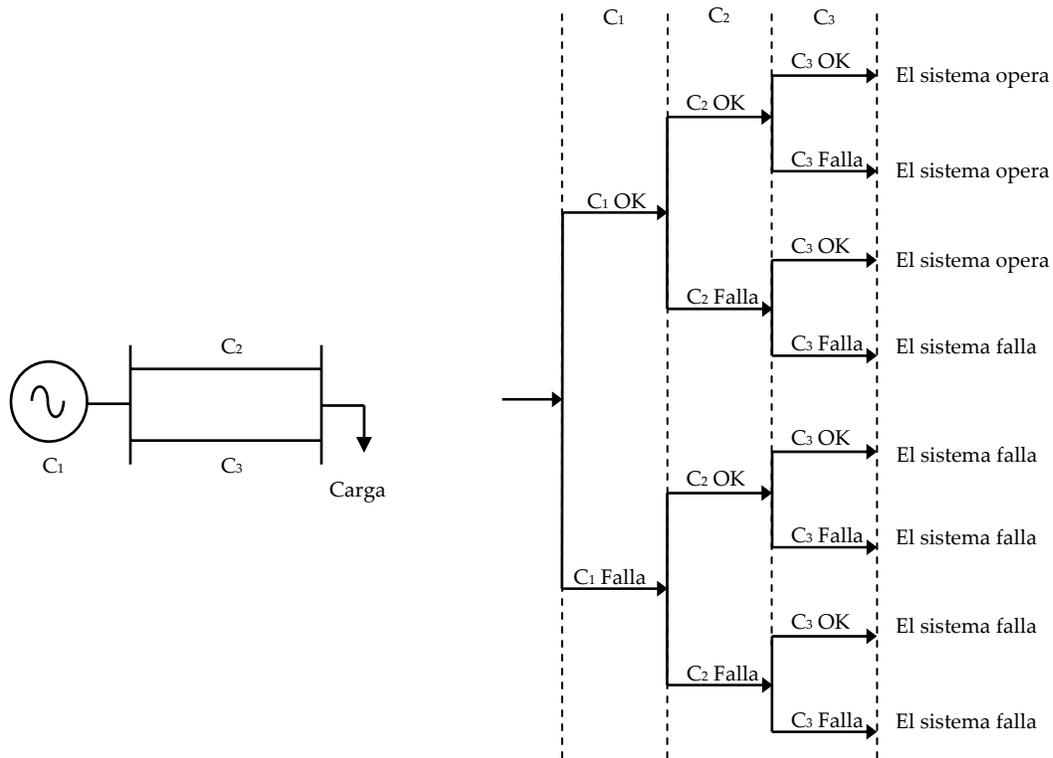


Figura 8.1 Ejemplo de árbol de eventos

Un árbol de eventos es una representación gráfica de los eventos que pueden ocurrirle a un componente o sistema y su relación con los estados operativos de interés. Ver el ejemplo de la figura 8.1

La representación gráfica se denomina “árbol de eventos” porque cada evento se conecta a otros eventos como las ramas en un árbol.

Se inicia el árbol de eventos con un evento o situación y esta se conecta a los siguientes eventos que pueden ocurrir hasta llegar a los resultados operativos para el sistema. Así, se parte de un evento y se llega a las situaciones operativas que resultan en el sistema.

Los eventos se conectan entre sí, de acuerdo con la secuencia operativa que existe en el sistema, si es que esta tiene algún efecto sobre los estados operativos del sistema. Cabe recordar que no para todos los sistemas importa la secuencia en que se produce la falla de los componentes.

Dependiendo del propósito del análisis de confiabilidad, el árbol de eventos se construye de la siguiente forma:

1	Sistemas donde no importa la secuencia operativa	Se inicia el árbol de eventos considerando que el sistema está sin falla y se continúa considerando los eventos de falla y éxito de los componentes.  No importa la secuencia en que se consideren los componentes.
2	Sistemas donde si importa la secuencia operativa	Para sistemas donde importa analizar varios estados operativos, se inicia el árbol con un evento de falla, situación insatisfactoria o decisión y se continúa con la secuencia de eventos que lleva a los estados operativos de interés.  Cuando el árbol se construye en base a decisiones, se denomina “árbol de decisiones”

Las probabilidades de los eventos finales en el árbol de eventos se evalúan multiplicando las probabilidades en los diversos caminos que conforman las ramas del árbol, esto puede hacerse con los datos puntuales de probabilidad o obteniendo una expresión booleana.

Las probabilidades de los estados operativos de interés para el sistema se obtienen sumando las probabilidades de todos caminos que llevan a dicha situación operativa.

El árbol de eventos es una técnica de razonamiento inductiva.

**EJEMPLO 8.1**

Para el sistema mostrado en la Figura 8.1 evalúe la disponibilidad

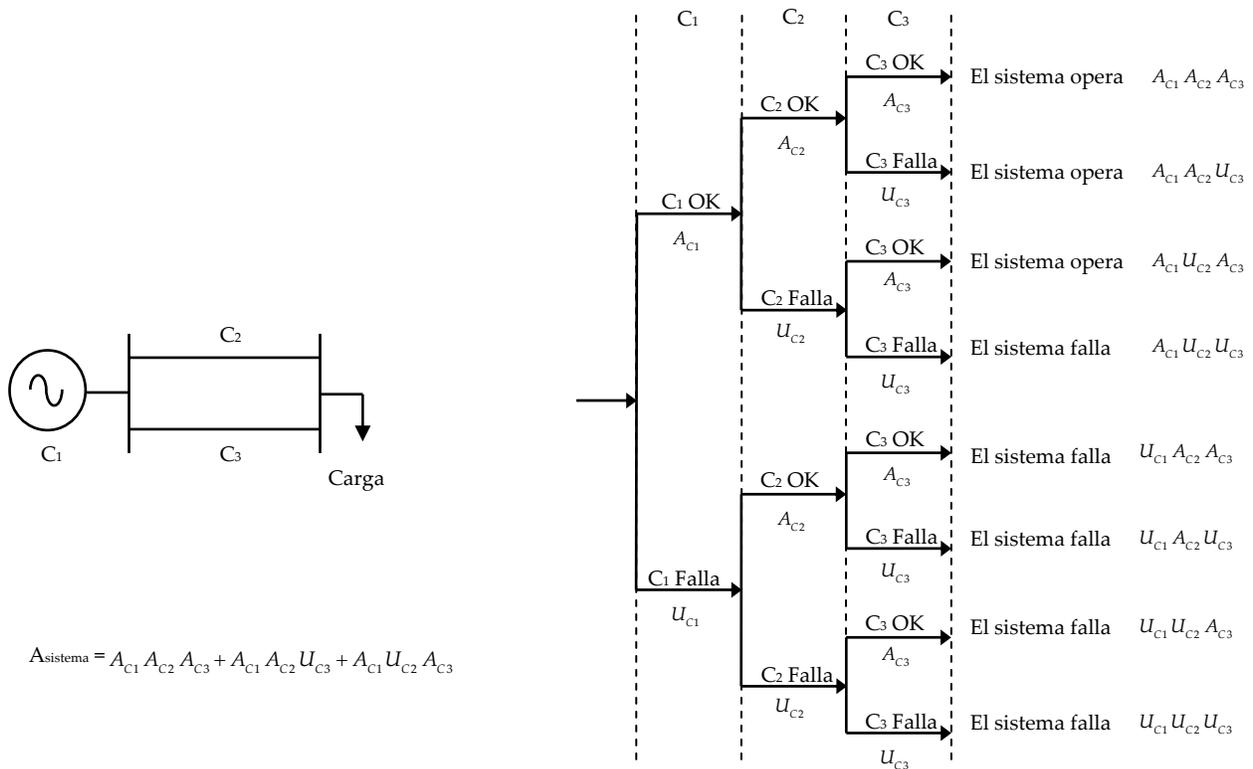


Figura 8.2 Ejemplo de evaluación de un árbol de eventos

En este caso, se analiza el éxito o fracaso del sistema para operar.

Todos los componentes son independientes y no importa la secuencia en que se produzcan sus fallas.

Se considera que cada línea de transmisión puede transportar toda la energía generada hasta la carga.

**EJEMPLO 8.2**

Para el sistema mostrado en la Figura 8.1, se presenta ahora en la figura 8.3 el árbol de eventos para la situación en que existe un modo de falla de salida común M para las líneas de transmisión.

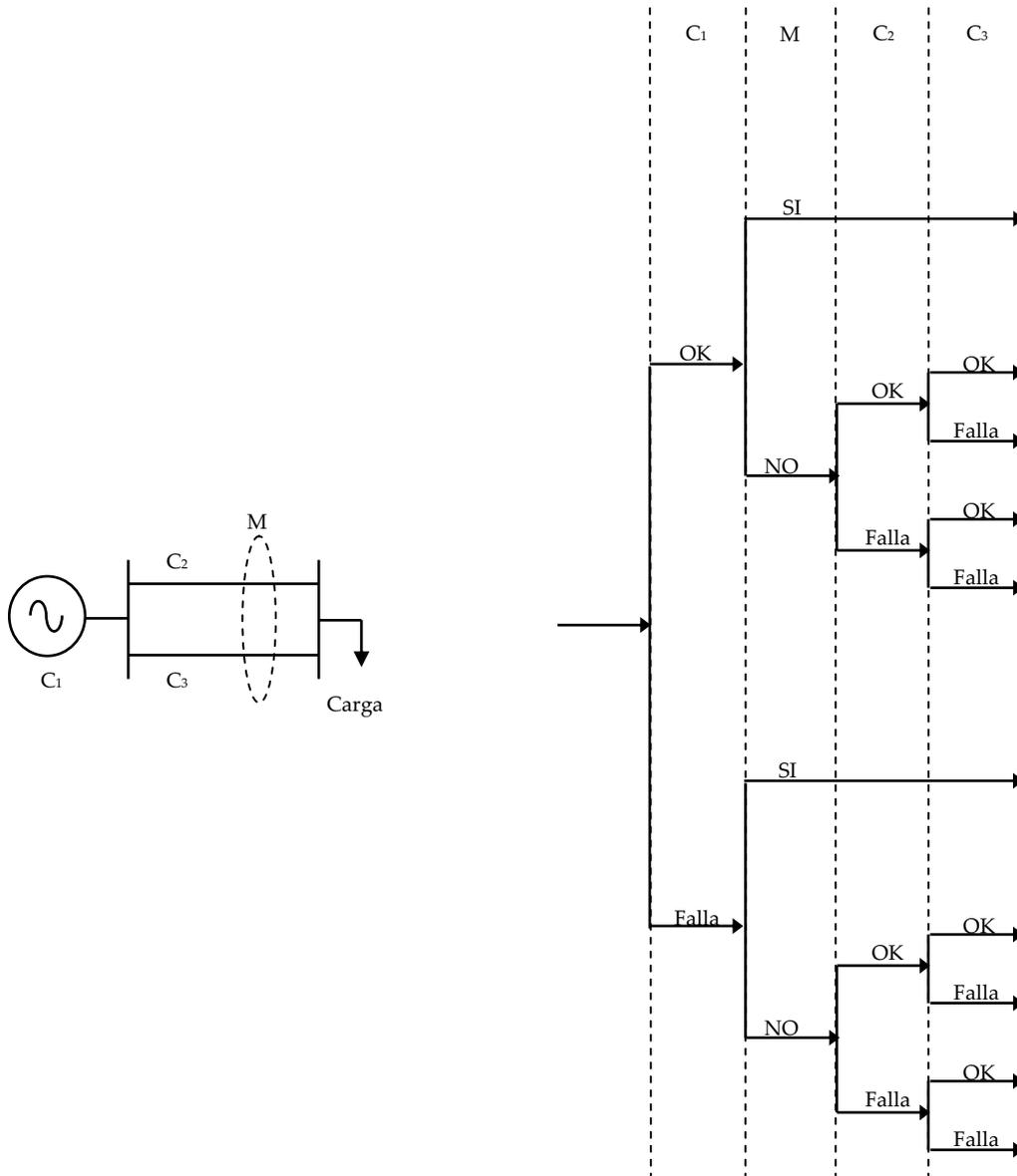


Figura 8.3 Ejemplo de evaluación de un árbol de eventos

En este caso, el evento de que ocurra la falla de modo común M se escribe primero que los eventos de falla y operación de los componentes C2 y C3 aunque realmente el orden no importa en este sistema.

Nótese que M es un evento, no un componente. Sí M ocurre, ya no es relevante si ocurren las fallas independientes de C2 y C3; esto facilita evaluar el árbol de eventos.

**EJEMPLO 8.3**

Considere el sistema de protección para un circuito primario de distribución aéreo mostrado en la figura 8.4. Este consta de un transformador de corriente (CT), un interruptor de potencia (CB), un relé multifunción (R) y un sistema de servicios auxiliares (AUX).

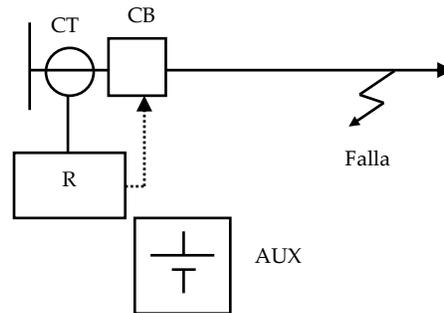


Figura 8.4 Sistema de protección para un circuito primario de distribución

Requerimientos operativos:

- Se requieren los servicios auxiliares para alimentar el relé y el interruptor de potencia.
- El transformador de corriente debe tomar correctamente la señal de corriente.
- El interruptor de potencia debe abrir o cerrar.
- El relé debe dar la orden de apertura y re-cierre.

Modos de falla de los componentes:

- Servicios auxiliares: Operan o fallan.
- Interruptor: Falla para abrir, falla para cerrar, falsa apertura y falso cierre.
- Relé: Falla para abrir, falla para re-cerrar, falsa apertura y falso cierre.
- CT: Circuito abierto, no lectura, error de lectura por saturación.

En la figura 8.5 se presenta el árbol de eventos para el caso de desconexión de una falla en el circuito primario. Nótese que en este caso, los eventos en los componentes se analizan empezando en orden descendente de importancia en cuanto al éxito del sistema para operar: servicios auxiliares, CT, relé, interruptor.

En la figura 8.6 se presenta el árbol de eventos para el caso de recierre en un solo intento luego de una apertura exitosa.

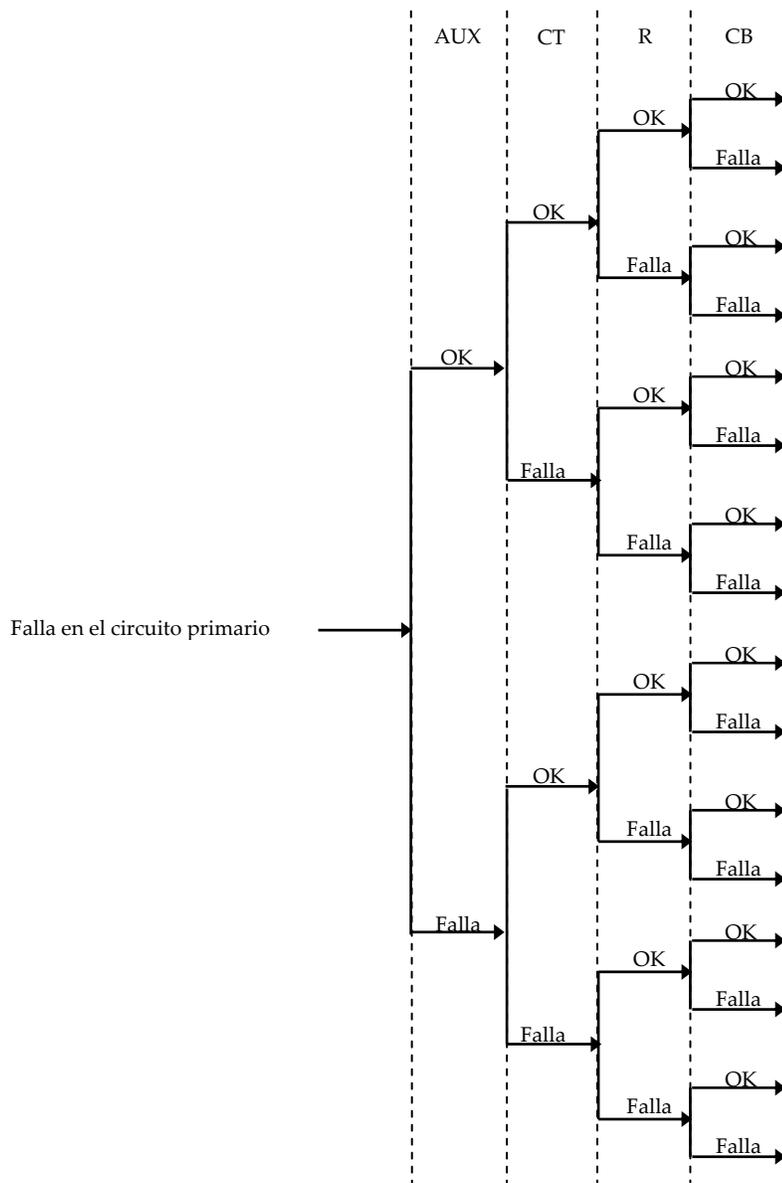


Figura 8.5 Árbol de eventos del sistema de protección para el caso de desconexión de una falla

En este caso la “llamada a operar” al sistema de protección es la falla que se presenta en el circuito primario, la cual es un evento de naturaleza aleatoria.

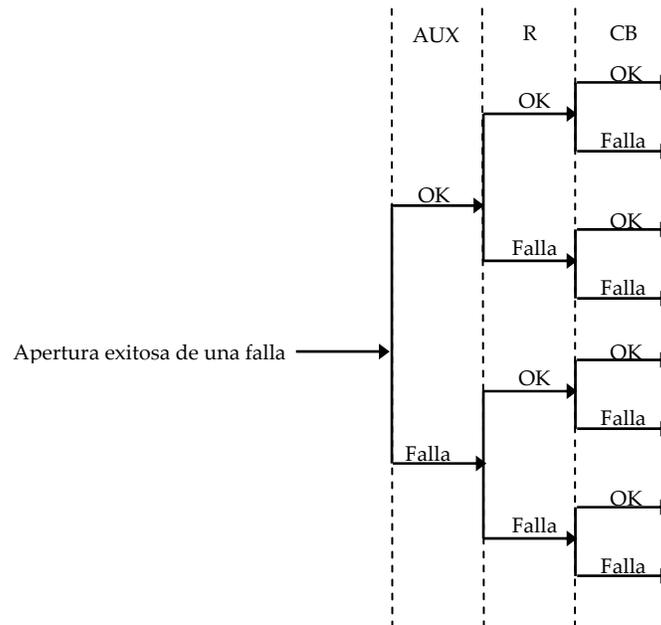


Figura 8.6 Árbol de eventos del sistema de protección para el caso de recierre

En este caso la “llamada a operar” al sistema de protección es la orden de recierre programada en el relé por un operario del sistema de potencia. Esta llamada a operar es un evento determinístico.

**EJEMPLO 8.4**

Considere el sistema de protección para una línea de transmisión mostrado en la figura 8.7. Este consta de un sistema de protección (SP) en cada terminal y un medio de comunicación (CM) que puede ser un sistema de microondas, fibra óptica, power line carrier, etc.

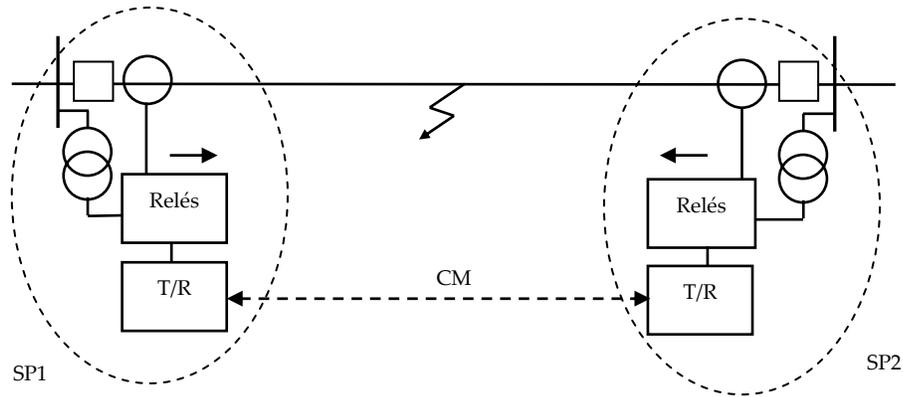


Figura 8.7 Sistema de protección para una línea de transmisión

El esquema operativo es de disparo permitido en cada terminal, es decir, cada que en un extremo se detecta una falla se verifica si en el otro extremo también se detecta una falla, esto para evitar disparos para fallas fuera de la línea. Si ambos relés detectan una falla, entonces se produce apertura de la línea.

En la figura 8.8 se presenta el árbol de eventos para el caso de desconexión de una falla. El medio de comunicación entre ambos extremos es en este caso el primer componente que se debe analizar.

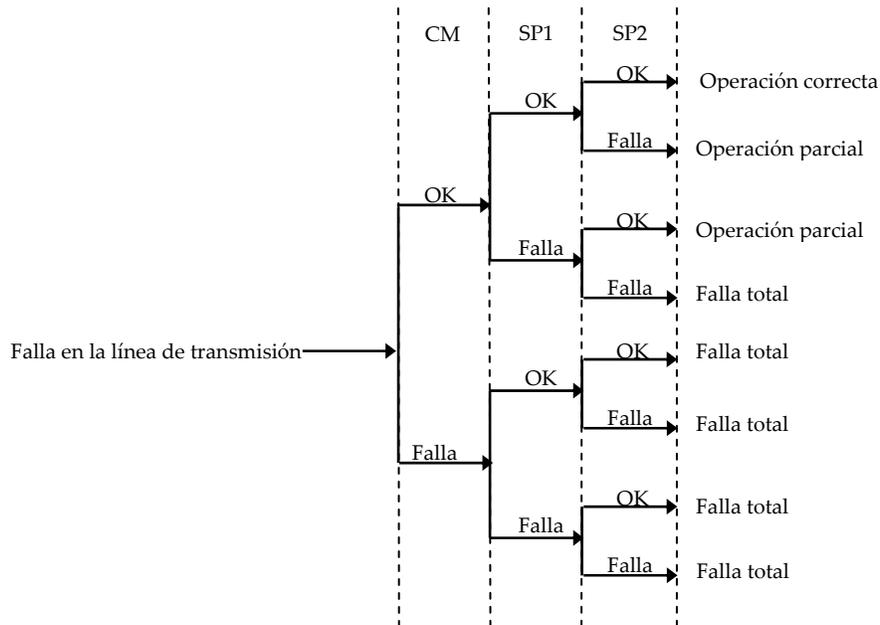


Figura 8.8 Árbol de eventos del sistema de protección de una línea de transmisión para el caso de apertura de una falla

### 8.3 ÁRBOLES DE FALLAS ESTÁTICOS

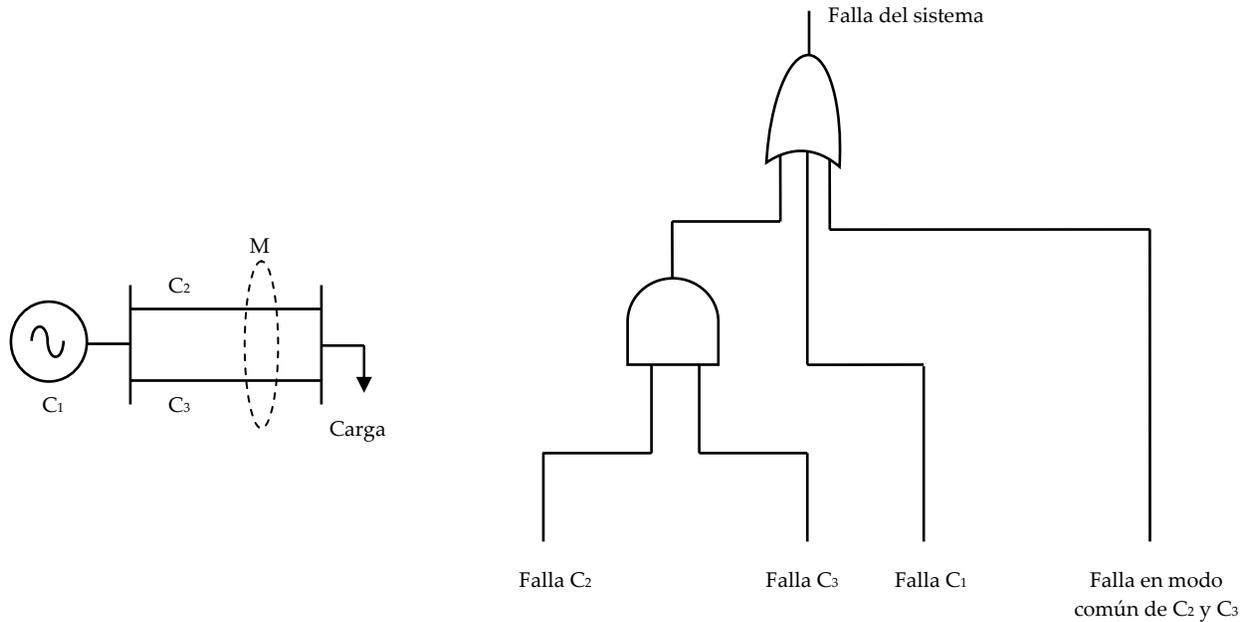


Figura 8.9 Árbol de fallas para el sistema de protección de una línea de transmisión

Un árbol de fallas es una representación gráfica mediante compuertas AND y OR de las combinaciones de eventos que pueden llevar a la falla de un sistema o componente.

El evento de falla de interés en el sistema o componente bajo estudio se denomina “top event”. Ver el ejemplo de la figura 8.1

A partir del evento de falla de interés, se analiza en orden jerárquico las combinaciones o secuencias de eventos o causas que producen el evento de falla de interés. Así, este orden de construir el árbol de fallas es inverso al aplicado para un árbol de eventos.

El árbol de eventos es una técnica de razonamiento deductiva.

La probabilidad del evento de falla de interés se evalúa a partir de la expresión booleana que relaciona todos los eventos o causas que lo producen. Esta evaluación puede ser analítica o numérica mediante simulación de Montecarlo

En muchos casos, previo a la solución analítica o numérica, el árbol de eventos es transformado a una representación de conjuntos de cortes mínimos, lo cual, permite aplicar las técnicas de solución para cortes mínimos.

### 8.3.1 Solución en forma analítica

Existen dos formas para resolver en forma analítica:

1. Se obtiene la expresión booleana de la probabilidad de ocurrencia del evento top y se reemplazan en ella las probabilidades puntuales o funciones de distribución de probabilidad de los eventos básicos (bottom events).

El obtener la expresión booleana de la probabilidad de ocurrencia del evento top generalmente requiere la aplicación de las reglas y propiedades del algebra booleana con el fin de obtener una expresión donde no se repitan los eventos básicos.

Si existen eventos repetidos, estos deben eliminarse aplicando algebra Booleana.

2. Se reemplazan las probabilidades puntuales de los eventos básicos y se evalúa secuencialmente el árbol de abajo hacia arriba hasta obtener la probabilidad de ocurrencia del evento top. Esto evita resolver la expresión booleana de probabilidad de ocurrencia del evento top, lo cual, en la mayoría de los casos es una labor bastante tediosa.

Las probabilidades puntuales pueden obtenerse evaluando la distribución para un tiempo de interés dado.

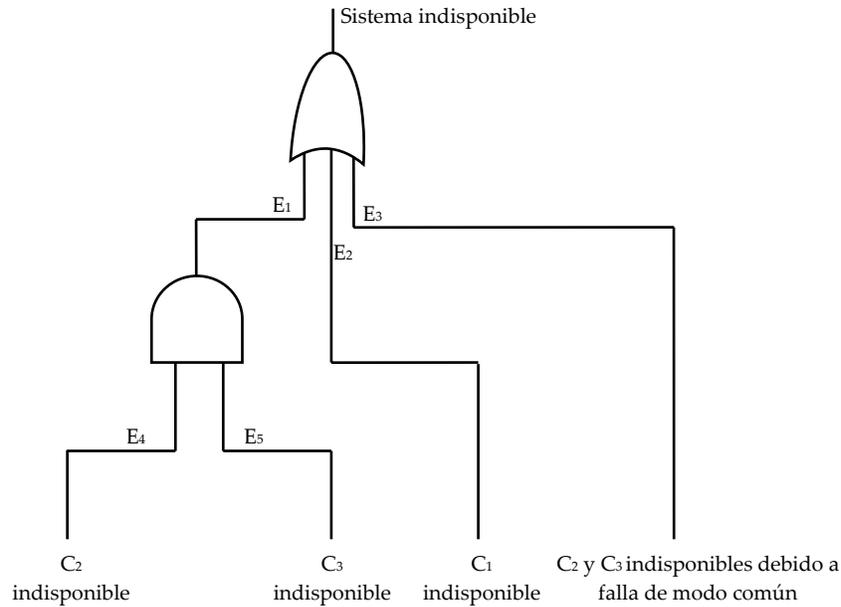
En las compuertas con más de dos entradas se descompone la valoración en forma recursiva utilizando las leyes asociativas del algebra Booleana:

$$A + B + C = A + [B + C] = [A + B] + C$$

$$ABC = A[BC] = [AB]C$$

**EJEMPLO 8.5**

Obtenga la expresión de la probabilidad de encontrar indisponible el sistema de la figura 8.9.



$$P[\textit{sistema indisponible}] = P[E_1 \cup E_2 \cup E_3]$$

Los eventos  $E_4$  y  $E_5$  son independientes entre sí pero no mutuamente exclusivos.

Los eventos  $E_1$  y  $E_2$  son independientes entre sí pero no mutuamente exclusivos.

Los eventos  $E_2$  y  $E_3$  son independientes entre sí pero no mutuamente exclusivos.

Los eventos  $E_1$  y  $E_3$  pueden considerarse independientes entre sí y mutuamente exclusivos.

Así, aplicando:

$$P[x_1 \cup x_2 \cup x_3] = P[x_1] + P[x_2] + P[x_3] - P[x_1x_2] - P[x_1x_3] - P[x_2x_3] + P[x_1x_2x_3]$$

Se obtiene:

$$P[\textit{sistema indisponible}] = P[E_1] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1E_2] - P[E_1E_3] - P[E_2E_3] + P[E_1E_2E_3]$$

Resolviendo:

$$P[\text{sistema indisponible}] = P[E_1] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1E_2] - P[E_1E_3] - P[E_2E_3] + P[E_1E_2E_3]$$

$$P[\text{sistema indisponible}] = P[E_4]P[E_5] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1E_2] - P[E_1E_3] - P[E_2E_3] + P[E_1E_2E_3]$$

$$P[\text{falla sistema}] = P[E_4]P[E_5] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1]P[E_2] - P[E_1E_3] - P[E_2E_3] + P[E_1E_2E_3]$$

$$P[\text{sistema indisponible}] = P[E_4]P[E_5] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1]P[E_2] - 0 - P[E_2E_3] + P[E_1E_2E_3]$$

$$P[\text{sistema indisponible}] = P[E_4]P[E_5] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1]P[E_2] - 0 - P[E_2]P[E_3] + P[E_1E_2E_3]$$

$$P[\text{sistema indisponible}] = P[E_4]P[E_5] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1]P[E_2] - 0 - P[E_2]P[E_3] + P[E_1]P[E_2E_3]$$

$$P[\text{sistema indisponible}] = P[E_4]P[E_5] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1]P[E_2] - 0 - P[E_2]P[E_3] + P[E_1] * 0$$

$$P[\text{sistema indisponible}] = P[E_4]P[E_5] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1]P[E_2] - 0 - P[E_2]P[E_3] + 0$$

$$P[\text{sistema indisponible}] = P[E_4]P[E_5] + P[E_2] + P[E_3] - P[E_1]P[E_2] - P[E_2]P[E_3]$$

$$P[\text{sistema indisponible}] = U_{C_2}U_{C_3} + U_{C_1} + U_M - U_{C_2}U_{C_3}U_{C_1} - U_{C_1}U_M$$

$U_M$  es la indisponibilidad de  $C_2$  y  $C_3$  debido a las fallas de modo común.

Si:

$$U_{C_1} = 0.35$$

$$U_{C_2} = U_{C_3} = 0.20$$

$$U_M = 0.10$$

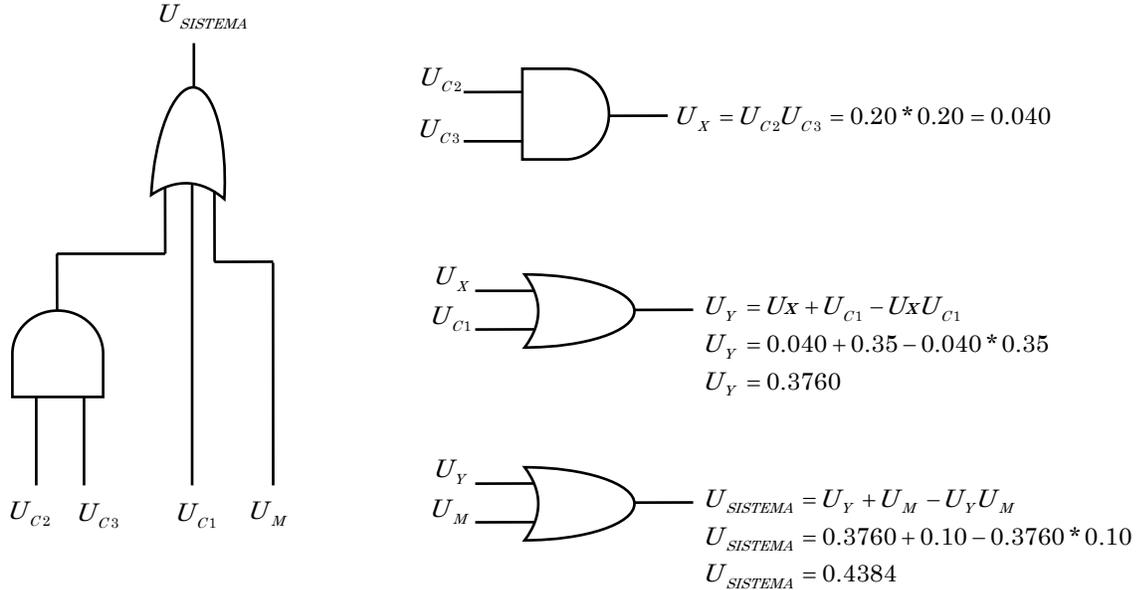
$$P[\text{sistema indisponible}] = U_{C_2}U_{C_3} + U_{C_1} + U_M - U_{C_2}U_{C_3}U_{C_1} - U_{C_1}U_M$$

$$P[\text{sistema indisponible}] = 0.20 * 0.20 + 0.35 + 0.10 - 0.20 * 0.20 * 0.35 - 0.35 * 0.10$$

$$P[\text{sistema indisponible}] = U_{SISTEMA} = 0.4410$$

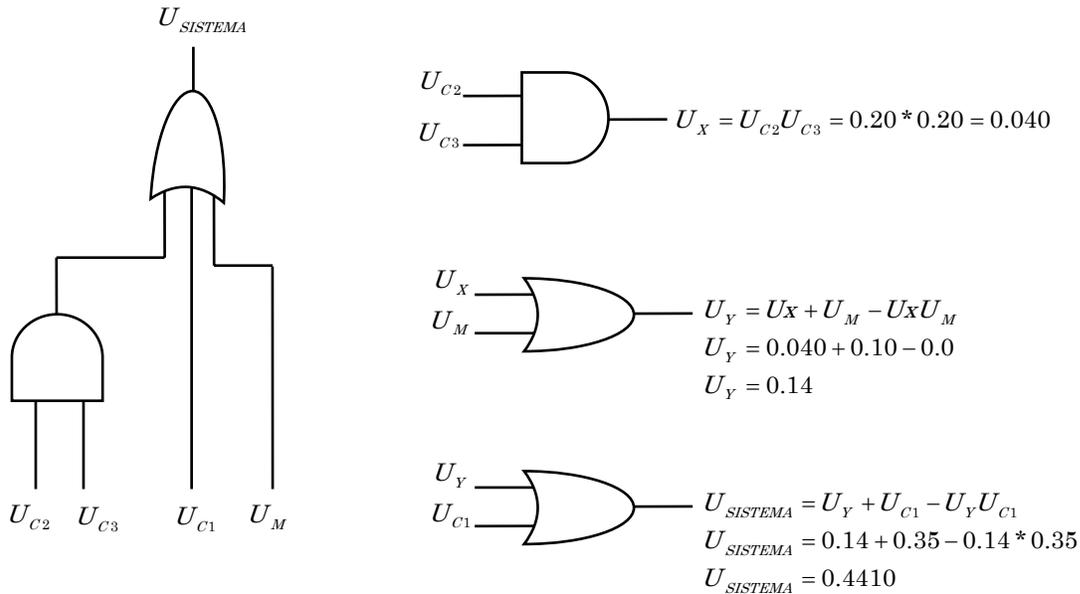
**EJEMPLO 8.6**

Obtenga la probabilidad del evento top en el árbol de fallas del ejemplo anterior realizando evaluación secuencial de las compuertas de abajo hacia arriba.



No da lo mismo que en el caso anterior! Porqué?

Cambiando el orden de evaluación de los eventos en la compuerta OR:

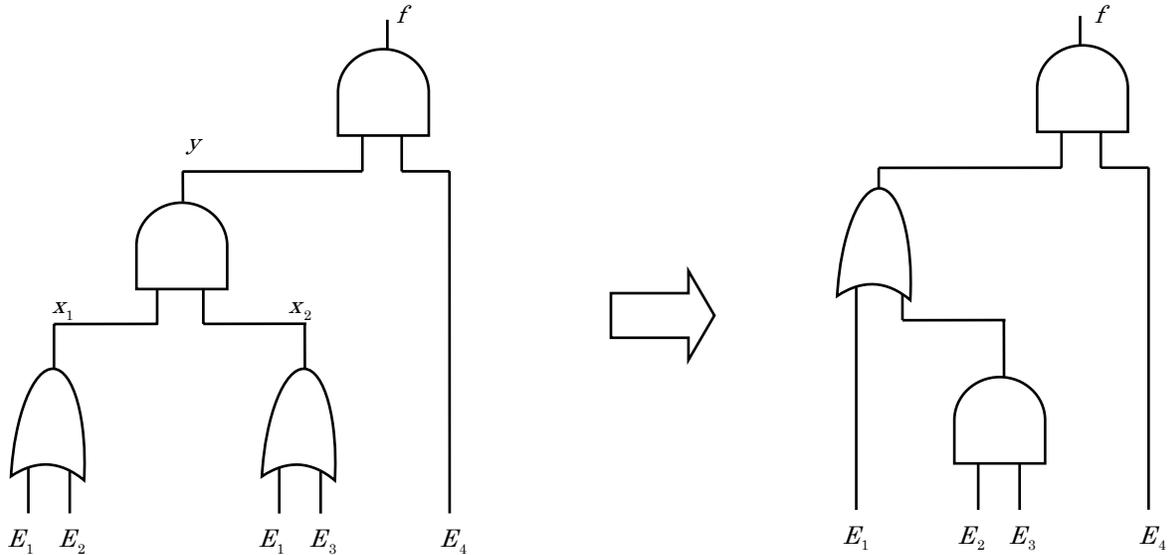


Ahora si da lo mismo! Porqué?

Si existen eventos mutuamente exclusivos, la evaluación en la compuerta OR debe hacerse de tal forma que se evalúe correctamente esta situación.

**EJEMPLO 8.7**

Considere el siguiente árbol de fallas que tiene un evento básico repetido que aparece a la izquierda.



$$x_1 = E_1 + E_2 \qquad x_2 = E_1 + E_3$$

$$y = x_1 x_2 = (E_1 + E_2)(E_1 + E_3)$$

$$f = y E_4 = (E_1 + E_2)(E_1 + E_3) E_4$$

Aplicando:  $(A + B)(A + C) = A + BC$

$$f = (E_1 + E_2)(E_1 + E_3) E_4 = (E_1 + E_2 E_3) E_4$$

El sistema equivalente aparece a la derecha.

Ahora evalúe ambos árboles utilizando las siguientes probabilidades

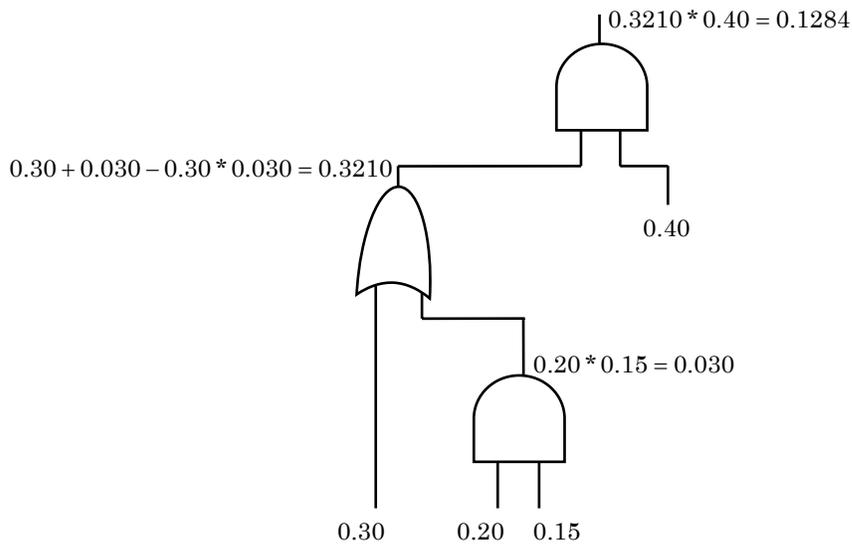
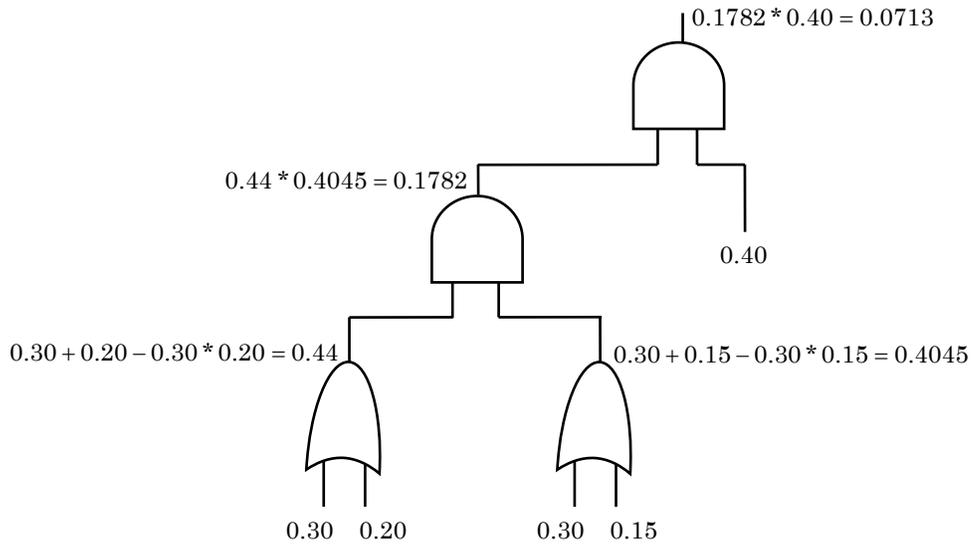
$$P[E_1] = 0.30$$

$$P[E_2] = 0.20$$

$$P[E_3] = 0.15$$

$$P[E_4] = 0.40$$

Se considera que todos los eventos son independientes pero no mutuamente exclusivos.



Como se observa, ambas representaciones dan resultados diferentes.

La respuesta correcta es la que se obtiene al resolver el sistema reduciendo los eventos repetidos.

### 8.3.2 Solución mediante simulación de Montecarlo

Para un periodo  $T$  de análisis se realizan los siguientes pasos en cada iteración:

1. Para cada evento básico se genera un tiempo para falla utilizando su correspondiente distribución de probabilidad
2. En cada compuerta AND se toma como tiempo de falla de salida el mayor tiempo de falla de los eventos de entrada
3. En cada compuerta OR se toma como tiempo de falla de salida el menor tiempo de falla de los eventos de entrada
4. Se aplica secuencialmente los pasos 2 y 3 a todas las compuertas hasta obtener un tiempo para falla del sistema.
5. El sistema falla en esta iteración si su tiempo para falla es menor que  $T$ .
6. Repetir los pasos 1 a 5  $R$  veces
7. Al finalizar calcular:

$$P[\text{falla sistema}] = \# \text{ fallas} / R$$

$$\overline{tff} = \sum tff / R$$

$$\lambda = 1 / \overline{tff} = R / \sum tff$$

En este algoritmo se asume que no hay reparaciones, ya sea porque el sistema está conformado por componentes no reparables o porque las fallas permanecen ocultas hasta que el sistema es llamado a operar o produce una falsa operación.

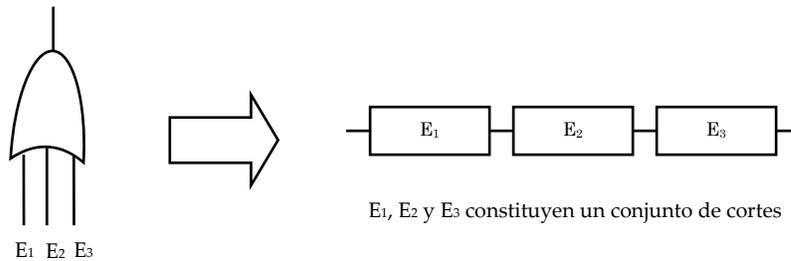
### 8.3.3 Algoritmo para obtener la representación en diagrama de bloques

Este algoritmo está basado en lo siguiente:

1. Cada evento asociado a una compuerta OR constituye un elemento en serie

Así, cada compuerta OR incrementará el conjunto de cortes.

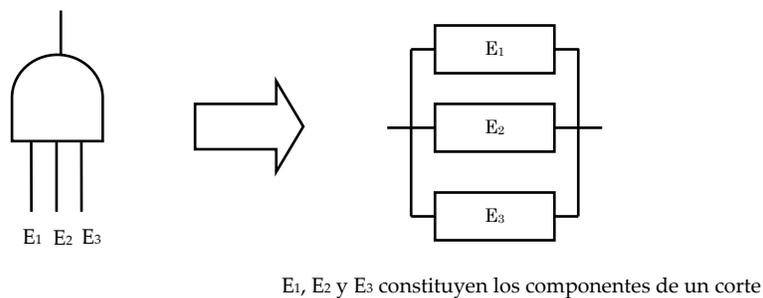
Sí la salida de la compuerta OR es una entrada a una compuerta AND, entonces incrementará el tamaño del correspondiente lazo.



2. Cada evento asociado a una compuerta AND constituye un componente en paralelo

Así, cada compuerta AND incrementará el conjunto de lazos.

Sí la salida de la compuerta AND es la entrada a una compuerta OR, entonces incrementará el tamaño del correspondiente corte.

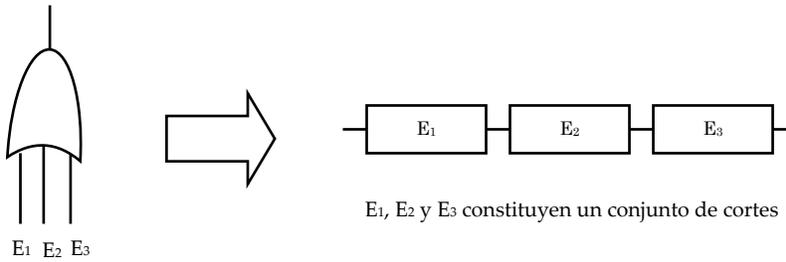


El procedimiento en este algoritmo es recorrer el árbol de fallas del evento top hacia los eventos básicos obteniendo la representación de las compuertas como elementos de un diagrama de bloques.

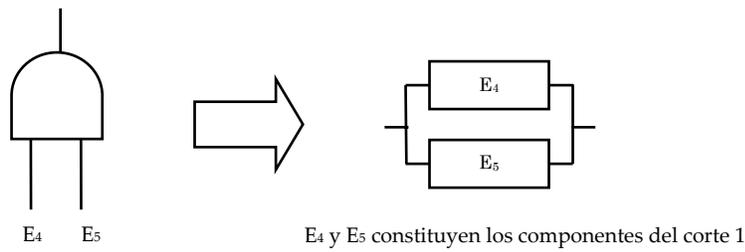
**EJEMPLO 8.8**

Obtenga la representación en conjunto de cortes del árbol de fallas mostrado en la figura 8.9.

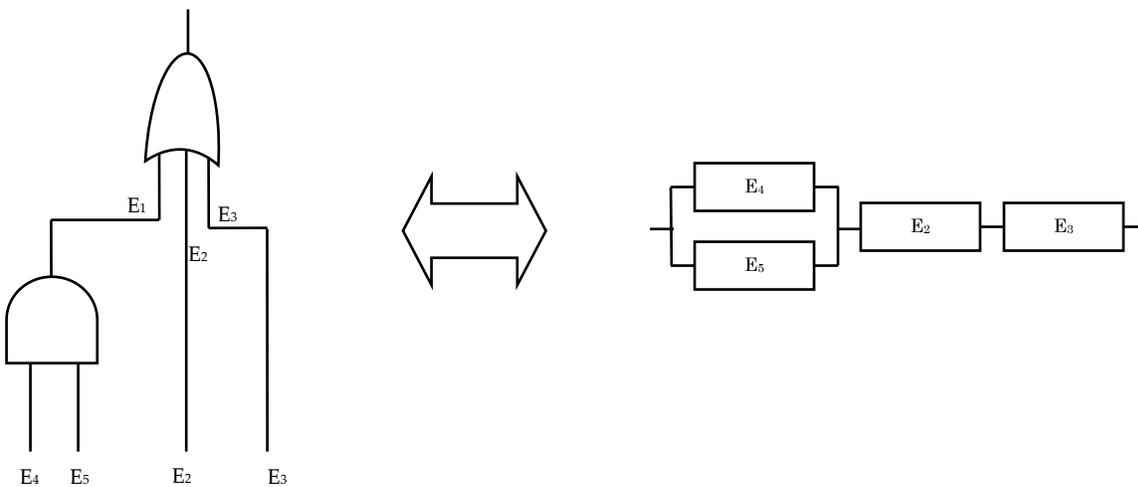
Paso 1:



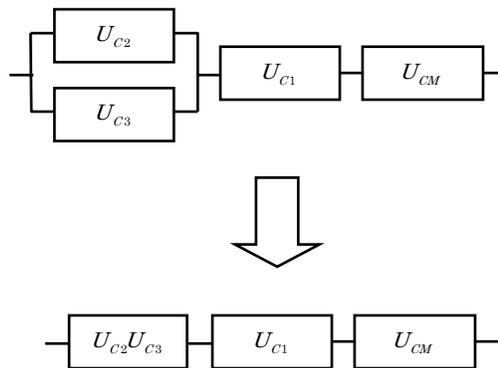
Paso 2:



Resultado:



La indisponibilidad del sistema se calcula de la siguiente forma:



$$U_{SISTEMA} = 1 - (1 - U_{C2} U_{C3})(1 - U_{C1})(1 - U_M)$$

$$U_{SISTEMA} = 1 - (1 - 0.20 * 0.20)(1 - 0.35)(1 - 0.10) = 0.4384$$

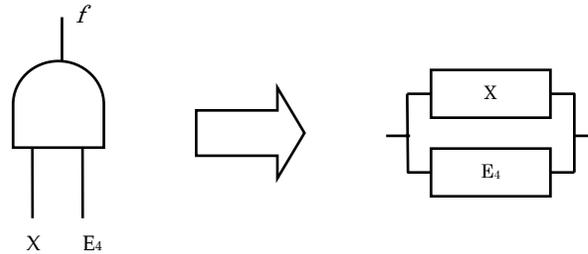
No da lo mismo que en los ejemplos 8.6 y 8.7! Porqué?

Este sistema en particular NO se puede representar mediante un diagrama de bloques, porque el modo de falla simultáneo de C1 y C2 es mutuamente exclusivo con el modo de falla M, lo cual quiere decir, que C1C2 y M son dependientes ya que no pueden darse al mismo tiempo!

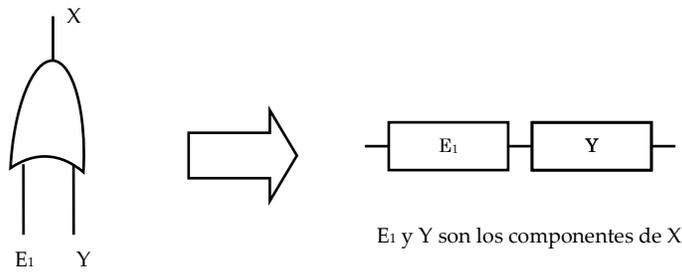
**EJEMPLO 8.9**

Obtenga la representación en como diagrama de bloques para el sistema del ejemplo 8.7.

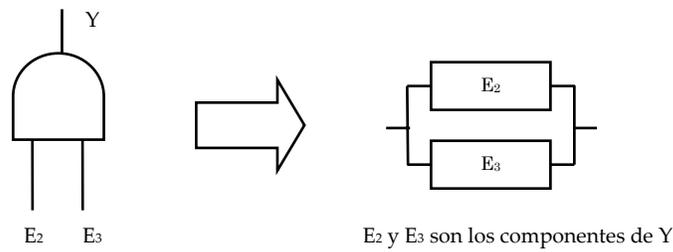
Paso 1:



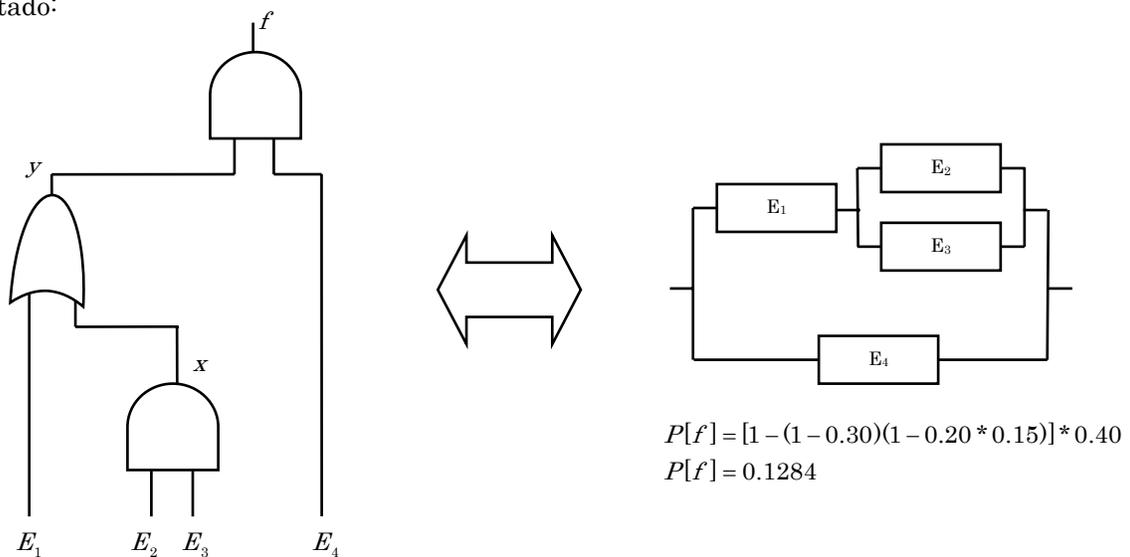
Paso 2:



Paso 3:



Resultado:



### 8.3.4 Medidas de importancia

Algo muy importante para el analista y diseñador es valorar cuál es efecto de la ocurrencia de los eventos básicos de un árbol de fallas sobre el evento top.

Las medidas para valorar esto se denominan “medidas de importancia”.

Algunas de estas medidas son:

<p>Valor de reducción del riesgo (RRW=Risk Reduction Worth)</p>	<p>Se observa el decremento en la probabilidad de ocurrencia del evento top si se asegura que algún evento básico de interés no ocurrirá.</p>	<p>Se coloca en cero la probabilidad de ocurrencia del evento de interés y se valora la probabilidad de ocurrencia del evento top.</p>
<p>Valor de logro del riesgo (RAW=Risk Achievement Worth)</p>	<p>Se observa el incremento en la probabilidad de ocurrencia del evento top si se asegura que algún evento básico de interés ocurrirá.</p>	<p>Se coloca en uno la probabilidad de ocurrencia del evento de interés y se valora la probabilidad de ocurrencia del evento top.</p>
<p>Medida de importancia de Birbaum (BM=Birbaum Measure)</p>	<p>Es la tasa de cambio en la probabilidad de ocurrencia del evento top con respecto al cambio en la probabilidad de ocurrencia de un evento básico de interés</p>	$BM = \frac{dP[f]}{dP[E_i]}$ $BM = RAW - RRW$

#### EJEMPLO 8.10

Obtenga las medidas de importancia para el sistema del ejemplo 8.6.

$$P[f] = U_{C2} U_{C3} + U_{C1} + U_M - U_{C2} U_{C3} U_{C1} - U_{C1} U_M$$

$$U_{C1} = 0.35 \quad U_{C2} = U_{C3} = 0.20 \quad U_M = 0.10 \quad P[f] = U_{SISTEMA} = 0.4410$$

Evento	RRW		RAW		BM
	P[f]	ΔP[f]%	P[f]	ΔP[f]%	
C1 indisponible	0.1400	-68.2540	1.000	+126.7574	$f' = 1.0 - U_{C2} U_{C3} - U_M = 0.86$
C2 indisponible	0.4150	-5.8957	0.5450	+23.5828	$f' = U_{C3} - U_{C3} U_{C1} = 0.13$
C3 indisponible	0.4150	-5.8957	0.5450	+23.5828	$f' = U_{C2} - U_{C2} U_{C1} = 0.13$
M ocurre	0.3760	-14.7392	1.0260	+132.6531	$f' = +1.0 - U_{C1} = 0.65$

Como se observa, los eventos más importantes para el sistema son, en orden descendente, la indisponibilidad del generador, la ocurrencia de una falla de modo común en las líneas de transmisión y la salida de las líneas de transmisión en forma independiente.

### 8.3.5 Tasas de fallas y tiempos medios para reparación

La medida básica del evento top de un árbol de fallas es una probabilidad de falla o una indisponibilidad. Sin embargo, en algunos casos es de interés obtener:

1	La tasa de fallas o frecuencia de fallas en sistemas no reparables y reparables
2	El tiempo medio de reparación en sistemas reparables

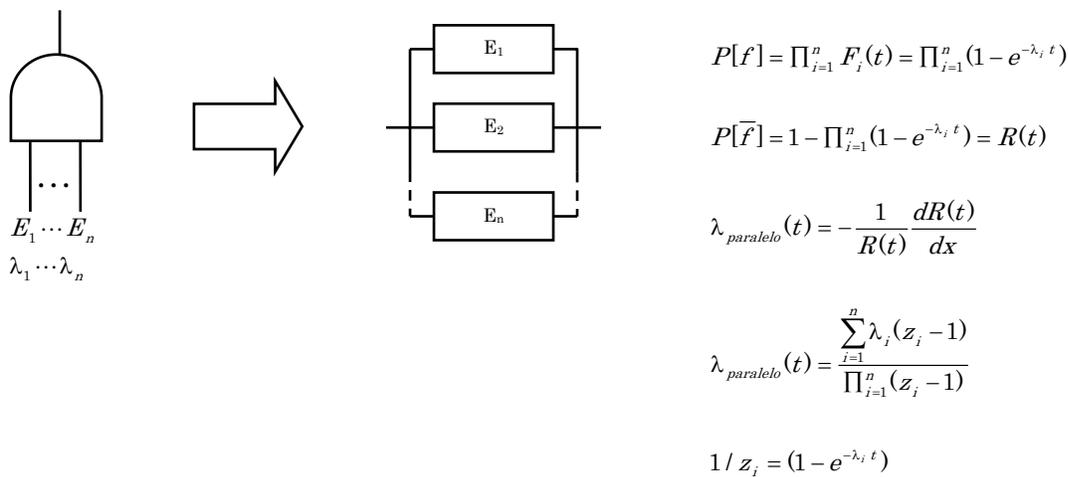
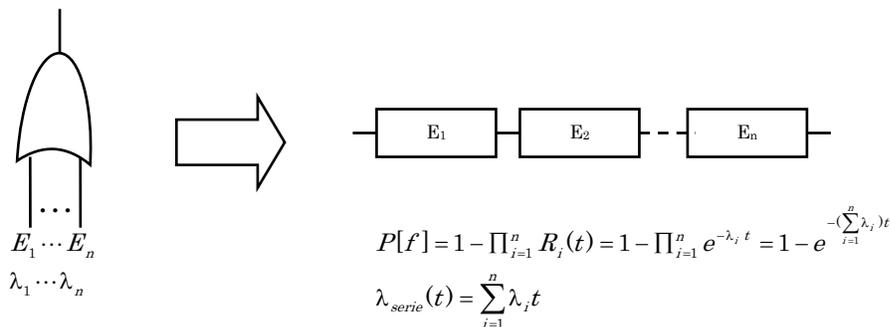
A continuación, se presentan los métodos para obtener estas medidas en forma analítica. Sin embargo, otra forma de obtenerlas es aplicando simulación de Montecarlo.

- Tasa de fallas en un sistema no reparable

En este caso se asume lo siguiente:

1	Los tiempos para ocurrencia de los eventos básicos están exponencialmente distribuidos
2	No hay eventos básicos repetidos
3	Los eventos básicos son independientes

Como se explicó anteriormente, cada compuerta OR corresponde a una conexión en serie de eventos y cada compuerta AND a una conexión en paralelo de eventos.

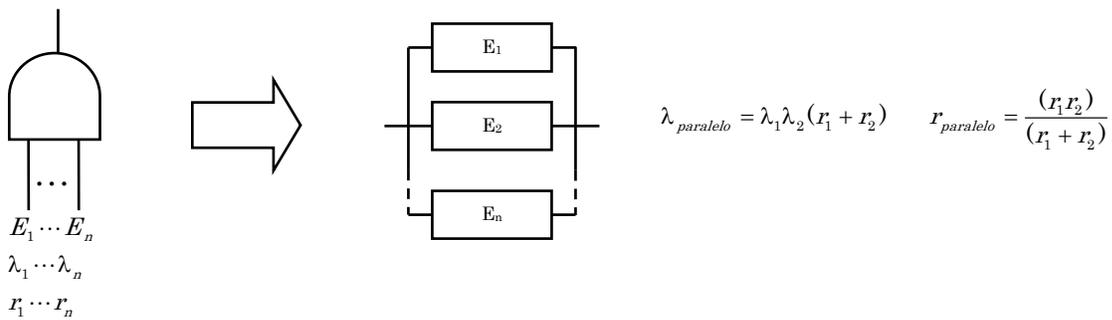
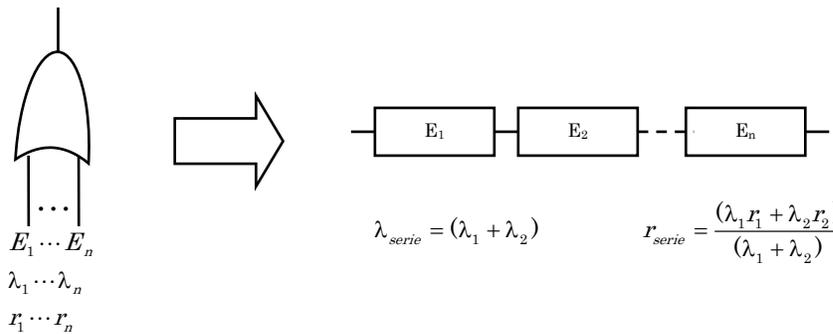


- Tasa de fallas y tiempo medio para reparación en un sistema reparable

En este caso se asume lo siguiente:

1	Los procesos para falla y reparación son estacionarios
2	No hay eventos básicos repetidos
3	Los eventos básicos son independientes
4	Las indisponibilidades individuales de los componentes son pequeñas (<10% anual)

Se aplican secuencialmente las fórmulas del método simplificado de frecuencia y duración:



En la literatura técnica se encuentran otras formulas para calcular la tasa de fallas y el tiempo medio de reparación de sistemas reparables, las cuales se aplican cuando no se cumple la condición 4.

## CAPÍTULO 9 – REDES BAYESIANAS

### 9.1 INTRODUCCIÓN

Una red bayesiana o red de creencia es un modelo probabilístico que relaciona un conjunto de variables aleatorias mediante un grafo dirigido que indica la influencia causal. Como ejemplo, en la figura 9.1 se presenta una red Bayesiana para un sistema de protección.

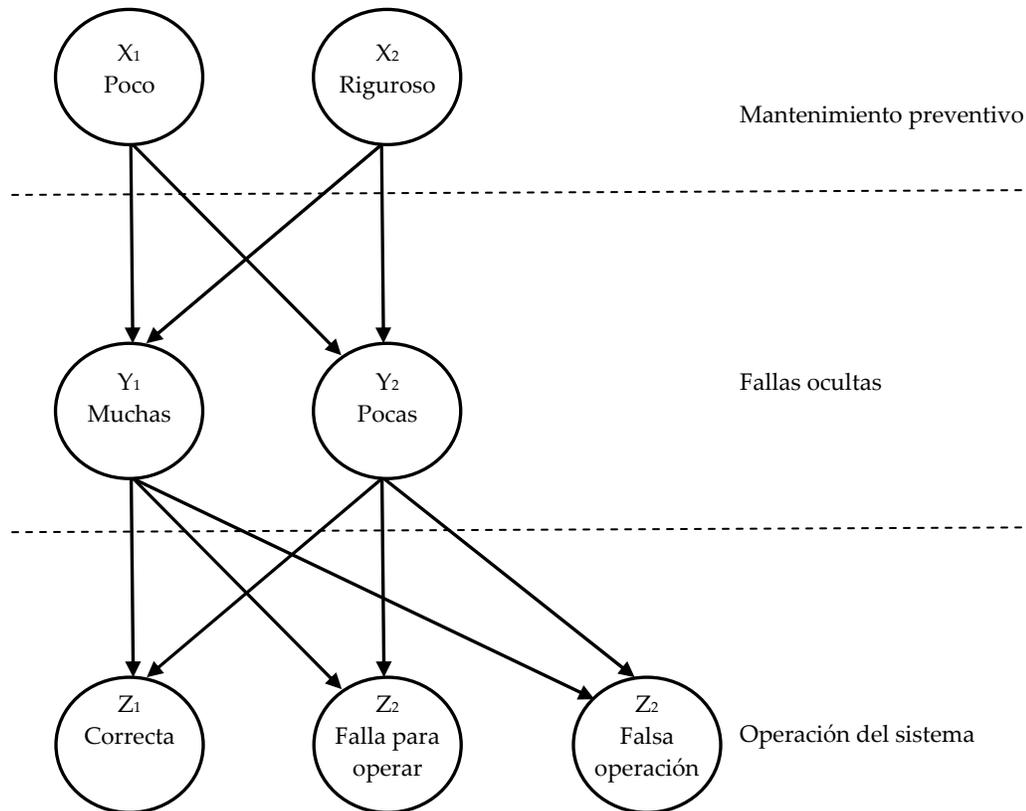


Figura 9.1 Ejemplo de red Bayesiana para un sistema de protección

Una red Bayesiana es similar a un árbol de fallas o diagrama causa-efecto con la ventaja de que los eventos no tienen que ser binarios.

El modelamiento con redes Bayesianas está basado en los teoremas de la probabilidad total y de Bayes y es en sí la extensión de éstos al caso multivariable.

Los eventos en cada nivel o capa de la red Bayesiana tienen que ser independientes entre sí y definir un espacio muestral. Debe tenerse especial cuidado en cumplir este requerimiento al plantear el modelo. También, se debe recordar que los eventos en cada nivel o capa requieren una perfecta definición, es decir, no pueden ser vagos o imprecisos.

Una red Bayesiana es un modelo Markoviano (sin memoria), ya que la ocurrencia de un evento en una capa dada solo depende de los eventos de la capa inmediatamente anterior.

9.2 TEOREMAS DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y DE BAYES

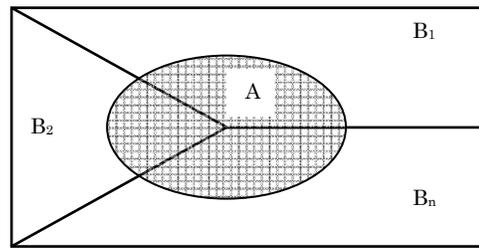


Figura 9.2 Concepto de evento condicional sobre la ocurrencia de otros eventos

Considere un evento dado A que está definido sobre la ocurrencia de otros n eventos independientes entre sí B<sub>i</sub>, tal como se muestra en la Figura 9.2.

9.2.1 Teorema de la probabilidad total

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) * P(B_i)$$

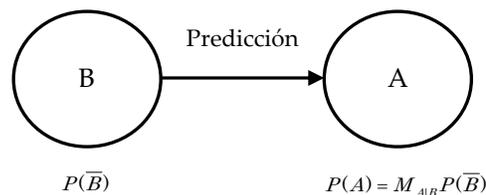
$P(A | B_i)$ : Define en términos probabilísticos el grado de participación o influencia del evento B<sub>i</sub> sobre la ocurrencia del evento A. Se obtiene de definiciones de frecuencia relativa o del análisis físico del fenómeno o sistema bajo estudio.

$P(B_i)$ : Es la probabilidad de ocurrencia del evento B<sub>i</sub>. Es un dato puntual que se puede obtener de definiciones de frecuencia relativa o del modelo probabilístico del evento B<sub>i</sub>.

El teorema de la probabilidad total también se puede escribir como:

$$P(\bar{A}) = (P(A | B_1) \quad P(A | B_2) \quad \dots \quad P(A | B_n)) \begin{pmatrix} P(B_1) \\ P(B_2) \\ \vdots \\ P(B_n) \end{pmatrix} = M_{A|B} P(\bar{B})$$

Nótese que el teorema de la probabilidad total permite hacer inferencias hacia adelante, de las causas al resultado. Esta actividad se denomina “predicción”.



### 9.2.2 Teorema de Bayes

Desarrollado por Thomas Bayes y publicado en 1763, permite calcular la probabilidad de una causa sabiendo el efecto que ha producido. Es decir, se identifica en términos probabilísticos el grado de participación de una causa sobre la ocurrencia de un evento dado.

$$P(B_i | A) = \frac{P(A | B_i) P(B_i)}{P(A)}$$

$P(B_i)$  es la probabilidad a-priori de la ocurrencia del evento  $B_i$ .

Una vez ocurre el evento  $A$ ,  $P(B_i | A)$  actualiza la probabilidad de ocurrencia del evento  $B_i$ ; así,  $P(B_i | A)$  es la probabilidad a-posteriori de  $B_i$ .

El teorema de la probabilidad total también se puede escribir como:

$$M_{B|A} = \begin{pmatrix} P(B_1 | A) \\ P(B_2 | A) \\ \vdots \\ P(B_n | A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P(A | B_1) P(B_1)}{P(A)} \\ \frac{P(A | B_2) P(B_2)}{P(A)} \\ \vdots \\ \frac{P(A | B_n) P(B_n)}{P(A)} \end{pmatrix} = (P(A | B_1) \quad P(A | B_2) \quad \dots \quad P(A | B_n))^t \square \begin{pmatrix} P(B_1) \\ P(B_2) \\ \vdots \\ P(B_n) \end{pmatrix} \frac{1}{P(A)}$$

$$M_{B|A} = M_{A|B}^t \square P(\bar{B}) \frac{1}{P(A)}$$

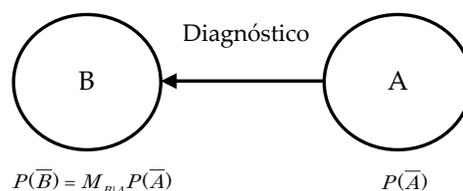
$$P(A, B) = P(B, A) = M_{A|B}^t \square P(\bar{B}) \quad \rightarrow \quad M_{B|A} = P(A, B) / P(\bar{A})$$

Donde:

□ : Indica la operación matricial de multiplicación congruente, es decir, término a término por fila.

./: Indica división término a término

Nótese que el teorema de Bayes permite hacer inferencias hacia atrás, del resultado hacia las causas. Esta actividad se denomina “diagnóstico”



**EJEMPLO 9.1**

En un sistema eléctrico se conocen las probabilidades de daño de los aisladores de las líneas de transmisión debido a diferentes causas. Además, se conocen las probabilidades de ocurrencia de los eventos que causan los daños.

$B_i$	Causas	Participación o probabilidad de daño	Probabilidad de que se produzca la causa
1	Descarga atmosférica	0.3502	0.25
2	Contaminación	0.3157	0.15
3	Sobrevoltaje por maniobra	0.1498	0.15
4	Ferroresonancia	0.0922	0.05
5	Vandalismo	0.0576	0.10
6	Otras causas	0.0346	0.05
Total		1.000	

Sean A el evento de daño del aislador y  $B_i$  el evento  $i$  que pueden producir el daño del aislador

- Cuál es la probabilidad de que se produzca el daño del aislador debido a todas estas causas?

Aplicando el teorema de la probabilidad total:  $P(A) = \sum_{i=1}^6 P(A | B_i) * P(B_i)$

$$P(A) = 0.3502 * 0.25 + 0.3157 * 0.15 + 0.1498 * 0.15 + 0.0922 * 0.05 + 0.0576 * 0.10 + 0.05 * 0.0346 = 0.169475$$

- Si un aislador se daña, cuál es la probabilidad de que este evento se deba a la contaminación?

Aplicando el Teorema de Bayes:  $P(B_2 | A) = P(A | B_2) * P(B_2) / P(A)$

$$P(B_2 | A) = 0.3157 * 0.15 / 0.169475 = 0.2794$$

- Si un aislador se daña, cuál es la probabilidad de que este evento se deba a una descarga atmosférica?

Aplicando el Teorema de Bayes:  $P(B_1 | A) = P(A | B_1) * P(B_1) / P(A)$

$$P(B_1 | A) = 0.3502 * 0.25 / 0.169475 = 0.51659$$

La probabilidad de que un aislador se dañe debido a una descarga atmosférica sube de 0.3502 a 0.51659 una vez se conoce la probabilidad de que produzca una descarga atmosférica.

### 9.3 MODELO MATEMÁTICO DE UNA RED BAYESIANA

En la Figura 9.3, donde se presenta una red bayesiana de un solo nivel causa-efecto con  $n$  causas denotados  $X$  y  $m$  resultados denotados  $Y$ .

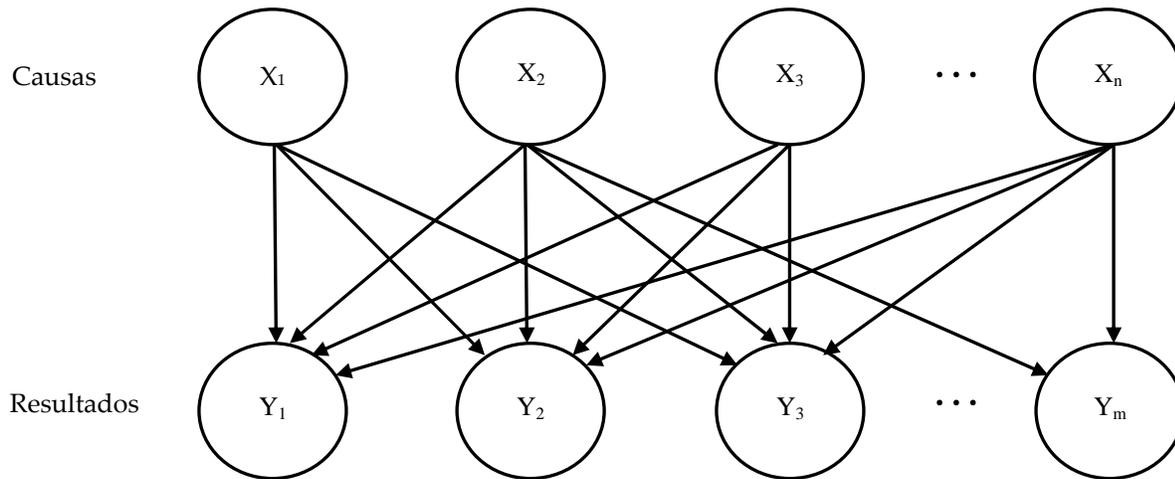


Figura 9.3 Concepto de red Bayesiana

El modelo matemático de una red Bayesiana se define mediante la matriz de probabilidades condicionales de los resultados dadas las causas  $M_{Y|X}$ . Así, conocidas las probabilidades de ocurrencia de las causas  $P(\bar{X})$  se pueden hallar las probabilidades de ocurrencia de los resultados  $P(\bar{Y})$  de la siguiente forma:

$$P(\bar{Y}) = M_{Y|X} P(\bar{X})$$

Donde:

$M_{Y|X}$ : Matriz de dimensión  $m \times n$  con las probabilidades condicionales de ocurrencia de los resultados dadas las causas, la cual tiene la siguiente estructura:

$$M_{Y|X} = \begin{pmatrix} P(Y_1 | X_1) & P(Y_1 | X_2) & \dots & P(Y_1 | X_n) \\ P(Y_2 | X_1) & P(Y_2 | X_2) & \dots & P(Y_2 | X_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(Y_m | X_1) & P(Y_m | X_2) & \dots & P(Y_m | X_n) \end{pmatrix}$$

$P(\bar{Y})$ : Vector columna de dimensión  $m$  con las probabilidades de ocurrencia de los  $m$  resultados  $\bar{Y}$  dado el conocimiento a-priori de la probabilidad de ocurrencia de las  $n$  causas  $\bar{X}$ .

$P(\bar{X})$ : Vector columna de dimensión  $n$  con las probabilidades de ocurrencia de las  $n$  causas  $\bar{X}$ .

La probabilidad de ocurrencia simultánea de las causas y los resultados está dada por:

$$P(X, Y) = P(Y, X) = M_{Y|X}{}^t \square P(\bar{X})$$

$$P(X, Y) = \begin{pmatrix} P(Y_1, X_1) & P(Y_2, X_1) & \dots & P(Y_m, X_1) \\ P(Y_1, X_2) & P(Y_2, X_2) & \dots & P(Y_m, X_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(Y_1, X_n) & P(Y_2, X_n) & \dots & P(Y_m, X_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(Y_1 | X_1)P(X_1) & P(Y_2 | X_1)P(X_1) & \dots & P(Y_m | X_1)P(X_1) \\ P(Y_1 | X_2)P(X_2) & P(Y_2 | X_2)P(X_2) & \dots & P(Y_m | X_2)P(X_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(Y_1 | X_n)P(X_n) & P(Y_2 | X_n)P(X_n) & \dots & P(Y_m | X_n)P(X_n) \end{pmatrix}$$

Donde:

$P(X, Y)$ : Matriz de dimensión  $n * m$

$t$ : Indica la operación matricial de transposición.

$\square$ : Indica la operación matricial de multiplicación congruente, es decir, término a término por fila.

Una vez se tiene  $M_{Y|X}$  también se puede inferir la ocurrencia de las causas dados los resultados en la siguiente forma:

$$P(\bar{X}) = M_{X|Y} P(\bar{Y})$$

Donde  $M_{X|Y}$  se halla de la siguiente forma:

$$M_{X|Y} = \begin{pmatrix} P(X_1 | Y_1) & P(X_1 | Y_2) & \dots & P(X_1 | Y_m) \\ P(X_2 | Y_1) & P(X_2 | Y_2) & \dots & P(X_2 | Y_m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(X_n | Y_1) & P(X_n | Y_2) & \dots & P(X_n | Y_m) \end{pmatrix} = P(X, Y) ./ P(\bar{Y})^t$$

El símbolo “./” indica división término a término de la siguiente forma:

$$M_{X|Y} = \begin{pmatrix} P(Y_1, X_1) / P(Y_1) & P(Y_2, X_1) / P(Y_2) & \dots & P(Y_m, X_1) / P(Y_m) \\ P(Y_1, X_2) / P(Y_1) & P(Y_2, X_2) / P(Y_2) & \dots & P(Y_m, X_2) / P(Y_m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(Y_1, X_n) / P(Y_1) & P(Y_2, X_n) / P(Y_2) & \dots & P(Y_m, X_n) / P(Y_m) \end{pmatrix}$$

Así, en una red Bayesiana se pueden hacer inferencias de las causas a los resultados y de los resultados a las causas, es decir, predicciones y diagnósticos.

Si en una red Bayesiana existen varios niveles de relación causal, el modelo matemático se hace encadenando los modelos de cada nivel. Por ejemplo, en la Figura 9.4 se muestra una red de dos niveles de relación causal, donde  $\bar{X}$  es la causa que produce  $\bar{Y}$  y  $\bar{Y}$  es la causa que produce  $\bar{Z}$ .

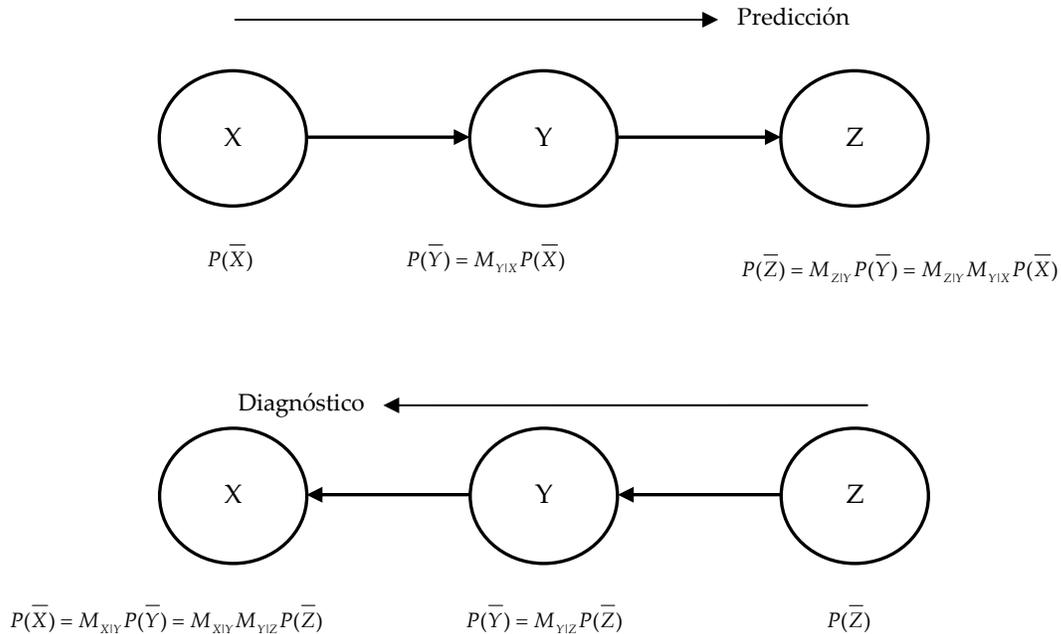


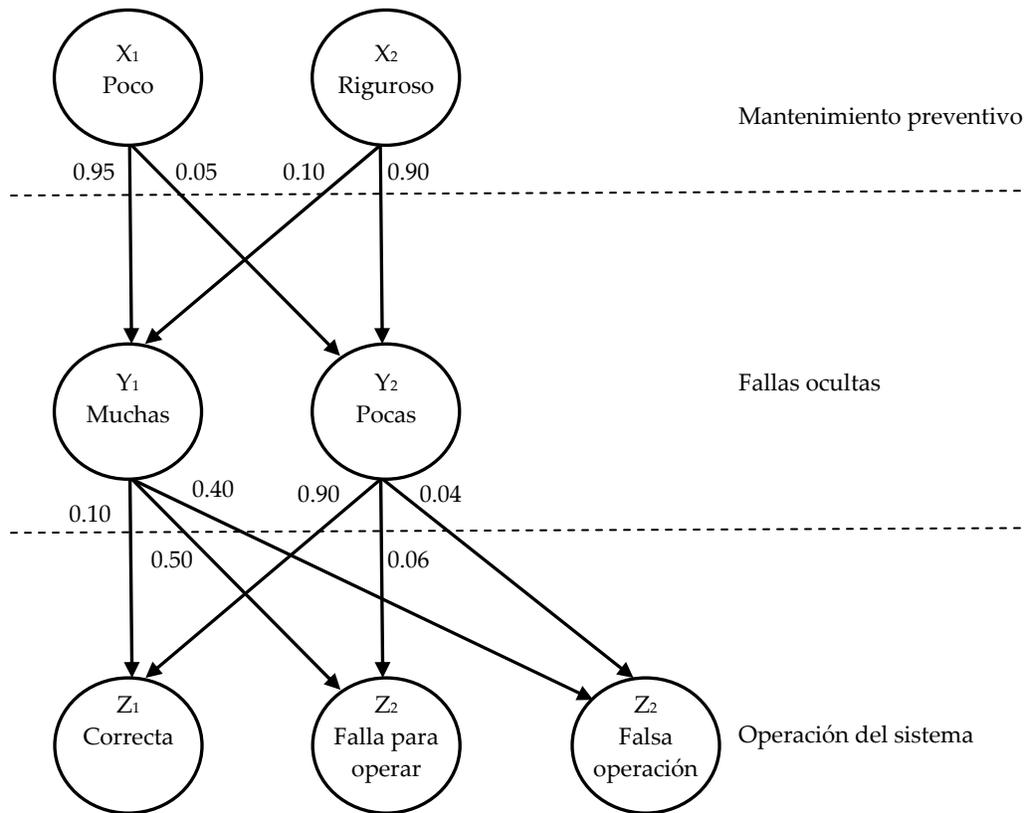
Figura 9.4 Red Bayesiana de dos niveles de relación causal

Algunas consideraciones para la aplicación de este tipo de modelamiento:

1	Aunque las probabilidades de los eventos básicos y las probabilidades condicionales aparecen en forma puntual en los ejemplos de este texto, también pueden expresarse mediante una distribución de probabilidad o proceso estocástico.
2	Si se utilizan probabilidades puntuales calculadas mediante la definición de frecuencia relativa o equiprobabilidad, debe verificarse que el proceso aleatorio bajo estudio sea estacionario.
3	Las probabilidades condicionales se pueden obtener mediante la definición de frecuencia relativa, contabilizando cuantas veces se produjo un efecto dada una causa y dividiendo este dato por el número de ensayos u observaciones
4	Las probabilidades de ocurrencia de las causas de una capa de la red se pueden obtener mediante la definición de frecuencia relativa, contabilizando cuantas veces se produjo la causa y dividiendo este dato por el número de ensayos u observaciones
5	Los eventos en cada capa o nivel deben constituir un espacio muestral; así, la suma de sus probabilidades tiene que ser igual a 1.0.

**EJEMPLO 9.2**

A continuación se presentan las probabilidades condicionales para los eventos de cada capa del sistema de protección mostrado en la figura 9.1



El modelo matemático es:

$$P(\bar{Y}) = M_{Y|X} P(\bar{X})$$

$$\begin{pmatrix} P(Y_1) \\ P(Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.10 \\ 0.05 & 0.90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_1) \\ P(X_2) \end{pmatrix}$$

$$P(\bar{Z}) = M_{Z|Y} P(\bar{Y}) = M_{Z|Y} M_{Y|X} P(\bar{X})$$

$$\begin{pmatrix} P(Z_1) \\ P(Z_2) \\ P(Z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.90 \\ 0.50 & 0.06 \\ 0.40 & 0.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(Y_1) \\ P(Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.90 \\ 0.50 & 0.06 \\ 0.40 & 0.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.95 & 0.10 \\ 0.05 & 0.90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_1) \\ P(X_2) \end{pmatrix}$$

Nótese que la suma por columna siempre es uno.

Si las probabilidades de que en las subestaciones se haga el mantenimiento preventivo a los sistemas de protección son:

$$\begin{pmatrix} P(X_1) \\ P(X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.80 \\ 0.20 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} P(Y_1) \\ P(Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.10 \\ 0.05 & 0.90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.80 \\ 0.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.78 \\ 0.22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P(Z_1) \\ P(Z_2) \\ P(Z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.90 \\ 0.50 & 0.06 \\ 0.40 & 0.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.78 \\ 0.22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2760 \\ 0.4032 \\ 0.3208 \end{pmatrix}$$

Nótese el gran efecto que tiene sobre la operación correcta del sistema la situación en que se hace poco mantenimiento preventivo: las probabilidades de que hayan muchas fallas para operar o muchas falsas operaciones es muy alta ( $0.3204+0.4032=0.7236$ ).

**EJEMPLO 9.3**

En la empresa donde se tiene el modelo para fallas de los sistemas de protección, se encuentra que para las subestaciones de la zona norte las probabilidades de operación de las protecciones eléctricas son:

$$\begin{pmatrix} P(Z_1) \\ P(Z_2) \\ P(Z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.80 \\ 0.08 \\ 0.12 \end{pmatrix}$$

Entonces cuáles son las probabilidades de los tipos de mantenimiento en estas subestaciones?

- Paso 1: Con los datos del ejercicio anterior se obtienen  $P(Y, Z)$  y  $P(X, Y)$

$$P(Y, Z) = P(Z, Y) = M_{ZY}^t \square P(\bar{Y})$$

$$P(Z, Y) = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.90 \\ 0.50 & 0.06 \\ 0.40 & 0.04 \end{pmatrix}^t \square \begin{pmatrix} 0.78 \\ 0.22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.50 & 0.40 \\ 0.90 & 0.06 & 0.04 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 0.78 \\ 0.22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0780 & 0.3900 & 0.3120 \\ 0.1980 & 0.0132 & 0.0088 \end{pmatrix}$$

$$P(X, Y) = P(Y, X) = M_{Y|X}^t \square P(\bar{X})$$

$$P(X, Y) = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.10 \\ 0.05 & 0.90 \end{pmatrix}^t \square \begin{pmatrix} 0.80 \\ 0.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.10 & 0.90 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 0.80 \\ 0.20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.04 \\ 0.02 & 0.18 \end{pmatrix}$$

- Paso 2: Con  $P(Z, Y)$  y  $P(X, Y)$  y las probabilidades de los eventos en el ejercicio anterior hallar  $P(Y|Z)$  y  $P(X|Y)$

$$M_{Y|Z} = P(Y, Z) ./ P(\bar{Z})^t$$

$$M_{Y|Z} = \begin{pmatrix} 0.0780 & 0.3900 & 0.3120 \\ 0.1980 & 0.0132 & 0.0088 \end{pmatrix} ./ \begin{pmatrix} 0.2760 \\ 0.4032 \\ 0.3208 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0.0780 & 0.3900 & 0.3120 \\ 0.1980 & 0.0132 & 0.0088 \end{pmatrix} ./ (0.2760 \quad 0.4032 \quad 0.3208)$$

$$M_{Y|Z} = \begin{pmatrix} 0.2826 & 0.9673 & 0.9726 \\ 0.7174 & 0.0327 & 0.0274 \end{pmatrix}$$

$$M_{X|Y} = P(X, Y) ./ P(\bar{Y})^t$$

$$M_{X|Y} = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.04 \\ 0.02 & 0.18 \end{pmatrix} ./ \begin{pmatrix} 0.78 \\ 0.22 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.04 \\ 0.02 & 0.18 \end{pmatrix} ./ (0.78 \quad 0.22) = \begin{pmatrix} 0.9744 & 0.1818 \\ 0.0256 & 0.8182 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que  $M_{Y|Z}$  y  $M_{X|Y}$  se calculan utilizando las probabilidades de ocurrencia  $P(\bar{Z})$  y  $P(\bar{Y})$  obtenidas en el ejercicio anterior; es decir, utilizando un conocimiento previo. Este es precisamente el concepto de la inferencia Bayesiana, el utilizar un conocimiento previo para establecer los modelos de inferencia.

- Paso 3: Hallar las probabilidades de los eventos en el sentido  $Z \rightarrow Y \rightarrow X$

$$P(\bar{Y}) = M_{Y|Z} P(\bar{Z})$$

$$\begin{pmatrix} P(Y_1) \\ P(Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2826 & 0.9673 & 0.9726 \\ 0.7174 & 0.0327 & 0.0274 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(Z_1) \\ P(Z_2) \\ P(Z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2826 & 0.9673 & 0.9726 \\ 0.7174 & 0.0327 & 0.0274 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.80 \\ 0.08 \\ 0.12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.42018 \\ 0.57982 \end{pmatrix}$$

$$P(\bar{X}) = M_{X|Y} P(\bar{Y})$$

$$\begin{pmatrix} P(X_1) \\ P(X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9744 & 0.1820 \\ 0.0256 & 0.818 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(Y_1) \\ P(Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9744 & 0.1820 \\ 0.0256 & 0.818 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.42018 \\ 0.57982 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.51482 \\ 0.48518 \end{pmatrix}$$

## CAPÍTULO 10 – SISTEMAS ESFUERZO RESISTENCIA

### 10.1 INTRODUCCIÓN

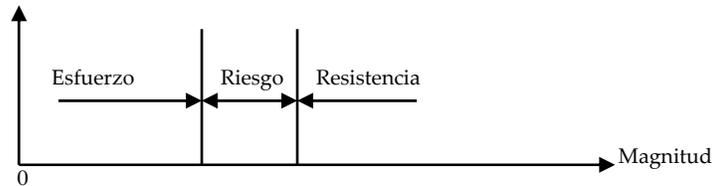


Figura 10.1 Análisis de esfuerzo –resistencia en confiabilidad

En el planeamiento y diseño en ingeniería se presentan situaciones en las cuales se debe especificar el nivel de resistencia o aguante de un componente o sistema para un esfuerzo dado.

Ejemplos	
Esfuerzo (Q)	Resistencia (R)
Fuerza mecánica	Resistencia estructural
Sobrevoltaje	Nivel de aislamiento
Demanda eléctrica	Generación
Temperatura	Resistencia térmica
Demanda de un producto o servicio	Oferta
Gasto	Ingreso

El evento de falla se define como la situación en que el esfuerzo es mayor que la resistencia y el componente o sistema se daña o no puede cumplir totalmente su función. Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$Resistencia > Esfuerzo$$

Tal como se muestra en la Figura 10.1 el riesgo de falla es la distancia existente entre el esfuerzo y la resistencia. Este riesgo se puede expresar en forma determinística o probabilística.

En este tipo de análisis no se considera el efecto de protecciones o controles que puedan evitar el daño del componente o sistema porque:

1	No existen protecciones ni controles
2	La especificación de la resistencia es la segunda línea de defensa en caso de que las protecciones o controles no operen o lo hagan incorrectamente

Nótese que este tipo de análisis de confiabilidad es de tipo “interno” ya que se involucran las variables físicas que definen el esfuerzo y la resistencia, contrario al análisis de tipo externo (Actuarial) donde solo se considera el tiempo como variable explicativa. El análisis esfuerzo – resistencia se puede hacer:

1	Determinístico	Si tanto el esfuerzo como la resistencia tienen valores fijos (sin incertidumbre)
2	Probabilístico	Si una de las variables del problema (esfuerzo o resistencia) es aleatoria (con incertidumbre)

### 10.2 ENFOQUE DETERMINÍSTICO

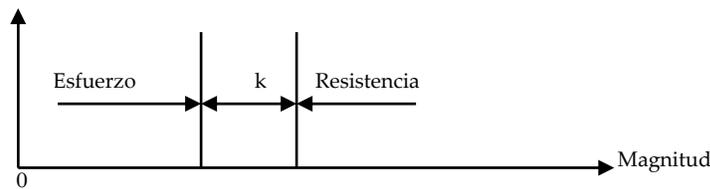


Figura 10.2 Análisis de esfuerzo –resistencia determinístico

En este caso la especificación de la resistencia se especifica como:

$$Resistencia = k * Esfuerzo$$

La variable k se conoce como factor de diseño, factor de seguridad, etc. Sin embargo, este es un “factor de ignorancia” con el cual se trata de cubrir la incertidumbre que se tiene sobre los valores que puede tomar el esfuerzo. Pese a esto, es el método de diseño y especificación mas utilizado.

### 10.3 ENFOQUE PROBABILÍSTICO

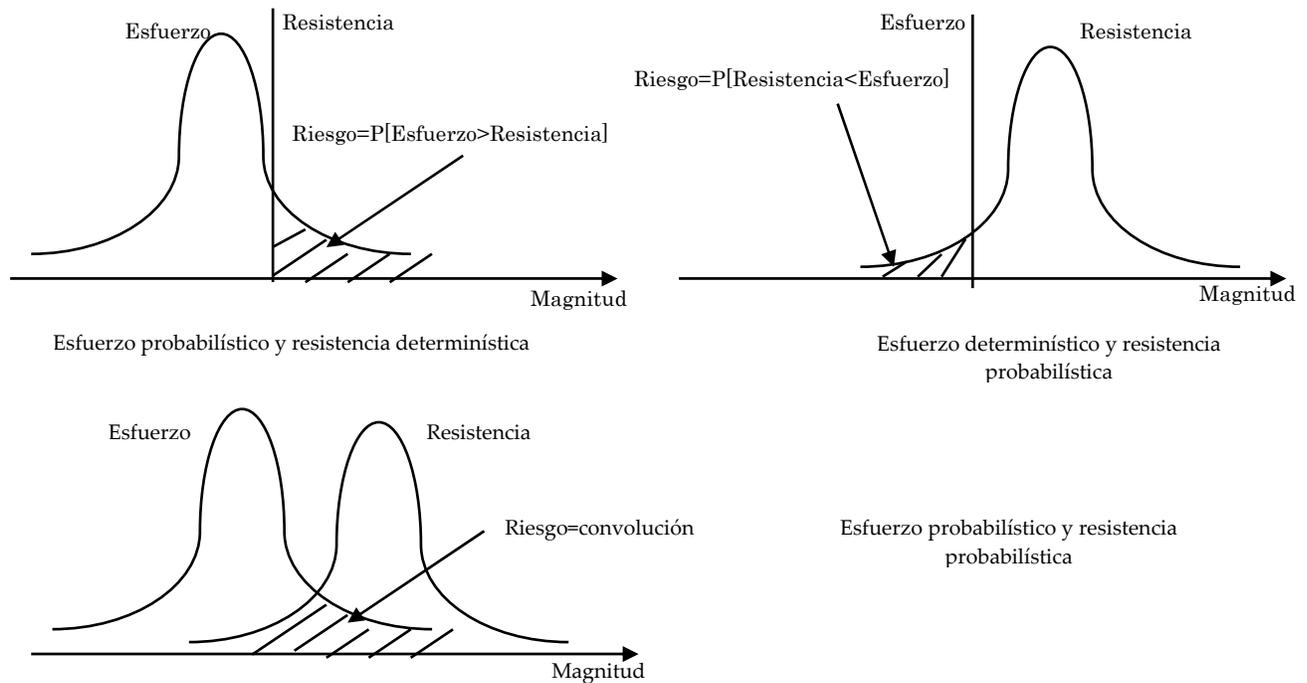


Figura 10.3 Casos del análisis de esfuerzo –resistencia probabilístico

En la Figura 10.3 se presentan los casos que se presentan en el análisis probabilístico. Cuando solo una de las variables involucradas es probabilística, el cálculo del riesgo consiste en determinar la probabilidad de que esta variable sea mayor o menor a un valor fijo dado, lo cual se puede hacer analíticamente o mediante tablas de valores de probabilidad de la distribución.

10.4 CONVOLUCIÓN DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

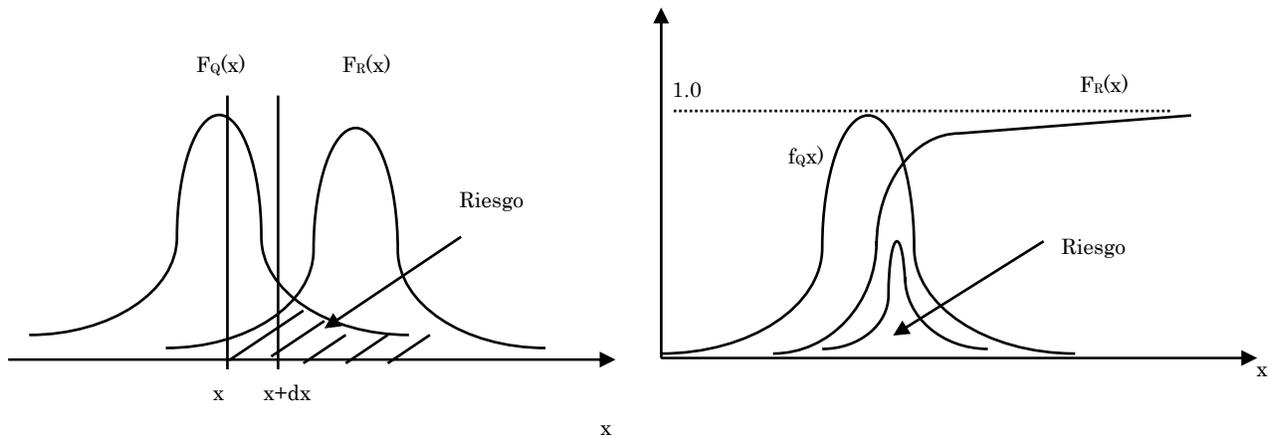


Figura 10.4 Concepto probabilístico del riesgo

Si ambas variables son aleatorias, continuas e independientes entre sí:

$$\text{Riesgo} = \int_0^{\infty} \int_0^x f_R(x) f_Q(x) dx dx = \int_0^{\infty} F_R(x) f_Q(x) dx$$

De tenerse cuidado de que los factores de escala y localización de ambas distribuciones de probabilidad estén en las mismas unidades de magnitud.

El riesgo depende de las posiciones relativas de las funciones de densidad ( $\mu_Q, \mu_R$ ) y de sus grados de dispersión ( $\sigma_Q, \sigma_R$ ).

Si el esfuerzo o la resistencia se conforman de la suma de muchas (>30) otras variables aleatorias, según el teorema del límite central, la distribución se puede aproximar a la distribución normal. Ejemplos:

1	La demanda de un producto o servicio está conformada por la suma de las demandas individuales de muchos usuarios
2	La generación disponible en un sistema eléctrico es la suma de las capacidades de generación de muchas unidades.
3	El gasto de una entidad dada es la suma de muchos tipos de gastos

En el caso en que tanto el esfuerzo como la resistencia tienen distribución Gaussiana, la Referencia [1] presenta el siguiente método aproximado para calcular el riesgo:

$$\beta = \frac{\mu_G - \mu_D}{\sqrt{\sigma_G^2 - \sigma_D^2}} \quad \text{Riesgo} = 1 - \Phi(z = \beta)$$

Donde  $\Phi$  denota la distribución Gaussiana estándar. En la mayoría de los casos debe recurrirse a métodos de integración numérica para resolver la integral de convolución.

**EJERCICIO 10.1**

En un sistema de potencia dado, la generación y la demanda están normalmente distribuidas con los siguientes parámetros:

Generación:  $\mu_G = 1300$  [MW]  $\sigma_G = 10\%$

Demanda:  $\mu_D = 1000$  [MW]  $\sigma_D = 20\%$

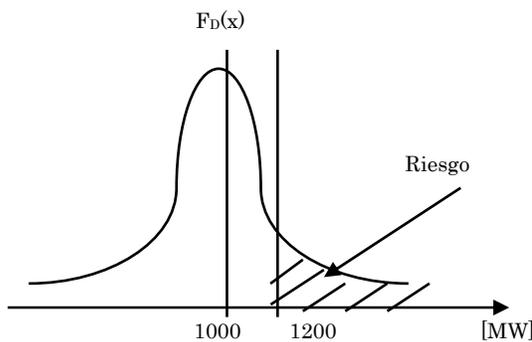
Cuál es el riesgo de no poder atender la demanda máxima?

$$\beta = \frac{\mu_G - \mu_D}{\sqrt{(\sigma_G^2 - \sigma_D^2)}} = \frac{1300 - 1000}{\sqrt{(0.1 * 1300)^2 + (0.2 * 1000)^2}} = 1.25766542$$

$$Riesgo = 1 - \Phi(z = 1.25766542) = 1 - 0.8962 = 10.38\%$$

**EJERCICIO 10.2**

En un sistema de potencia dado, la demanda están normalmente distribuidas con parámetros  $\mu = 1000$  [MW] y  $\sigma = 20\%$ . Si la generación tiene un valor fijo de 1200 MW, cuál es el riesgo de no poder atender la demanda máxima?



$$Riesgo = P[Demanda > 1200]$$

$$z = \frac{1200 - 1000}{1000 * 0.2} = 1.0$$

$$Riesgo = 1 - \Phi(z = 1.0) = 1 - 0.8413 = 15.87\%$$

**10.5 SOLUCION MEDIANTE SIMULACIÓN DE MONTECARLO**

Un sistema esfuerzo – resistencia definido mediante cualquier tipo de distribución de probabilidad, puede resolverse fácilmente mediante simulación de Montecarlo. A continuación, se presentan dos algoritmos de solución.

Algoritmo 10.1 Obtener la distribución de probabilidad del riesgo en unidades reales	
1	Generar una muestra de $N$ datos de esfuerzo utilizando la respectiva distribución de probabilidad. Cada dato de esta muestra se denomina $Q_i$
2	Generar una muestra de $N$ datos de la resistencia utilizando la respectiva distribución de probabilidad. Cada dato de esta muestra se denomina $R_i$
3	Utilizando las dos muestras anteriores, hallar una muestra del riesgo ( $riesgo_i = R_i - Q_i$ )
4	Ajustar la muestra de datos de riesgo a una distribución de probabilidad

Algoritmo 10.2 Obtener el riesgo como una probabilidad puntual	
1	Generar una muestra de $N$ datos de esfuerzo utilizando la respectiva distribución de probabilidad. Cada dato de esta muestra se denomina $Q_i$
2	Generar una muestra de $N$ datos de la resistencia utilizando la respectiva distribución de probabilidad. Cada dato de esta muestra se denomina $R_i$
3	Para cada valor de las muestras anteriores, comparar: Si $R_i > Q_i$ marcar este evento con un cero (no falla) Si $R_i \leq Q_i$ marcar este evento con un uno (falla)
4	Contar el número de eventos de falla $n_f$
5	La probabilidad de falla o riesgo se calcula como: $riesgo_i = \frac{n_f}{N}$

En ambos algoritmos tener en cuenta que si el esfuerzo o la resistencia son determinísticos, no hay que generar una muestra de datos.