

Departamento de Engenharia Elétrica

CONTROLE DIGITAL

PROF. DR. EDVALDO ASSUNÇÃO

**Universidade Estadual Paulista – UNESP
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FEIS
Departamento de Engenharia Elétrica – DEE**

Sumário

I – Introdução.....	p.1
I.1 – Evolução Tecnológica	p.1
I.2 – Sistemas Discretos	p.1
II – Análise de Sistemas Dinâmicos Discretos	p.4
II.1 – Introdução	p.4
II.2 – Transformada – Z.....	p.4
II.3 – Relações entre o Plano – S e o Plano – Z	p.8
II.4 – Algumas Propriedades da Transformada – Z	p.8
II.5 – Inverso da Transformada – Z.....	p.11
II.6 – Função de Transferência de um Sistema Discreto	p.18
II.7 – Resposta Impulsiva de Sistemas Discretos	p.20
II.8 – Transformada – Z Inversa Utilizando a Propriedade de Deslocamento no Tempo	p.21
II.9 – Teorema de Amostragem de Shannon	p.25
III – Estabilidade de Sistemas de Controle Digital	p.26
III.1 – Introdução	p.26
III.2 – Critério BIBO	p.26
III.3 – Critério de Jury	p.29
IV – Representação Discreta do Subsistema: D/A – Processo – A/D	p.33
IV.1 – Introdução.....	p.33
IV.2 – Conversor D/A de Ordem Zero	p.34
IV.3 – Aplicação da Entrada Impulsiva em: D/A – Processo – A/D.....	p.35
IV.4 – Implementação de uma Função de Transferência Discreta no Microcomputador	p.46
IV.5 – Transformada – Z de Função Contínua com Atraso	p.48
V – Método do Lugar das Raízes (Root – Locus)	p.53
V.1 – Introdução	p.53
V.2 – As regras do Root – Locus.....	p.53
VI – Métodos de Projetos de Controladores Digitais	p.67

VI.1 – Introdução.....	p.67
VI.2 – Especificações de Sistemas de Controle	p.67
VI.2.1 – Erro de Regime Permanente.....	p.70
VI.2.2 – Resposta Dinâmica ou Precisão Durante o Transitório.....	p.74
VI.3 – Projeto de Controladores Digitais Utilizando Emulação	p.80
VI.4 – Projeto de Controladores Digitais Utilizando o “Root – Locus” no Plano – Z.....	p.88
 VII – Sistemas de Controle no Espaço de Estados.....	p.97
VII.1 – Introdução	p.97
VII.2 – Sistemas Contínuos em Espaços de Estados.....	p.97
VII.3 – Transformação Linear	p.99
VII.4 – Sistemas Discretos em Espaços de Estados	p.101
VII.5 – Obtenção da Função de transferência a Partir da Representação em Espaço de Estados.....	p.108
VII.6 – Projeto de Controladores Discretos usando Métodos para Variáveis de Estados	p.114
VII.6.1 – Projeto da Lei de Controle	p.114
VII.6.2 – Projeto do Estimador de Estado	p.123
VII.6.3 – Projeto do Regulador: Combinação da Lei de Controle com o Estimador de Estados.....	P.131
 Anexo I – Conversores A/D e D/A	p.136
 Lista de Exercícios I	p.141
Lista de Exercícios II.....	p.144
Lista de Exercícios III.....	P.148
 Bibliografia.....	p.151

I – Introdução

I.1 – Evolução Tecnológica

Nas últimas décadas, estabeleceu firmemente uma moderna teoria de controle para sistemas contínuo no tempo. O suficiente para provocar uma revolução nos processos industriais e habilitar a humanidade a iniciar a exploração do universo.

Nas últimas três décadas, engenheiros e cientistas buscaram a perfeição no projeto de sistemas de controle, tentando alcançar o desempenho ideal dos sistemas dinâmicos. O advento do computador digital possibilita a criação de controladores mais precisos do que os controladores analógicos, mas restringiu a velocidade de operação, que está sendo melhorada com a evolução dos microcomputadores.

Esta evolução está possibilitando cada vez mais que os projetistas de controladores digitais cheguem mais próximos de sistemas com desempenho ideal.

I. 2 – Sistemas Discretos

Um sinal variante no tempo pode ser amostrado com um intervalo de tempo “T”, formando uma sequência de valores discretos. Aplicando esta sequência discreta num sistema dinâmico contínuo, teremos uma resposta que será definida apenas nos instantes de amostragem, como ilustrado abaixo.

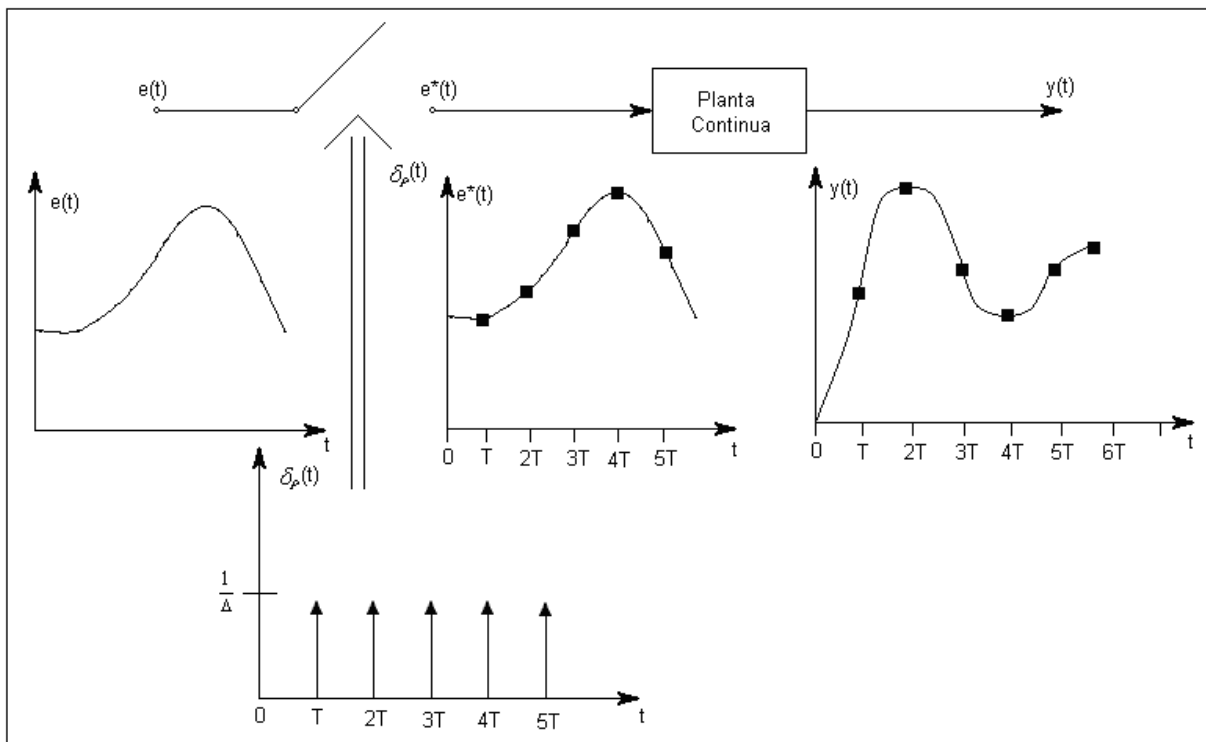


FIGURA 1.1

O trem de impulsos $\delta_p(t)$ é composto de vários impulsos $\delta(t)$ definido por:

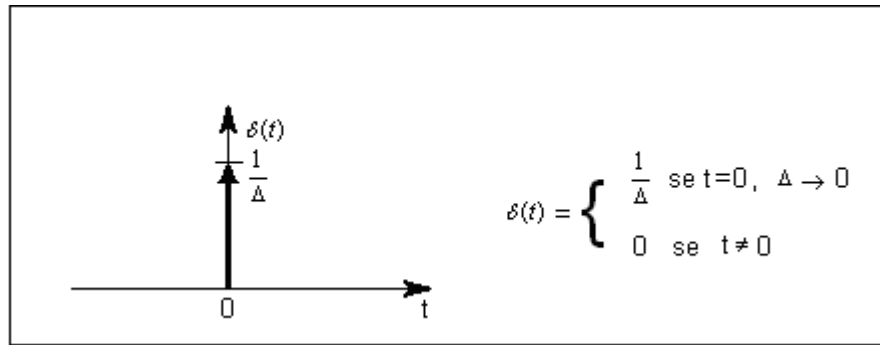


FIGURA 1.2

A área do impulso $\delta(t)$ é igual a 1, o que expressa a magnitude do impulso. O sinal amostrado $e^*(t)$ pode ser descrito pela seguinte relação:

$$e^*(t) = e(t)\delta_\rho(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT)\delta(t - kT) \quad (1.1)$$

Portanto, o sinal discreto $e^*(t)$ será definido apenas nos instantes de amostragens $t = kT, k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Exemplo de um Controle Discreto: Guiagem de um Sistema Interceptor

O sistema de guiagem direciona o voo de um míssil no espaço para interceptar o veículo aeroespacial inimigo. A defesa usa mísseis com o objetivo de interceptar e destruir o bombardeiro antes que ele lance as bombas. Uma ilustração é mostrada na figura abaixo.

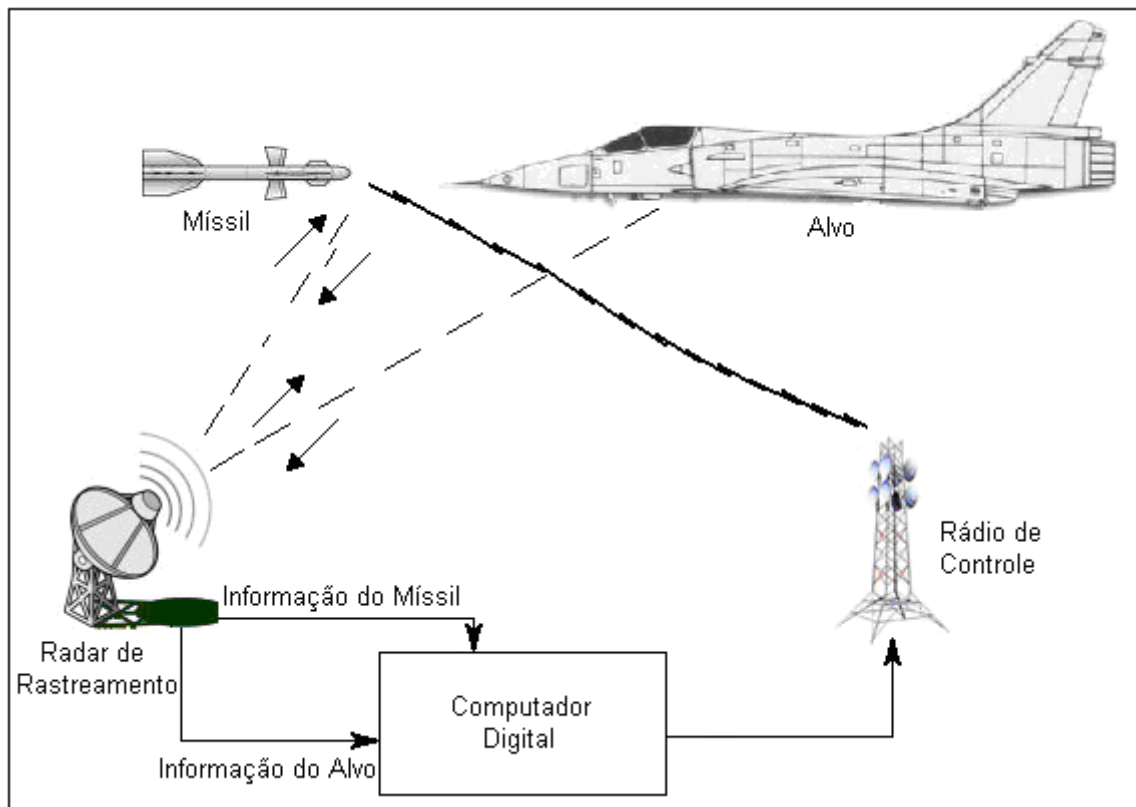
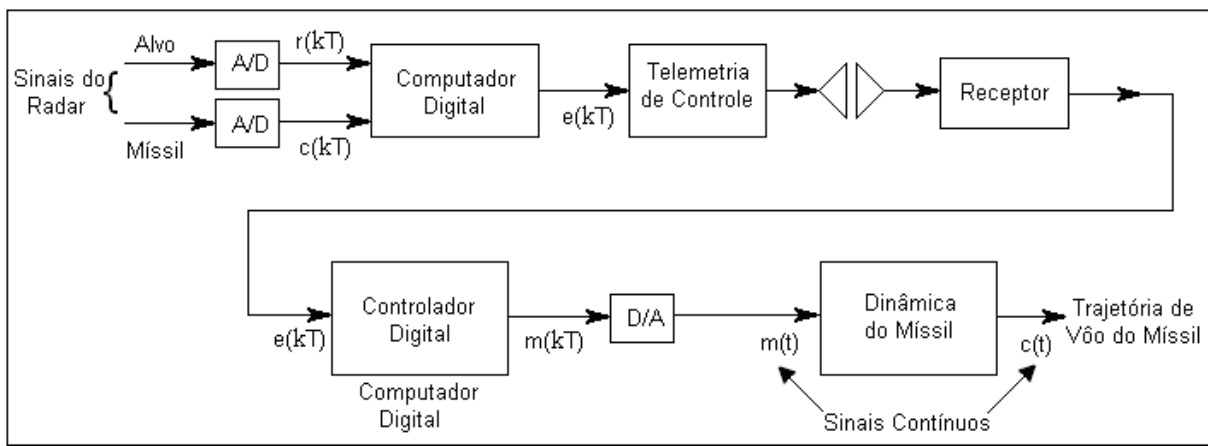


FIGURA 1.3

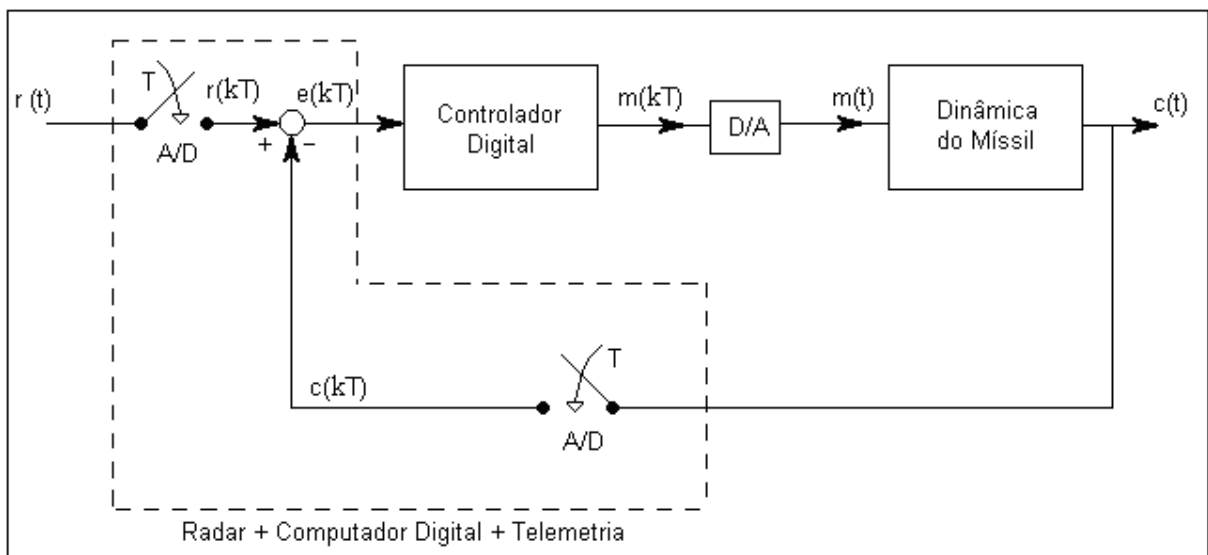
O radar detecta a posição do alvo e o rastreia, fornecendo informações discretas necessárias para a determinação das variações angulares e de deslocamento do alvo. Estas informações (dados) são enviadas interruptamente ao computador que estima (calcula) a trajetória do alvo. O radar também rastreia o míssil fornecendo informações discretas ao computador de calcula sua trajetória. O computador compara as duas trajetórias e determina a correção necessária na trajetória do míssil para produzir uma rota de colisão. As informações discretas sobre a correção da trajetória são enviadas ao míssil pelo rádio de comando. O sistema de controle do míssil (controlador digital) converte essas informações em deslocamentos mecânicos das suas superfícies de controle, modificando sua trajetória de voo, fazendo-se entrar na rota de colisão.

O diagrama de blocos deste sistema de controle está mostrado na figura abaixo (parte A).

A representação simplificada em diagrama de blocos está mostrada na parte B.



(A)



(B)

O projeto destes sistemas requer conhecimentos nas áreas: comunicação, processamento digital de sinais, engenharia de computação e teoria de controle digital.

Nos capítulos seguintes, será introduzida a teoria suficiente para projetar, analisar e implementar controladores digitais.

II – Análise de Sistemas Dinâmicos Discretos

II.1 – Introdução

Neste capítulo, serão estudadas algumas ferramentas matemáticas para o estudo de controle discreto.

II.2 – Transformada – Z

A transformada de Laplace é uma transformada muito útil para a engenharia de controle. Para analisar sistemas de controle discretos, vamos aplicar a transformada de Laplace em um sinal discreto e veremos que o resultado será a transformada Z.

Considere o sinal discreto (amostrado) $e^*(t)$ mostrado na figura 1.1, aplicando-se a transformada de Laplace na equação 1.1, teremos:

$$\mathcal{L}\{e^*(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} e(kT)\delta(t-kT)\right\} \quad (2.1)$$

$$E^*(s) = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} e(kT)\delta(t-kT)\right\} \quad (2.2)$$

Devido à propriedade de linearidade da transformada de Laplace, temos:

$$E^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}\{e(kT)\delta(t-kT)\} \quad (2.3)$$

O sinal $e(kT)$ é uma constante dentro da transformada, logo:

$$E^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT)\mathcal{L}\{\delta(t-kT)\} \quad (2.4)$$

A transformada de Laplace de uma função transladada é dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t-\alpha)\} = e^{-\alpha s} \cdot F(s) \quad , \alpha \geq 0 \quad (2.5)$$

Sendo, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

Logo, aplicando-se esta propriedade na equação (2.4), teremos:

$$E^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot e^{-kTs} \cdot \mathcal{L}\{\delta(t)\} \quad (2.6)$$

Como $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, a equação (2.6) torna-se:

$$E^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) \cdot e^{-kTs} \quad (2.7)$$

A equação (2.7) mostra a transformada de Laplace do sinal amostrado $e^*(t)$. Por motivo de simplicidade, define-se a variável Z da seguinte maneira:

$$z = e^{sT} \quad (2.8)$$

Logo, a equação (2.7) torna-se:

$$E(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) z^{-k} \quad (2.9)$$

Desta forma, chega-se ao domínio da variável Z, e a equação (2.9) é denominada como transformada Z de $e(kT)$, ou seja:

$$\mathcal{Z}\{e(kT)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT) z^{-k} \quad (2.10)$$

O leitor poderá chegar ao mesmo resultado, utilizando qualquer caminho da figura abaixo, porém o caminho da transformada Z é o mais indicado.

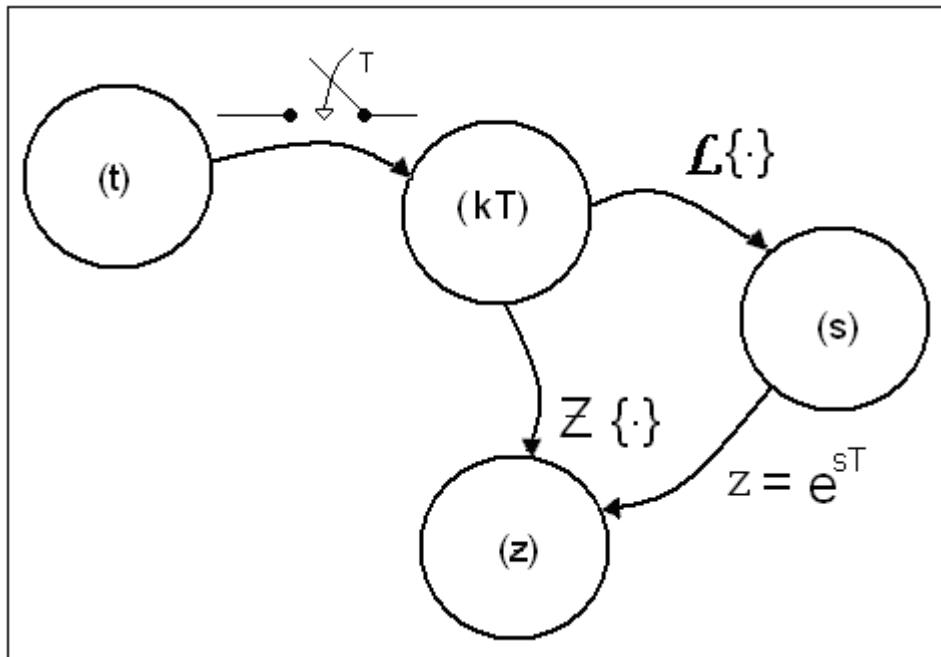


FIGURA 2.1 – MAPEAMENTO

Observação: Sendo “s” uma variável complexa, $s = \sigma + j\omega$, a variável z também é complexa: $z = e^{(\sigma + j\omega)T} = a + jb$.

O caminho reverso será discutido mais adiante.

A equação (2.10) é uma progressão geométrica (P.G.) logo, para determinar a transformada Z de sinais amostrados, é importante lembrar que a soma de uma P.G. infinita com o primeiro termo a_1 e razão q , $|q| < 1$, é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \quad (2.11)$$

Exemplo 2.1 – Suponha que um sinal exponencial tenha sido amostrado com um período de amostragem T , conforme mostrado abaixo:

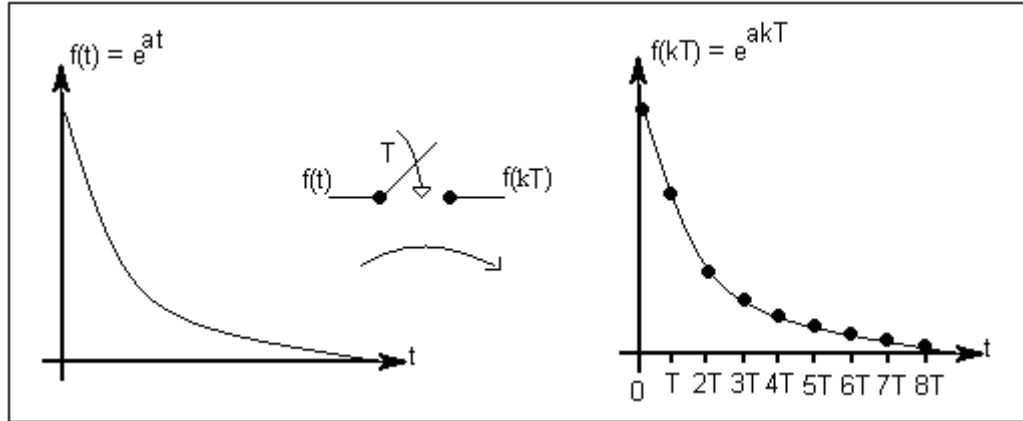


FIGURA 2.2

sendo $a < 0$.

A transformada Z deste sinal amostrado será dada por:

$$\mathcal{Z}\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{akT} \cdot z^{-k} \quad (2.12)$$

Ou ainda,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{akT} \cdot z^{-k} \quad (2.13)$$

Expandindo o somatório, teremos:

$$F(z) = e^0 \cdot z^0 + e^{aT} \cdot z^{-1} + e^{2aT} \cdot z^{-2} + e^{3aT} \cdot z^{-3} + \dots \quad (2.14)$$

Verifica-se que é uma P.G. com razão

$$q = e^{aT} \cdot z^{-1} \quad (2.15)$$

e termo inicial

$$a_1 = e^0 \cdot z^0 = 1 \quad (2.16)$$

Logo, supondo $|q| < 1$,

$$F(z) = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - e^{aT} \cdot z^{-1}} \quad (2.17)$$

Ainda

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{aT}} \quad (2.18)$$

Desta forma, a transformada Z do sinal exponencial amostrado é dada pela equação (2.18).

Exemplo 2.2 – Considere o sinal amostrado $y(kT)$ dado abaixo:

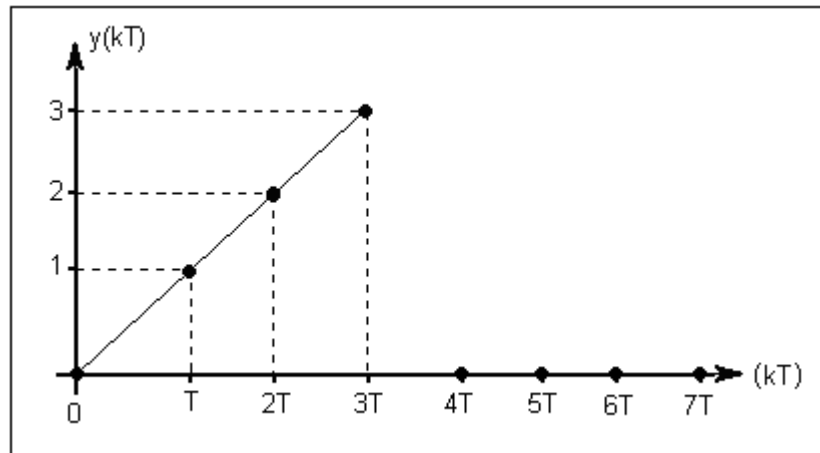


FIGURA 2.3

A transformada Z deste sinal é dada por:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(kT)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} y(kT).z^{-k} \quad (2.19)$$

Logo,

$$Y(z) = y(0).z^0 + y(1T).z^{-1} + y(2T).z^{-2} + y(3T).z^{-3} + y(4T).z^{-4} + \dots \quad (2.20)$$

Substituindo, teremos:

$$Y(z) = 0 + 1.z^{-1} + 2.z^{-2} + 3.z^{-3} + 0 + 0 + 0 \dots \quad (2.21)$$

Logo,

$$Y(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} \quad (2.22)$$

Ou ainda,

$$Y(z) = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^3} \quad (2.23)$$

Portanto, a equação (2.23) mostra a transformada Z do sinal da figura (2.3).

II. 3 – Relações entre o Plano – S e o Plano – Z

No item anterior foi demonstrado que a transformada Z de um sinal amostrado é a transformada de Laplace de uma sequência discreta, com a substituição da variável $z = e^{sT}$. Isto implica que todos os pontos no plano – S tem seu ponto correspondente no plano – Z.

Um ponto genérico no plano – S é dado por $s = \alpha + j\beta$, através do mapeamento $z = e^{sT}$, no plano – Z teremos o seguinte ponto:

$$z = e^{(\alpha + j\beta)T} = e^{\alpha T} \cdot e^{j\beta T} \quad (2.24)$$

Logo,

$$|z| = e^{\alpha T} \quad \text{e} \quad \angle z = \beta T \quad (2.25)$$

O eixo imaginário do plano – S é $s = j\beta$, $\alpha = 0$, e o lugar geométrico correspondente no plano – Z é:

$$z = e^{j\beta T} \rightarrow |z| = 1 \quad \text{e} \quad 0 < \angle z < 360^\circ \quad (2.26)$$

que é um círculo unitário.

O semiplano esquerdo é dado por $s = -\alpha + j\beta$, $\alpha > 0$, logo:

$$|z| = e^{-\alpha T} < 1 \quad \text{e} \quad \angle z = \beta T \quad (2.27)$$

que é a região dentro do círculo unitário.

O semiplano direito é dado por $s = \alpha + j\beta$, $\alpha > 0$, logo:

$$|z| = e^{\alpha T} > 1 \quad \text{e} \quad \angle z = \beta T \quad (2.28)$$

Que é a região fora do círculo unitário.

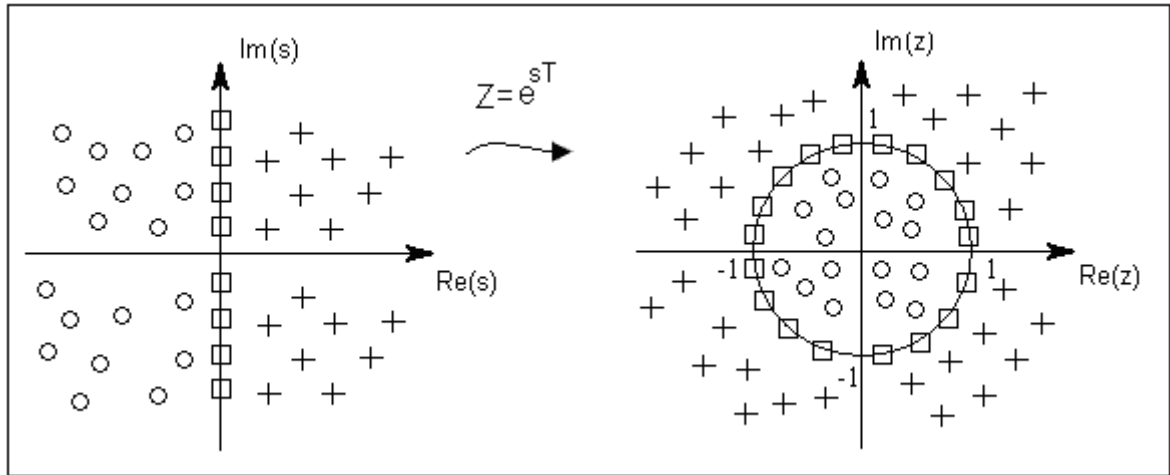


FIGURA 2.4

II.4 – Algumas Propriedades da Transformada – Z

A seguir serão apresentadas algumas propriedades da transformada Z úteis ao controle discreto.

i) Linearidade

$$\mathcal{Z}\{\alpha f_1(kT) + \beta f_2(kT)\} = \alpha \mathcal{Z}\{f_1(kT)\} + \beta \mathcal{Z}\{f_2(kT)\} \quad (2.29)$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\alpha f_1(kT) + \beta f_2(kT)\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \{\alpha f_1(kT) + \beta f_2(kT)\} z^{-k} = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} f_1(kT) z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{+\infty} f_2(kT) z^{-k} = \alpha \mathcal{Z}\{f_1(kT)\} + \beta \mathcal{Z}\{f_2(kT)\} \end{aligned}$$

ii) Deslocamento no Tempo

$$\mathcal{Z}\{f(k+n)\} = z^n F(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} f(k) z^{-k} \quad (2.30)$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(k+n)\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k+n) z^{-k} = \sum_{l=n}^{+\infty} f(l) z^{n-l} = z^n \sum_{l=n}^{+\infty} f(l) z^{-l} = \\ &= z^n \left\{ \sum_{l=0}^{+\infty} f(l) z^{-l} - \sum_{l=0}^{n-1} f(l) z^{-l} \right\} = z^n F(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} f(k) z^{-k} \end{aligned}$$

iii) Operador de Avanço Unitário

A propriedade (ii) permite considerar a variável complexa Z como um operador de avanço unitário, desde que $f(0) = 0$, ou seja:

$$zF(z) = \mathcal{Z}\{f(k+1)\} \quad (2.31)$$

Observação: Por abuso de notação, nesta apostila eventualmente será omitido o período de amostragem T na indexação, ou seja:

$$f(kT + nT) \quad \text{e} \quad f(k+n)$$

têm o mesmo significado.

iv) Teorema do Valor Inicial

Se $y(kT)$ possui $Y(z)$ como transformada Z e o limite:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Y(z)$$

existe, então:

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) \quad (2.32)$$

Verificação:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} y(kT)z^{-k} = y(0) + y(1).z^{-1} + y(2).z^{-2} + y(3).z^{-3} + \dots =$$

$$= y(0) + \frac{y(1)}{z} + \frac{y(2)}{z^2} + \frac{y(3)}{z^3} + \dots$$

Passando o limite, teremos.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[y(0) + \frac{y(1)}{z} + \frac{y(2)}{z^2} + \frac{y(3)}{z^3} + \dots \right] = y(0)$$

v) Teorema do Valor Final

Se $F(z)$ converge para $|z| > 1$ e se todos os polos de $(z-1).F(z)$, estão dentro do círculo unitário, então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \quad (2.33)$$

Exemplo 2.3 – Ilustração do teorema do valor final.

Conforme foi demonstrado no exemplo 2.1, a transformada Z da função exponencial é dada por:

$$F(z) = \frac{Z}{z - e^{\alpha T}} \quad , \quad |e^{\alpha T} z^{-1}| < 1 \quad (2.34)$$

Supondo $\alpha = -1$ e $T = 0,1s$, o gráfico da exponencial será:

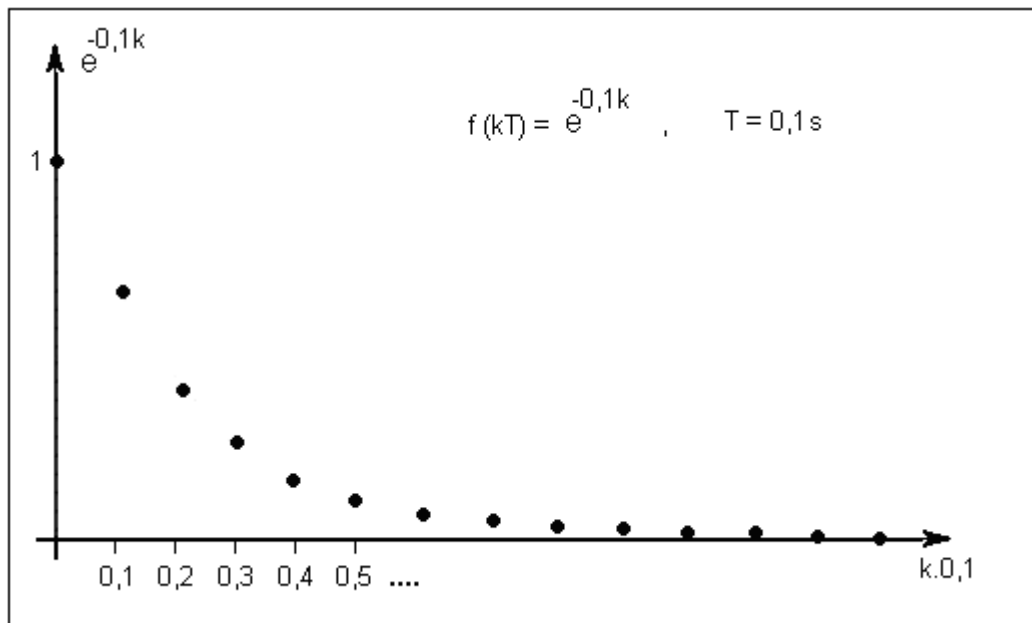


FIGURA 2.5

Na figura acima, percebe-se que o valor final da função será $f(+\infty) = 0$.
Aplicando o teorema do valor final, teremos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{z}{z - e^{-0,1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \cdot z}{z - 0,9} = 0$$

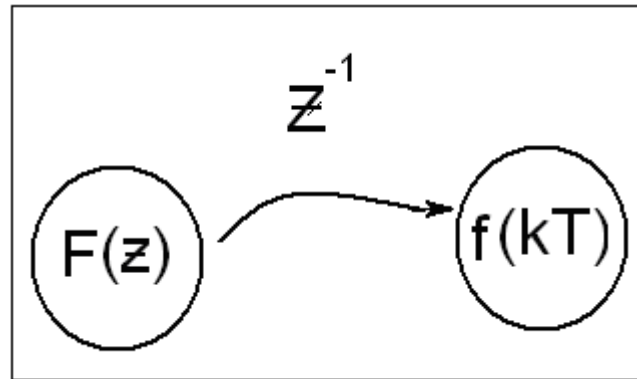
Observação: O polo está dentro do círculo unitário, portanto, pode-se aplicar o teorema.

De onde se verifica que o resultado da aplicação do teorema é idêntico ao esperado segundo a figura (2.5).

Se $\alpha = 1$, quanto valerá $f(+\infty)$? Confira com o gráfico e com o teorema.

II. 5 – Inverso da Transformada – Z

O resultado final de um projeto de controlador digital (discreto) é expresso em Z, para verificar o resultado do projeto, é necessário determinar sua resposta no tempo. Para isto, deve-se efetuar a inversa da transformada Z, ou seja:



A seguir, apresentaremos três formas de se calcular a inversa da transformada – Z, uma forma fechada (expansão em frações parciais) e duas em série (divisão contínua ou utilizando a propriedade do operador deslocamento).

i) Métodos de Expansão em Frações Parciais

Suponha que se deseja efetuar a Expansão em Frações Parciais da seguinte função:

$$F(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (2.35)$$

Observação: Caso $F(z)$ com um ou mais zeros na origem (n zeros na origem), faça a expansão de $\frac{F(z)}{z^n}$ e depois determine $F(z)$ multiplicando $\frac{F(z)}{z^n}$ por z^n .

1º Caso: Se $F(z)$ tiver polos todos distintos.

Exemplo:

Calcule a transformada Z inversa de:

$$Y(z) = \frac{3z}{(z - 0,5) \cdot (z - 1)} \quad (2.36)$$

Solução:
Expandindo

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3}{(z-0,5).(z-1)} = \frac{a}{(z-0,5)} + \frac{b}{(z-1)}$$

$$a = \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{Y(z)}{z} . (z-0,5) = \frac{3}{-0,5} = -6$$

$$b = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Y(z)}{z} . (z-1) = \frac{3}{0,5} = 6$$

Logo,

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-6}{z-0,5} + \frac{6}{z-1} \quad \rightarrow \quad Y(z) = \frac{-6z}{z-0,5} + \frac{6z}{z-1}$$

Frações Parciais de Y(z) 

Para determinar y(k), utiliza-se a tabela seguinte, onde se encontram as principais transformadas.

Então, utilizando a relação nº. 13, temos:

$$y(k) = (-6).0,5^k + 6.1^k = 6.(1-0,5^k)$$

∴

$$y(k) = 6.(1-0,5^k) \quad (2.37)$$

	$X(s)$	$x(t)$ ou x_k $t \geq 0 \quad k \geq 0$	$X(z)$
1	1	$\delta(t), \delta_k$	1
2	e^{-nTs}	$\delta(t-nT), \delta(kT-nT)$	z^{-n}
3	$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$\frac{z}{(z-1)}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{(s+a)}$	e^{-at}	$\frac{z}{(z-e^{-aT})}$
6	$\frac{a}{[s(s+a)]}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1).(z-e^{-aT})}$
7	$\frac{w}{(s^2+w^2)}$	$\sin wt$	$\frac{z \sin wT}{z^2 - 2z \cos wT + 1}$
8	$\frac{s}{(s^2+w^2)}$	$\cos wt$	$\frac{z(z - \cos wT)}{z^2 - 2z \cos wT + 1}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$

10	$\frac{w}{[(s+a)^2 + w^2]}$	$e^{-at} \sin wt$	$\frac{ze^{-aT} \sin wT}{z^2 - ze^{-aT} \cos wT + e^{-2aT}}$
11	$\frac{(s+a)}{[(s+a)^2 + w^2]}$	$e^{-at} \cos wt$	$\frac{ze^{-aT} \sin wT}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos wT + e^{-2aT}}$
12	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
13		a^k	$\frac{z}{(z-a)}$
14		$a^k \cos k$	$\frac{z}{(z+a)}$
15		$\binom{k}{m} a^{k-m}$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$

TABELA DE TRANSFORMADA – Z (2.1)

Observações: $\delta(t) \rightarrow$ Função Impulso.
 $u(t) \rightarrow$ Função Degrau.
 $T \rightarrow$ Período de Amostragem.

$$\binom{k}{m} = \frac{k!}{m!(k-m)!} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)}{m!} = \binom{k}{k-m}$$

2º Caso: Existência de polos Múltiplos

Por motivo de simplicidade, apresentaremos o método através de um exemplo.
 Considere:

$$F(z) = \frac{z}{(z-0,5).(z-1)^2} \quad (2.38)$$

$$T = 1s$$

A expansão será:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z-0,5).(z-1)^2} = \frac{A}{(z-0,5)} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)}$$

Sendo:

$$A = \lim_{z \rightarrow 0,5} (z-0,5) \cdot \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{0,25} = 4$$

O coeficiente B e C são determinados fazendo-se:

$$\frac{1}{(z-0,5)} = \frac{A(z-1)^2}{(z-0,5)} + B + C(z-1)$$

Logo,

$$z \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{1}{0,5} = 0 + B + 0 \Rightarrow B = 2$$

Para determinar C deve-se derivar em ambos os lados:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z-0,5} \right] \right|_{z \rightarrow 1} &= \left. \frac{d}{dz} \left[\frac{A(z-1)^2}{z-0,5} + B + C(z-1) \right] \right|_{z \rightarrow 1} \\ \left. \frac{-1}{(z-0,5)^2} \right|_{z \rightarrow 1} &= \left. \frac{2A(z-1) \cdot (z-0,5) - A(z-1)^2}{(z-0,5)^2} \right|_{z \rightarrow 1} + C \\ \frac{-1}{0,25} &= 0 + C \Rightarrow C = -4 \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{4}{z-0,5} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-1)}$$

Então,

$$F(z) = \frac{4z}{z-0,5} + \frac{2z}{(z-1)^2} - \frac{4z}{(z-1)} \quad (2.39)$$

Segundo a tabela anterior,

$$f(k) = 4 \cdot 0,5^{(k)} + 2(k) - 4 \quad (2.40)$$

Exercício: Determine a transformada inversa de:

$$F(z) = \frac{3z^3 - 3,2z^2 + 0,65z}{(z-0,1) \cdot (z-0,5) \cdot (z-1)} \quad (2.41)$$

Resposta: $f(k) = 0,1^k + 0,5^k + 1$

NO MATLAB:

$$F(z) = \frac{z}{(z-0,5) \cdot (z-1)^2}$$

Ou

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z-0,5) \cdot (z-1)^2} = \frac{k_1}{z-z_1} + \frac{k_2}{(z-z_1)^2} + \frac{k_3}{(z-z_3)}$$

```

┌ num = [0 0 1];
  den = poly([0.5 1 1]);
  [Ki,Zi] = residue(num,den)

```

Ki =

```

-4.0000
 2.0000
 4.0000

```

Zi =

```

 1.0000
 1.0000
 0.5000

```

ou

```

┌ z = sym('z');
  f = z / [(z-0.5)*(z-1)^2];
  w = iztrans(f)

```

w = -4+4*(1/2)^k+2*n

└ Observação: executado no MATLAB
versão (7.1).

Observação: $-4.0000 \rightarrow 1.0000 = \frac{-4}{z-1}$
 $2.0000 \rightarrow 1.0000 = \frac{2}{(z-1)^2}$
 $4.0000 \rightarrow 0.5000 = \frac{4}{z-0,5}$

Logo,

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{4}{z-0,5} - \frac{4}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}$$

Ou

$$Y(z) = \frac{4z}{z-0,5} - \frac{4z}{z-1} + \frac{2z}{(z-1)^2}$$

Usando a tabela:

$$f(k) = 4 \cdot 0,5^k + 2k - 4$$

ii) Método de Expansão em Série por Divisão Contínua (ou Divisão Longa)

Da mesma forma, iremos mostrar o método através de um exemplo.
Considere:

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \quad (2.42)$$

A expansão será feita dividindo-se z^2 por $z^2 - z - 1$:

$$\begin{array}{r}
 z^2 \qquad \qquad \qquad |z^2 - z - 1| \\
 \hline
 -z^2 + z + 1 \qquad 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 5z^{-4} + \dots \\
 0 + z + 1 \\
 \hline
 -z + 1 + z^{-1} \\
 \hline
 0 + 2 + z^{-1} \\
 -2 + 2z^{-1} + 2z^{-2} \\
 \hline
 0 + 3z^{-1} + 2z^{-2} \\
 -3z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} \\
 \hline
 0 + 5z^{-2} + 3z^{-3}
 \end{array}$$

Logo,

$$F(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 5z^{-4} \dots \quad (2.43)$$

A função $F(z)$ é a transformada Z de $f(kT)$, ou seja:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot z^{-k} = f(0) + f(1T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + f(3T)z^{-3} + \dots \quad (2.44)$$

Comparando-se a equação (2.43) com a equação (2.44), conclui-se que:

$$f(0) = 1$$

$$f(T) = 1$$

$$f(2T) = 2$$

$$f(3T) = 3$$

$$f(4T) = 5$$

$$\vdots$$

De onde se pode construir o gráfico de $f(kT) \times kT$:

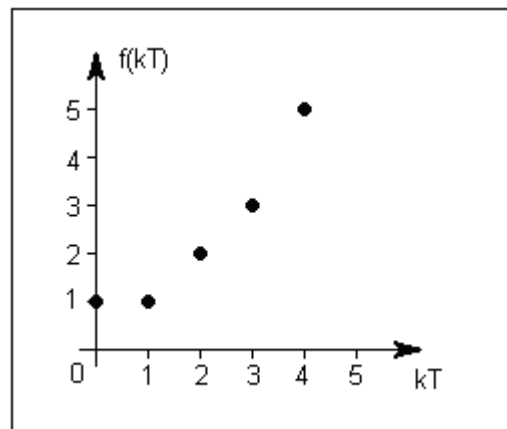


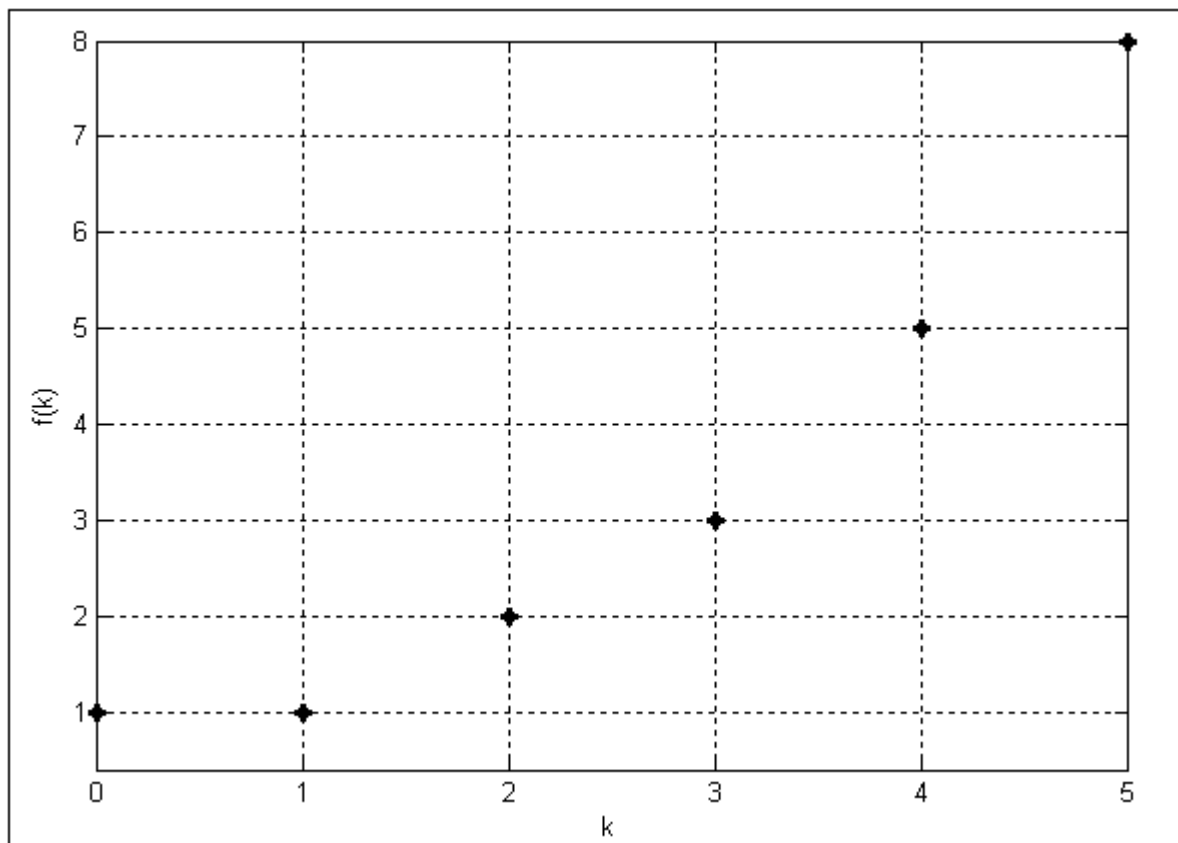
FIGURA 2.6

NO MATLAB:

```

┌ clear
  %num=input ('Digite o vetor do numerador [num(z)]: ');
  %den=input ('Digite o vetor do denominador [den(z)]: ');
  num = [1 0 0];
  den = [1 -1 -1];
  a = [zeros(1,length(den)-length(num)) num];
  b = den;
  i = 1;
  for t=0:1:5
    kt(i)=t;
    c(i) =a (1) /b(1);
    rest=a-b*c(i);
    a=[rest(1,2:length(a)) 0];
    i=i+1;
  end
  disp(' ')
  disp(c)
  figure(2)
  plot(kt,c,'*b')
  xlabel('k')
  ylabel('f(k)')
└

```



Exercício: Considere a transformada Z da função $f(kT) = e^{\alpha kT}$:

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{\alpha T}}, \quad \alpha < 0 \quad (2.45)$$

Através da divisão longa, verifique graficamente se esta função é realmente a transformada Z de $f(kT)$.

Observação: O terceiro método da transformada Z inversa que utiliza a propriedade do operador deslocamento, será introduzida mais adiante, no item II.8.

II.6 – Função de Transferência de um Sistema Discreto

A função de transferência de um sistema discreto é definida como o modelo que relaciona a sua entrada com sua saída, ou seja:

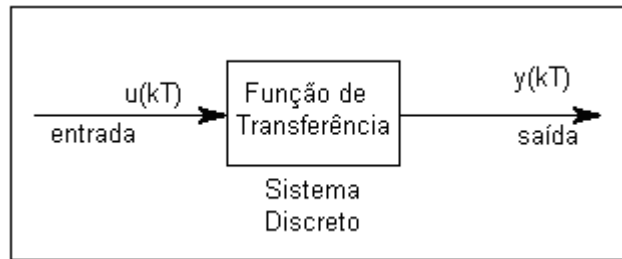


FIGURA 2.7

Em todos os sistemas discretos, a saída atual $y(kT)$ depende da entrada atual $u(kT)$ e das saídas e entradas anteriores $y(kT-nT)$ e $u(kT-nT)$, $n=1,2,3,\dots,\ell$, sendo ℓ a ordem do sistema, ou seja:

$$\begin{aligned} y(k+n) = & -a_{n-1}y(k+n-1) - a_{n-2}y(k+n-2) - \dots \\ & \dots - a_0y(k) + b_nu(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \dots + b_0u(k) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para determinar a função de transferência deste sistema, é necessário aplicar a transformada Z na equação (2.46):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y(k+n)\} = & -a_{n-1}\mathcal{Z}\{y(k+n-1)\} - a_{n-2}\mathcal{Z}\{y(k+n-2)\} - \dots \\ & \dots - a_0\mathcal{Z}\{y(k)\} + b_n\mathcal{Z}\{u(k+n)\} + b_{n-1}\mathcal{Z}\{u(k+n-1)\} + \dots + b_0\mathcal{Z}\{u(k)\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Aplicando a propriedade (ii) de deslocamento no tempo (vide equação 2.30) teremos:

$$\begin{aligned} z^n Y(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} y(k)z^{-k} = & -a_{n-1}z^{n-1}Y(z) + a_{n-1}z^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} y(k)z^{-k} + \\ & -a_{n-2}z^{n-2}Y(z) + a_{n-2}z^{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} y(k)z^{-k} + \dots - a_0Y(z) + \end{aligned}$$

$$+b_n z^n U(z) - b_n z^n \sum_{k=0}^{n-1} u(k) z^{-k} + \dots + b_0 U(z)$$

Supondo que as condições iniciais são todas nulas, ou seja:

$$y(n-1) = y(n-2) = \dots = y(0) = u(n-1) = \dots = u(0) = 0 \quad (2.49)$$

Teremos:

$$z^n Y(z) + a_{n-1} z^{n-1} Y(z) + a_{n-2} z^{n-2} Y(z) + \dots + a_0 Y(z) = b_n z^n U(z) + b_{n-1} z^{n-1} U(z) + \dots + b_0 U(z) \quad (2.5)$$

Isolando Y(z) e U(z) teremos:

$$Y(z) [z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0] = U(z) [b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0] \quad (2.51)$$

Logo,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0} \quad (2.52)$$

Portanto, a função de transferência é dada por:

$$G(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0}$$

Esquematicamente:

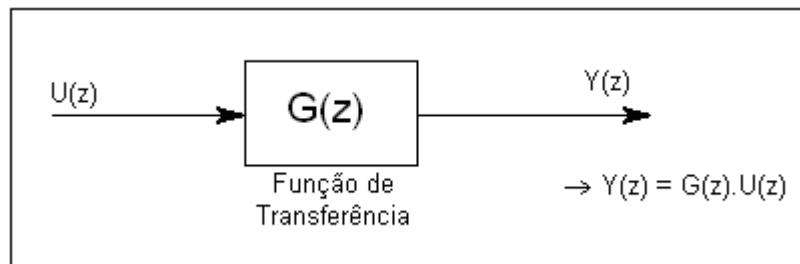


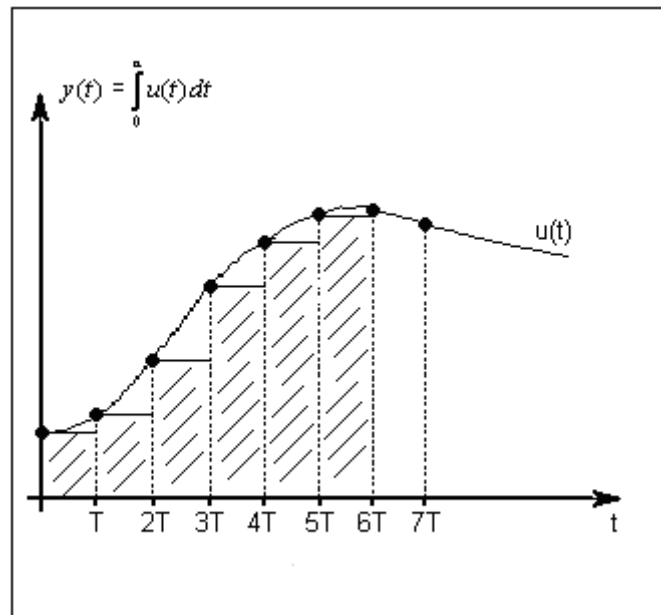
FIGURA 2.8

Exemplo de um Sistema Discreto

Considere o integrador numérico que é implementado através de um software computacional:

Desejam-se: $y(t) = \int_0^a u(t) dt$

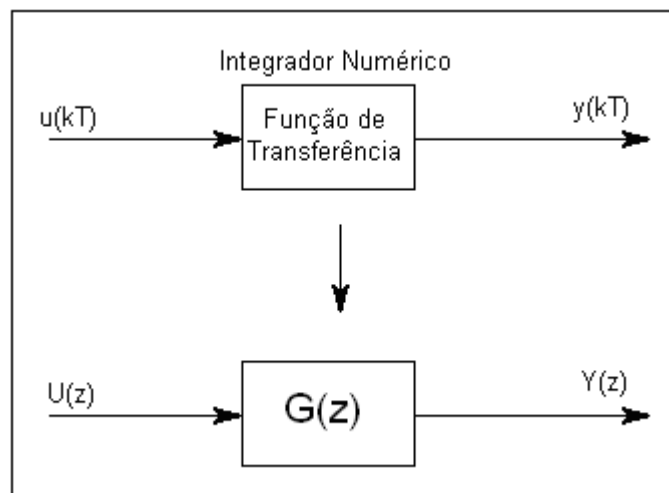
Computacionalmente:



Ou ainda:

$$y(kT + T) = y(kT) + u(kT).T$$

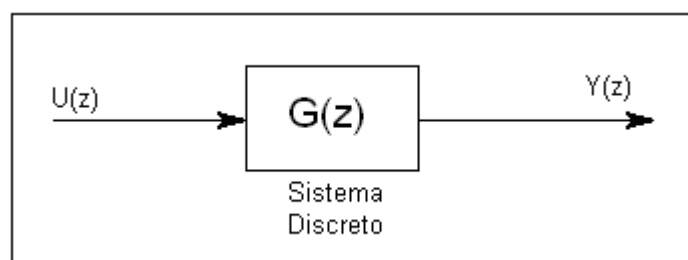
Qual é a função de transferência deste sistema discreto?



II.7 – Resposta Impulsiva de Sistemas Discretos

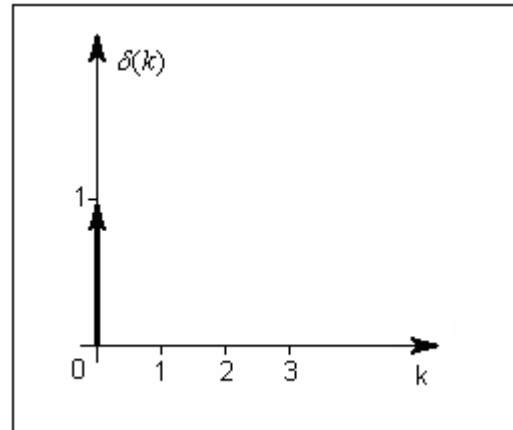
A seguir, iremos demonstrar que a resposta impulsiva de um sistema discreto é igual à sua função de transferência. Este resultado será muito importante no estudo de estabilidade e outros assuntos.

Considere o sistema discreto abaixo:



A entrada impulsiva discreta é dada por:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0 \\ 0 & , \quad k = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$



A transformada Z de $\delta(k)$ é:

$$\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k)z^{-k} = 1z^0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$$

$$\therefore \delta(z) = 1$$

Sabendo-se que

$$Y(z) = G(z).U(z) \quad \text{e} \quad U(z) = \delta(z)$$

Teremos:

$$Y(z) = G(z).\delta(z) = G(z).1$$

$$\therefore Y(z) = G(z)$$

Portanto, a função de transferência de um sistema discreto é matematicamente igual à transformada Z de sua resposta impulsiva.

II.8 – Transformada Z Inversa Utilizando a Propriedade de Deslocamento no Tempo

Este método aplica-se apenas quando se conhece a entrada de um sistema discreto e deseja-se determinar a saída para esta entrada.

Considere um sistema discreto por:

$$Y(z) = G(z).U(z)$$

Ou ainda,

$$Y(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0} . U(z)$$

Que pode ser reescrito na forma

$$(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_0)Y(z) = (b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_0)U(z)$$



$$\begin{aligned} z^n Y(z) + a_{n-1}z^{n-1}Y(z) + a_{n-2}z^{n-2}Y(z) + \dots + a_0 Y(z) &= \\ = b_n z^n U(z) + b_{n-1}z^{n-1}U(z) + \dots + b_0 U(z) \end{aligned}$$

Supondo todas as condições iniciais nulas e aplicando a propriedade (ii) de deslocamento no tempo (vide equação 2.30), porém no caminho inverso, teremos:

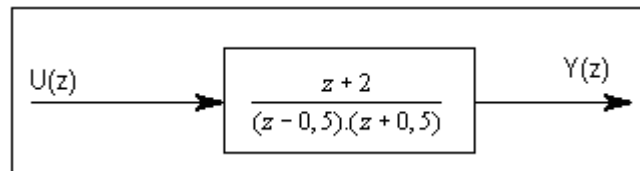
$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + a_{n-2}y(k+n-2) + \dots + a_0 y(k) &= \\ = b_n u(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \dots + b_0 u(k) \end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} y(k+n) &= -a_{n-1}y(k+n-1) - a_{n-2}y(k+n-2) + \dots - a_0 y(k) + \\ &+ b_n u(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \dots + b_0 u(k) \end{aligned}$$

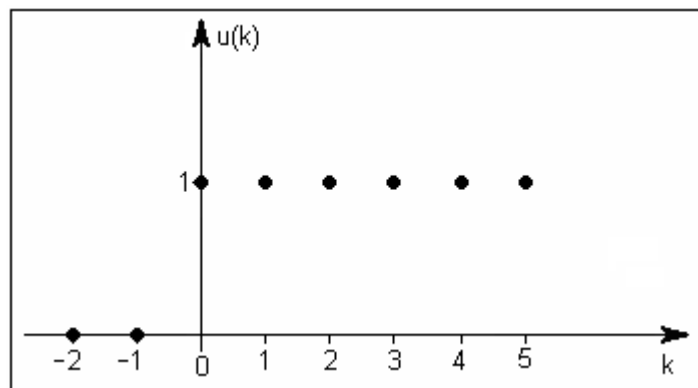
Desta forma, a evolução temporal $y(k)$ será determinada colocando os valores de $u(k)$ na equação acima, e determinando $y(k)$.

Exemplo 2.4: Considere o sistema discreto abaixo:



Para a entrada degrau

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$



Calcule:

- O valor de regime permanente da saída.
- A evolução temporal (resposta transitória) de $y(k)$.

Solução:

- a) Para determinar $y(k)|_{k \rightarrow \infty}$ deve-se calcular inicialmente a transformada Z de $u(k)$:

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} u(k)z^{-k} = 1.z^0 + 1.z^{-1} + 1.z^{-2} + 1.z^{-3} + \dots$$

Logo, $a_1 = 1$ e $q = z^{-1}$

Então

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1} \rightarrow Y(z) = \frac{(z+2)}{(z-0,5).(z+0,5)} \cdot \frac{z}{(z-1)}$$

Pelo teorema do valor final temos:

$$y(k)|_{k \rightarrow +\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \cancel{(z-1)} \cdot \frac{(z+2)}{(z-0,5).(z+0,5)} \cdot \frac{z}{\cancel{(z-1)}}$$

Como todos os polos de $(z-1).Y(z)$ estão dentro do círculo unitário, pode-se utilizar o T.V.F:

$$y(k)|_{k \rightarrow \infty} = \frac{3}{0,5.1,5} = 4$$

- b) Para obter a resposta transitória pode-se usar a divisão longa ou a propriedade de deslocamento, para ilustrar resolveremos dos dois modos.

- i) Por deslocamento

$$Y(z) = \frac{z+2}{(z-0,5).(z+0,5)} \cdot U(z) \rightarrow Y(z) = \frac{z+2}{z^2-0,25} U(z)$$

Ou:

$$(z^2-0,25)Y(z) = (z+2)U(z)$$

$$\Downarrow$$

$$z^2Y(z) - 0,25Y(z) = zU(z) + 2U(z)$$

$$\Downarrow \quad \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(k+2) - 0,25y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

Logo,

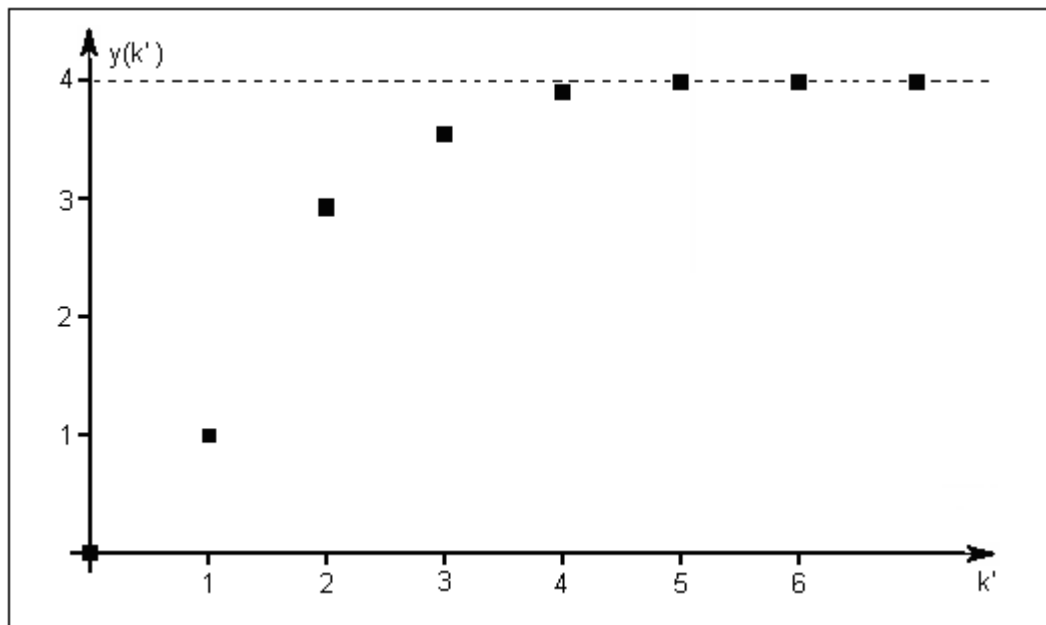
$$y(k+2) = 0,25y(k) + u(k+1) + 2u(k)$$

$$\text{Sendo: } y(0) = y(-1) = 0 \text{ e } u(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{aligned} k = -1 & \quad y(1) = 0,25.y(-1) + u(0) + 2u(-1) = 0 + 1 + 0 = 1 \\ k = 0 & \quad y(2) = 0,25.y(0) + u(1) + 2u(0) = 0 + 1 + 2.1 = 3 \\ k = 1 & \quad y(3) = 0,25.y(1) + u(2) + 2u(1) = 0,25.1 + 1 + 2 = 3,25 \\ k = 2 & \quad y(4) = 0,25.y(2) + u(3) + 2u(2) = 0,25.3 + 1 + 2 = 3,75 \\ k = 3 & \quad y(5) = 0,25.y(3) + u(4) + 2u(3) = 0,25.3,25 + 1 + 2 = 3,81 \\ \vdots & \quad \vdots \end{aligned}$$

Então, $y(k') \times k'$ é:



ii) Por divisão longa:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z+2}{(z-0,5).(z+0,5)} \cdot U(z) = \frac{(z+2)}{(z-0,5).(z+0,5)} \cdot \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{z^2 + 2z}{z^3 - z^2 - 0,25z + 0,25} \end{aligned}$$

∴

$$Y(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^3 - z^2 - 0,25z + 0,25}$$

Dividindo teremos:

$$\begin{array}{r}
 z^2 + 2z \quad \quad \quad | \quad z^3 - z^2 - 0,25z + 0,25 \\
 \underline{-z^2 + z + 0,25 - 0,25z^{-1}} \quad \quad z^{-1} + 3z^{-2} + 3,25z^{-3} + 3,75z^{-4} + \dots \\
 0 + 3z + 0,25 - 0,25z^{-1} \\
 \underline{-3z + 3 + 0,75z^{-1} - 0,75z^{-2}} \\
 0 + 3,25 + 0,5z^{-1} - 0,75z^{-2} \\
 \underline{-3,25 + 3,25z^{-1} + \frac{3,25}{4}z^{-2} - \frac{3,25}{4}z^{-3}} \\
 0 + 3,75z^{-1} + \dots
 \end{array}$$

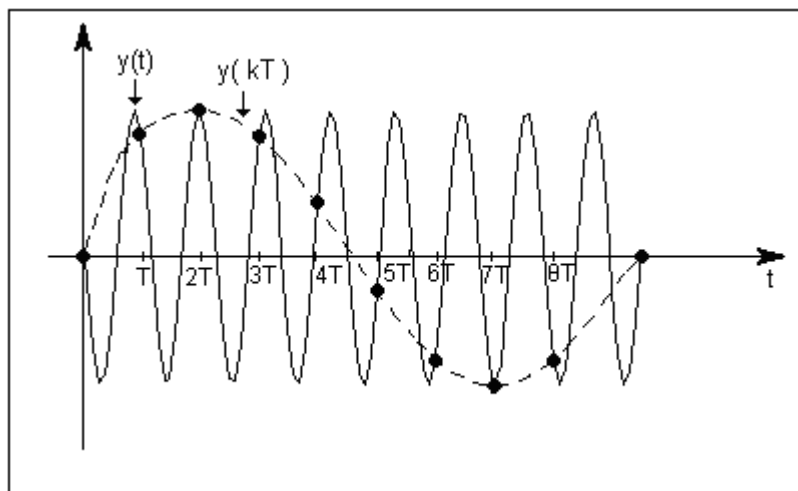
Logo, $y(0) = 0$; $y(1) = 1$; $y(2) = 3$; $y(3) = 3,25$; $y(4) = 3,75$; ...
 Que é o mesmo resultado obtido no item (i).

II.9 – Teorema de Amostragem de Shannon

Para poder recuperar o sinal original, sem distorção, a frequência de amostragem,

$$f_T = \frac{1}{T} \quad (\text{Sendo } T = \text{período de amostragem.})$$

tem que ser pelo menos duas vezes maior que todas as frequências presente no espectro do sinal original. Do contrário, ocorrerá o ALIASING. Na figura abaixo está mostrado um exemplo de ALIASING.



Em engenharia de controle, recomenda-se um amplo coeficiente de segurança ao escolher f_T . Por exemplo, 10 vezes maior que a maior frequência presente no sinal original.

III – Estabilidade de Sistemas de Controle Digital

III.1 – Introdução

O conceito de estabilidade de sistemas já foi introduzido no curso de controle linear, portanto, neste curso iremos diretamente às ferramentas matemáticas úteis para a determinação da estabilidade de Sistemas de Controle Digital.

III.2 – Critério BIBO

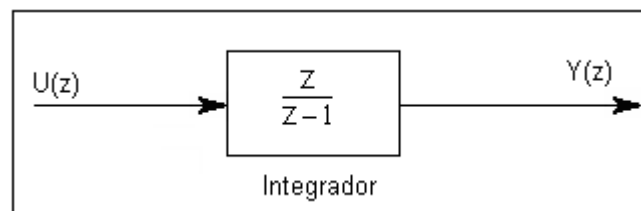
Definição: Um sistema possui a propriedade de estabilidade externa se toda sequência de entrada limitada produz uma sequência de saída limitada.

Esta é a estabilidade BIBO (“Bounded Input – Bounded Output”)

Lema: Um sistema linear, discreto e invariante no tempo, com resposta impulsiva $g(k)$ é BIBO – estável se e somente se:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |g(k)| < +\infty$$

Exemplo 3.1 – Determine se o sistema é ou não estável:



Logo, $G(z) = \frac{z}{z-1}$, que é a resposta impulsiva.

Para determinar $g(k)$, utilizaremos a divisão longa:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} z \\ -z + 1 \\ \hline 0 + 1 \\ -1 + z^{-1} \\ \hline 0 + z^{-1} \\ -z^{-1} + z^{-2} \\ \hline 0 + z^{-2} \\ \vdots \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \overline{z-1} \\
 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots
 \end{array}$$

Seção: O Conceito de Estabilidade



(a)

Ponte Tacoma Narrows (a) como a oscilação começa e (b) o fracasso catastrófico.



(b)

Logo, a resposta impulsiva $g(k)$ é dada por:

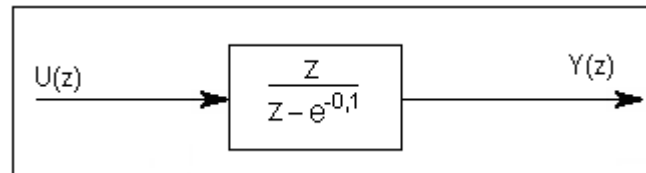
$$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = \dots = 1$$

Tem-se:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |g(k)| = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Portanto, o sistema é instável.

Exercício: Estude a estabilidade do seguinte sistema discreto.



Em determinados casos, o somatório acima poderá não ser tão simples como no exemplo, a seguir será apresentado um teorema que facilitará a determinação da estabilidade.

- Teorema: Um sistema linear, discreto e invariante no tempo, com função de transferência $G(z)$ é BIBO – estável se e somente se os polos de $G(z)$ têm módulo menor do que 1.

Exemplo 3.2: Determine se o sistema abaixo é estável.

$$G(z) = \frac{z + 1}{z^2 + 0,6z + 0,1}$$

Os polos de $G(z)$ são as raízes do denominador, ou seja:

$$z^2 + 0,6z + 0,1 = 0$$

$$\Delta = 0,6^2 - 4 \cdot 0,1 = -0,04$$

$$z_{1,2} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{-0,04}}{2} = -0,3 \pm j0,1$$

Logo,

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{0,3^2 + 0,1^2} = 0,3162 < 1$$

Portanto, as raízes têm módulo menor que 1, logo o sistema é BIBO – estável.

Observação: Raízes com módulos menor que 1 significa que as raízes estão dentro do círculo unitário.

III. 3 – Critério de Jury

A aplicação do teorema anterior em sistemas que possuem ordem maior que 2, torna-se difícil, uma vez que será necessário utilizar métodos computacionais para se determinar todas as raízes. O critério de Jury estuda a estabilidade de sistemas discretos sem a necessidade de determinar os polos.

1º Passo: Para uma função de transferência $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, o polinômio característico é $D(z)$. Genericamente teremos:

$$D(z) = d_0 z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n$$

Construa a seguinte tabela

$k = 0$	Linha 1 Linha 2	$d_0 \quad d_1 \quad \dots \quad d_{n-1} \quad d_n$ $d_n \quad d_{n-1} \quad \dots \quad d_1 \quad d_0$	$j_0 = \frac{d_n}{d_0}$
$k = 1$	Linha 3 Linha 4	$d_{1,0} \quad d_{1,1} \quad \dots \quad d_{1,n-1}$ $d_{1,n-1} \quad d_{1,n-2} \quad \dots \quad d_{1,0}$	$j_1 = \frac{d_{1,n-1}}{d_{1,0}}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k = n-1$	Linha $2k+1$ Linha $2k+2$	$d_{n-1,0} \quad d_{n-1,1}$ $d_{n-1,1} \quad d_{n-1,0}$	j_{n-1}
$k = n$		$d_{n,0}$	

- A linha 1 é formada pelos coeficientes de $D(z)$.
- As linhas pares são formadas pela inversão dos coeficientes da linha anterior.
- As linhas ímpares são determinadas fazendo:

$$linha_i = linha_{i-2} - linha_{i-1} \cdot j_{k_anterior}$$

Exemplo:

$$linha_3 = linha_1 - linha_2 \cdot j_0$$

2º Passo: Aplique o critério de Jury:

“O sistema é estável se e somente se $|j_k| < 1$, $k = 0, 1; \dots; n-1$, se a tabela termina ou se ocorre divisão por zero, em $k < n$, o sistema é instável.”

Exemplo 3.3: Determine se a função de transferência abaixo representa um sistema estável ou instável.

$$G(z) = \frac{16z^2 - 8z + 1}{8z^3 + z^2 + z + 4}$$

1º Passo: $D(z) = 8z^3 + z^2 + z + 4$

$k=0 \begin{cases} \text{linha1} & 8 & 1 & 1 & 4 \\ \text{linha2} & 4 & 1 & 1 & 8 \end{cases}$
 $j_0 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{1}{2} \right| < 1 \rightarrow ok$

$8 - 4 \cdot \frac{1}{2} \quad 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} \quad 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} \quad 4 - 8 \cdot \frac{1}{2}$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$k=1 \begin{cases} \text{linha3} & 6 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \text{linha4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 & \frac{1}{2} \end{cases}$
 $j_1 = \frac{\frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{12} \Rightarrow \left| \frac{1}{12} \right| < 1 \rightarrow ok$

$6 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \quad \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{12}$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$k=2 \begin{cases} \text{linha5} & \frac{143}{24} & \frac{11}{24} & 0 \\ \text{linha6} & \frac{11}{24} & \frac{143}{24} & \end{cases}$
 $j_2 = \frac{\frac{11}{24}}{\frac{143}{24}} = \frac{11}{143} \Rightarrow \left| \frac{11}{143} \right| < 1 \rightarrow ok$

$k=3 \begin{cases} \text{linha7} & 5,9231 \end{cases}$

2º Passo:

Como $|j_i| < 1$, $i = 0, 1, 2$, conclui-se que o sistema é estável.

Observação: As raízes de $G(z)$ são:

$$z_{1,2} = 0,3286 \pm j0,7288 \quad ; \quad z_3 = -0,7823$$

Todas estão dentro do círculo unitário ($|z_{1,2}| = 0,799$).

Exercício: Verifique se o sistema discreto, cuja função de transferência é dada abaixo, é estável ou não:

$$G(z) = \frac{4z + 10}{z^3 + 0,9z^2 + 0,06z - 0,016}$$

Exercício: Verifique se o sistema abaixo é ou não estável, usando o critério de Jury:

$$G(z) = \frac{z^2 + 4}{z^4 + 2,4z^3 + 1,73z^2 + 0,198z - 0,1296}$$

Exemplo 3.4: Determine as condições de a_1 e a_2 para que o sistema com o polinômio característico igual a:

$$D(z) = z^2 + a_1z + a_2$$

Seja estável.

Solução:

1	a_1	a_2	$j_0 = a_2 \rightarrow a_2 < 1$
a_2	a_1	1	
$1 - a_2^2$	$a_1(1 - a_2)$		$j_1 = \frac{a_1(1 - a_2)}{(1 - a_2^2)} \rightarrow \left \frac{a_1(1 - a_2)}{(1 - a_2^2)} \right < 1$
$a_1(1 - a_2)$	$(1 - a_2^2)$		
$1 - a_2^2 - \left[\frac{a_1^2(1 - a_2)}{(1 + a_2)} \right]$			

i) De j_0 conclui-se: $|a_2| < 1 \rightarrow -1 < a_2 < 1$

De j_1 tem-se:

$$\frac{a_1(1 - a_2)}{(1 - a_2^2)} = \frac{a_1 \cancel{(1 - a_2)}}{\cancel{(1 - a_2)} \cdot (1 + a_2)} = \frac{a_1}{1 + a_2}$$

Logo,

$$\left| \frac{a_1}{1 + a_2} \right| < 1$$

Então

$$-1 < \frac{a_1}{1 + a_2} < 1, \text{ porém } -1 < a_2 < 1 \text{ logo } 0 < 1 + a_2 < 2$$

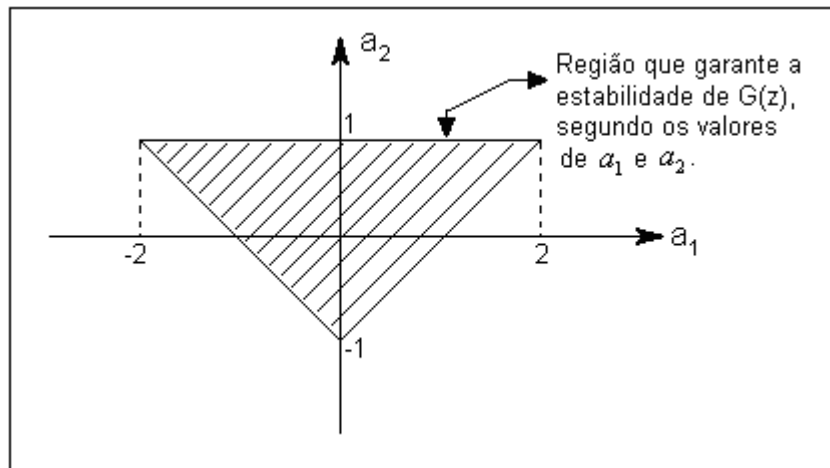
Como $1 + a_2$ é positivo, a expressão acima se torna:

$$-1 - a_2 < a_1 < 1 + a_2$$

ii) $-1 - a_2 < a_1 \rightarrow a_2 > -a_1 - 1$

iii) $a_1 < 1 + a_2 \rightarrow a_2 > a_1 - 1$

A região que satisfaz as restrições i, ii, e iii é:



IV – Representação Discreta do Subsistema: D/A – Processo – A/D

IV.1 – Introdução

No capítulo I, foi apresentado o sistema de controle digital genérico, vide figura (1.4-b), que pode ser esquematizada na seguinte forma:

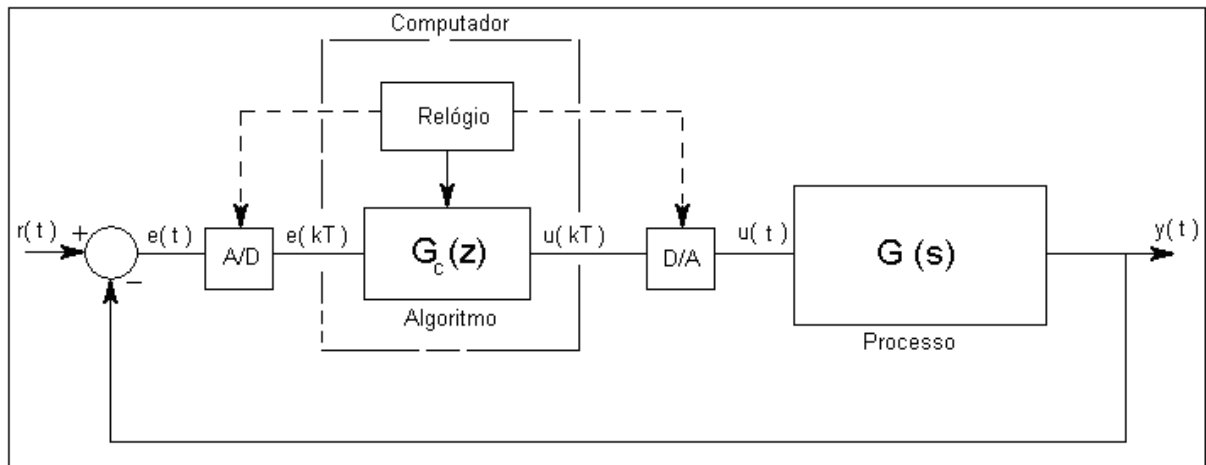


FIGURA 4.1

Neste modelo, o relógio garante que o sistema discreto irá trabalhar com um período de amostragem constante.

Em geral, a referência $r(t)$ (sinal de entrada) é gerada internamente pelo computador, desta forma o diagrama acima pode ser representado como:

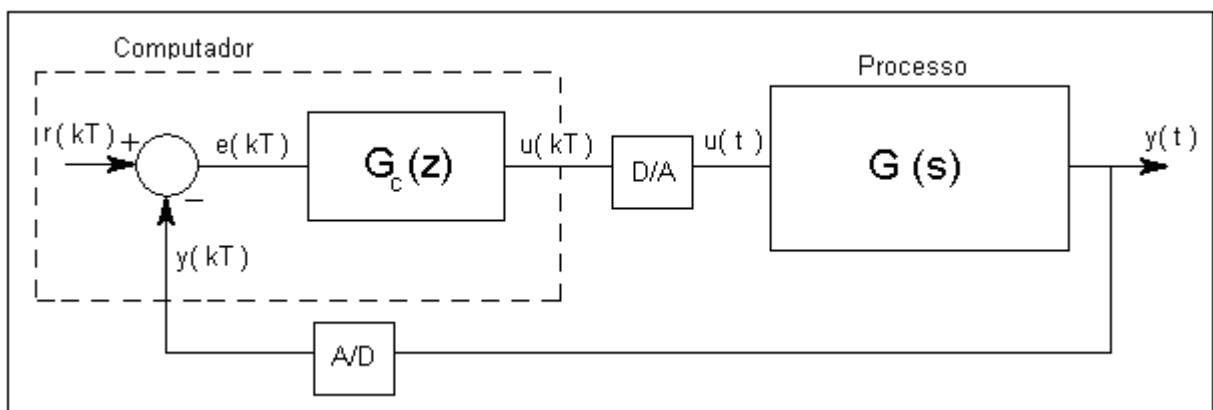


FIGURA 4.2

Observação: O relógio continua garantindo período de amostragem constante, porém, por motivo de simplicidade, ele não foi desenhado neste diagrama.

Na figura (4.2), o sistema está parcialmente descrito na variável “z” e parcialmente na variável “s”. Para projetar o controlador $G_c(z)$, é necessário que o sistema todo esteja representado em apenas uma única variável. Isto é feito determinando a função de transferência discreta do subsistema discreto composto por D/A – processo – A/D, ou seja:

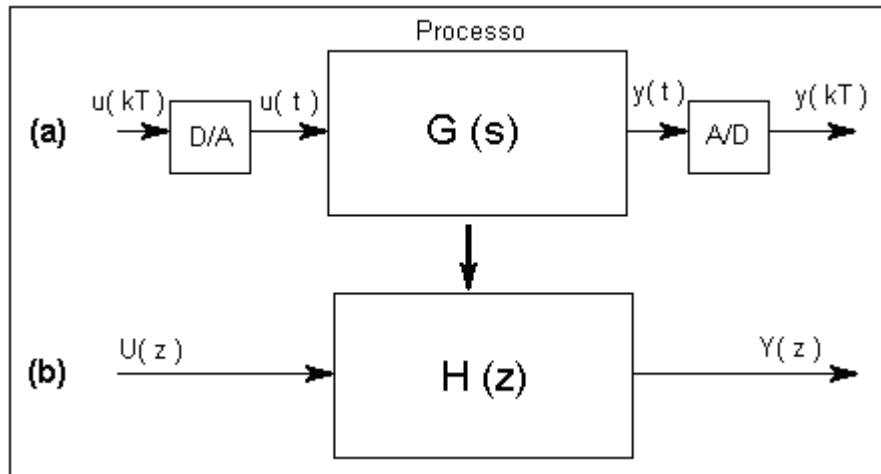


FIGURA 4.3 – (a) e (b)

Na figura (4.3), o sistema (b) é o modelo discreto do sistema (a) que possui a entrada discreta $u(kT)$ e a saída discreta $y(kT)$. Observe que no modelo discreto (b), não está acessível o $y(t)$ presente no modelo (a), portanto, nesta modelagem só está disponível a amostragem de $y(t)$, ou seja, $y(kT)$.

Como já foi visto no capítulo II, a função de transferência discreta de um sistema discreto é igual à sua resposta à entrada impulso. Desta forma, para determinar $H(z)$ acima, iremos aplicar uma entrada impulsiva no sentido da figura (4.3 – (a)) e obter a saída $Y(z)$ que será igual a $H(z)$. Antes, porém, apresentaremos o conversor D/A de ordem zero.

IV.2 – Conversor D/A de Ordem Zero

O conversor D/A de ordem zero aproxima os valores amostrados por um polinômio de ordem zero, conforme mostrado na figura abaixo.

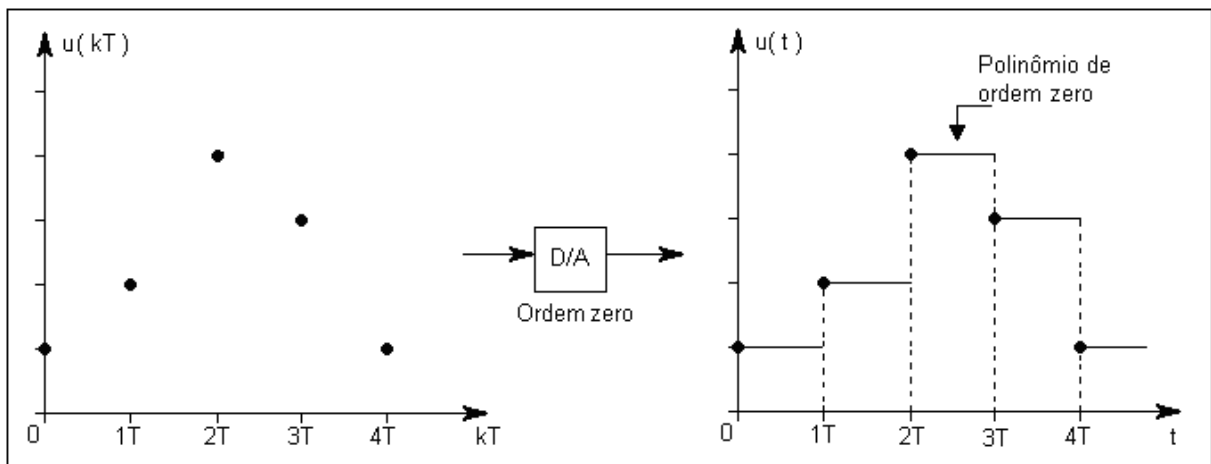


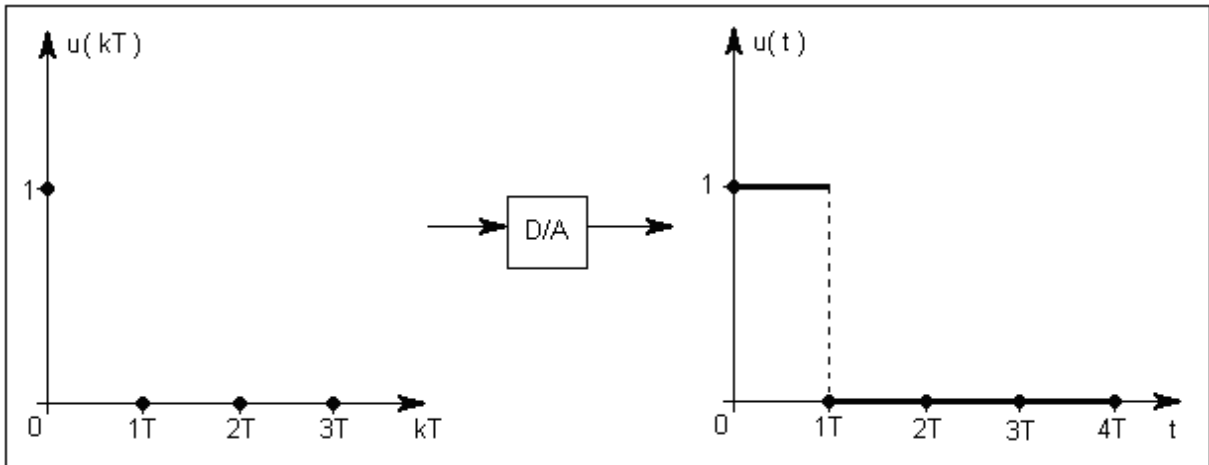
FIGURA 4.4

A função $u(t)$ é:

$$u(t) = u(kT) \text{ , para } kT \leq t < (k+1)T \quad (4.1)$$

IV.3 – Aplicação da Entrada Impulsiva em: D/A – Processo – A/D

Fazendo $u(kT)$ na figura (4.3 – (a)), uma entrada impulsiva, a resposta $u(t)$ do conversor D/A será:

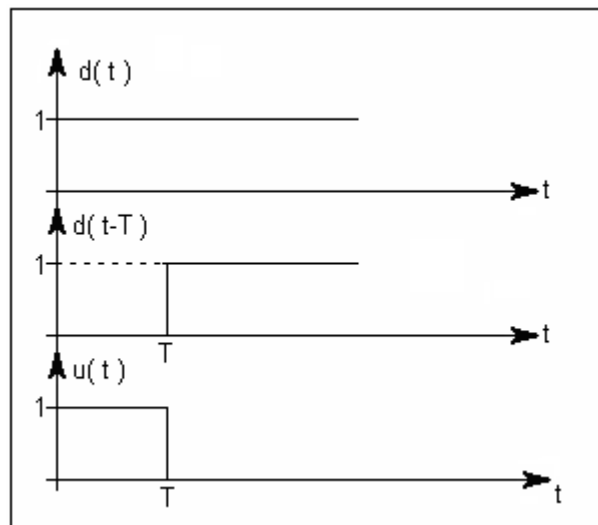
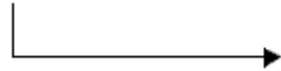


A resposta do conversor D/A é um pulso, que corresponde a uma combinação de degraus. Supondo que a função degrau é denominada por:

$$d(t),$$

O pulso é dado por:

$$u(t) = d(t) - d(t-T) \quad (4.2)$$



Para determinar a resposta de $G(s)$ (processo) a essa entrada, é necessário aplicar a transformada de Laplace em (4.2).

Sabendo que:

$$\mathcal{L}\{f(t-\alpha)\} = e^{-\alpha s} \cdot F(s), \text{ sendo } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

A transformada de Laplace de (4.2) é:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{d(t) - d(t-T)\}$$



$$\begin{aligned}
 U(s) &= \mathcal{L}\{d(t)\} - \mathcal{L}\{d(t-T)\} \\
 &\Downarrow \quad \longleftarrow \boxed{\text{Pela tabela 2.1}} \\
 U(s) &= \frac{1}{s} - e^{-sT} \frac{1}{s} \\
 &\Downarrow \\
 U(s) &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Segundo a figura (4.3 – (a)), a resposta $y(s)$ do processo devido à entrada dada pela equação (4.3) é:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= G(s).U(s) \\
 &\Downarrow \\
 Y(s) &= G(s). \frac{1 - e^{-sT}}{s}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} . G(s) \right\} \quad (4.4)$$

Esta resposta $y(t)$ passa pelo conversor A/D e gera $y(kT)$. Sendo que $y(kT)$ é obtido de $y(t)$ fazendo apenas $t = kT$. Por simplicidade de notação, utilizaremos a equação (4.4) para mencionar $y(kT)$, ou seja:

$$y(kT) = \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} . G(s) \right\} \right) \Big|_{t=kT} \quad (4.5)$$

A transformada Z de $y(kT)$ será:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \mathcal{Z}\{y(kT)\} = \mathcal{Z} \left\{ \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} . G(s) \right\} \right) \Big|_{t=kT} \right\} \\
 &\Downarrow \\
 Y(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=kT} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-sT} \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=kT} \right\}
 \end{aligned}$$

Fazendo:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

Teremos:

$$Y(z) = \mathcal{Z} \left\{ f(t) - f(t-T) \right\} \Big|_{t=kT} = \mathcal{Z} \left\{ f(kT) - f(kT-T) \right\} =$$

$$Y(z) = \mathcal{Z} \{ f(k) \} - \mathcal{Z} \{ f(k-1) \}$$

Segundo o operador atraso:

$$Y(z) = \mathcal{Z} \{ f(k) \} - z^{-1} \mathcal{Z} \{ f(k) \}$$

Logo,

$$Y(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \{ f(kT) \}$$

Porém,

$$f(kT) = \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right) \Big|_{t=kT}$$

Assim,

$$Y(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right) \Big|_{t=kT} \right\} \quad (4.6)$$

Onde $\mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right)$ deve ser interpretada como a transformada – Z da sequência obtida pela amostragem do sinal $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$, com $t = kT$.

Como a resposta ao impulso $Y(z)$ é igual à função de transferência do sistema ($H(z)$), temos:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right) \Big|_{t=kT} \right\} \quad (4.7)$$

A equação (4.7) pode ser determinada utilizando apenas a tabela (2.1) do capítulo II. Logo, para calcular $H(z)$ devem-se seguir os seguintes passos:

i) – Encontre na tabela (2.1) a transformada inversa de $\frac{G(s)}{s}$, ou seja:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

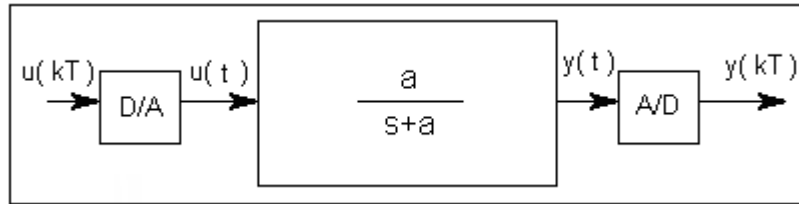
ii) – Faça $f(kT) = f(t) \Big|_{t=kT}$ e encontre na tabela (2.1) a transformada – Z de $f(kT)$:

$$F(z) = \mathcal{Z} \{ f(kT) \}$$

iii) – Finalmente, a função de transferência discreta do sistema D/A – $G(s)$ – A/D será:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) F(z)$$

Exemplo 4.1: Considere o seguinte sistema dinâmico com interface A/D e D/A:



Calcule a função de transferência discreta:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Solução:

A função de transferência $H(z)$ é obtida realizando-se os passos da página anterior:

$$\text{i) - } G(s) = \frac{a}{s+a}$$

Logo,

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{a}{(s+a)s}$$

Verificando na tabela (2.1), temos:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{s(s+a)} \right\} = 1 - e^{-at}$$

ii) - $f(kT) = 1 - e^{-akT}$, logo, segundo a tabela (2.1) temos:

$$F(z) = \mathcal{Z} \{ f(kT) \} = \mathcal{Z} \{ 1 - e^{-akT} \} = \frac{(1 - e^{-aT}) \cdot z}{(z-1) \cdot (z - e^{-aT})}, \text{ utilizou-se a linha (6) da tabela}$$

iii) – Finalmente,

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot F(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \frac{(1 - e^{-aT}) \cdot z}{(z-1) \cdot (z - e^{-aT})}$$

$$H(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) \cdot \frac{(1 - e^{-aT}) \cdot z}{(z-1) \cdot (z - e^{-aT})}$$

Logo,

$$H(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}$$

NO MATLAB:

Tfc2d

```
function[nz,dz]=tfc2d(num,den,t)
% Determina a equivalência discreta do subsistema
%      u(kT) - G(s) - A/D - y(kT)
% Modo de utilização: [nz,dz]=tfc2d(num,den,ts)
% Sendo ts o período de amostragem e G(s)=num(s)/den(s)
% e o denominador da função de transferência discreta
% equivalente:
% Y(z)/U(z)=H(z)=nz(z)/dz(z)
[a,b,c,d]=tf2ss(num,den);
[ad,bd]=c2d(a,b,t);
[nz,dz]=ss2tf(ad,bd,c,d,1)
```

A equivalência discreta pode ser obtida com a função “tfc2d.m” acima. O problema anterior foi resolvido com esta função sendo $a=1$ e $t_s = 0,1s$. Obteve-se:

```
>> num=1;
>> den=[1 1];
>> ts=0.1;
>> [nz,dz]=tfc2d(num,den,ts)

nz =

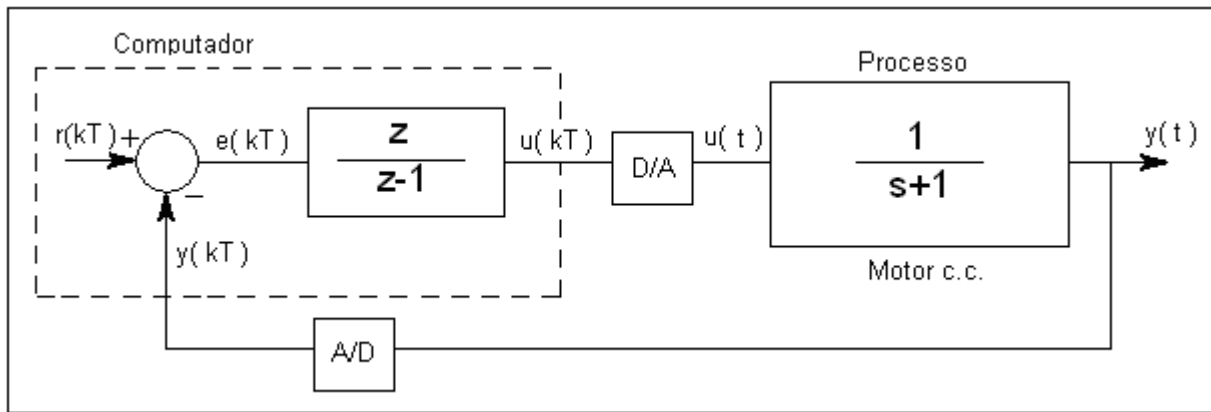
0      0.0952

dz =

1.0000   -0.9048
```

$$H(z) = \frac{0,0952}{z - 0,9048}$$

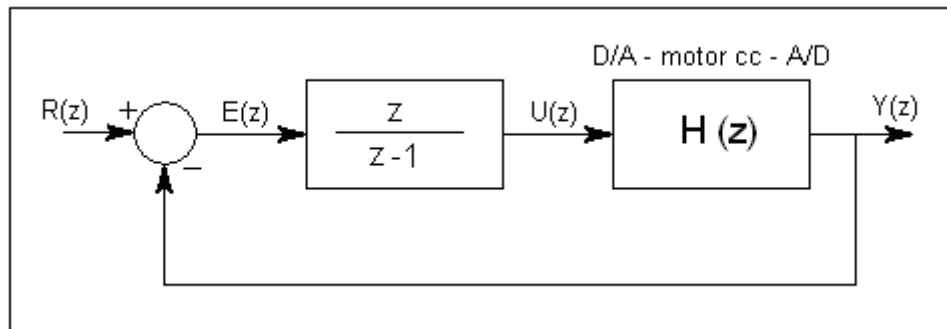
Exemplo 4.2: Considere o sistema de controle digital abaixo,



O período de amostragem da parte discreta é: $T = 0,1s$.

Trace o gráfico de $y(kT)$ x kT devido a entrada $r(kT)$ tipo degrau unitário. Determine se o sistema é estável.

Solução: Para determinar $y(kT)$ é necessário primeiramente representar todo sistema na variável Z , onde obtemos:



Cálculo de $H(z)$:

$$i) - G(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Segundo a tabela (2.1),

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\}$$

$$f(t) = 1 - e^{-t}$$

ii) –

$$F(z) = \mathcal{Z} \{ f(kT) \} = \mathcal{Z} \{ 1 - e^{-kT} \}$$

Segundo tabela (2.1),

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-T}) \cdot z}{(z - 1) \cdot (z - e^{-T})}$$

iii) – Finalmente,

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \frac{(1 - e^{-T}) \cdot z}{(z - 1) \cdot (z - e^{-T})}$$

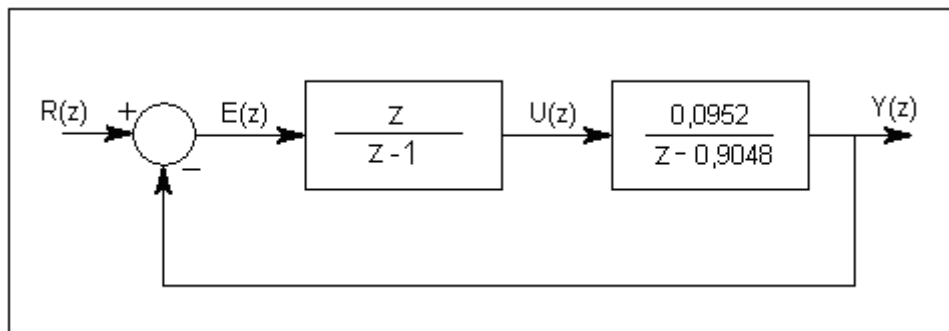
Logo,

$$H(z) = \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

Como $T = 0,1s$,

$$H(z) = \frac{0,0952}{z - 0,9048}$$

Assim, o sistema será:



Para verificar se o sistema é estável, é necessário determinar a função de transferência de malha fechada:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\frac{z}{z-1} \cdot \frac{0,0952}{(z-0,9048)}}{1 + \frac{z}{z-1} \cdot \frac{0,0952}{(z-0,9048)}} = \frac{0,0952z}{z^2 - 1,8096z + 0,9048}$$

Os polos são:

$$z_{1,2} = \frac{(1,8096) \pm \sqrt{(-1,8096)^2 - 4 \cdot 0,9048}}{2}$$

$$z_{1,2} = 0,9048 \pm j0,2935$$

Como $|z_{1,2}| = 0,951 < 1$, o sistema é estável.

A resposta deste sistema para entrada degrau será:

$$Y(z) = \frac{0,0952z}{z^2 - 1,8096z + 0,9048} \cdot R(z)$$

Temos:

$$(z^2 - 1,8096z + 0,9048)Y(z) = 0,0952z \cdot R(z)$$

$$z^2Y(z) - 1,8096zY(z) + 0,9048Y(z) = 0,0952z \cdot R(z)$$

Aplicando a propriedade de deslocamento:

$$y(k' + 2) = 1,8096y(k' + 1) - 0,9048y(k') + 0,0952r(k' + 1)$$

Neste caso, as condições iniciais são nulas: $y(n) = 0, n < 0$.

Sendo a entrada um degrau, temos:

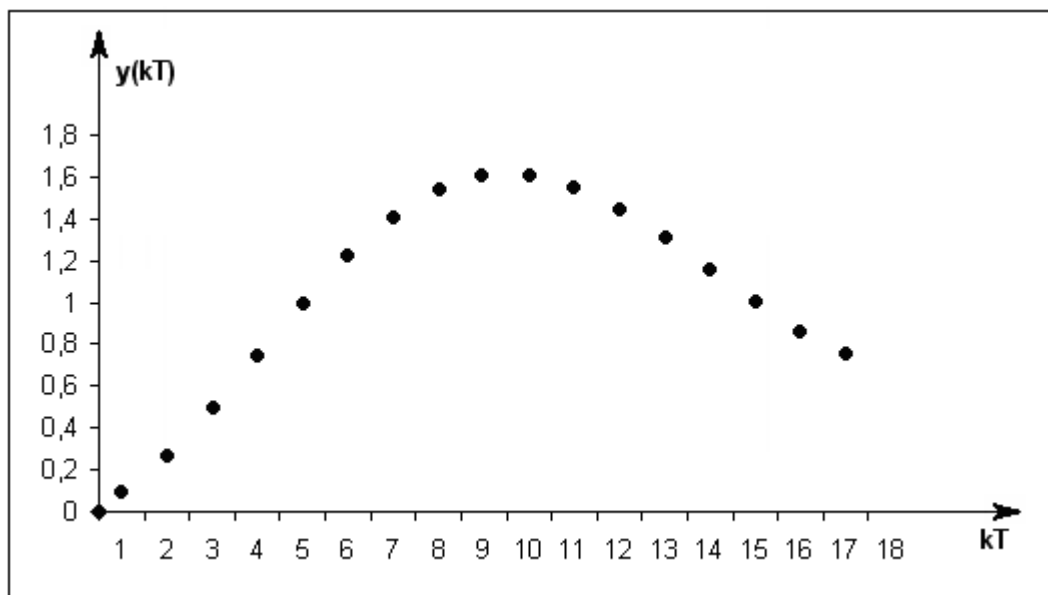
$$r(n) = 0, \quad n < 0$$

$$r(n) = 1, \quad n \geq 0$$

Temos:

$y(0) = 0,0000$	$y(4) = 0,7458$	$y(8) = 1,5406$	$y(12) = 1,4458$	$y(16) = 0,8646$
$y(1) = 0,0952$	$y(5) = 0,9999$	$y(9) = 1,6054$	$y(13) = 1,3095$	$y(17) = 0,7518$
$y(2) = 0,2674$	$y(6) = 1,2268$	$y(10) = 1,6064$	$y(14) = 1,1567$	$\vdots$
$y(3) = 0,4931$	$y(7) = 1,5496$	$y(11) = 1,5496$	$y(15) = 1,0037$	$\vdots$

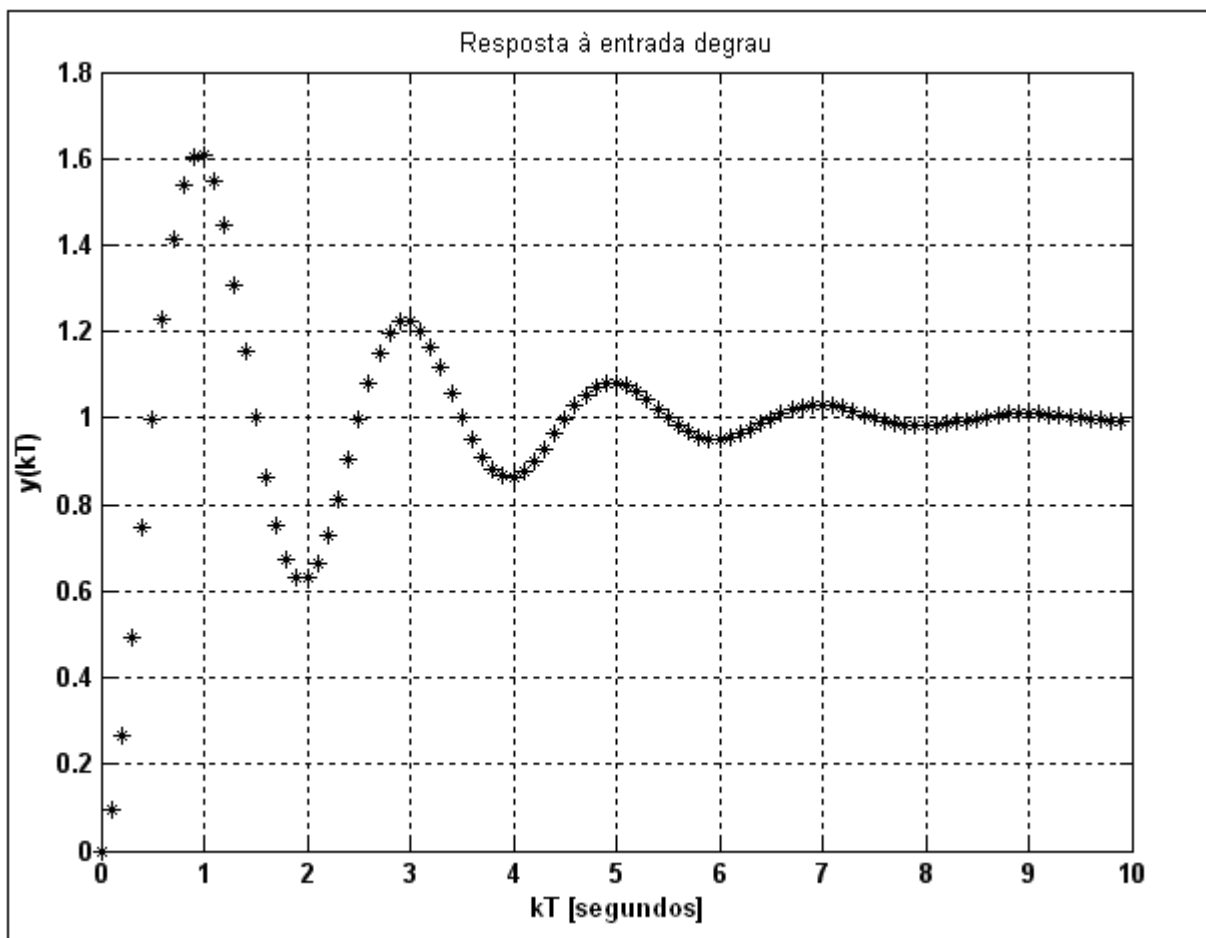
Finalmente, a resposta transitória será:



NO MATLAB:

Degrau

```
% Este programa aplica a entrada degrau unitário
% no sistema discreto:
% Sendo num(z)=0,0952z e den(z)=z^2-1,8096z+0,9048
num=[0.0952 0];
den=[1 -1.8096 0.9048];
T=0.1;
n=100;
tempo=(0:1:n-1)*T;
yk=dstep(num,den,n);
figure(1)
plot(tempo,yk,'*g')
xlabel('kT [segundos]')
ylabel('y(kT)')
title('Resposta à entrada degrau')
grid
```



NO MATLAB:**Malha Fechada**

```

┌ % Determine a resposta a entrada degrau do sistema de
% malha fechada:
%  $u(t) \xrightarrow{+} () \xrightarrow{A/D} G_c(z) \xrightarrow{D/A} G(s) \xrightarrow{\quad} y(t)$ 
%      !-                                     !
%      !_____!
%
% Digite: malhafec
%
ts=input('Digite o período de amostragem ');
nc=input('Digite o numerador da planta contínua ');
dc=input('Digite o denominador da planta contínua (G(s)) ');
n2=input('Digite o numerador do controlador discreto (Gc(z)) ');
d2=input('Digite o denominador do controlador discreto (Gc(z)) ');
j1=input('Digite o número total de amostras para simulação ');
k=1;
[n1,d1]=tfc2d(nc,dc,ts);
ny=k*conv(n1,n2);
nu=k*conv(n2,d1);
d=conv(d1,d2)+ny;
jc=[0:j1]*ts;
y=dstep(ny,d,j1+1);
u=dstep(nu,d,j1+1);
t=[0:.1*ts:(j1+.01)*ts];
uc=[];
for i=0:j1-1
uc(10*i+1:10*i+10)=u(i+1)*ones(1,10);
end
uc(length(t))=u(j1+1);
yc=lsim(nc,dc,uc,t);
%disp('execute plot (t,yc) ou plot (jc,y, '+'') ; ')
%disp(' ' (idem para uc , u) ')
disp('o numerador da F.T.M.F. discreta: ');disp(ny)
disp('o denominador da F.T.M.F. discreta: ');disp(d)
disp('Na figura 1 está mostrada a resposta ao degrau. ')
disp('Na figura 2 está mostrada a saída do controlador. ')
disp('Digite ENTER para visualizar as figuras')
pause
figure(1);
plot(t,yc, 'b',jc,y, '+y')
xlabel('tempo [s] ')
ylabel('y(t) e y(kT) ')
title('Resposta ao degrau')
grid
pause
figure(2)
plot(t,yc, 'b',jc,y, '+y')
xlabel('tempo [s] ')
ylabel('y(t) ,y(kT) e u(t) ')
title('Resposta ao degrau e sinal de saída do controlador')
grid
hold on
dplot (t,uc/10)
hold off

```

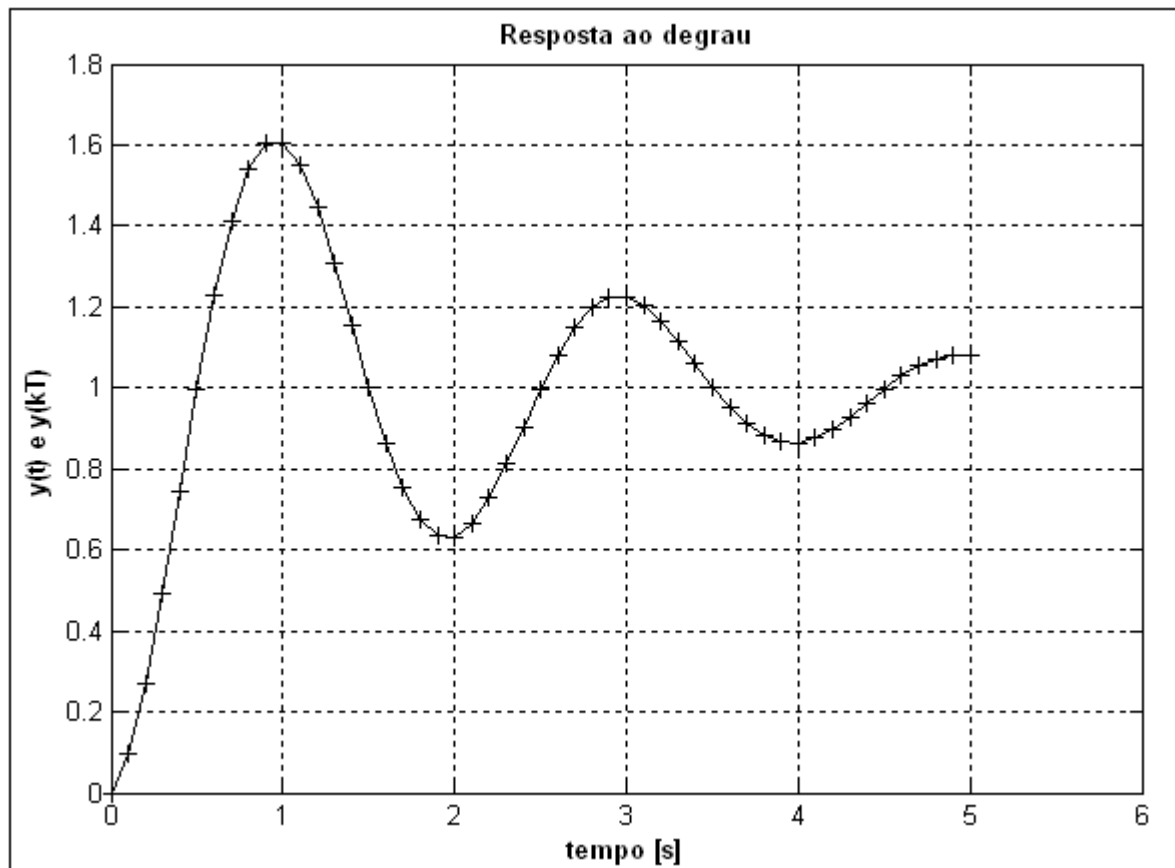
Observação: Este programa necessita das funções “tfc2d.m” e “Dplot.m”.

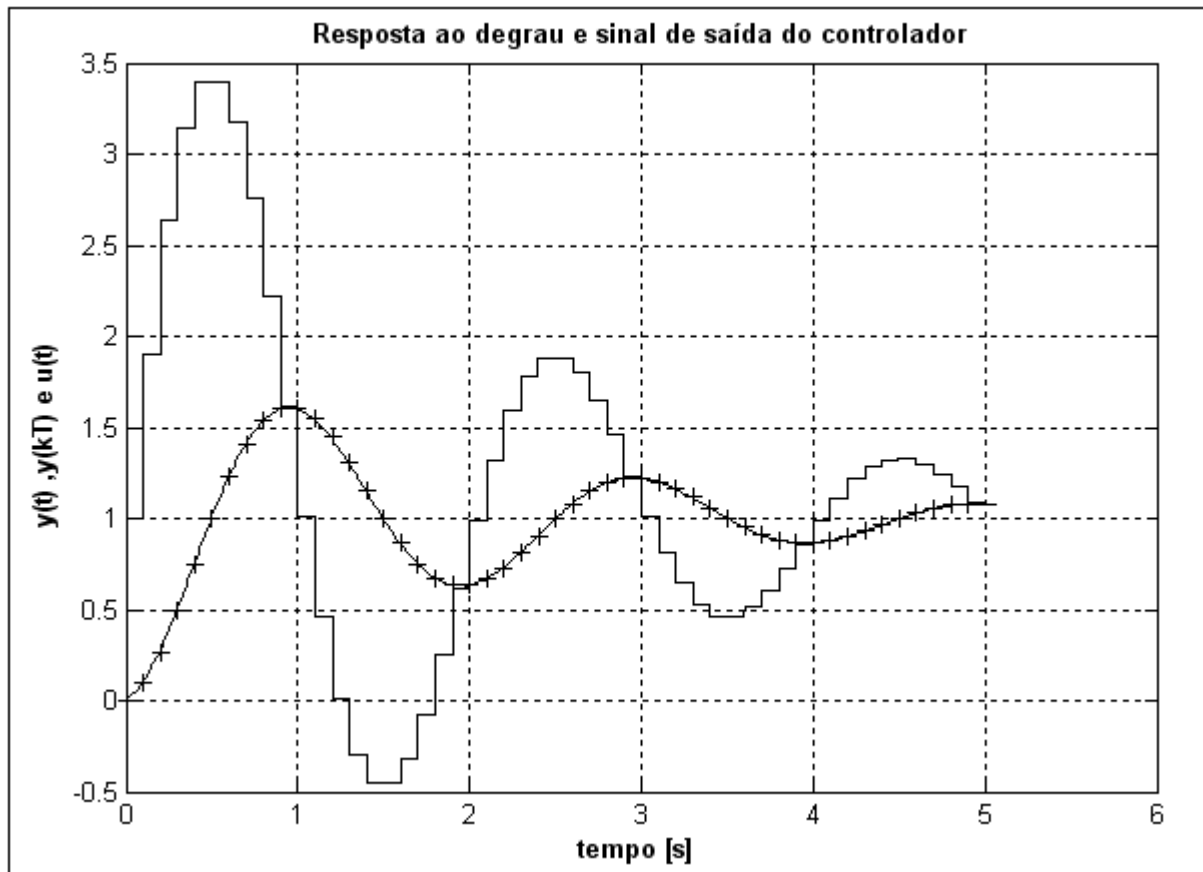
Dplot

```

function []=dplot(t,x)
% Comando:dplot(t,u)
% sendo t={0:1:n}*ts, ts o período de amostragem
% u a saída discreta do controlador
ts=t(2)-t(1)
% t=[n0:n1]*ts ; length(x)=n1-n0+1
q=length(t);
j1=t(1:q-1);
j2=t(2:q-1)-ts/500;
xy=[x(1:q-1) x(1:q-1)];
[jx,i]=sort([j1 j2]);
xx=xy(i);
plot(jx,xx,'g')

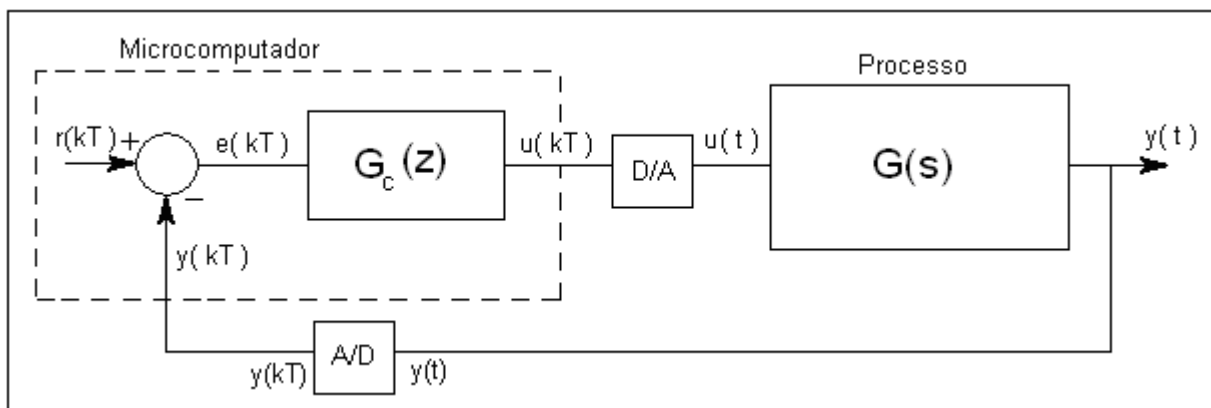
```





IV.4 – Implementação de uma Função de Transferência Discreta no Microcomputador

Como foi visto no item (4.1), o sistema de controle discreto pode ser implementado conforme o seguinte diagrama:



Observe que a entrada $r(kT)$ é gerada internamente pelo microcomputador. Genericamente, a função de transferência do controlador é:

$$G_c(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

Que pode ser representado na forma:

$$G_c(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \cdot \frac{z^{-n}}{z^{-n}}$$

Logo,

$$G_c(z) = \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}}$$

Porém,

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

Logo,

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}}$$

Ou ainda,

$$U(z) [1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}] = E(z) [b_n + b_{n-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-n}]$$

Desmembrando teremos:

$$U(z) + a_{n-1} z^{-1} U(z) + \dots + a_0 z^{-n} U(z) = b_n E(z) + b_{n-1} z^{-1} E(z) + \dots + b_0 z^{-n} E(z)$$

Aplicando a propriedade de deslocamento (para condições nulas), teremos:

$$u(k) + a_{n-1} u(k-1) + \dots + a_0 u(k-n) = b_n e(k) + b_{n-1} e(k-1) + \dots + b_0 e(k-n)$$

Assim, a saída $u(k)$ do controlador será calculada através da seguinte relação:

$$u(k) = -a_{n-1} u(k-1) - \dots - a_0 u(k-n) + b_n e(k) + b_{n-1} e(k-1) + \dots + b_0 e(k-n)$$

O programa no microcomputador deve inicialmente amostrar $y(t)$, determinando $y(k)$, então calcular o erro $e(k) = r(k) - y(k)$. Em seguida, deve calcular $u(k)$ utilizando a equação acima e então enviar o valor de $u(k)$ para o conversor D/A. O exemplo a seguir ilustra este procedimento.

Exemplo 4.3 – No exemplo (4.2), a função de transferência do controlador era:

$$G_c(z) = \frac{z}{z-1}, \quad T = 0,1s$$

E a entrada é um degrau:

$$r(k) = 1, \quad k \geq 0$$

Saída do controlador será determinada por:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = G_c(z) = \frac{z}{z-1} \rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Logo,

$$U(z)[1 - z^{-1}] = E(z)$$

$$U(z) - z^{-1}U(z) = E(z)$$

$$\Downarrow$$

$$u(k) - u(k-1) = e(k)$$

Isolando $u(k)$:

$$u(k) = u(k-1) + e(k)$$

Segundo o diagrama anterior:

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

O programa deverá implementar as duas equações de $e(k)$ e $r(k)$, como mostrado abaixo.

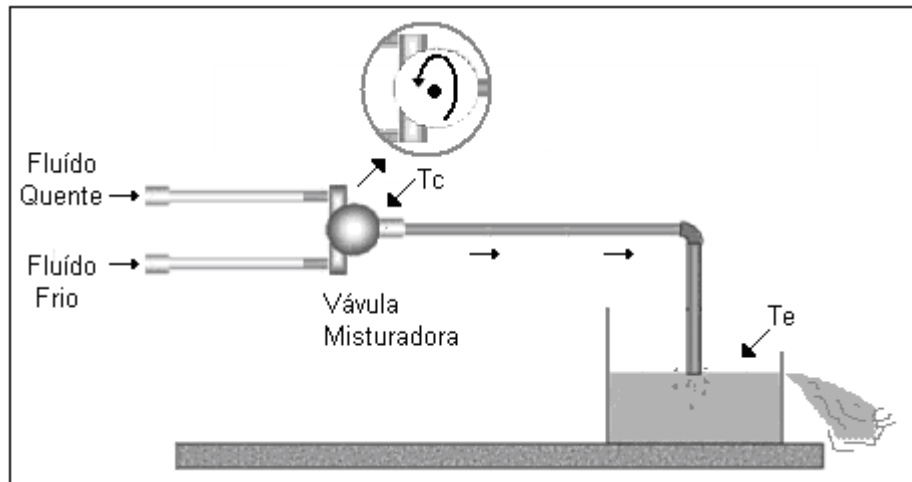
- 1 - $r_k = 1$
- 2 - $u_{\text{auxiliar}} = 0$
- 3 - Inicializa o "Timer "
- 4 - Realiza a conversão A/D : $y(k) \leftarrow [y(k)]$
- 5 - $e_k = r_k - y_k \leftarrow [e(k) = r(k) - y(k)]$
- 6 - $u_k = u_{\text{auxiliar}} + e_k \leftarrow [u(k) = u(k-1) + e(k)]$
- 7 - Realiza a conversão D/A : $u(k) \leftarrow [u(k)]$
- 8 - $u_{\text{auxiliar}} = u_k$
- 9 - Aguarda o final do período de amostragem $T = 0,1s$
- 10 - Vai para o passo 3

IV.5 – Transformada – Z de Função Contínua com Atraso

Geralmente, as respostas dos processos químicos possuem um atraso temporal de transporte do fluido entre o controlador e os sensores.

O procedimento mostrado no exemplo a seguir, possibilita a determinação exata da função de transferência discreta de tais processos.

Exemplo 4.3 – Considere o sistema de controle de temperatura do tanque:



O atraso entre o ponto T_c e T_e é λ segundos, sendo T_c a temperatura na saída da válvula misturadora e T_e a temperatura no tanque.

A função de transferência com atraso λ é:

$$\frac{T_e(s)}{T_c(s)} = G(s) = \frac{e^{-\lambda s}}{\frac{s}{a} + 1} \quad (4.8)$$

Fazendo o atraso λ uma combinação do período de amostragem T , teremos:

$$\lambda = l.T - m.T, \text{ sendo } l \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ e } 0 < m < 1$$

Por exemplo, se $T=1s$ e $\lambda=1,5s$, teremos: $\lambda=2.1-0,5.1$, logo $l=2$ e $m=0,5$.

Substituindo $\lambda = l.T - m.T$ na equação (4.8) teremos:

$$G(s) = \frac{e^{-(lT - mT)s}}{\frac{s}{a} + 1}$$

Logo,

$$G(s) = \frac{e^{-lTs} \cdot e^{mTs}}{\frac{s}{a} + 1}$$

A função de transferência discreta do subsistema:

D/A – Processo com atraso – A/D, será:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-lTs} \cdot e^{mTs} \cdot \frac{a}{s(s+a)} \right\} \right\}$$

Como l é inteiro, teremos:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot z^{-l} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{mTs} \cdot \frac{a}{s(s+a)} \right\} \right\}$$

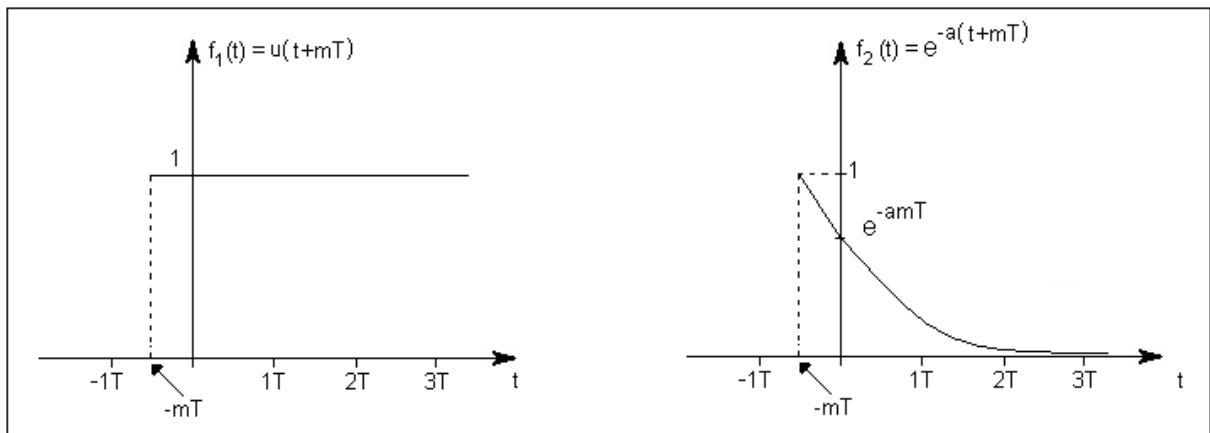
Expandindo em frações parciais:

$$H(z) = \frac{z-1}{z^{l+1}} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{mTs} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right) \right\} \right\}$$

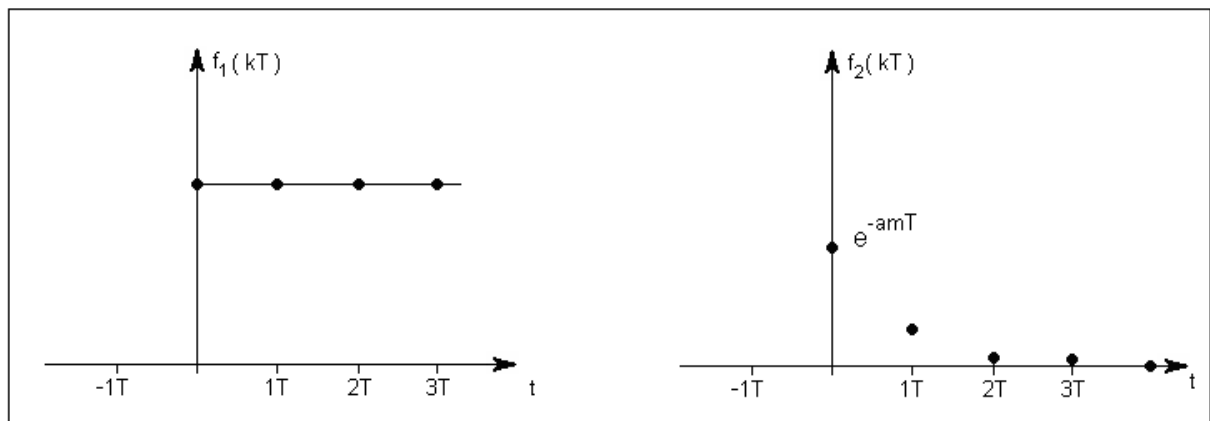
Logo,

$$H(z) = \frac{z-1}{z^{l+1}} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \underbrace{\frac{e^{mTs}}{s}}_{f_1(s)} - \underbrace{\frac{e^{mTs}}{s+a}}_{f_2(s)} \right\} \right\}$$

A transformada inversa de Laplace das funções $f_1(s)$ e $f_2(s)$ são:



As amostragens com período T destas funções serão:



Logo,

$$f_1(kT) = u(kT) \text{ e } f_2(kT) = e^{-amT} \cdot e^{-akT}$$

Assim,

$$H(z) = \frac{z-1}{z^{l+1}} \cdot \mathcal{Z} \{ u(kT) - e^{-amT} \cdot e^{-akT} \}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z^{l+1}} \cdot \mathcal{Z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{e^{-amT} \cdot z}{z - e^{-aT}} \right]$$

Ou ainda:

$$H(z) = (1 - e^{-amT}) \cdot \frac{z + \alpha}{z^l (z - e^{-aT})}, \text{ sendo } \alpha = \frac{(e^{-amT} - e^{-aT})}{(1 - e^{-amT})}$$

Exemplo:

Se $a=1$, $T=1s$ e $\lambda=1,5s$, calcule a resposta ao degrau deste sistema.

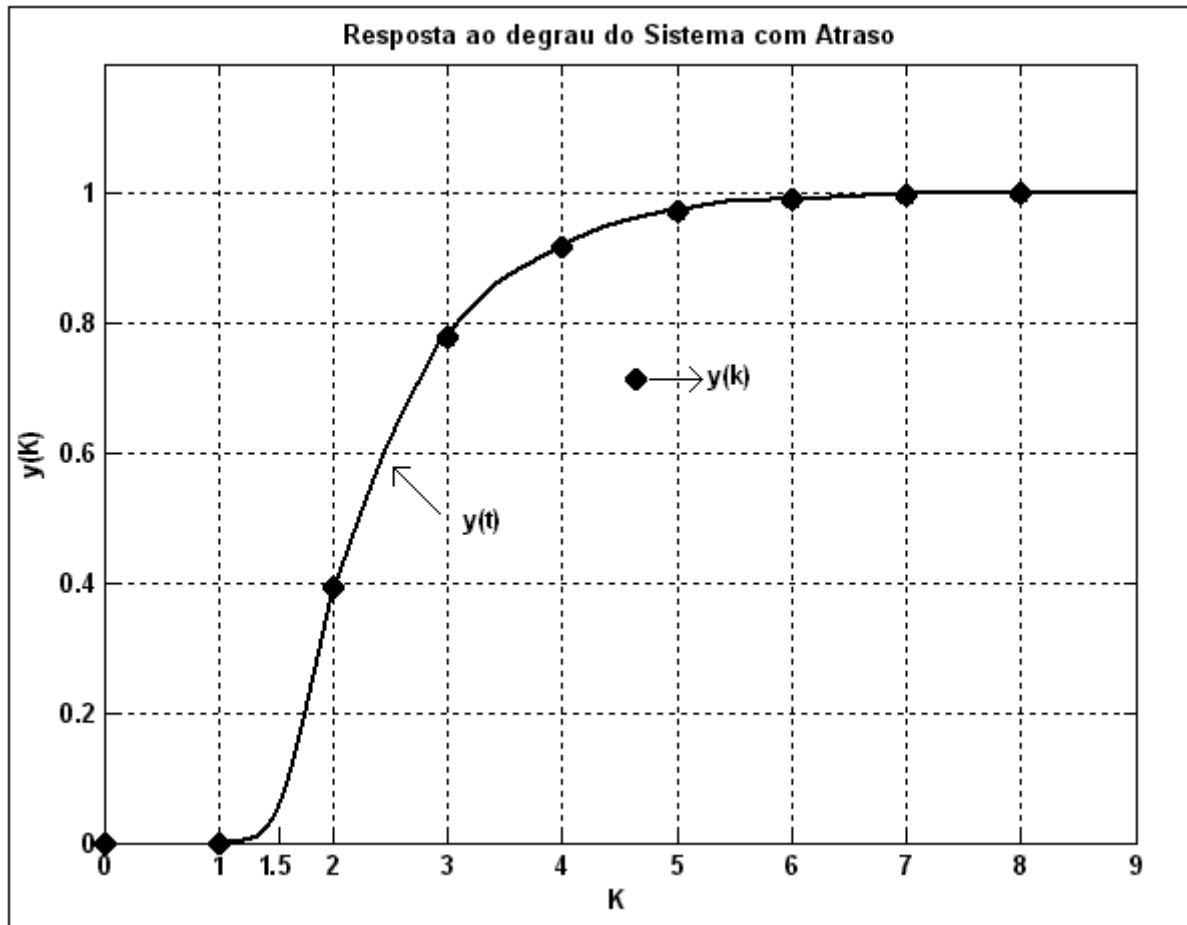
Solução:

Teremos: $\lambda=2.1-0,5.1$ logo, $l=2$ e $m=0,5$ substituindo, teremos:

$$H(z) = (1 - e^{-0,5}) \cdot \frac{\left[z + \frac{(e^{-0,5} - e^{-1})}{(1 - e^{-0,5})} \right]}{z^2 (z - e^{-1})}$$

$$H(z) = 0,3935 \cdot \frac{z + 0,6065}{z^2 (z - 0,3679)}$$

Aplicando-se o degrau, as respostas de $G(s)$ e $H(z)$ estão mostradas na figura a seguir.



V – Método do Lugar das Raízes (Root – Locus)

V.1 – Introdução

O método do lugar das Raízes foi criado por R. Evans em 1953. Permite estudar a evolução das raízes de uma equação, quando um parâmetro é variado continuamente. Possibilitando a determinação deste parâmetro de tal forma que o sistema atinja o comportamento dinâmico desejado.

Ambas as funções de transferência de sistemas contínuos e discretos são funções complexas, ou seja, funções que possuem variáveis complexas: s ou z , respectivamente. Desta forma, as regras do método do lugar das raízes são as mesmas para os dois sistemas. Portanto, será mostrada aqui apenas uma revisão deste tópico.

O princípio do método está baseado na realimentação mostrada a seguir.

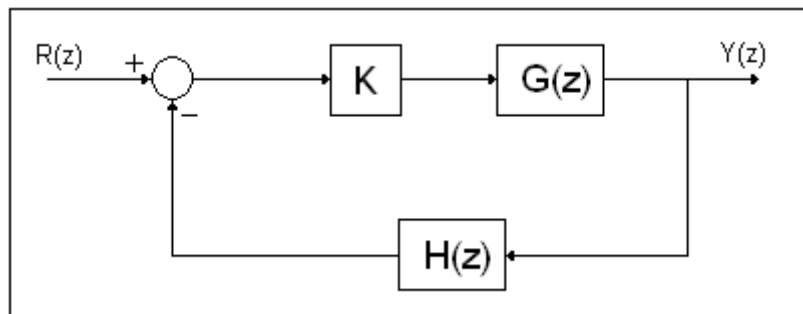


FIGURA 5.1

Sendo que se deseja determinar a influência do ganho k ($0 < k < +\infty$) sobre os polos do sistema em malha fechada. A função de transferência de malha fechada (F.T.M.F.) do sistema da figura acima é:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{k.G(z)}{1 + k.G(z).H(z)}$$

O objetivo do método é estabelecer regras simples para traçar o lugar geométrico formado pelas raízes de $1 + k.G(z).H(z)$, quando k variar de 0 à $+\infty$, sem o conhecimento explícito das raízes. Deseja estudar a seguinte equação:

$$1 + k.G(z).H(z) = 0, \text{ para } 0 < k < +\infty$$

V.2 – As regras do Root - Locus

Regra 1 – Os ramos do “Root – Locus” começam nos polos de $G(z).H(z)$, nos quais $k=0$. Os ramos terminam nos zeros de $G(z).H(z)$, inclusive zeros no infinito. O número de “zeros no infinito” é igual a:

$$n_{z\infty} = n_p - n_z \quad (5.1)$$

Onde n_p - números de polos de $G(z).H(z)$

n_z - números de zeros de $G(z).H(z)$

Exemplo: Suponha que no sistema da figura (5.1), $G(z)$ e $H(z)$ são:

$$G(z) = \frac{(z+2)}{z^2} \quad \text{e} \quad H(z) = \frac{(z+5)}{(z+4)} \quad (5.2)$$

As raízes de $1+k.G(z).H(z)$ serão determinadas por:

$$1+k.\frac{(z+2).(z+5)}{z^2(z+4)} = 0 \quad (5.3)$$

Ou ainda:

$$z^2(z+4) + k.(z+2).(z+5) = 0 \quad (5.4)$$

i) Se $k=0$, a equação acima ficará:

$$z^2(z+4) = 0$$

$$\text{Logo: } z_1 = z_2 = 0 \quad \text{e} \quad z_3 = -4$$

Note que esses são os polos de $G(z).H(z)$.

ii) Se $k \rightarrow +\infty$, para analisar este intervalo, vamos reescrever a equação (5.4):

$$k = -\frac{z^2(z+4)}{(z+2).(z+5)} \quad (5.5)$$

Se $k \rightarrow +\infty$, o lado direito da equação (5.5) se iguala a $+\infty$ se e somente se:

$$z \rightarrow -2 \quad (\text{pela esquerda})$$

$$z \rightarrow -5 \quad (\text{pela esquerda})$$

ou

$$z \rightarrow -\infty$$

Sendo que $z_1 = -2$ e $z_2 = -5$ são os zeros de $G(z).H(z)$ e $z \rightarrow -\infty$ é um “zero no infinito”.

Neste caso,

$$n_p = 3 \quad \text{e} \quad n_z = 2 \quad \text{logo} \quad n_{z\infty} = 3 - 2 = 1 \quad (\text{número de zeros no infinito})$$

Regra 2 – As regiões do eixo real à esquerda de um número ímpar de polos e zeros de $k.G(z).H(z)$ pertencem ao “Root – locus”.

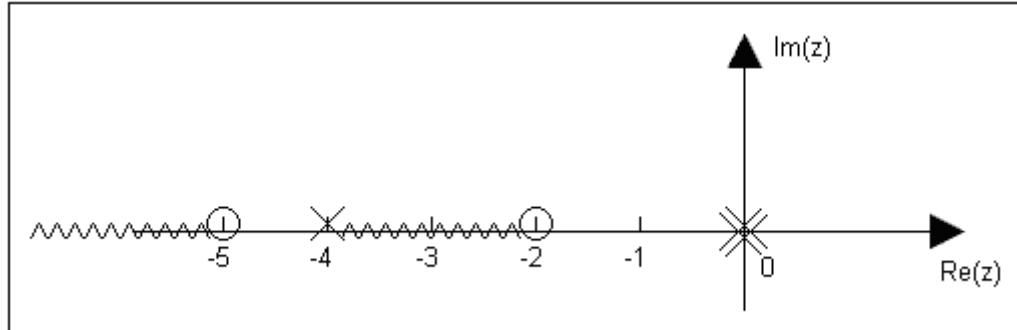
Exemplo: Para os valores do exemplo anterior teremos:

$$k.G(z).H(z) = \frac{k.(z+2).(z+5)}{z^2(z+4)}$$

Os zeros são: $z_1 = -2$ e $z_2 = -5$

Os polos são: $P_1 = P_2 = 0$ e $P_3 = -4$

No plano imaginário os polos são representados por “X” e os zeros por “O”.
A aplicação da regra 2 neste caso será:



Observação: Esta regra é facilmente obtida verificando-se a condição de ângulo da equação $1 + k.G(z).H(z) = 0$, que pode ser executada na forma:

$$k.G(z).H(z) = -1, \quad k > 0$$

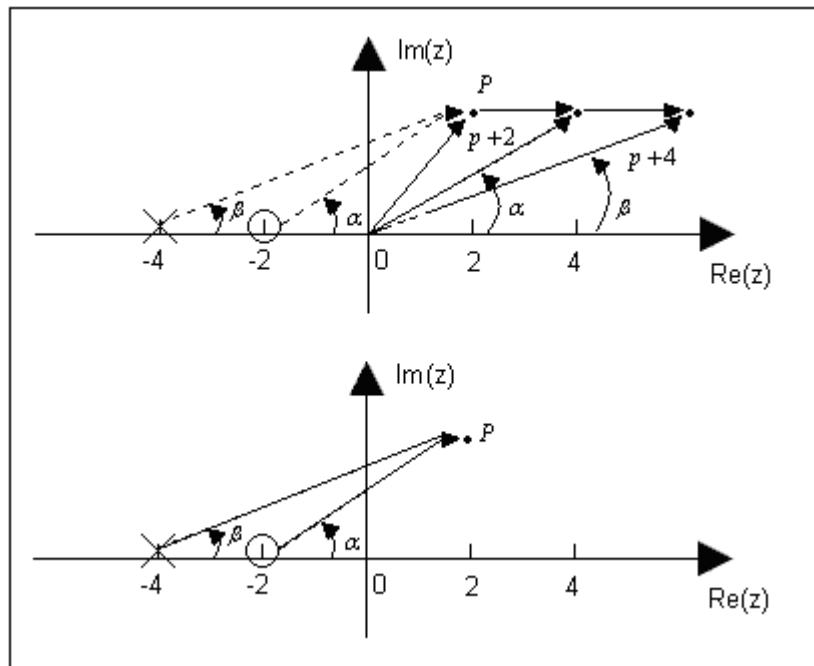
Para que esta equação seja verdadeira, o ângulo deverá ser:

$$\angle G(z).H(z) = \angle -1 = (2i + 1).180^\circ, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

se $G(z).H(z) = \frac{z + 2}{z + 4}$, quanto será o ângulo de $G(z).H(z)|_{z=p} = ?$

Neste caso teremos: $\angle G(z).H(z)|_{z=p} = \angle \frac{p + 2}{p + 4} = \angle p + 2 - \angle p + 4$

Que segundo a figura abaixo: $G(z).H(z)|_{z=p} = \alpha - \beta$



Regra 3 – Quando k se aproxima de $+\infty$, os ramos do “Root – Locus”, assintotam retas com inclinação:

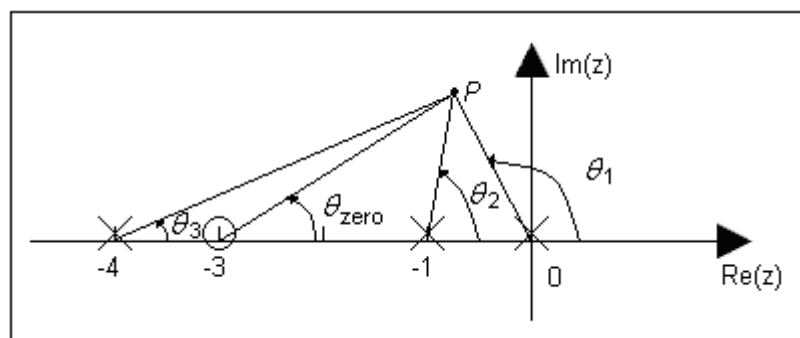
$$\frac{2i+1}{n_p - n_z} \cdot 180^\circ, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Sendo n_p – n° de polos de $G(z).H(z)$

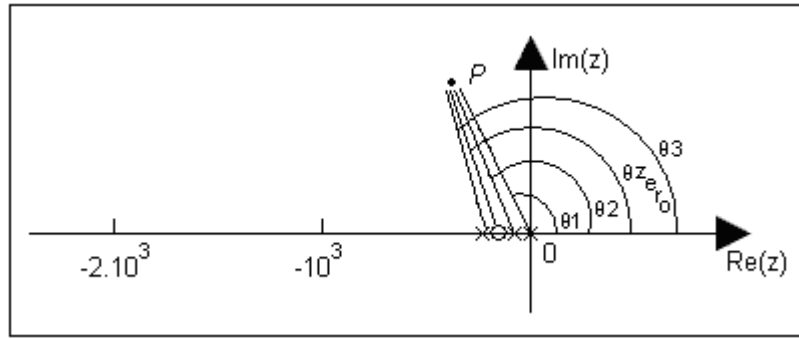
n_z – n° de zeros de $G(z).H(z)$

Verificação: Considere $G(z).H(z) = \frac{k(z+3)}{z(z+1).(z+4)}$

Temos: $n_p = 3$ e $n_z = 1$. No plano complexo teremos:



Fazendo o ponto P crescer infinitamente, e para verificar se P pertence ao “Root – Locus” pode-se reescrever a figura acima:



O ponto P pertencerá ao “Root – Locus”, se:

$$\left| G(z).H(z) \right|_{z=p} = (2i+1).180^\circ, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Sendo que:

$$\left| G(z).H(z) \right|_{z=p} = -\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_{zero}$$

Se $P \rightarrow \infty, \theta_{zero} \cong \theta_1 \cong \theta_2 \cong \theta_3 \cong \theta$, logo:

$$\left| G(z).H(z) \right|_{z=P \rightarrow \infty} = \theta_{zero} - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \theta - 3\theta = (2i+1).180^\circ$$

Logo,

$$\theta = \frac{(2i+1).(-180^\circ)}{3-1} = \frac{(2i+1).180^\circ}{3-1}$$

Sendo $n_p = 3$; $n_z = 1$

Porém, $n_p - n_z = 3-1$ então:

$$\theta = \frac{(2i+1).(180^\circ)}{n_p - n_z}, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Exemplo: Para

$$G(z).H(z) = \frac{k}{(z+1).(z+4).z} : n_p = 3 \text{ e } n_z = 0$$

Então os ângulos das assíntotas serão:

$$\theta = \frac{(2i+1).180^\circ}{3-0} = (2i+1).60^\circ, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Para,

$i = 0 \rightarrow \theta = 60^\circ$; $i = 1 \rightarrow \theta = 180^\circ$ e $i = 2 \rightarrow \theta = 300^\circ$

$$i = -1 \rightarrow \theta = -60^\circ ; i = -2 \rightarrow \theta = -180^\circ \text{ e } i = -3 \rightarrow \theta = -300^\circ$$

Porém,

$$180^\circ = -180^\circ , 60^\circ = -300^\circ \text{ e } -60^\circ = 300^\circ$$

Logo:

$$\theta_1 = 60^\circ , \theta_2 = -60^\circ \text{ e } \theta_3 = 180^\circ$$

Regra 4 – O ponto de partida das assíntotas é o centro de gravidade (C.G) da configuração de polos e zeros, ou seja:

$$CG = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Zeros}}{n_p - n_z}$$

Exemplo: Para o sistema do exemplo anterior, onde $G(z).H(z) = \frac{1}{z(z+1).(z+4)}$, teremos:

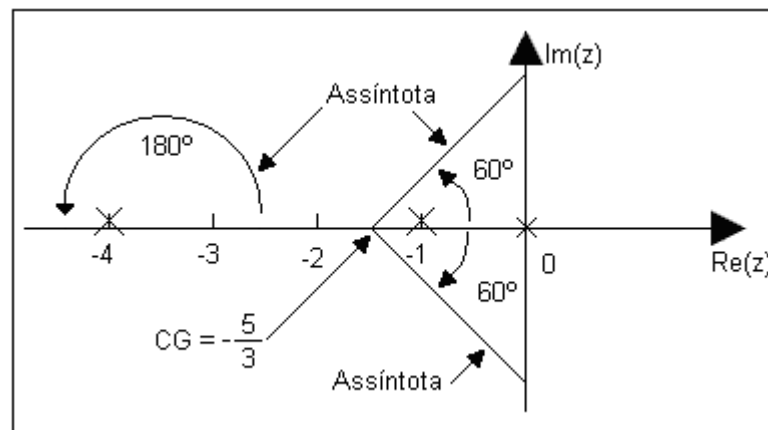
_ $n_p = 3$ e $n_z = 0$;

_ os polos são: $P_1 = 0$, $P_2 = -1$ e $P_3 = -4$.

_ os zeros são: nenhum.

Logo,
$$CG = \frac{(0 - 1 - 4) - 0}{3 - 0} = \frac{-5}{3}$$

Então:



Regra 5 – Os pontos nos quais os ramos do “Root – Locus” deixam (ou entram) o eixo real são determinados utilizando-se a seguinte relação:

$$\frac{d}{dz} \left[(G(z).H(z))^{-1} \right] = 0$$

No exemplo descrito anteriormente, teremos:

$$G(z).H(z) = \frac{1}{z(z+4).(z+1)}$$

Então,

$$(G(z).H(z))^{-1} = z(z+4).(z+1) = z^3 + 5z^2 + 4z$$

Logo,

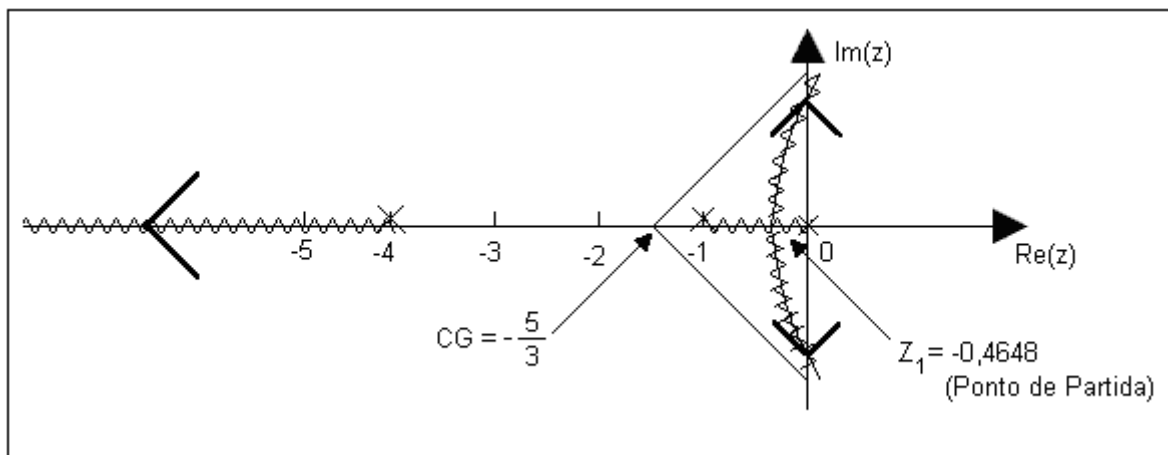
$$\frac{d}{dz} \left[(G(z).H(z))^{-1} \right] = \frac{d}{dz} (z^3 + 5z^2 + 4z) = 3z^2 + 10z + 4 = 0$$

As soluções são:

$$z_1 = -0,4648 \text{ e}$$

$$z_2 = -2,8685 \text{ (desprezado, pois não pertence ao root – locus).}$$

O root – locus será:



Regra 6 – Duas raízes deixam ou entram no eixo real com ângulos $\pm 90^\circ$.

Regra 7 – O “Root – Locus” é simétrico em relação ao eixo real.

Isto decorre do fato de que as raízes de um polinômio de coeficientes reais ou são reais ou pares complexos conjugados.

Regra 8 – Para se determinar o ganho k associado a um ponto p do “Root – Locus”, deve-se utilizar a condição de módulo da equação.

$$1 + k.G(z).H(z) = 0$$

Que pode ser colocado numa forma mais direta, reescrevendo-se a equação acima:

$$k.G(z).H(z) = -1$$

Pela condição de módulo temos:

$$|k.G(z).H(z)| = |-1|$$

Como $0 < k < +\infty$ teremos:

$$k_1 |G(z).H(z)|_{z=p} = 1$$

Logo,

$$k_1 = \frac{1}{|G(z).H(z)|_{z=p}}$$

Exemplo: Suponha que no sistema da figura (5.1), as funções de transferência são: $G(z) = \frac{1}{z-1}$ e $H(z) = \frac{1}{z}$. Calcule o máximo valor de k de tal forma que o sistema seja estável. Trace o “Root – Locus” do sistema para ajudar, $0 < k < +\infty$.

Neste caso, temos:

$$k.G(z).H(z) = \frac{k}{z(z-1)}$$

Temos: Polos $\rightarrow P_1 = 0$ e $P_2 = 1$

Zeros $\rightarrow$ nenhum

$$n_p = 2$$

$$n_z = 0 \quad \Rightarrow n_{z \rightarrow \infty} = 2 - 0 = 2$$

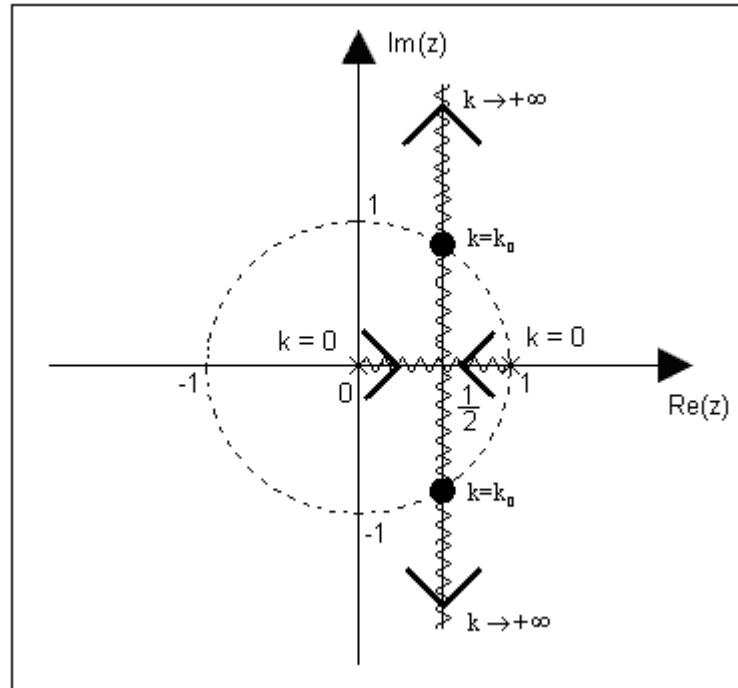
_ Ângulo das assíntotas:
$$\theta = \frac{(2i+1).180^\circ}{n_p - n_z} = \pm 90^\circ$$

_ CG das assíntotas:
$$CG = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{zeros}}{n_p - n_z} = \frac{0+1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

_ Ponto de partida:

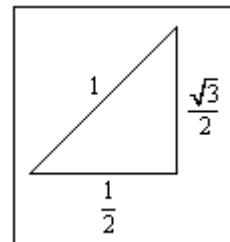
$$\frac{d}{dz} \left((G(z).H(z))^{-1} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dz} (z^2 - z) = 2z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

O “Root – Locus” com a região de estabilidade é:



Percebe-se no “Root – Locus” que o sistema será estável se as raízes da F.T.M.F. ficar dentro do círculo unitário. Isto é respeitado se e somente se $0 < k < k_0$. Para determinar k_0 , iremos utilizar a regra 8, sendo que o ponto de cruzamento do “Root – Locus” com o círculo unitário é:

$$z_0 = \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Pela regra 8, a condição de módulo é:

$$k_0 = \frac{1}{\left| \frac{1}{z(z-1)} \right|_{z=z_0}} = \left| \frac{1}{\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}} \right| \cdot \left| \frac{1}{\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 \right| = 1$$

Logo, para que o sistema seja estável, é necessário que: $0 < k < 1$.

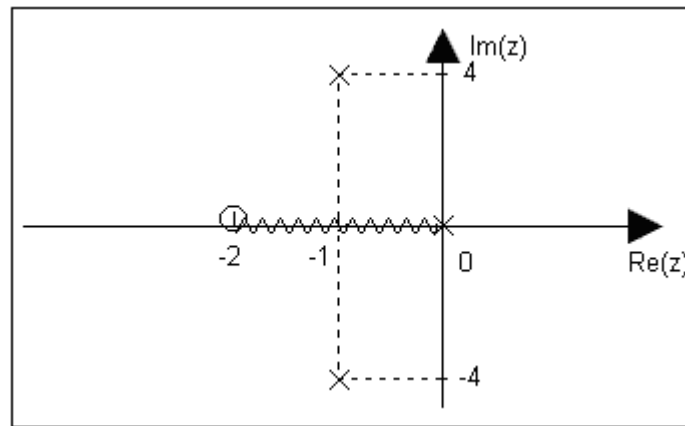
Regra 9 – Os ângulos de saída (chegada) de polos (aos zeros) são determinados a partir da condição geral de ângulo.

Exemplo: Seja

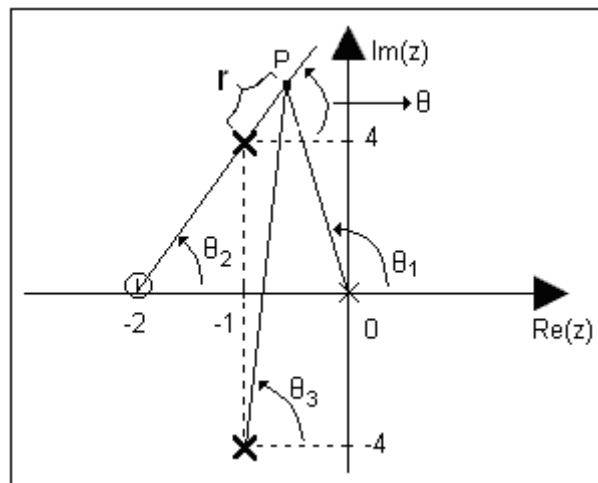
$$k.G(z).H(z) = \frac{k(z+2)}{z(z+1+4j).(z+1-4j)}$$

Neste caso: $n_{z \rightarrow \infty} = 3 - 1 = 2$, portanto teremos 2 assíntotas.

O esboço inicial do “Root – Locus” é:



Precisa-se determinar o ângulo θ com o qual o “Root – Locus” deixa os polos complexos. Para isto, verificamos qual é o ângulo de um ponto P próximo a esse polo, fazendo:



Pela condição de ângulo, teremos:

$$\left| G(z).H(z) \right|_{z=p} = \theta_2 - \theta - \theta_1 - \theta_3 = (2i + 1).180^\circ, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Se a distância em P e o polo forem nulos, ou seja, $r \rightarrow 0$, os ângulos serão:

$$\theta_1 = \left(\arctg \frac{1}{4} \right) + 90^\circ = 104,04^\circ$$

$$\theta_2 = \arctg \frac{4}{1} = 75,96^\circ$$

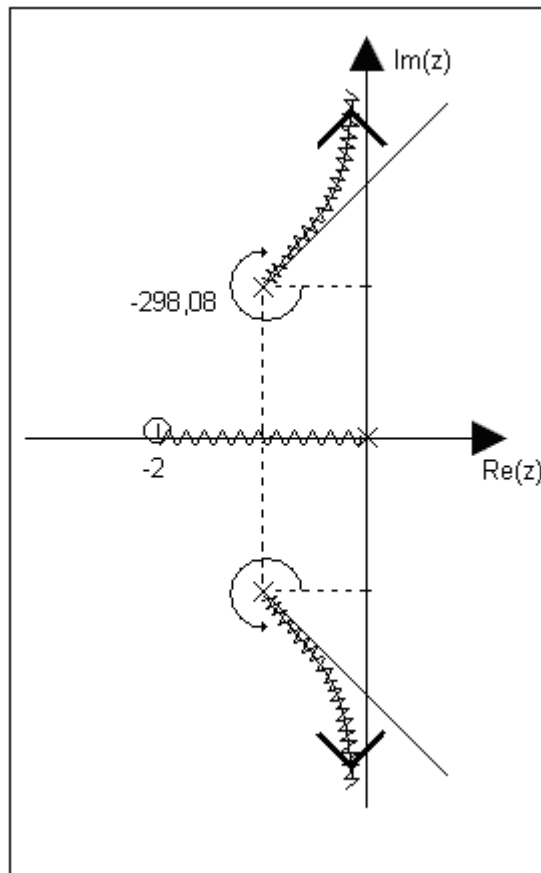
$$\theta_3 = 90^\circ$$

$$\theta = ?$$

Logo, substituindo esses valores na equação de ângulo, teremos:

$$75,96^\circ - \theta - 104,04^\circ - 90^\circ = (2i + 1).180^\circ$$

Para $i = 0 \Rightarrow \theta = -298,08^\circ$, que é o ângulo de partida do polo.
O “Root – Locus” será:



Exemplo: Suponha que no sistema da figura (5.1), tenhamos:

$$k.G(z).H(z) = \frac{k(z+0,5)}{z(z-1)}. \text{ Trace o “Root – Locus”}.$$

Este sistema tem dois polos e um zero, é conhecido que neste caso, o “Root – Locus” é um círculo centrado no zero. Para determinar o raio basta calcular o ponto de partida com a relação:

$$\frac{d}{dz} \left[(G(z).H(z))^{-1} \right] = 0 \quad (\text{regra 5})$$

Neste caso,

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{z(z-1)}{(z+0,5)} \right] = 0$$

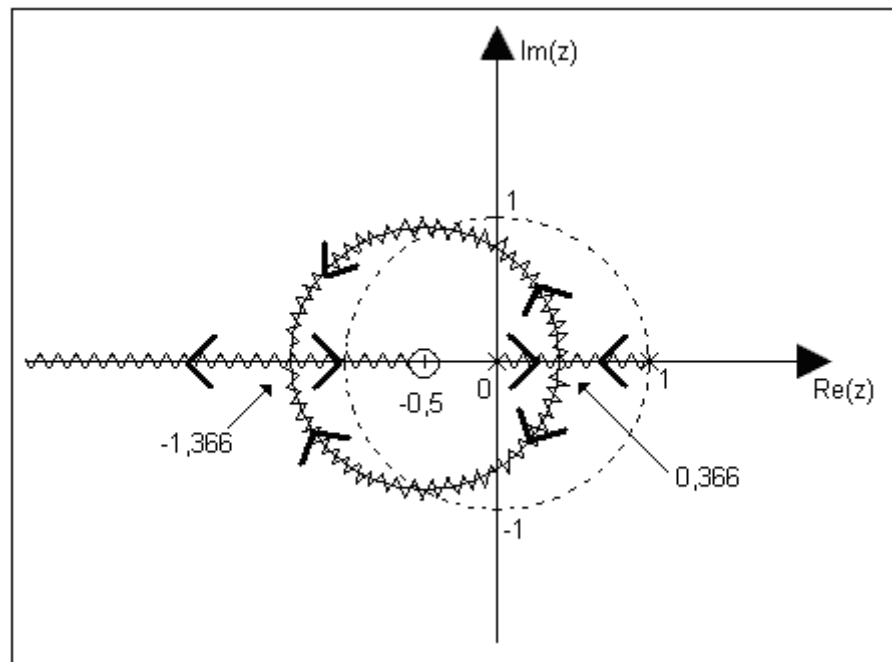
$$\frac{(2z-1).(z+0,5)-(z^2-z)}{(z+0,5)^2} = 0 \Rightarrow z^2 + z - 0,5 = 0$$

Então:

$$z_1 = 0,366$$

$$z_2 = -1,366$$

O “Root – Locus” será:



Este sistema tem os mesmos polos que o do exemplo da página 61, mais um zero em -0,5. Comparando os dois “Root – Locus” dos exemplos, percebe-se que a presença do zero “atrai” o “Root – Locus”.

No próximo capítulo, serão apresentadas as especificações de um sistema de controle e os principais métodos de projeto de controladores digitais.

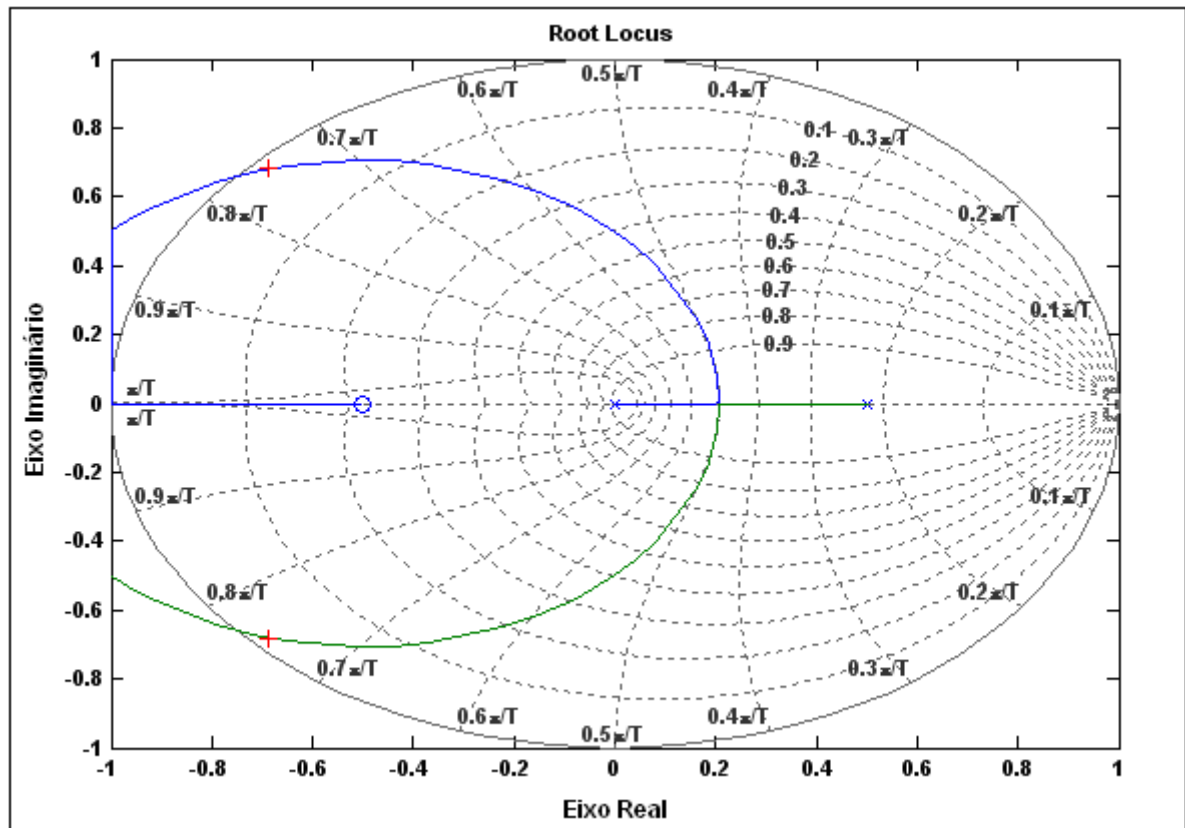
O **MATLAB** desenha o Root – Locus de um sistema, como pode ser visto no programa

a seguir, sendo que $G(z).H(z) = \frac{z + 0,5}{(z - 0,5)z}$:

Rootlocd.m

```
num=[1 0.5];
den=conv([1 -0.5],[1 0]);
rlocus(num,den);
zgrid
[k,po] = rlocfind(num,den)

% Resultado da execução do Programa
% rootlocd
% select a point in the graphics window
% selected_point =
% -0.7506 + 0.6568i
% k =
%      2.0043
% po =
%      -0.7521 + 0.6606i
%      -0.7521 - 0.6606i
```



O **MATLAB** possui um ambiente gráfico com várias ferramentas úteis para o Root – Locus, chamado de “rltool”. Para entrar no ambiente, supondo

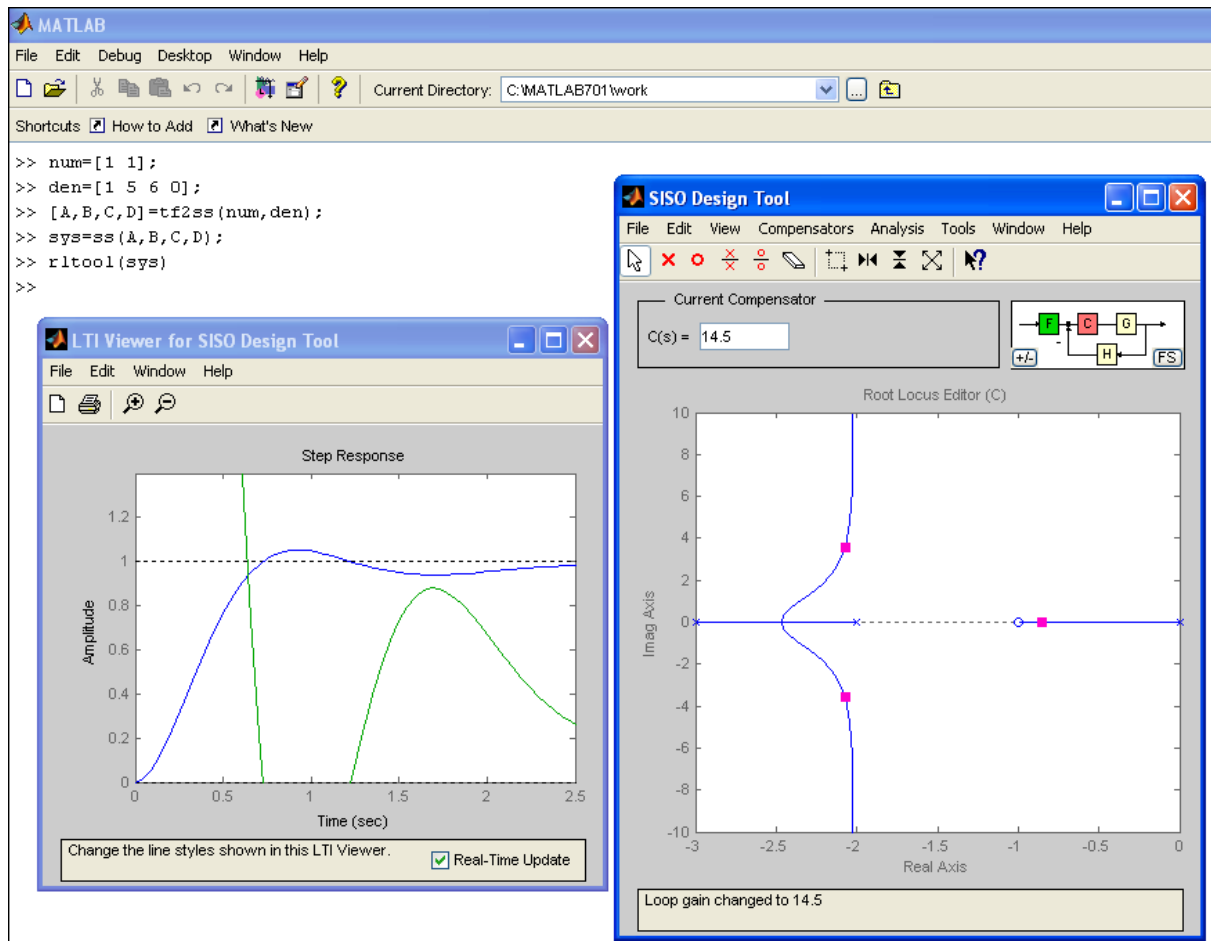
$$G(s).H(s) = \frac{s+1}{s^3+5s^2+6s}, \text{ digite:}$$

```
num=[1 1];
den=[1 5 6 0];
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den);
sys=ss(A,B,C,D);
rltool(sys)
```

ou

```
num=[1 1];
den=[1 5 6 0];
sys=tf(num,den);
rltool(sys)
```

As telas do ambiente “rltool” são mostradas abaixo:



Observação: A resposta ao degrau mostrada acima, é resposta ao degrau do sistema contínuo em s . Para encontrar o discreto equivalente, use o menu “Tools”.

VI – Métodos de Projetos de Controladores Digitais

VI.1 – Introdução

Neste capítulo serão estudados alguns dos principais métodos de projeto de controladores digitais, segundo a abordagem clássica da função de transferência. Serão apresentadas as vantagens e as suas limitações. Antes, porém, serão descritas as especificações que estes projetos deverão atender.

VI.2 – Especificações de Sistemas de Controle

Em geral, os sistemas de controle devem atender às seguintes especificações:

a) Erro de regime permanente

É a precisão de rastreamento em regime permanente que o sistema deve ter.

b) Resposta dinâmica

É a precisão que o sistema deve ter durante o período transitório.

b₁) Estabilidade;

b₂) Tempo de subida (t_s);

b₃) “Overshoot” ou sobre sinal (P.O);

b₄) Tempo de estabelecimento (t_e).

A figura abaixo ilustra estas especificações:

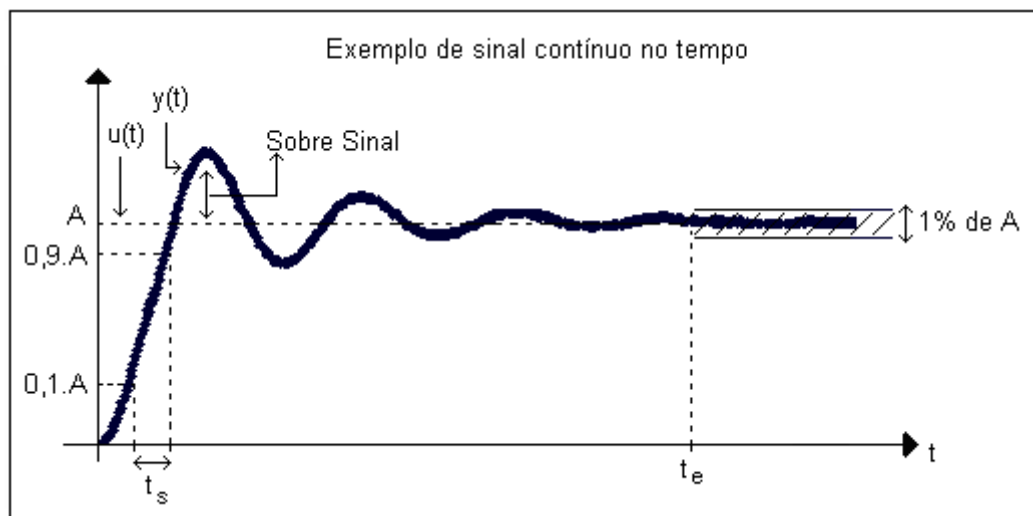


FIGURA 6.1

c) Esforço requerido ao controle

c₁) Magnitude máxima da entrada $u(t)$.

c₂) Mínima energia: $k \int u^2 dt$. Neste caso é necessário utilizar técnicas de controle ótimo não abordada neste curso.

Exemplo: As especificações para o projeto do controlador de uma antena que recebe sinais de um satélite de comunicação, dado na figura abaixo, são:

a – Precisão de rastreamento em regime menor que 0,01 rad,

b – Percentagem de “overshoot” à entrada degrau $\leq 16\%$,

c – Tempo de estabelecimento ≤ 10 segundos, (1%).

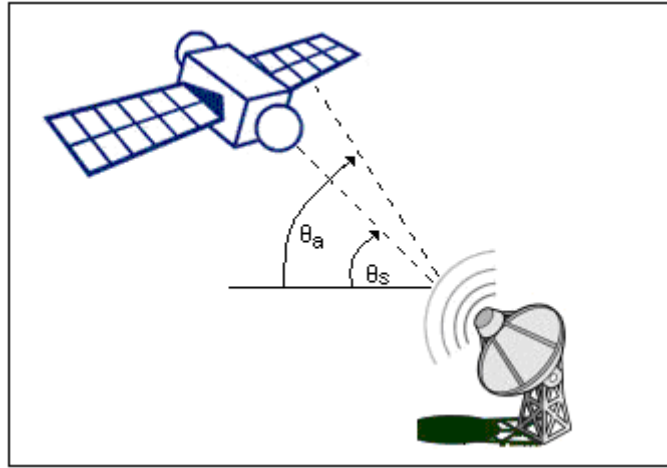


FIGURA 6.2

O satélite realiza um movimento com velocidade angular constante de 0,01 rad/s. Para atender à especificação de rastreamento em regime permanente, deve-se “traduzir” essa informação, ou seja, o ângulo θ_s varia em função do tempo como:

$$\theta_s(t) = \left(0,01 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \cdot t \quad \text{ou} \quad \theta_s(t) = 0,01 \cdot t$$

Que é a entrada rampa mostrada abaixo:

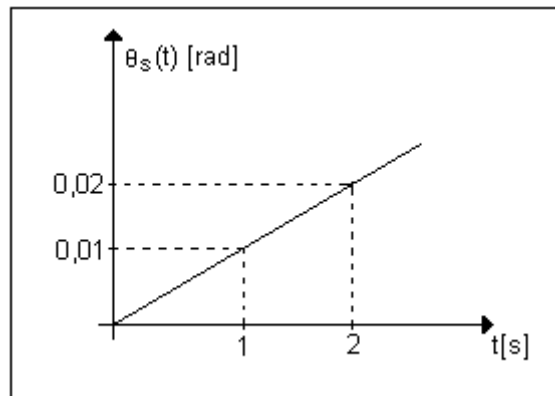


FIGURA 6.3

O ângulo $\theta_a(t)$ da antena deverá rastrear o ângulo $\theta_s(t)$ com precisão de 0,01 rad ($\approx 0,6^\circ$). Para projetar este controlador deve-se primeiramente estudar erro de regime permanente para entrada tipo rampa, mostrado mais adiante.

Este exemplo da antena rastreadora será utilizado nos tópicos de projeto, portanto, já aproveitaremos agora para deduzir sua função de transferência.

A equação de movimento desta antena, sem considerar a ação do vento, é dada por:

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) = T(t) \quad \text{ou} \quad T(t) - B\dot{\theta}(t) = J\ddot{\theta}(t)$$

Sendo:

- θ – Ângulo da antena;
- T – Torque do motor que movimenta a antena;
- J – Momento de inércia de todo o sistema;
- B – Coeficiente de amortecimento (devido ao atrito).

A função de transferência (F.T.) é determinada aplicando-se a transformada de Laplace na equação de movimento:

$$\mathcal{L}\{J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t)\} = \mathcal{L}\{T(t)\}$$

Supondo que o sistema tenha condições iniciais nulas,

$$Js^2\theta(s) + Bs\theta(s) = T(s)$$

Ou ainda,

$$\theta(s) = \frac{T(s)}{Js^2 + Bs}$$

Como exemplo, assuma que $J/B = 10$ segundos e tomando uma nova entrada:

$$U(s) = \frac{T(s)}{B}, \text{ teremos:}$$

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(10s + 1)}$$

Então,

$$G(s) = \frac{1}{s(10s + 1)}$$

A configuração geral do sistema de controle desta antena e outros sistemas são dados na figura abaixo:

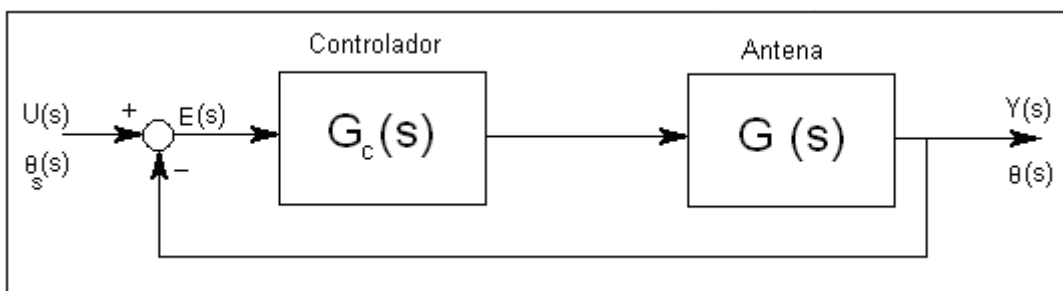


FIGURA 6.4

Se o controlador for digital, este sistema de controle será representado na seguinte forma:

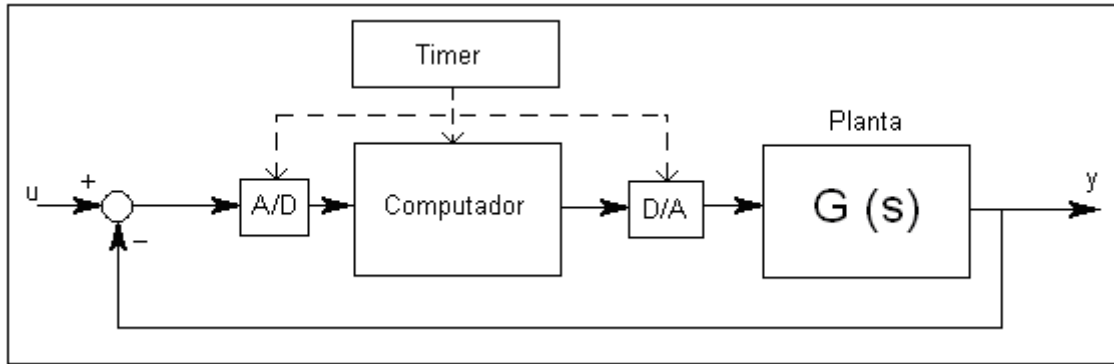


FIGURA 6.5

O equivalente discreto do subsistema D/A – G(s) – A/D é obtido por:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \right\}_{t=kT}$$

Assim, o sistema da figura acima pode ser representado na forma discreta integralmente:

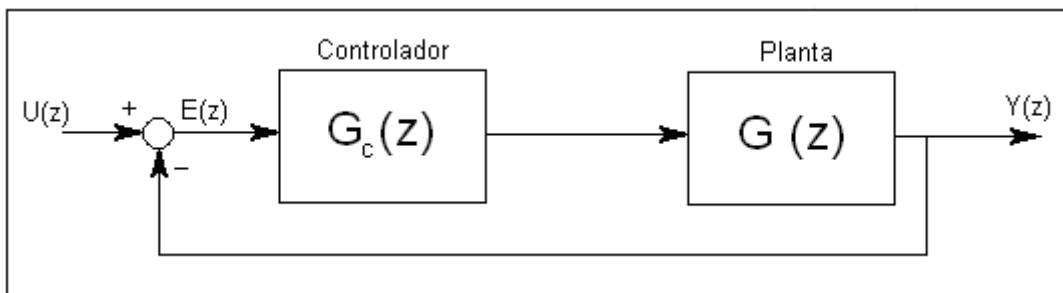


FIGURA 6.6

Sendo que $G_c(z)$ é a função de transferência do controlador discreto.

A estrutura da figura (6.6) será utilizada no decorrer deste capítulo.

A seguir serão apresentadas as especificações de controle.

VI.2.1 – Erro de Regime Permanente

O erro entre a entrada $U(z)$ e a saída $Y(z)$ do sistema na figura (6.6) é:

$$E(z) = U(z) - Y(z)$$

Como

$$Y(z) = G(z).G_c(z).E(z), \text{ substituindo teremos:}$$

$$E(z) = U(z) - G(z).G_c(z).E(z)$$

Reagrupando,

$$E(z) = \frac{U(z)}{1 + G_c(z).G(z)}$$

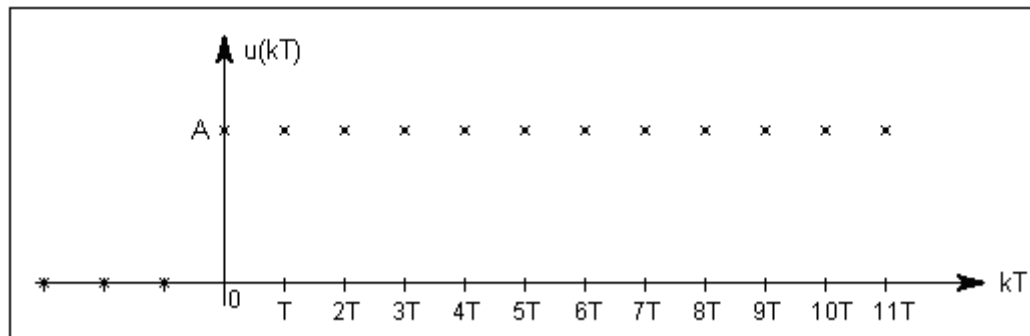
Esta é a equação que relaciona o erro em função da entrada. Para estudar o erro de regime permanente, temos que fazer $t \rightarrow +\infty (k \rightarrow +\infty)$ e analisar $e(+\infty)$. Faremos isto primeiramente para a entrada degrau e depois para rampa.

i – Erro de regime permanente para entrada tipo degrau

A transformada – Z de um sinal tipo degrau é:

$$U(z) = \frac{A.z}{z-1}$$

Sendo:



O erro para essa entrada é:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G_c(z).G(z)} \cdot \frac{A.z}{(z-1)}$$

Supondo que todos os polos do sistema de malha fechada estejam dentro do círculo unitário, e aplicando o teorema do valor final, o erro em regime permanente será:

$$e(+\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1).E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \cancel{(z-1)} \cdot \frac{1}{[1 + G_c(z).G(z)]} \cdot \frac{A.z}{\cancel{(z-1)}}$$

Ou

$$e(+\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A}{1 + G_c(z).G(z)} = \frac{A}{1 + k_p}$$

Sendo k_p definido como: $k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_c(z).G(z)$

Note que se o sistema dado na figura (6.6) for estável, então é possível aplicar o Teorema do Valor Final em $E(z)$, como acima.

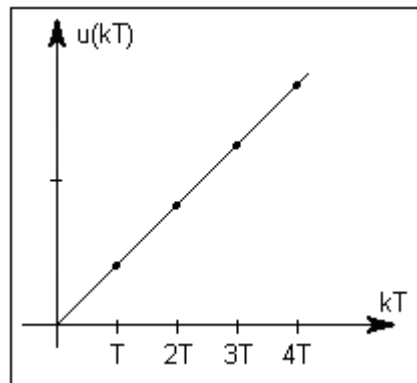
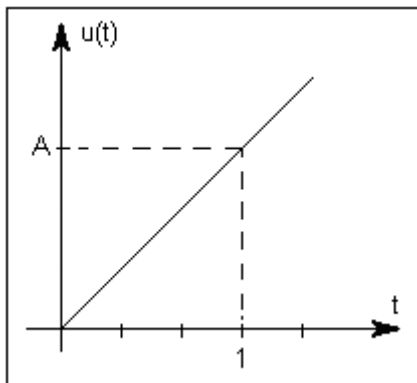
- Se $G_c(z).G(z)$ não possui nenhum polo em $z=1$, k_p será uma constante e $e(+\infty)$ também, indicando um erro de regime permanente constante entre $y(t)$ e $u(t)$ (na verdade entre $y(k)$ e $u(k)$).

- Se $G_c(z).G(z)$ possuir um ou mais polos em $z=1$, k_p tenderá a $\pm\infty$ e $e(+\infty)$ tenderá a zero, indicando que em regime permanente não haverá erro entre $y(t)$ e $u(t)$, (na verdade entre $y(k)$ e $u(k)$).

ii – Erro de regime permanente para entrada tipo rampa

A transformada – Z de um sinal tipo rampa com período de amostragem T e coeficiente angular A é:

$$U(z) = \frac{A.T.z}{(z-1)^2}, \text{ (Vide tabela da página 12)}$$



O erro para essa entrada é:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G_c(z).G(z)} \cdot \frac{A.T.z}{(z-1)^2}$$

Aplicando o teorema do valor final, teremos:

$$e(+\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{1}{[1 + G_c(z).G(z)]} \cdot \frac{A.T.z}{(z-1)^2}$$

Ou ainda,

$$e(+\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A.T.z}{z-1 + (z-1)G_c(z).G(z)}$$

$$e(+\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A.T}{(z-1)G_c(z).G(z)} = \frac{A}{k_v}$$

Sendo k_v definido como: $k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)G_c(z).G(z)}{T}$

- Se $G_c(z).G(z)$ possui apenas um polo em $z=1$, k_v será constante e o erro de regime permanente entre $u(t)$ e $y(t)$ será constante, (entre $u(k)$ e $y(k)$).
- Se $G_c(z).G(z)$ possuir mais de um polo em $z=1$, k_v tenderá a $\pm\infty$ e o erro de regime permanente entre $u(t)$ e $y(t)$ tenderá a zero, (entre $u(k)$ e $y(k)$).

Exemplo: No sistema de rastreamento do satélite pela antena, descrito no item (6.2), foi especificado que o controlador deveria proporcionar um erro de regime permanente menor que 0,01 rad. A entrada do sistema é θ_s (ângulo do satélite) e é tipo rampa, $\theta_s(t) = 0,01t$.

Neste caso, o erro do regime é dado por:

$$e(+\infty) = \frac{A}{k_v} \leq 0,01$$

Com $A = 0,01$ temos:

$$\frac{0,01}{k_v} \leq 0,01$$

Logo, $k_v \geq 1$

Porém,

$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)G_c(z).G(z)}{T}$$

Desta forma,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)G_c(z).G(z)}{T} \geq 1$$

Portanto, a função de transferência do controlador, $G_c(z)$, tem que ser tal que a expressão acima seja satisfeita. Mais adiante iremos utilizar esta expressão para o projeto de $G_c(z)$.

Os resultados obtidos nos itens i e ii podem ser facilmente resumidos na tabela abaixo.

Números de polos de $G_c(z).G(z)$ em $z=1$.	Entrada tipo degrau.	Entrada tipo rampa.	} $e(+\infty)$
0	$\frac{A}{1+k_p}$	$\pm\infty$	
1	0	$\frac{A}{k_v}$	
2	0	0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

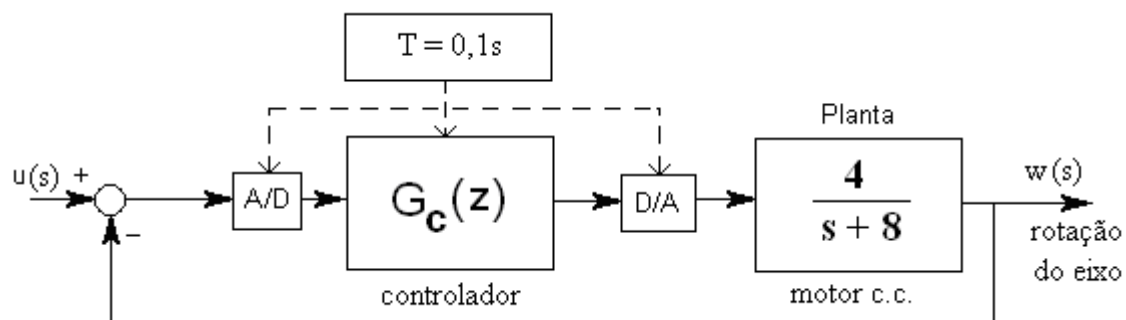
Observação: Para calcular os valores de $e(+\infty)$ da tabela acima, foi suposto que todos os polos do sistema de malha fechada estivessem dentro do círculo unitário.

Segundo o capítulo (4) que o integrador tem a seguinte função de transferência:

$$G_c(z) = \frac{z}{z-1}$$

Note que ele tem um polo em $z=1$. Podemos concluir que os controladores do tipo integrador, diminuem ou tornam nulos os erros de regime permanente.

Exercício: Projete um controlador discreto $G_c(z)$ tal que o erro de regime permanente seja nulo para entrada do tipo degrau unitário. A planta é um motor c.c. e a saída de interesse é a velocidade de rotação do eixo.



É necessário garantir a estabilidade?

VI.2.2 – Resposta Dinâmica ou Precisão Durante o Transitório

A precisão durante o transitório é a habilidade do sistema em manter erros pequenos quando a entrada variar. As especificações do desempenho durante o transitório podem ser feitos no domínio do tempo e transladados ao domínio da frequência, em termos de s ou z . Comumente, essas especificações são feitas no domínio s , supondo-se que o sistema é de 2ª ordem, ou seja:

$$H(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

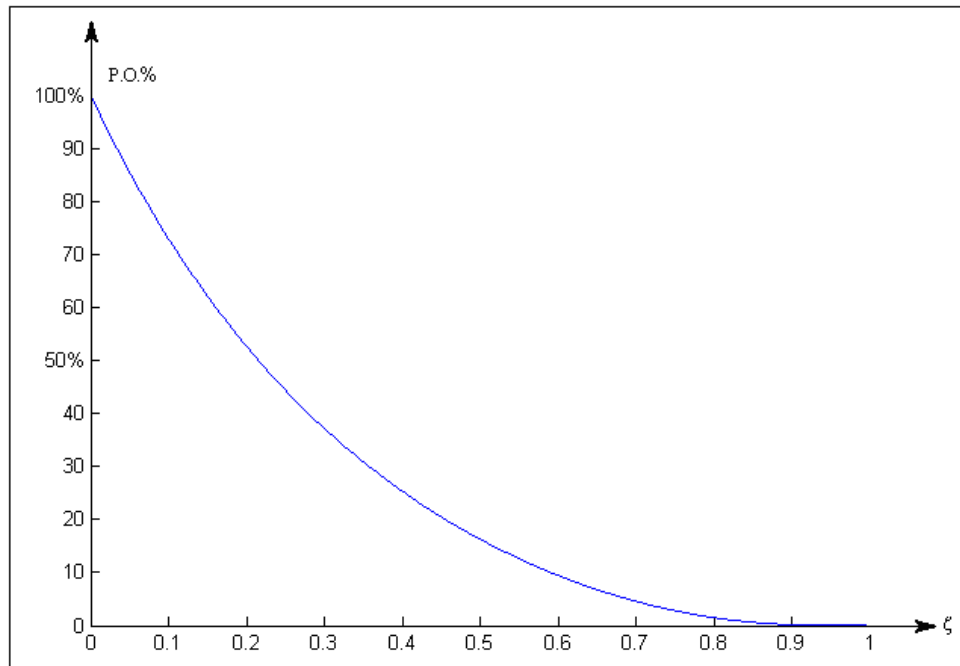
Assim, as especificações são expressas em função de ζ (coeficiente de amortecimento) e w_n (frequência natural de oscilação), que são:

- Porcentagem de “overshoot”:

$$P.O.\% = \left[e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \right] \cdot 100\%$$

sendo $0 < \zeta < 1$.

(Vide **Ogata, Engenharia de Controle Moderno**).



- Tempo de subida t_s : é o tempo necessário para a resposta passar de 10% para 90% do seu valor final.

Uma relação do tempo de subida, aproximada, é:

$$t_s \simeq \frac{2,4}{w_n}$$

Essa expressão foi obtida fazendo $\zeta = 0,5$ na expressão geral:

$$t_s = \frac{\pi - \arcsen \sqrt{1 - \zeta^2}}{w_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Neste curso, usaremos a forma aproximada.

- Tempo de estabelecimento t_e : é o tempo necessário para a curva de resposta alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final, tipicamente, 1%.

$$t_e \simeq \frac{4,6}{\zeta w_n}$$

Todas essas especificações foram dadas em função da variável s , para passá-las para o domínio z , utiliza-se o mapeamento de polos,

$$z = e^{sT},$$

já estudado no capítulo (2).

Os polos do sistema de 2ª ordem do item (6.2.2) são:

$$s = -\zeta w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad 0 < \zeta < 1$$

Utilizando o mapeamento de polos, teremos:

$$z = e^{\left(-\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\right)T}$$

ou

$$z = e^{-\zeta \omega_n T} \cdot e^{\pm j \omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Serão analisados os três casos:

$\zeta = \text{constante}$ (P.O.% constante);

$\omega_n = \text{constante}$ (t_s constante);

$\zeta \omega_n = \text{constante}$ (t_e constante).

- $\omega_n \zeta = \text{constante}$ a expressão dos polos (Z) ficará:

$$z = e^{-\zeta \omega_n T} \cdot e^{\pm j \omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}}$$

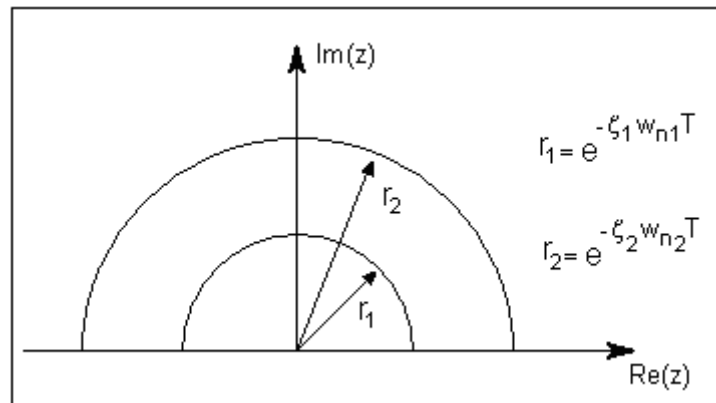
O módulo de Z será:

$$|z| = e^{-\zeta \omega_n T} = \text{constante}$$

O ângulo será:

$$\angle z = \pm \omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}, \text{ que será qualquer.}$$

Portanto, no plano Z teremos os seguintes lugares geométricos que são círculos centrados na origem de raio: $r = e^{-\zeta \omega_n T}$.



Portanto, o lugar geométrico no plano Z que corresponde a um determinado t_e especificado no plano s, será um círculo de raio r , centrado na origem do plano Z.

- $\zeta = \text{constante}$ ($0 \leq \zeta \leq 1$)

$$z = e^{-\zeta \omega_n T} \cdot e^{\pm j \omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Se:

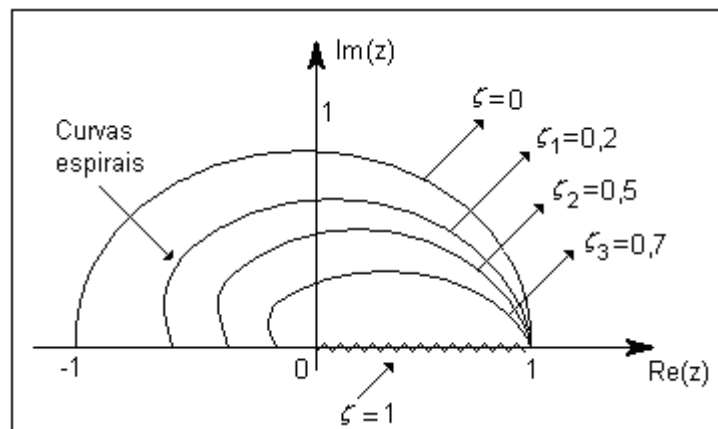
$$\zeta = 1 \rightarrow |z| = 0 \text{ e } |z| \rightarrow 0 < |z| < 1 \rightarrow \text{Semi-eixo real } 0 \leq z \leq 1$$

$$\zeta = 0 \rightarrow |z| = 1 \text{ e } \angle z = \forall \rightarrow \text{Círculo unitário}$$

$$0 < \zeta < 1 \text{ e } \begin{cases} w_n = 0 \rightarrow |z| = 1 \text{ e } \angle z = 0^\circ \\ w_n \text{ crescente} \rightarrow |z|_{\text{decrecente}} \text{ e } \angle z_{\text{crescente}} \end{cases}$$

Este lugar geométrico é uma espiral que inicia no ponto 1.

Portanto, o lugar geométrico no plano Z que corresponde a uma determinada P.O.% são espirais, como mostra a figura seguinte:



Observação: A figura acima está fora de escala.

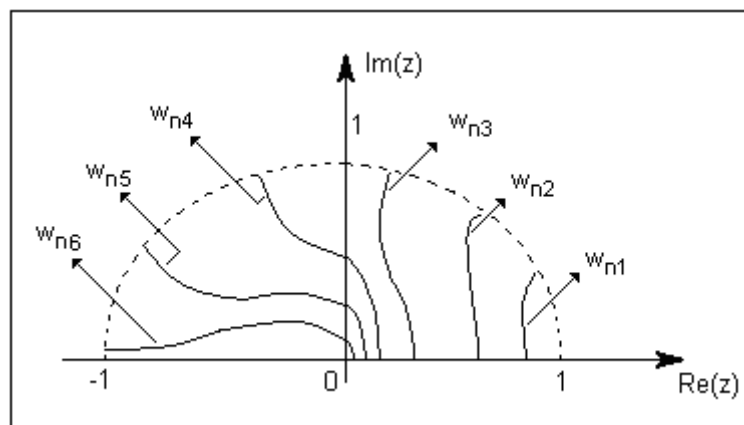
- $w_n = \text{constante}$ e $0 \leq \zeta \leq 1$

$$z = e^{-\zeta w_n T} \cdot e^{\pm j w_n T \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = 0 \rightarrow |z| = 1 \text{ e } \angle z = w_n T \rightarrow \text{Círculo unitário}$$

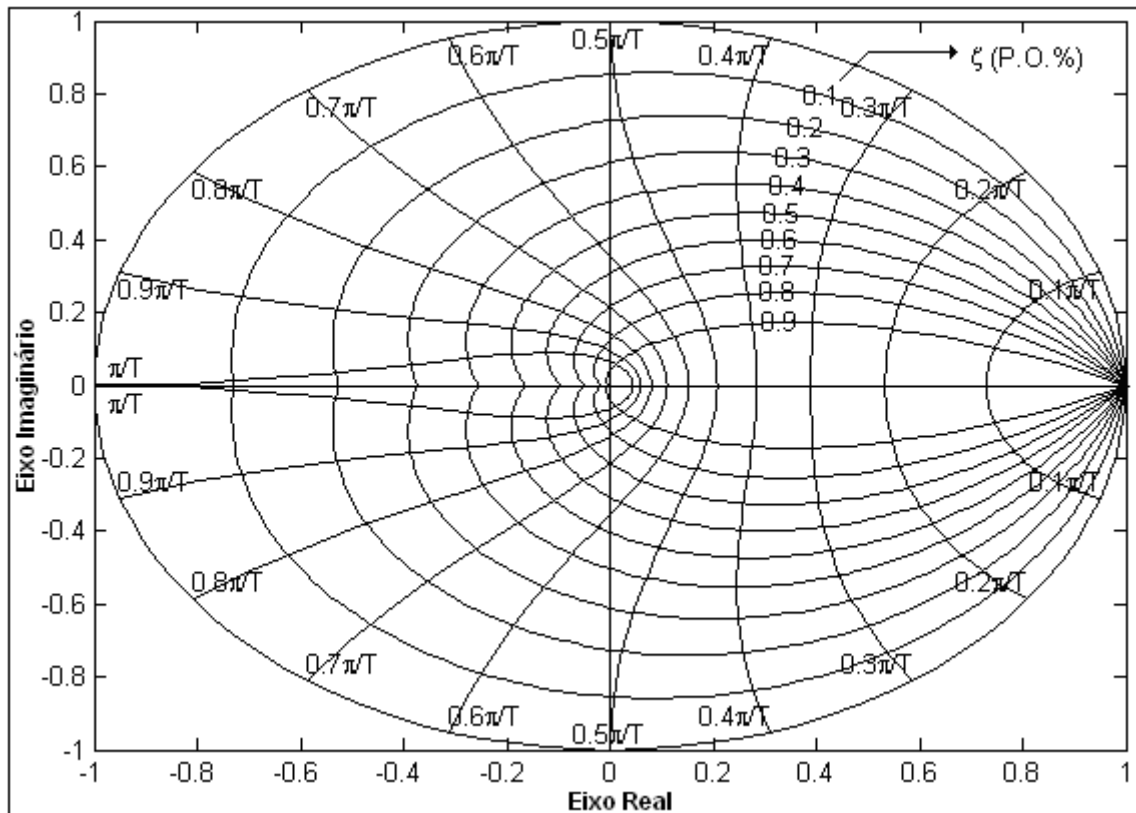
Se: $\zeta = 1 \rightarrow |z| = e^{-w_n T} \text{ e } \angle z = 0^\circ \rightarrow \text{Semi-eixo real } 0 \leq z \leq 1$

Os lugares geométricos são curvas que saem do círculo unitário e chegam ao semieixo real positivo, como mostrado abaixo:



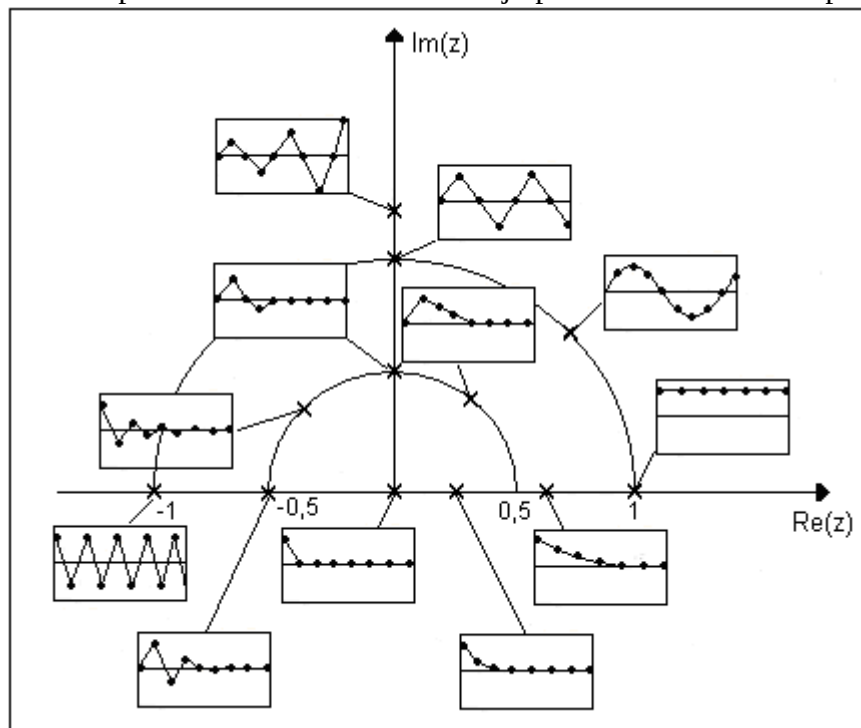
Essas são as curvas no plano Z correspondentes a especificações de t_s no domínio s.

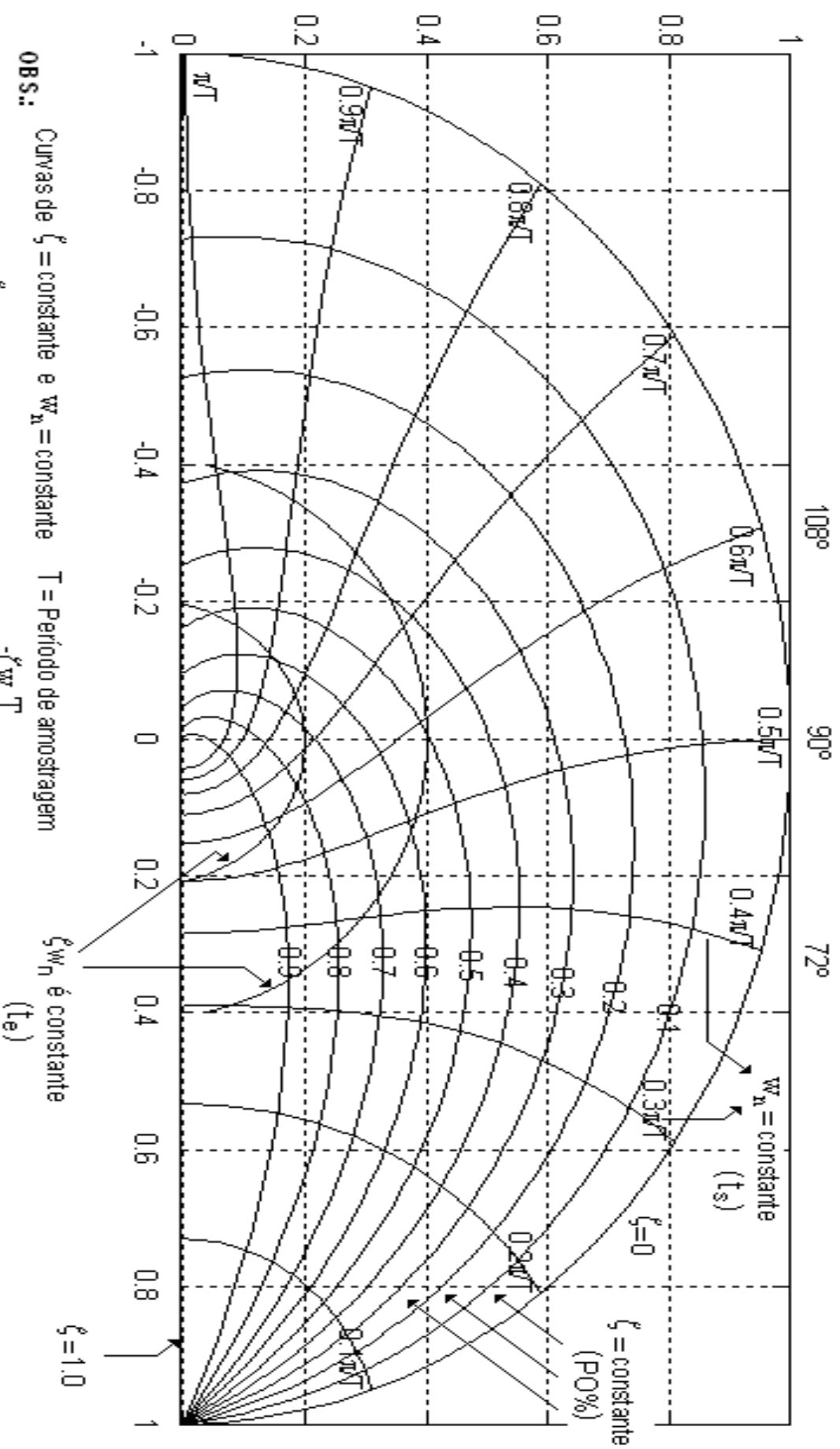
Para facilitar o projeto dos controladores para atender essas especificações de transitório, mantém-se o mapa da figura da página seguinte, onde se encontram as curvas de w_n constante (t_s), ζ constante (P.O. %) e ζw_n constante (t_e).



A figura acima pode ser obtida usando-se o comando “zgrid” do MATLAB, digite “help zgrid”.

Respostas ao impulso de sistemas discretos cujo polo está mostrado no plano Z.





Maior círculo $\rightarrow$ menor t_e
 Maior w_n $\rightarrow$ menor t_s
 Maior ζ $\rightarrow$ menor PO%

Exemplo: Identifique no mapa anterior a região do plano – Z que atende em conjunto as seguintes especificações:

$$P.O.\% \leq 16\%, \quad t_s \leq 6s \text{ e } t_e \leq 20s,$$

Sabendo que o período de amostragem do sistema discreto é $T=1s$.

Sabe-se

$$\bullet \quad P.O.\% = \left[e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \cdot \pi} \right] \cdot 100\% \quad \text{e} \quad P.O.\% \leq 16\%$$

Logo, $\zeta \geq 0,504$

$$\bullet \quad t_s \simeq \frac{2,4}{w_n} \text{ e } t_s \leq 6s$$

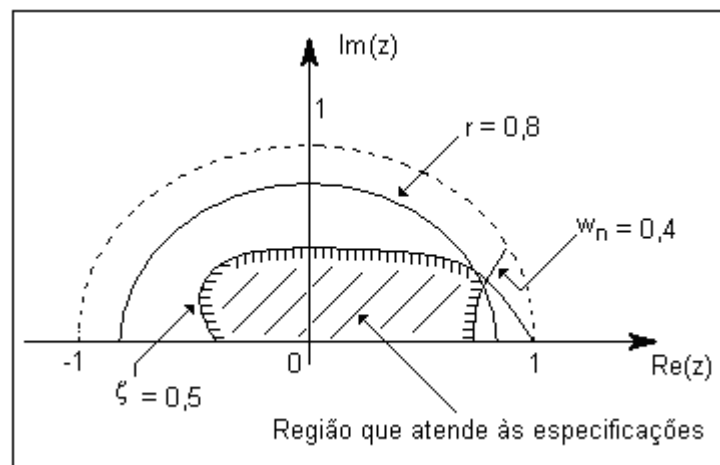
Logo, $\frac{2,4}{w_n} \leq 6 \rightarrow w_n \geq 0,4$

$$\bullet \quad t_e \simeq \frac{4,6}{\zeta w_n} \text{ e } t_e \leq 20s$$

Logo, $\zeta w_n \geq 0,23$, mas $r = e^{-\zeta w_n T}$

Então $r \leq e^{-0,23.1} \rightarrow r \leq 0,8$

A região que atende estas especificações em conjunto é formada pela intersecção das três regiões acima, que é:



O controlador $G_c(z)$ deverá fazer com que os polos do sistema realimentado estejam dentro desta região para que as especificações sejam atendidas.

VI.3 – Projeto de Controladores Digitais Utilizando Emulação

Neste tipo de projeto, primeiramente efetua-se o projeto de controlador no plano “s”, utilizando as técnicas já conhecidas em controle linear, e então, utilizando o mapeamento de

polos e zeros do plano “s” para o plano “z”, que é $z = e^{sT}$, encontra-se o controlador discreto equivalente ao contínuo. Uma vantagem é que se podem utilizar as técnicas de projeto já estudadas. Uma desvantagem é que esse método ignora totalmente o fato de que os conversores A/D e D/A e o microcomputador serão utilizados, isto impõe a necessidade de que o período de amostragem T seja o menor possível, do contrário, poderá ocorrer uma grande discrepância em relação ao projeto contínuo.

A metodologia deste projeto será mostrada através de um exemplo.

Exemplo: Considere o sistema posicionador da antena mostrado na figura (6.2), cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{1}{s(10s+1)}$$

E as especificações foram:

$$P.O.\% \leq 16\% \text{ e } t_e \leq 10s$$

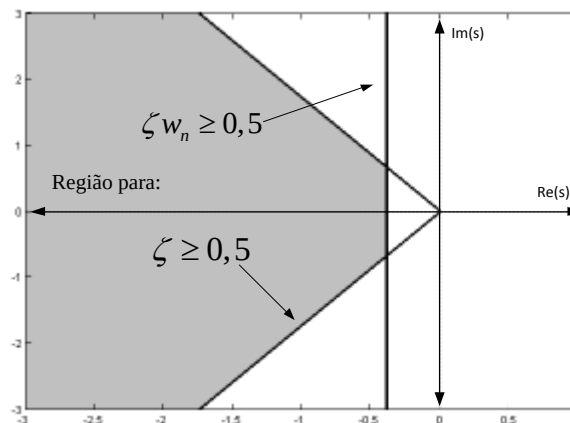
Mas,

$$P.O.\% = \left[e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \cdot \pi} \right] \cdot 100\% \rightarrow \zeta \geq 0,5$$

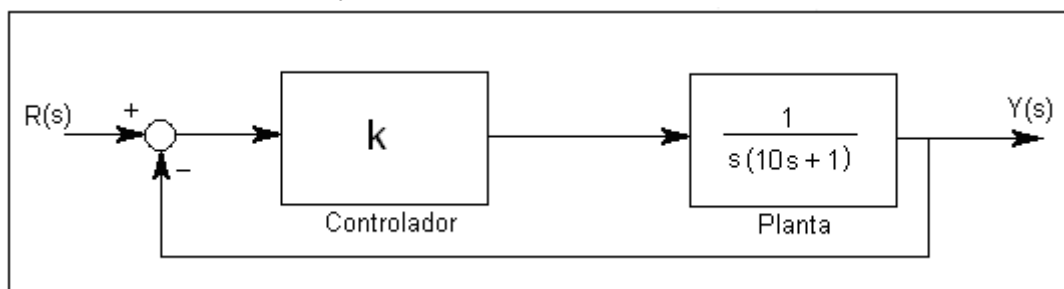
$$\text{De } t_e \text{ teremos: } t_e = \frac{4,6}{\zeta \omega_n} \leq 10 \rightarrow \frac{4,6}{\zeta \omega_n} \leq 10.$$

Logo, $\zeta \omega_n \geq 0,5$ resolve

Então, $\zeta \omega_n \geq 0,5$ e $\zeta \geq 0,5$ satisfazem as especificações exigidas.



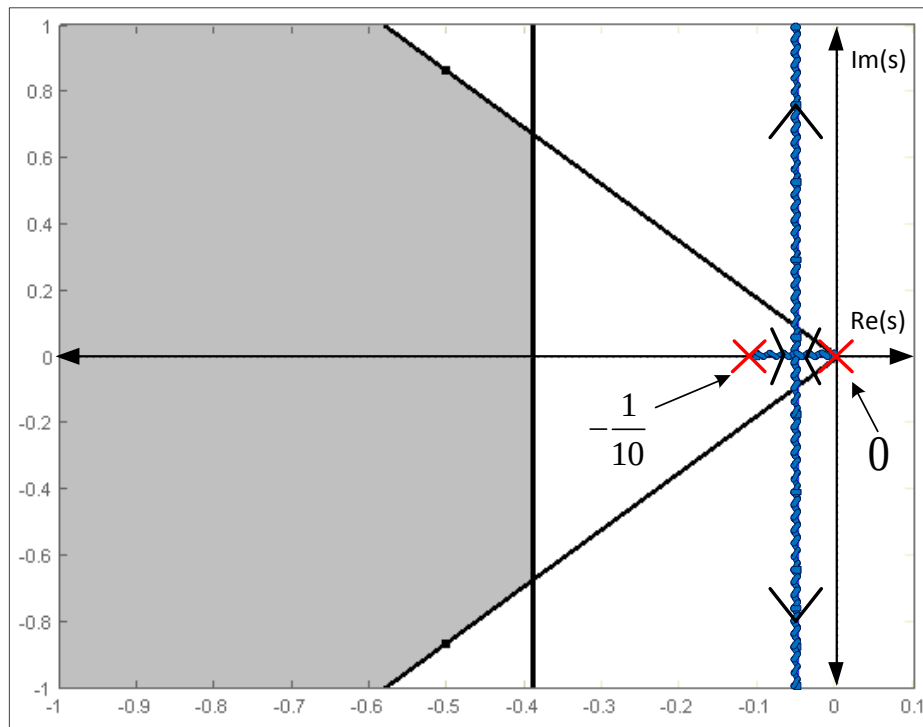
Inicialmente, será projetado um controlador contínuo $G_c(s)$ que atenda a essas especificações. Suponha que $G_c(s)$ seja apenas um ganho k .



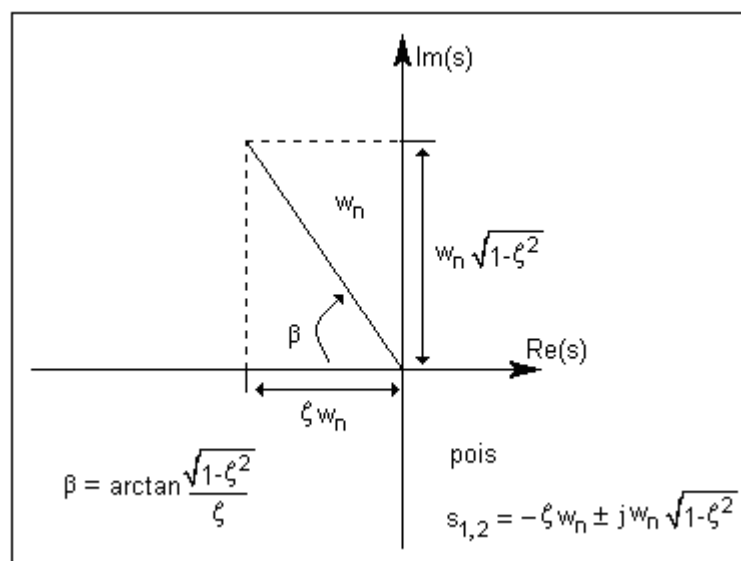
Neste caso, $k.G_c(s).G(s) = \frac{k}{s(10s+1)}$, ou ainda,

$$k.G_c(s).G(s) = \frac{\frac{k}{10}}{s(s + \frac{1}{10})}$$

O “Root – Locus” é:



As especificações feitas exigem que o sistema tenha os polos em $\zeta \approx 0,5$ e $\zeta \omega_n = 0,5$, o que foi mostrado no “Root – Locus” acima. Esta localização foi obtida da relação:

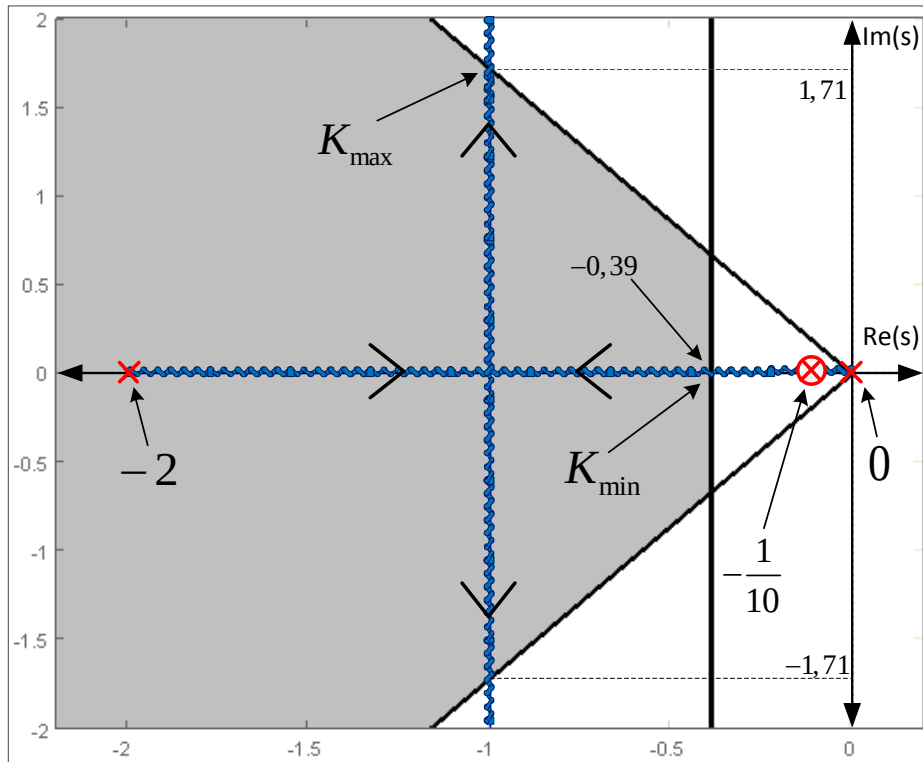


O “Root – Locus” não passa pelo ponto desejado, portanto, utilizar apenas o controlador

com ganho k é insuficiente. Fazendo $G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{10}}{s + 2} \cdot k$, o “Root – Locus” será obtido de:

$$G_c(s).G(s) = k \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{10}\right)}{(s+2)} \cdot \frac{\frac{1}{10}}{s \cdot \left(s + \frac{1}{10}\right)}$$

Que é:



Neste caso o “Root-Locus” passa pelo ponto como desejado e falta apenas determinar o ganho k para isto. Pela condição de módulo, teremos:

$$|G_c(s).G(s)|_{s=s_0} = |-1| \Rightarrow \left| \frac{\left(s + \frac{1}{10}\right)}{(s+2)} \cdot k \cdot \frac{\frac{1}{10}}{s \cdot \left(s + \frac{1}{10}\right)} \right|_{s=-1 \pm j1,7143} = 1$$

$$\text{Porém, } |s + 2|_{s=-1 \pm j1,7143} = |1 \pm j1,7143| = 1$$

$$|s|_{s=-1 \pm j1,7143} = |-1 \pm j1,7143| = 1$$

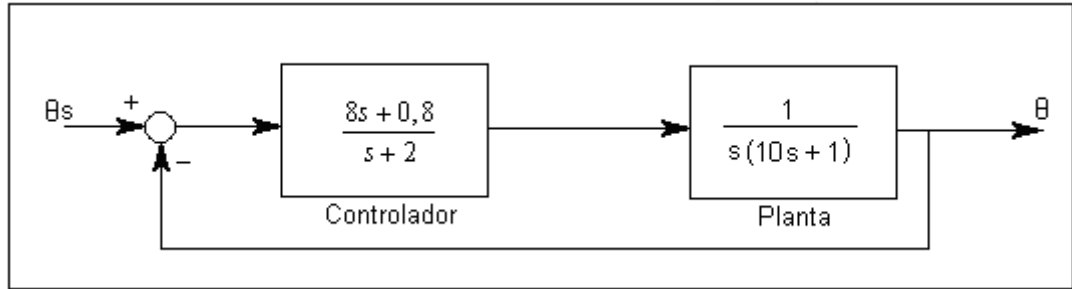
$\therefore$

$$\underline{k_{\max} = 39,388} \quad ; \quad \underline{k_{\min} = 6,2937}.$$

Logo, pode-se usar $k = 8$. Finalmente, o controlador que atende às especificações é:

$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{10}}{s + 2} \cdot 8 = \frac{8s + 0,8}{s + 2}$$

O sistema completo é:



Sendo θ_s - Posição angular do satélite;

θ - Posição angular da antena.

O controlador discreto é encontrado fazendo-se o mapeamento dos polos e zeros do plano contínuo para o discreto, através da relação:

$$z = e^{sT}$$

Neste exemplo, admita que o período de amostragem que será utilizado é $T = 0,2s$.

O compensador $G_c(s)$ possui um zero e um polo, então o controlador discreto também deverá ter um polo e um zero, ou seja:

$$D(z) = k_n \frac{(z - z_1)}{(z - z_2)}$$

Sendo: “Polo de $G_c(s)$ ” = -2

“Zero de $G_c(s)$ ” = -0,1

Temos: $z_1 = e^{-0,1 \cdot 0,2} = 0,9802$

$z_2 = e^{-2 \cdot 0,2} = 0,6703$

Então,

$$D(z) = k_n \frac{(z - 0,9802)}{(z - 0,6703)}$$

O ganho k_n de $D(z)$ determinado devido à necessidade do ganho DC de $G_c(s)$ e $D(z)$ serem idênticos. O ganho DC é determinado através da aplicação do teorema do valor final para o caso contínuo e para o discreto:

$$\text{ganho DC} = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = \lim_{z \rightarrow 1} D(z)$$

Substituindo $G_c(s)$ e $D(z)$ temos:

$$\lim_{z \rightarrow 1} k_n \frac{(z - 0,9802)}{(z - 0,6703)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{8s + 0,8}{s + 2}$$

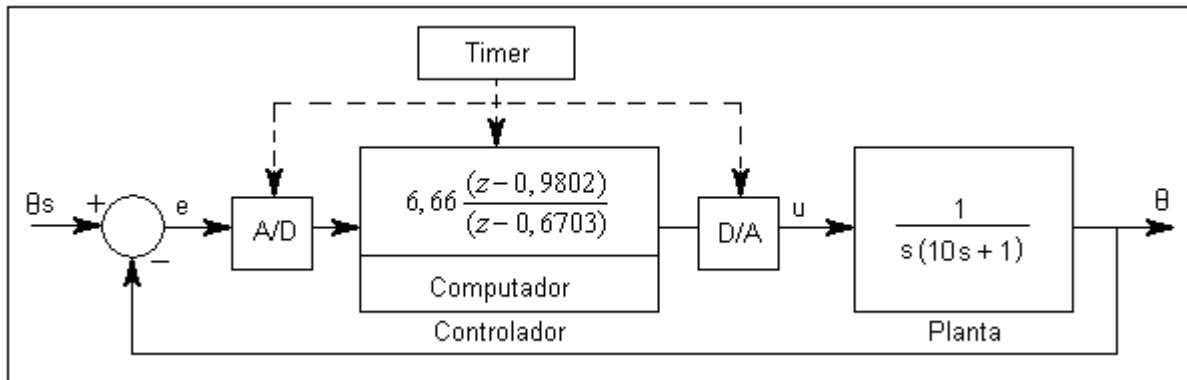
Ou

$$k_n \frac{(1 - 0,9802)}{(1 - 0,6703)} = 0,4 \Rightarrow k_n = 6,6616$$

Finalmente, o controlador discreto é:

$$D(z) = 6,66 \frac{(z - 0,9802)}{(z - 0,6703)}$$

O sistema de controle com o controlador discreto será:



O controlador discreto é implementado no computador utilizando um programa. Para construir este programa, primeiramente deve-se determinar a sua equação diferença:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = D(z) = 6,66 \frac{(z - 0,9802)}{(z - 0,6703)} = 6,66 \frac{(1 - 0,9802.z^{-1})}{(1 - 0,6703.z^{-1})}$$

Logo,

$$U(z).(1 - 0,6703.z^{-1}) = 6,66.E(z).(1 - 0,9802.z^{-1})$$

O operador z^{-1} indica operador de atraso unitário, a equação anterior torna-se:

$$u(k) = 0,6703.u(k-1) + 6,66[e(k) - 0,9802.e(k-1)]$$

Esta equação diferença representa o controlador $D(z)$ e pode ser implementada com o seguinte programa:

- 1 – $u_{\text{auxiliar}} = 0$;
- 2 – Iniciar o “timer”;
- 3 – Realizar a conversão A/D para obter: e [ou seja: $e(k)$];

- 4 – Calcule: $u = u_{\text{auxiliar}} + 6,66.e$ [ou seja: $u(k)$];
- 5 – Realizar a conversão D/A com u ;
- 6 – $u_{\text{auxiliar}} = 0,6703.u - 6,5297.e$;
- 7 – Espere que o “timer” termine o período de amostragem T , ($T = 0,2s$);
- 8 – Vai para linha 2.

Note que o cálculo de u_{auxiliar} após u , é feito para minimizar o tempo entre a amostragem $e(k)$ e a saída $u(k)$.

A descrição do controlador que satisfaz às especificações do sistema de controle da antena está completa. Para constatar o desempenho do controlador, o projetista pode seguir um dos três caminhos:

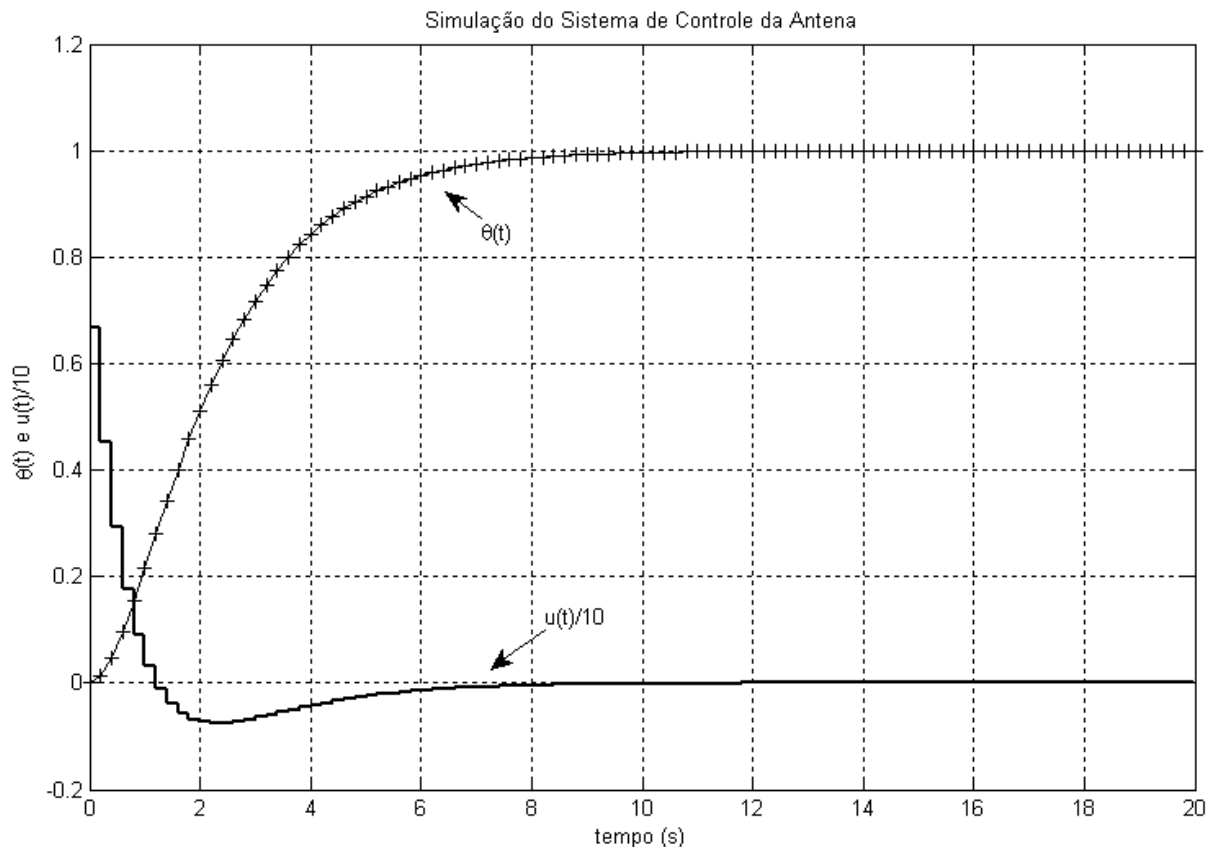
- i) – Implementar o controlador, conectá-lo a antena e observar o seu funcionamento.
- ii) – Determinar teoricamente o equivalente discreto da planta, $G(z)$ através da relação,

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \right\}_{t=kT}$$

e obter $\theta(k)$ para entrada degrau utilizando a equação diferença.

iii) – Simular este sistema de controle em um computador e observar $\theta(k)$ para entrada degrau. Para isto, podem-se utilizar alguns dos programas: MATLAB, CTRL-CC, CC, MATRIX_x, etc.

Com o exemplo, utilizaremos a alternativa “iii” com o MATLAB para calcular a resposta ao degrau, o resultado está mostrado abaixo.



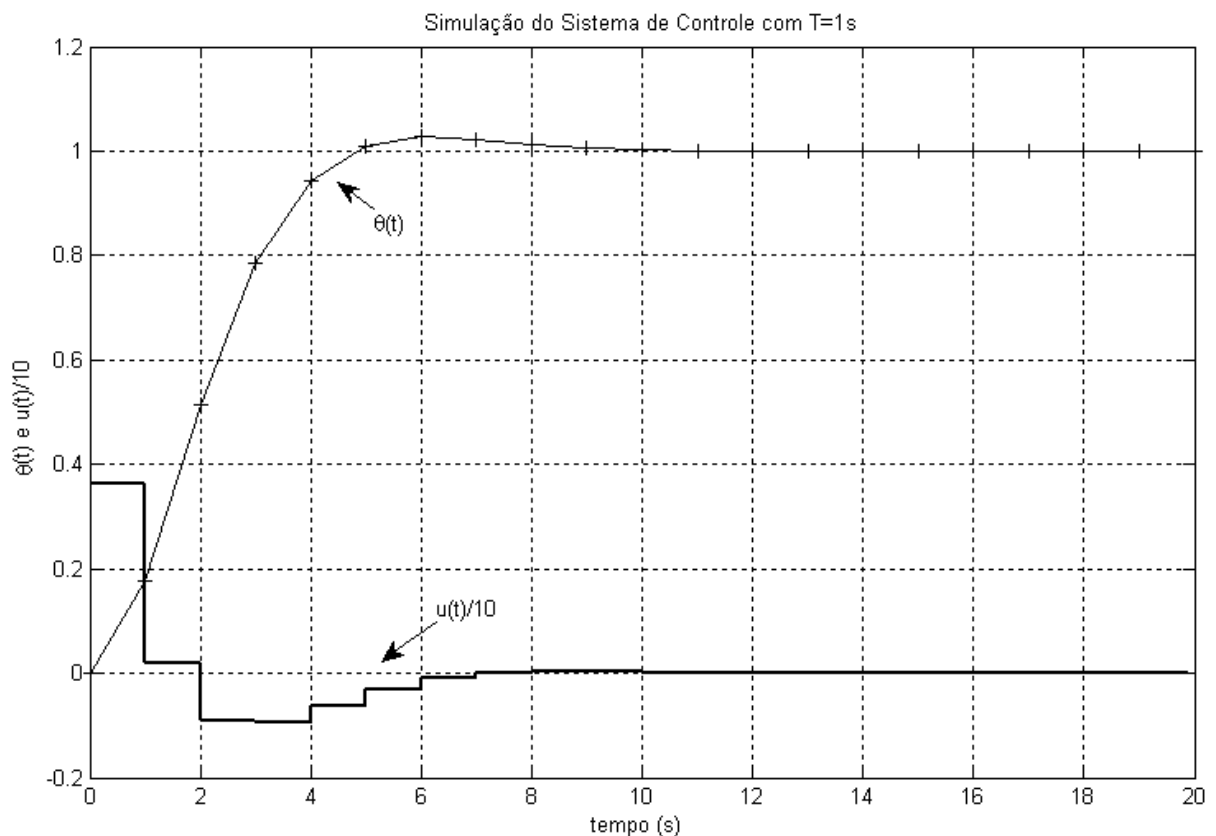
Pode-se verificar que o tempo de estabelecimento é aproximadamente 9s que é menor que o especificado que foi 10s. Segundo a simulação, a porcentagem de “Overshoot” é 0%, menor que o especificado que é 16%. Esse pequeno desvio no desempenho do sistema provavelmente ocorreu devido ao fato de ter usado $\zeta=0,5 \Rightarrow P.O.\% \approx 16\%$, seria melhor ter usado $\zeta \gg 0,5$. Ainda, devido ao fato do projeto utilizando emulação não ter considerado os conversores A/D e D/A no projeto do controlador discreto. Para períodos de amostragem maiores, esta influência poderá ser maior e o sistema poderá até ser instável. Como ilustração, repetindo o projeto do controlador discreto para $T=1s$, teremos:

$$D(z) = 3,63 \cdot \frac{(z - 0,9048)}{(z - 0,1353)}$$

A figura abaixo mostra a resposta do sistema com este controlador, onde se verifica:

$$P.O.\% = 3\% \quad e \quad t_e \approx 10s$$

muito fora das especificações.



VI.4 – Projeto de Controladores Digitais Utilizando o “Root – Locus” no Plano – Z

Este método de projeto determina o controlador discreto diretamente no plano – Z, utilizando o “Root – Locus” no plano – Z. A função de transferência contínua da planta é transformada em uma equivalente discreta utilizando a relação:

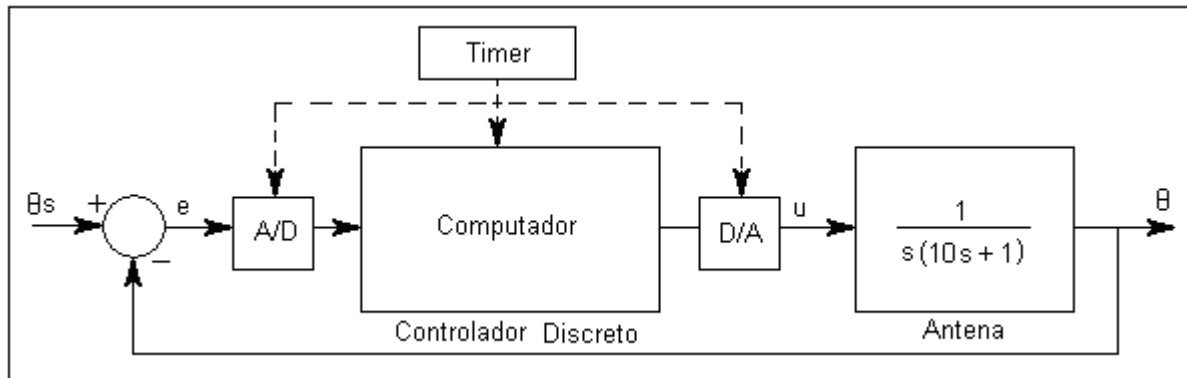
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \right\} \Big|_{t=kT}$$

Que leva em consideração a dinâmica do conversor D/A. Com isso, está sendo eliminada a natureza de aproximação do projeto com emulação. A vantagem de se trabalhar com o equivalente discreto $G(z)$ é que se podem utilizar métodos de projeto discreto que possibilitam um desempenho próximo ao especificado mesmo que o período de amostragem seja relativamente grande.

Este método também será mostrado através de um exemplo.

Exemplo: Será realizado o projeto de um controlador discreto para o mesmo sistema anterior, adicionando-se apenas o fato de que o erro de regime permanente (para a entrada rampa) tem que ser menor que 0,01 rad.

O sistema de controle discreto será:



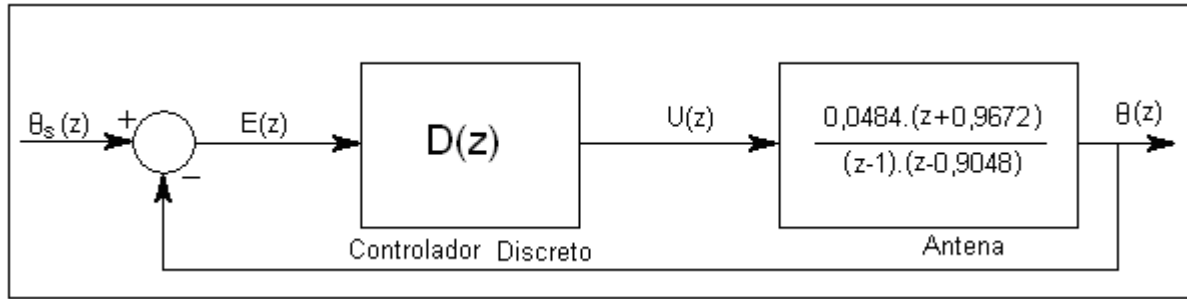
Neste caso, a discretização da planta é obtida fazendo-se:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 \cdot (10s + 1)} \right] \right\} \Big|_{T=1s}$$

Logo,

$$G(z) = \frac{0,0484 \cdot (z + 0,9672)}{(z - 1) \cdot (z - 0,9048)}$$

O sistema de controle pode ser descrito totalmente no plano –Z:



Deve-se traçar o “Root – Locus” deste sistema na planta – Z utilizando-se a carta mostrada na página (79). Antes, porém, deve-se colocar nesta carta a região do plano – Z que atende em conjunto a todas as especificações que são:

- $P.O.\% \leq 16\% \Rightarrow \zeta \geq 0,5$
- $t_e \leq 10s$, $t_e \simeq \frac{4,6}{\zeta \omega_n} \leq 10 \Rightarrow \zeta \omega_n \geq 0,46$

$$\text{Mas } r = e^{-\zeta \omega_n T} \Rightarrow r \leq 0,63$$

- Erro de regime permanente $\leq 0,01$ rad $\Rightarrow k_v \geq 1$ (ver exemplo da página 73).

Na carta do plano – Z mostrado na página (92), está mostrada a região que satisfaz às especificações de P.O.% e t_e .

Inicialmente, vamos supor que o controlador seja apenas proporcional, ou seja, $D(z) = k$, assim, para traçar o “Root – Locus” teremos:

$$D(z).G(z) = k \cdot \frac{0,0484.(z + 0,9672)}{(z - 1).(z - 0,9048)}$$

- Polos: $P_1 = 1$ e $P_2 = 0,9078$
- Zeros: $Z_1 = -0,9672$

Já foi visto que o “Root – Locus” de um sistema que tem dois polos e um zero é um círculo centrado no zero cujo raio pode ser determinado pelo ponto de partida:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[(D(z).G(z))^{-1} \right] &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - 1).(z - 0,9048)}{(z + 0,9672)} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$(2z - 1,9048).(z + 0,9672)^{-1} + (z^2 - 1,9048z + 0,9048).(-1).(z + 0,9672)^{-2} = 0$$

Ou,

$$z^2 + 1,9344z - 2,7471 = 0$$

Então,

$$z_1 = 0,9518 \text{ e } z_2 = -2,8862$$

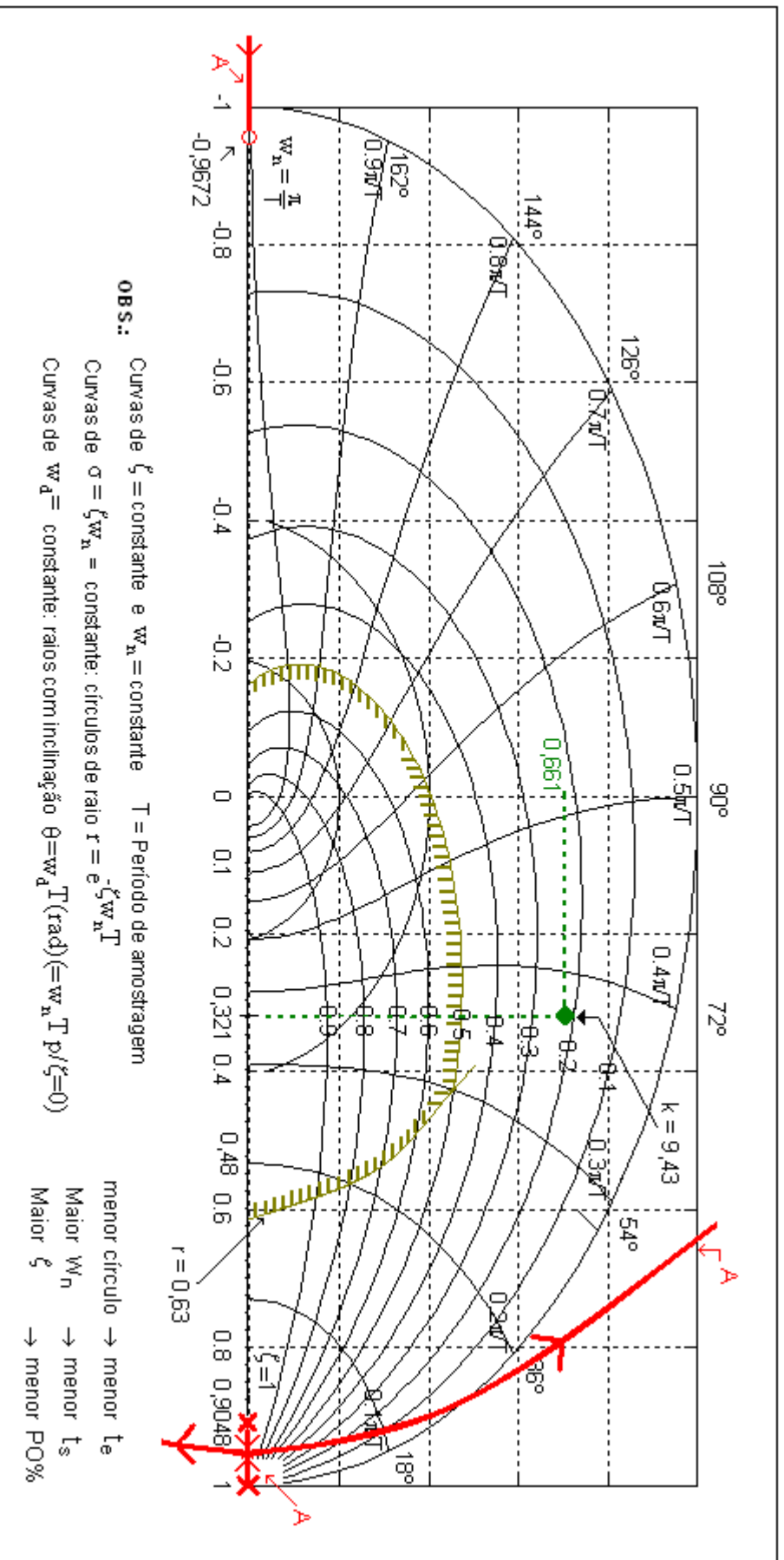
O “Root – Locus” está mostrado na curva – A do plano – Z da página (92), onde se percebe que não existe k para o qual os polos de malha fechada estejam dentro da região especificada.

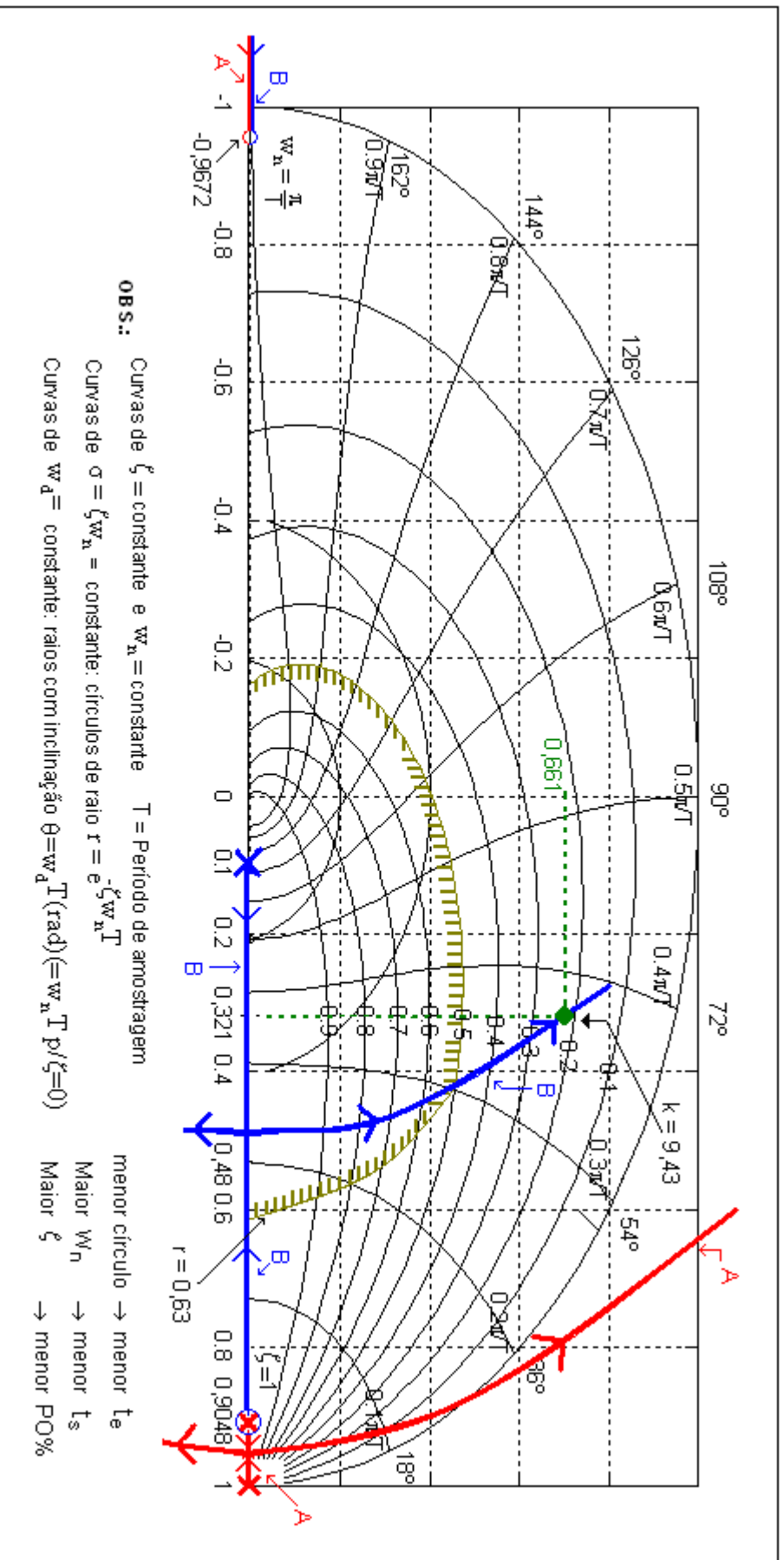
Para atrair o “Root – Locus” para a região especificada é necessário colocar um compensador tipo “lead”. Podemos cancelar o polo da planta em 0,9048 com um zero e adicionar um polo em 0,1, ou seja:

$$D(z) = \left(\frac{z - 0,9048}{z - 0,1} \right) . k$$

Com esse controlador, o “Root – Locus” será da forma mostrada na curva – B do plano – Z da página (92). Neste caso, o ponto de partida é 0,482.

Verifica-se que a curva – B passa pela região de interesse, basta apenas verificar qual o ganho k que atende a especificação de erro de regime, ou seja, $k_v \geq 1$ e isto deve ser atendido com os polos de malha fechada dentro da região de interesse.





A constante de erro k_v é dada pela equação (vide página 73).

$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{D(z).G(z)}{T} \stackrel{T=1s}{=} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1).k.(z-0,9048).(z+0,9672).0,04}{(z-0,1).(z-1).(z-0,9048)}$$

Assim,

$$k_v = k.0,106 \geq 1 \Rightarrow k \geq 9,43$$

Desta forma, para que o erro de regime seja atendido, o ganho k tem que ser maior ou igual a 9,43. Falta apenas verificar se para $k = 9,43$ os polos de malha fechada estarão dentro da região desejada. Os polos de malha fechada para $k = 9,43$ são determinados utilizando a condição geral do “Root – Locus”:

$$1 + \frac{k. \cancel{(z-0,9048)}.0,0484.(z+0,9672)}{(z-0,1).(z-1).\cancel{(z-0,9048)}} \bigg|_{k=9,43} = 0$$

Logo,

$$z_{1,2} = 0,3218 \pm j0,661$$

Que não pertencem à região especificada, seria necessário um k menor para que esses polos estivessem dentro da região, porém, o erro do regime não será atendido.

Uma alternativa é introduzir um efeito “lag” variando a posição do zero e também, aumentar o efeito “lead” levando o polo de $G_c(z)$ mais para a esquerda. Após várias tentativas, encontraremos:

$$D(z) = 13 \cdot \frac{(z-0,88)}{(z+0,5)}$$

Essas tentativas podem ser facilitadas com a utilização de MATLAB que já executa o “Root – Locus” rapidamente.

Com esse controlador, k_v será:

$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot 13 \cdot \frac{(z-0,88)}{(z+0,5)} \cdot \frac{0,0484.(z+0,9672)}{(z-1).(z-0,9048)} = 1,04 > 1,0$$

Assim, $k_v > 1$, que é o especificado.

O “Root – Locus” está mostrado no plano – Z da página (95), o ponto onde $k = 13$ é calculado utilizando a condição de módulo:

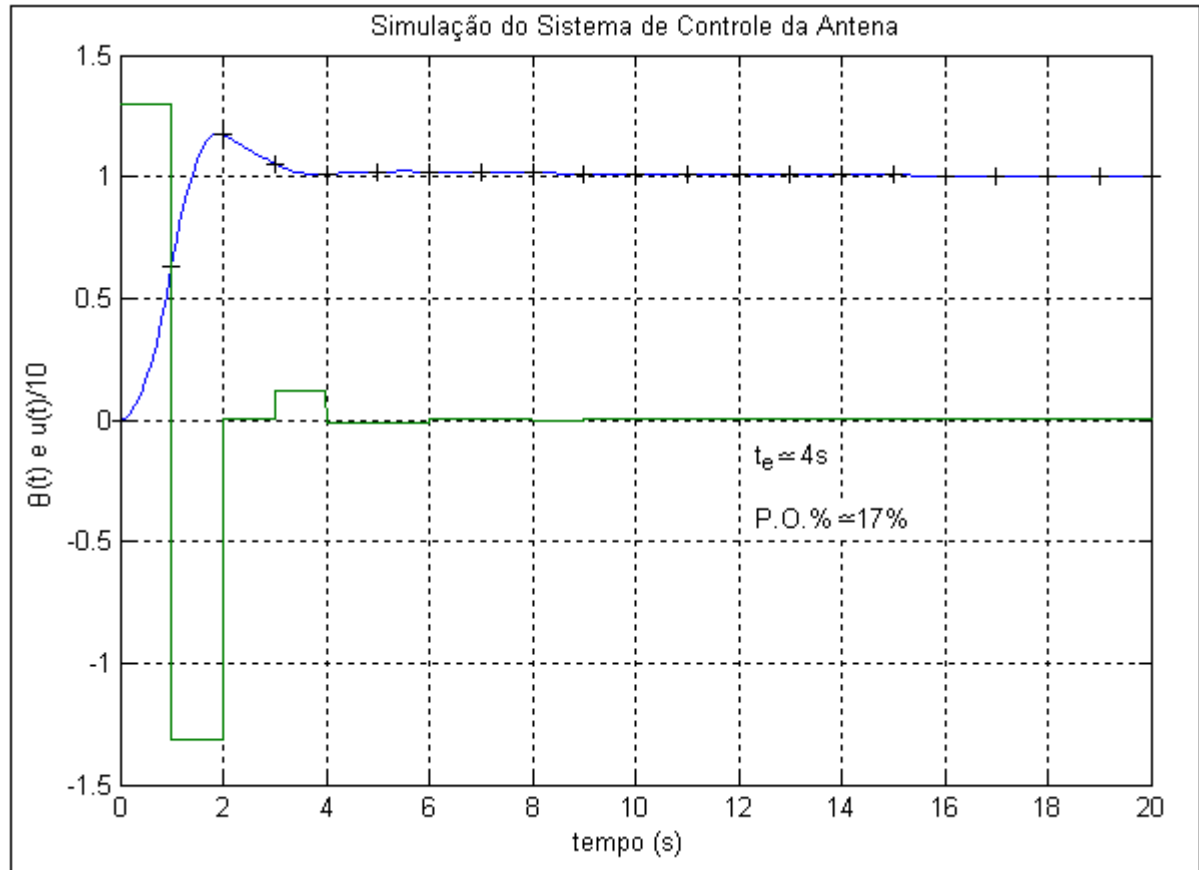
$$1 + 13 \cdot \frac{(z-0,88)}{(z+0,5)} \cdot \frac{0,0484.(z+0,9672)}{(z-1).(z-0,9048)} = 0$$

Logo,

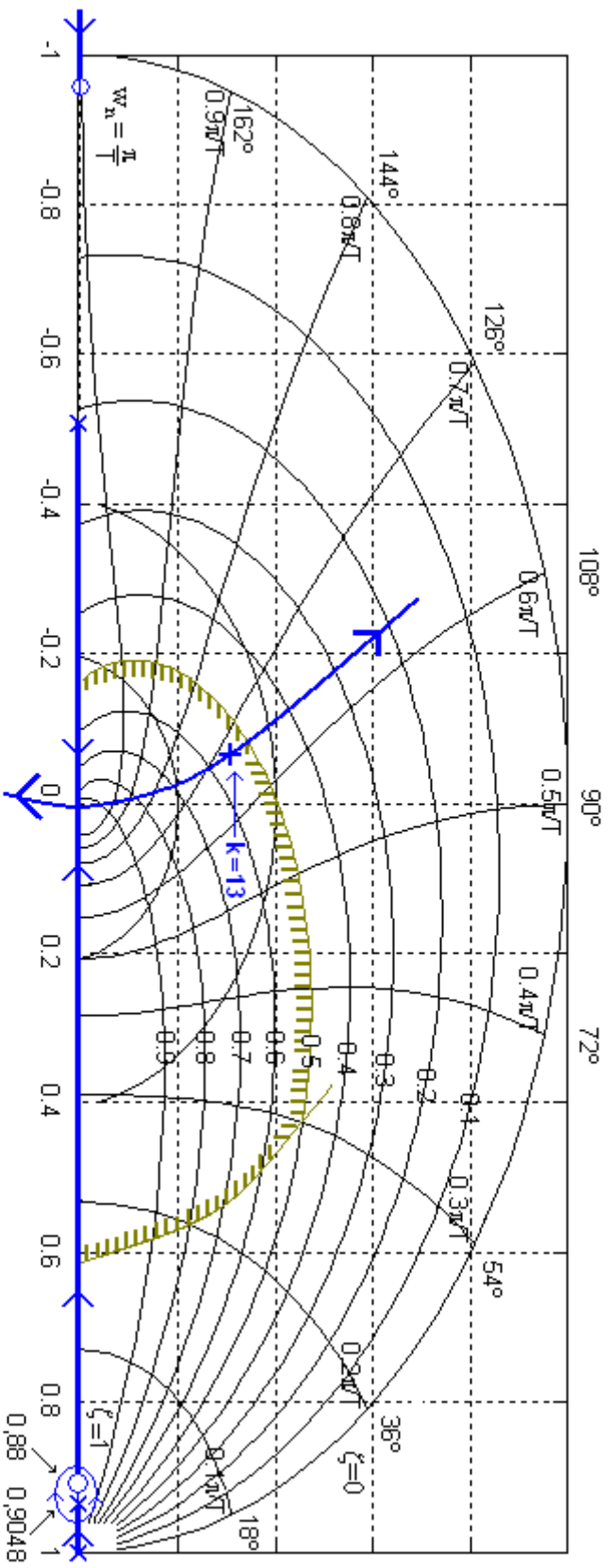
$$z_{1,2} = -0,0501 \pm j0,304$$

$$z_3 = 0,8757$$

A resposta temporal está mostrada abaixo. É importante observar que a resposta com o compensador projetado com o “Root – Locus” no plano – Z com $T=1s$ possui um desempenho superior ao projeto com emulação, com $T=0,2s$. Portanto, o “Root – Locus” no plano – Z possibilita bons resultados sem exigir muito do “Hardware” (em relação ao projeto com emulação).



Compare com a simulação dada na página (87).



Menor círculo $\rightarrow$ menor t_e Curvas de $\zeta = \text{constante}$ e $\omega_n = \text{constante}$ $T = \text{Período de amostragem}$ Em regime: $\frac{1 - \text{zero}}{1 - \text{pólo}} = \frac{1 - 0,98}{1 - 0,9048}$

Maior ω_n $\rightarrow$ menor t_s **OBS.:** Curvas de $\sigma = \zeta \omega_n = \text{constante}$; círculos de raio $r = e^{-\zeta \omega_n T}$ $\therefore$ Aumenta o ganho

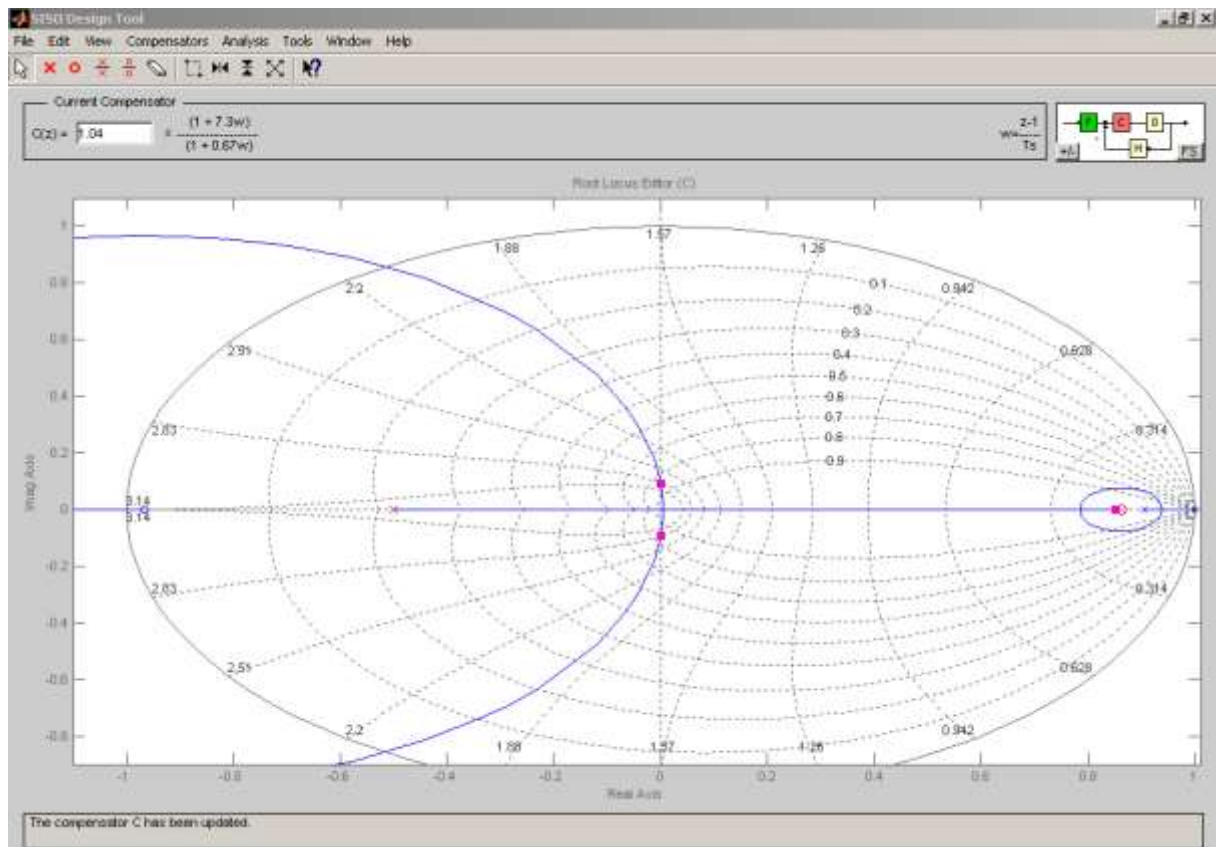
Maior ζ $\rightarrow$ menor PO% Curvas de $\omega_d = \text{constante}$; raios com inclinação $\theta = \omega_d T (\text{rad}) (= \omega_n T \rho / \zeta = 0)$ (Efeito "lag")

NO MATLAB:

```

% Para resolver o exemplo da página 88 com o MATLAB faça:
sys=tf(1,[10 1 0])
sysd=c2d(sys,1)
rltool(sysd)
% Dentro da janela insira polo e zero do controlador
% no Root Locus.
% Coloque as regiões de PO% e Tsubida
% usando o menu: Edit - Root Locus - Grid.
% Varie os polos de malha fechada
% que correspondem aos retângulos rosa.
% Aplique um degrau no sistema de malha
% fechada usando o menu: Analysis - Response to Step Command
% Para que o controlador mostre os dados em função da
% variável Z use: "Compensator", "Format" e "Options - zero/pole/gain".

```



VII – Sistemas de Controle no Espaço de Estados

VII.1 – Introdução

Todo o estudo de sistemas de controle discreto até este momento (neste curso) foi feito utilizando-se o conceito de função de transferência. Porém, esta abordagem pode ser ineficiente para sistemas que tenham várias entradas e várias saídas, pois a função de transferência relaciona apenas uma saída com uma entrada.

A teoria de controle moderno baseia-se na descrição dos sistemas dinâmicos em função de seus estados, possibilitando o tratamento de sistemas de várias entradas e várias saídas.

Neste capítulo, serão mostradas algumas vantagens de se trabalhar em espaço de estado em relação à utilização de função de transferência. Inicialmente, serão abordados sistemas contínuos em espaço de estado e depois sistemas discretos em espaço de estado. Também será abordado o projeto de controladores discretos em espaço de estado com e sem observadores de estados.

VII.2 – Sistemas Contínuos em Espaços de Estados

Um sistema contínuo com equações diferenciais lineares pode sempre ser expresso na seguinte forma matricial:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t)\end{aligned}\tag{7.1}$$

sendo:

- $u(t)$ a entrada controladora;
- $x(t)$ o vetor dos estados do sistema;
- $y(t)$ a saída do sistema.

A seguir será mostrado um exemplo de como obter a representação de um sistema contínuo em espaço de estado a partir de suas equações diferenciais.

Exemplo: Consideremos um dos graus de liberdade de um satélite, movendo-se em ambiente rarefeito, conforme ilustrado abaixo:

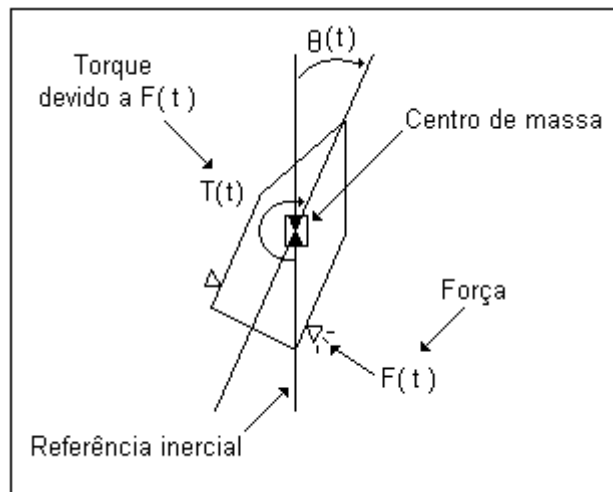


FIGURA 7.1

O movimento de rotação é descrito pela equação diferencial:

$$I\ddot{\theta}(t) = T(t) \quad (7.2)$$

Sendo: $I \rightarrow$ o momento de inércia do satélite em relação ao CG.

$T(t) \rightarrow$ torque exercido pela tubeira.

Neste caso, a entrada controladora é o torque $T(t)$, assim,

$$u(t) = T(t) \quad (7.3)$$

Supondo que $I = 1$, teremos:

$$\ddot{\theta}(t) = u(t) \quad (7.4)$$

Como a equação diferencial é de 2ª ordem, este sistema tem dois estados: $x_1(t)$ e $x_2(t)$ que são: posição angular $\theta(t)$ e velocidade angular $\dot{\theta}(t)$, ou seja:

$$\begin{cases} x_1(t) = \theta(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases} \quad (7.5)$$

Diferenciando a equação (7.5) teremos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) \end{cases} \quad (7.6)$$

Substituindo as equações (7.4) e (7.5) em (7.6) teremos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \quad (7.7)$$

Suponha que é disponível no satélite apenas o sensor da posição angular $\theta(t)$, que é a variável que está interessado em controlar, assim:

$$y(t) = \theta(t) \quad (7.8)$$

Ou

$$y(t) = x_1(t) \quad (7.9)$$

Rearranjando as equações (7.7) e (7.9) na forma matricial, obtemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_F \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G u(t) \quad (7.10)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_H \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}$$

Comparando-se (7.10) com (7.1) conclui-se que neste caso $J = 0$.

A equação (7.10) é uma representação do sistema dinâmico dado em (7.2), supondo que os estados sejam descritos por (7.5). Esta representação não é única, pois se podem escolher os estados de outra forma. Isto é mostrado a seguir.

VII.3 – Transformação Linear

A representação em espaço de estado (7.1) não é única, dado uma representação em espaço de estado, qualquer transformação linear não singular do tipo:

$$w = Tx \text{ ou } x = T^{-1}w \quad (7.11)$$

produz uma representação do mesmo sistema. O vetor w é o vetor do estado da nova representação. A relação entre a representação utilizando o vetor x e vetor w é obtida substituindo a equação (7.11) em (7.1). Para isto, determina-se $\dot{w}$:

$$\dot{w} = T\dot{x} \text{ ou } \dot{x} = T^{-1}\dot{w} \quad (7.12)$$

Substituindo (7.11) e (7.12) em (7.1), teremos:

$$\begin{cases} T^{-1}.\dot{w}(t) = F.T^{-1}.w(t) + Gu(t) \\ y(t) = H.T^{-1}.w(t) + Ju(t) \end{cases} \quad (7.13)$$

Logo,

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = T.F.T^{-1}.w(t) + T.Gu(t) \\ y(t) = H.T^{-1}.w(t) + Ju(t) \end{cases} \quad (7.14)$$

Ou,

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = A.w(t) + Bu(t) \\ y(t) = C.w(t) + Du(t) \end{cases} \quad (7.15)$$

Sendo:

$$A = T.F.T^{-1}$$

$$B = T.G$$

$$C = H.T^{-1}$$

$$D = J$$

As representações (7.1) e (7.15) representam o mesmo sistema dinâmico sendo que os estados foram escolhidos de uma forma diferente.

Exemplo: Como ilustração, ao invés de escolher os estados $x_1(t) = \theta(t)$ e $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ no exemplo anterior, vamos escolher outros estados na forma: $w_1(t) = \dot{\theta}(t)$ e $w_2(t) = \theta(t)$, ou seja:

$$w_1(t) = x_2(t) \text{ e } w_2(t) = x_1(t) \quad (7.16)$$

A representação matricial de (7.16) é:

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Desta forma, a transformação linear que leva o sistema na representação de (7.10) para a nova é:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Sendo,

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

A nova representação é obtida utilizando a equação (7.15), (7.10), (7.18), (7.19):

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Que é uma outra representação em espaço de estado do sistema dado por (7.2). Esta nova representação do modelo dinâmico do satélite foi obtida utilizando-se a transformação linear. A mesma representação da equação (7.20) pode ser obtida repetindo-se o exemplo anterior fazendo:

$$w_1(t) = \dot{\theta}(t) \text{ e } w_2(t) = \theta(t) \quad (7.21)$$

Diferenciando (7.21), obtemos:

$$\dot{w}_1(t) = \ddot{\theta}(t) \text{ e } \dot{w}_2(t) = \dot{\theta}(t) \quad (7.22)$$

Substituindo as equações (7.4) e (7.21) em (7.22) temos:

$$\begin{cases} w_1(t) = u(t) \\ \dot{w}_2(t) = w_1(t) \end{cases} \quad (7.23)$$

Com, $y(t) = \theta(t)$, temos:

$$y(t) = w_2(t) \quad (7.24)$$

A representação matricial das equações (7.23) e (7.24) é:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (7.25)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$$

Que é a mesma representação obtida com a transformação linear (7.18), compare (7.25) com (7.20).

Exercício: Determine a representação das equações dinâmicas do motor D.C. em espaço de estado, sendo que:

$$\tau \ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = ku(t) \quad (7.26)$$

Sendo,

$\theta(t) \rightarrow$ Posição angular do eixo;

$\dot{\theta}(t) \rightarrow$ Velocidade angular do eixo;

$\tau \rightarrow$ Constante de tempo do motor D.C.;

$k \rightarrow$ Ganho em regime do motor D.C.;

$u(t) \rightarrow$ Tensão de entrada do motor D.C..

Neste caso, escolha os seguintes estados: $x_1(t) = \theta(t)$ e $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$.

Exercício: Repita o exercício anterior para $\tau=1$ e $k=1$, fazendo as duas representações;

a) $x_1(t) = \theta(t)$ e $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$

b) $x_1(t) = \dot{\theta}(t)$ e $x_2(t) = \theta(t)$

Determine a transformação linear que leva o sistema da representação (a) para (b) e também a que leva de (b) para (a). Aplique as transformações nos dois casos e verifique se as representações são equivalentes.

VII.4 – Sistemas Discretos em Espaços de Estados

Suponha que o sistema dinâmico contínuo dado em (7.1) seja controlado por um controlador discreto da forma:

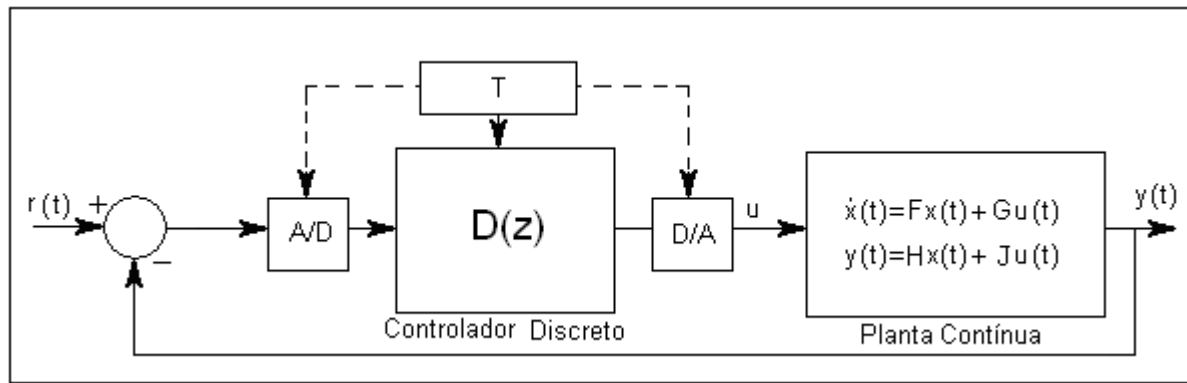


FIGURA 7.2

Da mesma forma que foi feito para a função de transferência, deseja-se determinar o sistema discreto em espaço de estado equivalente ao contínuo do sistema da figura acima. Portanto, é necessário estabelecer um método para obtenção da equação diferença que representa o comportamento da planta contínua quando conectada aos conversores D/A e A/D.

Para isto, é necessário resolvermos a equação (7.1), determinando a evolução temporal de $x(t)$. Essa resolução será feita em dois passos:

- Primeiro: Suponha que (7.1) tenha condições iniciais diferentes de zero e não tenha entrada externa, ou seja,

$$u(t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad (7.27)$$

e

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad x_0 \neq 0$$

A equação (7.1) torna-se:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) \quad \text{com} \quad x(t_0) = x_0 \quad (7.28)$$

Suponha que a série abaixo seja solução de (7.28):

$$x(t) = A_0 + A_1(t - t_0) + A_2(t - t_0)^2 + \dots \quad (7.29)$$

Deseja-se encontrar os valores dos vetores A_i , $i = 0, 1, \dots$ na equação (7.29) de forma a satisfazer (7.28). O valor de A_0 pode ser encontrado fazendo $t = t_0$ em (7.29):

$$x(t_0) = A_0 + A_1 \cancel{(t_0 - t_0)} + A_2 \cancel{(t_0 - t_0)}^2 + \dots$$

Ou,

$$x(t_0) = A_0$$

$$A_0 = x_0$$

Para determinar os outros $A_{i,s}$, utiliza-se a diferenciação de (7.29) e a substitui em (7.28).

$$\dot{x}(t) = A_1 + A_2 \cdot 2(t - t_0) + A_3 \cdot 3(t - t_0)^2 + \dots \quad (7.31)$$

Mas, segundo (7.28), $\dot{x}(t) = Fx(t)$, logo:

$$Fx(t) = A_1 + 2.A_2(t-t_0) + 3.A_3(t-t_0)^2 + \dots \quad (7.32)$$

Fazendo, $t = t_0$ teremos:

$$Fx(t_0) = A_1 + 2.A_2(\cancel{t_0 - t_0}) + 3.A_3(\cancel{t_0 - t_0})^2 + \dots \quad (7.33)$$

Logo,

$$A_1 = Fx_0$$

Diferenciando a equação (7.32), teremos:

$$F\dot{x}(t) = 2.A_2 + 3.2.A_3(t-t_0) + \dots \quad (7.34)$$

Mas, $\dot{x}(t) = Fx(t)$, logo,

$$F.F.x(t) = 2.A_2 + 3.2.A_3(t-t_0) + \dots \quad (7.35)$$

Fazendo $t = t_0$ em (7.35), teremos:

$$F^2x_0 = 2.A_2 + 6.A_3(\cancel{t_0 - t_0}) + \dots$$

Logo,

$$A_2 = \frac{F^2x_0}{2}$$

Continuando a diferenciar, os coeficientes A_i serão determinados:

$$x(t) = x_0 + Fx_0.(t-t_0) + \frac{F^2}{2}x_0.(t-t_0)^2 + \frac{F^3}{6}x_0.(t-t_0)^3 + \dots \quad (7.36)$$

Ou:

$$x(t) = \left[I + F.(t-t_0) + \frac{F^2}{2!}.(t-t_0)^2 + \frac{F^3}{3!}.(t-t_0)^3 + \dots \right].x_0 \quad (7.37)$$

Esta série é definida como matriz exponencial, ou seja,

$$e^{F(t-t_0)} = I + F.(t-t_0) + \frac{F^2}{2!}.(t-t_0)^2 + \frac{F^3}{3!}.(t-t_0)^3 + \dots \quad (7.38)$$

Logo,

$$\boxed{x(t) = e^{F(t-t_0)}.x(t_0)} \quad (7.39)$$

- Segundo: Suponha que (7.1) tenha entrada não nula, ou seja:

$$u(t) \neq 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad x(t_0) = 0 \quad (7.40)$$

Suponha que a solução de (7.1) seja da forma:

$$x(t) = e^{F(t-t_0)} \cdot v(t) \quad (7.41)$$

Sendo que $v(t)$ é um vetor de parâmetros variáveis a serem determinados.

Diferenciando (7.41) teremos:

$$\dot{x}(t) = F \cdot e^{F(t-t_0)} \cdot v(t) + e^{F(t-t_0)} \cdot \dot{v}(t) \quad (7.42)$$

Substituindo (7.42) e (7.41) em (7.1) teremos:

$$\cancel{F \cdot e^{F(t-t_0)} \cdot v(t)} + e^{F(t-t_0)} \cdot \dot{v}(t) = \cancel{F \cdot e^{F(t-t_0)} \cdot v(t)} + Gu(t)$$

Ou,

$$e^{F(t-t_0)} \cdot \dot{v}(t) = Gu(t) \quad (7.43)$$

A inversa é encontrada trocando o sinal do expoente:

$$\dot{v}(t) = e^{-F(t-t_0)} \cdot G \cdot u(t)$$

Integrando, teremos:

$$v(t) = \int_{t_0}^t e^{-F(\tau-t_0)} \cdot G \cdot u(\tau) d\tau \quad (7.44)$$

Substituindo (7.44) em (7.41), teremos:

$$x(t) = e^{F(t-t_0)} \cdot \int_{t_0}^t e^{-F(\tau-t_0)} \cdot G \cdot u(\tau) d\tau$$

Pelo teorema da convolução,

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} \cdot G \cdot u(\tau) d\tau \quad (7.45)$$

A solução completa da equação (7.1) é obtida com a soma das equações (7.39) e (7.45),

$$x(t) = e^{F(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{F(t-\tau)} \cdot G \cdot u(\tau) d\tau \quad (7.46)$$

Como se pode ver na figura (7.2), a entrada $u(t)$ é gerada pelo conversor D/A e tem a forma descrita na figura (4.4) onde $u(t)$ é constante entre uma amostragem e outra, ou seja:

$$u(t) = u(kT) \text{ para } kT < t < (k+1)T \quad (7.47)$$

Para encontrar a resposta de (7.1) para esse tipo de entrada se faz $t = (k+1)T$ e $t_0 = kT$ em (7.46):

$$x((k+1)T) = e^{FT} \cdot x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{F((k+1)T-\tau)} \cdot G \cdot u(\tau) d\tau \quad (7.48)$$

Segundo (7.47), $u(\tau)$ é constante no intervalo de integração da equação (7.48) e é igual a $u(kT)$ assim, pode retirar $u(\tau)$ da integração:

$$x((k+1)T) = e^{FT} .x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{F((k+1)T-\tau)} d\tau .G.u(kT) \quad (7.49)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$\eta = [(k+1)T - \tau]$$

O que implica em:

- $d\eta = -d\tau$;
 - Para $\tau = kT$ se tem: $\eta = T$;
 - Para $\tau = (k+1)T$ se tem: $\eta = 0$
- (7.50)

Substituindo (7.50) em (7.49) se obtém:

$$x((k+1)T) = e^{FT} .x(kT) + \int_0^T e^{F\eta} d\eta .G.u(kT) \quad (7.51)$$

Fazendo:

$$\Phi = e^{FT} \text{ e } \Gamma = \int_0^T e^{F\eta} .d\eta .G \quad (7.52)$$

A equação se torna:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad (7.53)$$

A saída $y(t)$ será amostrada gerando $y(kT)$. Amostrando $y(t)$ em (7.1) teremos:

$$y(k) = Hx(k) + Ju(k) \quad (7.54)$$

Finalmente, a descrição do sistema discreto em espaço de estado é formada pelas equações (7.53) e (7.54), ou seja:

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Hx(k) + Ju(k) \end{cases} \quad (7.55)$$

Sendo,

$$\Phi = e^{FT} \text{ e } \Gamma = \int_0^T e^{F\eta} d\eta .G$$

Aparentemente, o cálculo de Φ e Γ são complexos, para facilitar, mostraremos um procedimento simples:

Segundo a equação (7.38), fazendo $t = (k+1)T$ e $t_0 = kT$, teremos:

$$e^{FT} = I + FT + \frac{F^2 T^2}{2!} + \frac{F^3 T^3}{3!} + \dots \quad (7.56)$$

Pois:

$$T = (k+1)T - kT$$

Logo,

$$\Phi = e^{FT} = I + FT + \frac{F^2 T^2}{2!} + \frac{F^3 T^3}{3!} + \dots \quad (7.57)$$

Que pode ser escrito como:

$$\Phi = I + FT\phi \quad (7.58)$$

Sendo,

$$\phi = I + \frac{FT}{2!} + \frac{F^2 T^2}{3!} + \dots \quad (7.59)$$

Com $\Gamma = \int_0^T e^{F\eta} . d\eta . G$, e substituindo a equação (7.56) nela,

$$\Gamma = \int_0^T \left[I + F\eta + \frac{F^2 \eta^2}{2!} + \frac{F^3 \eta^3}{3!} + \dots \right] . d\eta . G$$

Integrando teremos:

$$\Gamma = \left[I\eta + \frac{F\eta^2}{2!} + \frac{F^2 \eta^3}{3!} + \frac{F^3 \eta^4}{4!} + \dots \right]_0^T . G$$

Ou,

$$\Gamma = \left[IT + \frac{FT^2}{2!} + \frac{F^2 T^3}{3!} + \frac{F^3 T^4}{4!} + \dots \right] . G \quad (7.50)$$

Substituindo (7.59) em (7.60), teremos:

$$\Gamma = \phi . T . G \quad (7.61)$$

Portanto, o sistema discreto equivalente ao sistema contínuo da figura (7.2) é:

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Hx(k) + Ju(k) \end{cases} \quad (7.62)$$

Sendo,

$$\Phi = I + F . T . \phi$$

$$\Gamma = \phi . T . G$$

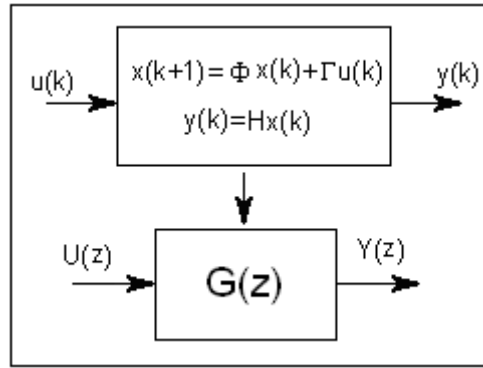
$$\phi = I + \frac{FT}{2!} + \frac{F^2 T^2}{3!} + \dots$$

Pode se implementar um programa para calcular Φ , Γ e ϕ com o seguinte algoritmo:

- 1 - Entre com T , F , G e o número de iterações $= l$
(tipicamente $l = 11$)
- 2 - Matriz $I \leftarrow$ identidade
- 3 - Matriz $\phi \leftarrow I$
- 4 - Se $l = 1$, vai para 8
- 5 - Matriz $\phi \leftarrow I + \frac{FT}{k} \phi$
- 6 - $l \leftarrow l - 1$
- 7 - Vai para 4
- 8 - Matriz $\Gamma \leftarrow T\phi G$
- 9 - Matriz $\Phi \leftarrow I + FT\phi$

O MATLAB realiza estes cálculos usando a função “c2d”, digite “help c2d”.

VII.5 – Obtenção da Função de transferência a Partir da Representação em Espaço de Estado



A obtenção da função de transferência a partir da representação em espaço de estado será mostrada através de um sistema de três estados.

Considere que o sistema (7.62) tenha três estados, que pode ser reescrito:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 \\ \phi_7 & \phi_8 & \phi_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{bmatrix} u(k) \quad (7.63)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Foi suposto que $J=0$.

A equação (7.63) pode ser representada em equações multiplicando os vetores e as matrizes:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \phi_1 x_1(k) + \phi_2 x_2(k) + \phi_3 x_3(k) + \Gamma_1 u(k) \\ x_2(k+1) = \phi_4 x_1(k) + \phi_5 x_2(k) + \phi_6 x_3(k) + \Gamma_2 u(k) \\ x_3(k+1) = \phi_7 x_1(k) + \phi_8 x_2(k) + \phi_9 x_3(k) + \Gamma_3 u(k) \end{cases} \quad (7.64)$$

$$\{ y(k) = H_1 x_1(k) + H_2 x_2(k) + H_3 x_3(k) \}$$

Aplicando a transformada – Z em (7.64), sendo condições iniciais nulas, teremos:

$$\begin{cases} zX_1(z) = \phi_1 X_1(z) + \phi_2 X_2(z) + \phi_3 X_3(z) + \Gamma_1 U(z) \\ zX_2(z) = \phi_4 X_1(z) + \phi_5 X_2(z) + \phi_6 X_3(z) + \Gamma_2 U(z) \\ zX_3(z) = \phi_7 X_1(z) + \phi_8 X_2(z) + \phi_9 X_3(z) + \Gamma_3 U(z) \end{cases} \quad (7.65)$$

$$\{ Y(z) = H_1 X_1(z) + H_2 X_2(z) + H_3 X_3(z) \}$$

A representação de (7.65) na forma matricial é:

$$z \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 \\ \phi_7 & \phi_8 & \phi_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{bmatrix} U(z) \quad (7.66)$$

$$Y(z) = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \end{bmatrix} \quad (7.67)$$

Ou,

$$\begin{cases} zX(z) = \Phi X(z) + \Gamma U(z) \\ Y(z) = HX(z) \end{cases} \quad (7.68)$$

$$(7.69)$$

Rearranjando (7.68) teremos:

$$zX(z) - \Phi X(z) = \Gamma U(z)$$

Ou,

$$(zI - \Phi)X(z) = \Gamma U(z)$$

Ou,

$$X(z) = (zI - \Phi)^{-1} \cdot \Gamma U(z) \quad (7.70)$$

Substituindo (7.70) em (7.69) teremos:

$$Y(z) = H(zI - \Phi)^{-1} \cdot \Gamma U(z)$$

Ou,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H \cdot (zI - \Phi)^{-1} \cdot \Gamma$$

Logo, a função de transferência que relaciona $U(z)$ com $Y(z)$ é:

$$\boxed{G(z) = H \cdot (zI - \Phi)^{-1} \cdot \Gamma} \quad (7.71)$$

A inversa da matriz é obtida por:

$$(zI - \Phi)^{-1} = \frac{[\text{cof}(zI - \Phi)]^T}{\det(zI - \Phi)} \quad (7.72)$$

De onde se verifica que o denominador de $G(z)$ é encontrado por: $\det(zI - \Phi)$.

Os polos de $G(z)$ são as raízes do seu denominador, que podem ser encontrados pela equação:

$$\det(zI - \Phi) = 0 \quad (7.73)$$

Esta equação é chamada de equação característica do sistema dado em (7.62).

Exemplo: Suponha que o satélite ilustrado na figura (7.1) será controlado por um controlador discreto (computador de bordo), seguindo o esquema da figura (7.2). Utilizando os mesmos dados do exemplo da página (98), determine a representação discreta em espaço de estado das equações do satélite.

Conforme visto no exemplo da página (98), os estados selecionados foram:

$$x_1(t) = \theta(t) \text{ e } x_2(t) = \dot{\theta}(t)$$

O que resultou na seguinte representação:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_F \cdot x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G \cdot u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[1 \quad 0]}_H \cdot x(t)$$

Temos:

$$\phi = I + \frac{FT}{2!} + \frac{F^2T^2}{3!} + \dots$$

Ou,

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{T}{2} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{T^2}{6} + \dots$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{T}{2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & \frac{T}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$\Phi = I + FT\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{T}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$\Gamma = \phi.T.G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{T}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . T . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

Finalmente, o sistema discreto equivalente terá a seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\Phi} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \underset{H}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Sendo:

$x_1(k) = \theta(k) \rightarrow$ Posição angular;

$x_2(k) = \omega(k) \rightarrow$ Velocidade angular;

$y(k) = \theta(k) \rightarrow$ Posição angular.

Exemplo: a) Determine a função de transferência discreta a partir da representação discreta em espaço de estado do exemplo acima.

b) Determine a função de transferência discreta a partir da função de transferência contínua e compare com a obtida no item “a”.

a) Sabemos que a função de transferência é obtida por:

$$G(z) = H(zI - \Phi)^{-1} \Gamma$$

Substituindo H , Φ e Γ do exemplo anterior, teremos:

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

Ou,

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{\left[\text{cof} \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \right]^T}{\det \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}} \\ \bullet \quad \left[\text{cof} \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \right]^T &= \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ +T & z-1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} z-1 & T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \\ \bullet \quad \det \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} &= (z-1)^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\begin{bmatrix} z-1 & T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}}{(z-1)^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{(z-1)T^2}{2} + T^2 \end{bmatrix}}{(z-1)^2}$$

Finalmente,

$$G(z) = \frac{T^2 \cdot (z+1)}{2 \cdot (z-1)^2}$$

b) A função de transferência contínua é obtida aplicando-se a transformada de LAPLACE em (7.4):

$$\mathcal{L}\{\ddot{\theta}(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

Ou,

$$s^2 \theta(s) = U(s), \text{ para condições iniciais nulas.}$$

Isolando,

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

Assim,

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

A função de transferência discreta equivalente é obtida por:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right\} \Big|_{t=kT}$$

Que é:

$$G(z) = \frac{(z-1)}{z} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$$

Logo,

$$G(z) = \frac{T^2}{2} \cdot \frac{(z+1)}{(z-1)^2}$$

Que é idêntica a função de transferência obtida no item “a”.

Com os dois exemplos anteriores, verifica-se que a função de transferência discreta pode ser obtida por dois caminhos equivalentes:

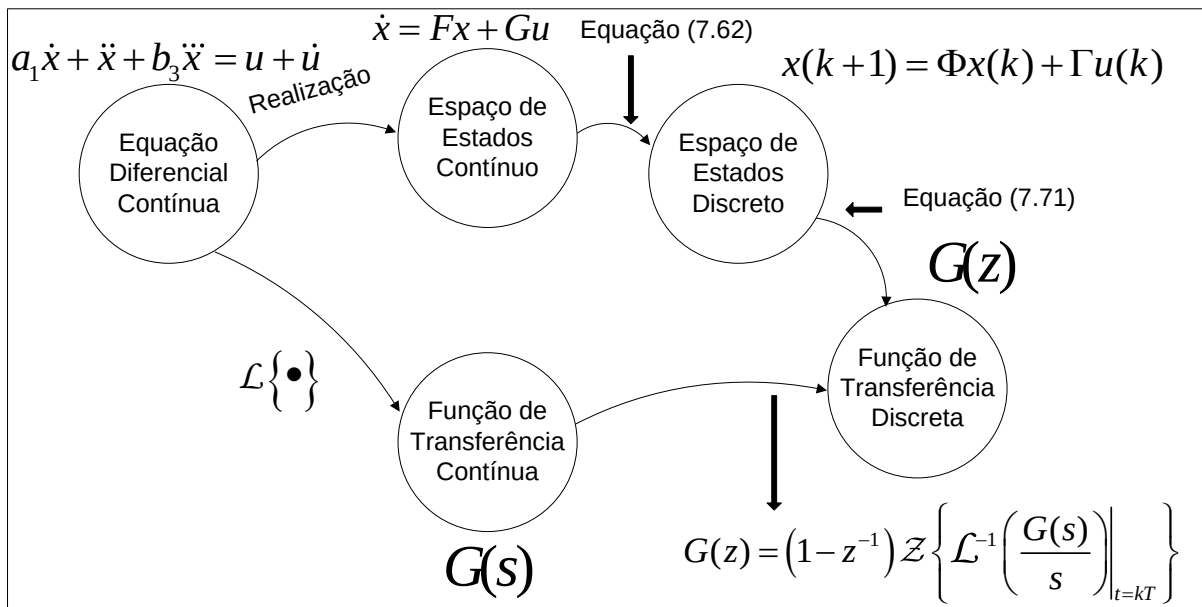


FIGURA (7.3)

VII.6 – Projeto de Controladores Discretos usando Métodos para Variáveis de Estados

Nos capítulos anteriores nós apresentamos o projeto de controladores usando funções de transferência, estes métodos são clássicos. O objetivo deste capítulo é utilizar o espaço de estado para projetar controladores discretos. Uma das vantagens desse método é que pode se alocar os polos do sistema de malha fechada em qualquer ponto do plano – Z, não ficando limitado ao lugar geométrico delineado pelo “Root – Locus”.

VII.6.1 – Projeto da Lei de Controle

A estrutura que será utilizada para controlar um sistema é a mesma da figura (7.2), mas ao invés de realimentarmos o sistema com $y(t)$, serão utilizados os estados $x(t)$. Já foi visto que o sistema contínuo em espaço de estado é:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases} \quad (7.74)$$

E seu equivalente discreto, supondo $J=0$ por simplicidade, considerando que $u(t)$ é gerado através de um conversor D/A, é:

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Hx(k) \end{cases} \quad (7.75)$$

Sendo:

$$\Phi = e^{FT} \quad \Gamma = \int_0^T e^{F\eta} d\eta \cdot G$$

Ou,

$$\Phi = I + FT\phi$$

$$\Gamma = \phi \cdot T \cdot G$$

$$\phi = I + \frac{FT}{2!} + \frac{F^2 T^2}{3!} + \dots$$

O projeto utilizando espaço de estado discreto assume que serão disponíveis todos os estados para realimentação. Nem sempre isto é possível na prática, muitas vezes o engenheiro não dispõe de um sensor para cada estado. Uma solução é utilizar os estados disponíveis e estimar os outros utilizando se o estimador de estados que será visto mais adiante. Para estudar o projeto com realimentação de estados, iremos supor que todos os estados possuem um sensor cada: veremos no final deste capítulo que o projeto completo consistirá do estimador de estados e do controlador.

A transformada – Z de (7.75) é:

$$\begin{cases} zX(z) = \Phi X(z) + \Gamma U(z) \\ Y(z) = HX(z) \end{cases}$$

Ou ainda,

$$\begin{cases} X(z) = z^{-1} \cdot \Phi \cdot X(z) + z^{-1} \cdot \Gamma \cdot U(z) \\ Y(z) = HX(z) \end{cases}$$

Este conjunto de equações pode ser representado por:

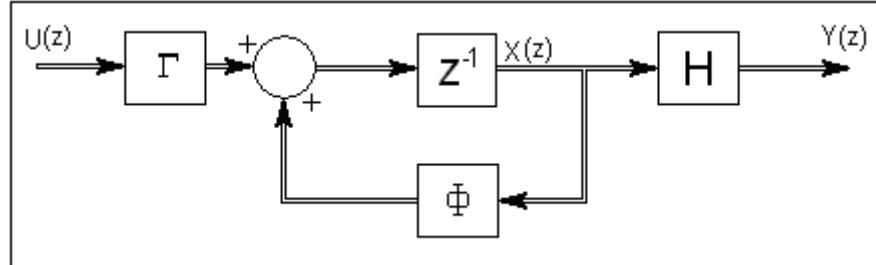


FIGURA 7.4

O controlador digital é composto pela combinação linear de todos os estados:

$$u(k) = -Kx(k) + u_n(k) = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + u_n(k) \quad (7.76)$$

∴

$$u(k) = -Kx(k) + u_n(k)$$

O sistema da figura anterior com esta realimentação de estado torna se:

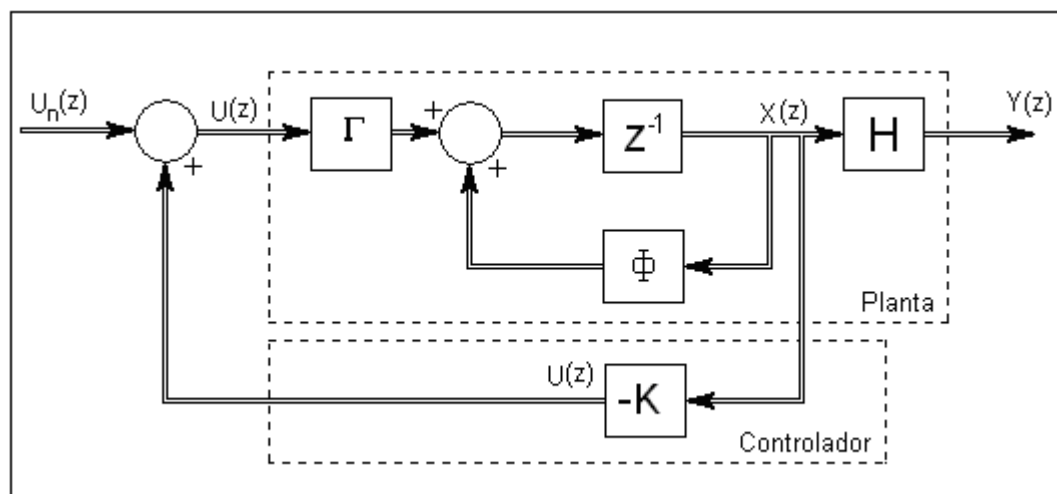


FIGURA 7.5

Na prática este controlador, será implementado com a seguinte estrutura:

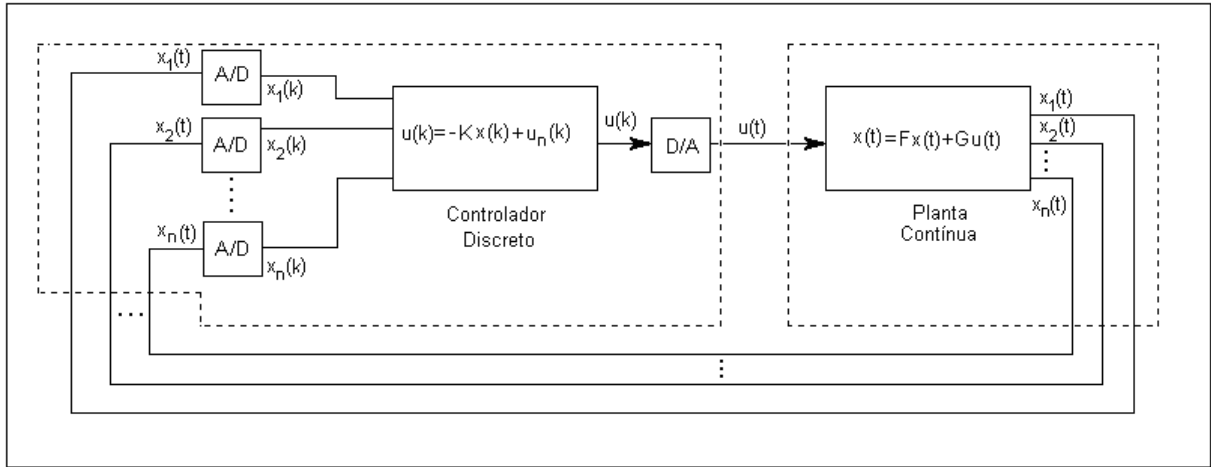


FIGURA 7.6

Substituindo (7.76) em (7.75) temos:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma [-Kx(k)] + \Gamma u_n(k)$$

Ou,

$$x(k+1) = [\Phi - \Gamma K] x(k) + \Gamma u_n(k)$$

Aplicando a transformada – Z teremos:

$$zX(z) = [\Phi - \Gamma K] X(z) + \Gamma U_n(z)$$

Logo,

$$X(z) = [zI - \Phi + \Gamma K]^{-1} \Gamma U_n(z) \quad (7.77)$$

A equação característica deste sistema realimentado é:

$$\det[zI - \Phi + \Gamma K] = 0 \quad (7.78)$$

Os polos do sistema realimentado são encontrados através desta equação característica. Pode se ver que os polos dependem de K , então basta encontrar um vetor K tal que os polos do sistema realimentado coincidam com os especificados, ou seja, estejam nas localizações desejadas.

Dado as localizações desejadas dos polos do sistema realimentado,

$$z_1 = \beta_1, \quad z_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad z_n = \beta_n \quad (7.79)$$

A equação característica do sistema controlado é:

$$\alpha_c(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_n) \quad (7.80)$$

Ou,

$$\alpha_c(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

As equações (7.78) e (7.80) são idênticas, (7.78) é a equação característica do sistema realimentado e (7.80) é a equação característica desejada, determinado pelos polos especificados. Os elementos do vetor K são obtidos igualando se essas duas equações:

$$\det[zI - \Phi + \Gamma K] = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_n) \quad (7.81)$$

Essa técnica de projeto também é conhecida como projeto de controladores por alocação de polos.

Exemplo: Suponha que querem projetar uma lei de controle para o satélite do exemplo anterior, sendo que a representação em espaço de estados foi feita para $x_1(t) = \theta(t)$ e $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$. O período de amostragem do controlador é $T = 0,1s$. Neste caso, o modelo discreto do satélite é:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

Deseja se que as raízes (polos) do sistema realimentado estejam em $s = -1,8 \pm j3,12$. Esta especificação é passada para o plano - Z utilizando:

$$z = e^{sT}$$

Logo,

$$z = e^{(-1,8 \pm j3,12) \cdot 0,1}$$

$$z = e^{-0,18} \cdot e^{\pm j0,312}$$

$$z = e^{-0,18} \cdot (\cos 0,312 \pm j \sin 0,312)$$

$$z = 0,7949 \pm j0,2564$$

Como este sistema é de 2ª ordem, a equação característica (7.80) é:

$$\alpha_c(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2)$$

Sendo,

$$\beta_1 = 0,7949 + j0,2564 \quad \text{e} \quad \beta_2 = 0,7949 - j0,2564$$

Logo,

$$\alpha_c(z) = (z - 0,7949 - j0,2564)(z - 0,7949 + j0,2564)$$

Ou,

$$\alpha_c(z) = z^2 - 1,6z + 0,7 \quad (7.82)$$

A equação característica $\det[zI - \Phi + \Gamma K]$ é calculada a seguir substituindo Φ e Γ :

$$equação(z) = \det \left[z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \cdot [k_1 \quad k_2] \right]$$

$$equação(z) = \det \left[\begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2}k_1 & \frac{T^2}{2}k_2 \\ Tk_1 & Tk_2 \end{bmatrix} \right]$$

$$equação(z) = \det \begin{bmatrix} z-1+\frac{T^2}{2}k_1 & \frac{T^2}{2}k_2-T \\ Tk_1 & z-1+Tk_2 \end{bmatrix}$$

$$equação(z) = \left(z-1+\frac{T^2}{2}k_1 \right) (z-1+Tk_2) - Tk_1 \left(\frac{T^2}{2}k_2-T \right)$$

$$equação(z) = z^2 + z \left(\frac{T^2}{2}k_1 + Tk_2 - 2 \right) + \frac{T^2}{2}k_1 - Tk_2 + 1 \quad (7.83)$$

Substituindo (7.82) e (7.83) em (7.81) teremos:

$$z^2 + z \left(\frac{T^2}{2}k_1 + Tk_2 - 2 \right) + \frac{T^2}{2}k_1 - Tk_2 + 1 = z^2 - 1,6z + 0,7$$

Que é satisfeita se e somente se:

$$\begin{cases} \frac{T^2}{2}k_1 + Tk_2 - 2 = -1,6 \\ \frac{T^2}{2}k_1 - Tk_2 + 1 = 0,7 \end{cases}$$

Resolvendo essas equações para $T = 0,1s$, obtemos:

$$k_1 = 10 \quad \text{e} \quad k_2 = 3,5$$

O controlador que posiciona os polos do satélite com Φ e Γ em $z = 0,7949 \pm j0,2564$ é:

$$k = [10 \quad 3,5]$$

Que deverá ser implementado com a estrutura da figura (7.6).

O procedimento de projeto descrito neste exemplo torna se muito trabalhoso para sistemas com ordem maiores que 2, pois o cálculo do determinante na forma algébrica é muito custoso. O procedimento descrito a seguir realiza o projeto sem a necessidade do calculo deste determinante.

- Fórmula de Ackermann para Projetos de Controladores Discretos com Realimentação de Estados

J. Ackermann determinou uma relação conveniente que elimina o cálculo do determinante na forma literal, a demonstração pode ser encontrada no livro: “Digital Control of Dynamic Systems” - Gene F. Franklin & J.David Powell, no apêndice do capítulo (6). A relação é dada por:

$$K = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \cdot [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \Phi^2\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]^{-1} \alpha_c(\Phi) \quad (7.82)$$

Ou,

$$K = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \cdot C^{-1} \cdot \alpha_c(\Phi)$$

Sendo:

$$C = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \Phi^2\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]$$

Que é a matriz de controlabilidade do sistema (Φ, Γ) , se C não for invertível significa que este sistema não é controlável e não será possível alocar os polos do sistema realimentados.

- n é a ordem do sistema (que é igual ao número de elementos do vetor de estados);
- $\alpha_c(\Phi)$ é a equação característica $\alpha_c(Z)$ com a substituição de Z por Φ , ou seja:

$$\alpha_c(\Phi) = \Phi^n + \alpha_1\Phi^{n-1} + \alpha_2\Phi^{n-2} + \dots + \alpha_n I \quad (7.83)$$

Sendo que os $\alpha_{i's}$ são os coeficientes da equação característica desejada.

Exemplo: Deseja se aplicar a formula de Ackermann para projetar o controle K para o satélite ao invés do procedimento do exemplo anterior.

Já foi determinado no exemplo anterior que a equação característica que atende as especificações é:

$$\alpha_c = z^2 - 1,6z + 0,7$$

que comparada com (7.83) tem se: $\alpha_1 = -1,6$ e $\alpha_2 = 0,7$.

Neste caso, (7.83) será:

$$\alpha_c(\Phi) = \Phi^2 + \alpha_1\Phi + \alpha_2 I = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 - 1,6 \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0,7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_c(\Phi) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4T \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

A matriz de controlabilidade é:

$$C^{-1} = [\Gamma \quad \Phi\Gamma]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \frac{3}{2}T^2 \\ T & T \end{bmatrix}^{-1}$$

ou

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} T & \frac{-3}{2}T^2 \\ -T & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\frac{T^3}{2} - \frac{3}{2}T^3} = \begin{bmatrix} T & \frac{-3}{2}T^2 \\ -T & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{-1}{T^3}$$

ou

$$C^{-1} = \frac{1}{T^2} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2}T \\ 1 & \frac{-T}{2} \end{bmatrix}; \det(C) = \frac{T^3}{2} - \frac{3}{2}T^3 = -T^3 \neq 0$$

$\therefore$ o sistema é controlável.

Substituindo C^{-1} e α_c na fórmula de Ackermann (7.82), teremos:

$$K = [0 \quad 1] \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2}T \\ 1 & \frac{-T}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4T \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \begin{bmatrix} -0,1 & -0,25T \\ 0,1 & 0,35T \end{bmatrix}$$

logo,

$$K = \frac{1}{T^2} \cdot [0,1 \quad 0,35T]$$

No exemplo anterior, T era: $T = 0,1s$, logo:

$$K = [10 \quad 3,5]$$

que é o mesmo resultado do exercício anterior.

Este projeto pode ser realizado com o MATLAB, através das funções ACKER.M ou PLACE.M.

A simulação do projeto da página (118) é feita utilizando-se a equação da página (116):

$$x(k+1) = [\Phi - \Gamma K]x(k) \quad , \text{ supondo que: } (u_n(k) = 0 \quad , \quad k \geq 0)$$

Substituindo, teremos:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \cdot [10 \quad 3,5] \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-5T^2 & T-T^2 \frac{3,5}{2} \\ -10T & 1-3,5T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Como $T = 0,1s$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,0825 \\ -1 & 0,65 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

e

$$u(k) = [10 \quad 3,5] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Supondo que o satélite tinha inicialmente velocidade angular igual a 1rad/s, e $\theta(0) = 0$ rad, teremos:

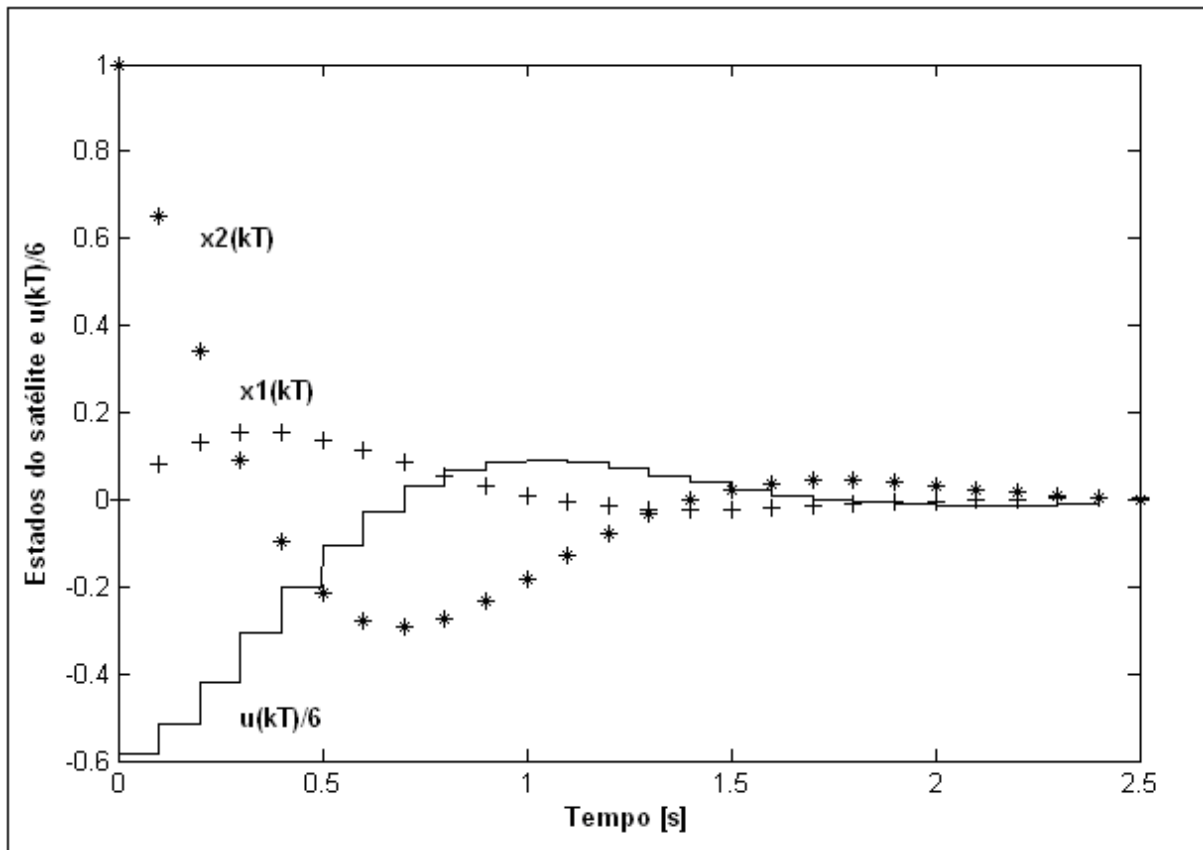
$$x_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad x_2(0) = 1$$

Logo:

k	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$u(k) = -Kx(k)$ $u(k) = -10x_1(k) - 3,5x_2(k)$
0	0	1	-3,5
1	0,0825	0,65	-3,1
2	0,132	0,34	-2,51
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

O gráfico está mostrado a seguir, sendo que $u(kT)$ foi calculado e dividido por 6 para termos uma boa clareza nas curvas.

Mostra-se o programa MATLAB utilizado.



NO MATLAB:

```

┌
ts=0.1;
psi=[1 ts;0 1];
tau=[(ts^2)/2 ts]';
k=[10 3.5];
x=[0 1];
xa=x';
n=25;
t=[0:1:n]*ts;
for i=1:n
    xa=((psi-tau*k)*xa);
    x=[x;xa'];
end
u=-k*x';
%plot(t,x,'+',t,u/6,'*')
plot(t,x(:,1),'+',t,x(:,2),'*')
hold on
dplot(t,u/6)
ylabel('Estados do satélite e u(kT)/6')
xlabel('Tempo [s]')
text(0.2,0.6,'x2(kT)')
text(0.3,0.25,'x1(kT)')
text(0.3,-0.5,'u(kT)/6')
hold off
└

```

VII.6.2 – Projeto do Estimador de Estado

O projeto do controlador com realimentação dos estados supõe que todos os estados do sistema estavam disponíveis, mas isto nem sempre é verdade. Na prática um número parcial de estados é disponível, os outros estados não disponíveis deverão ser estimados e então realimentados. Existem dois estimadores de estados básicos para estimar o estado $x(k)$: o estimador corrente, $\hat{x}(k)$, que se baseia na medida de $y(k)$ e o estimador preditor, $\bar{x}(k)$, que se baseia na medida de $y(k-1)$. Neste curso, será estudado apenas o estimador preditor.

O Estimador Preditor

Um método para estimar os estados do sistema constitui de um modelo matemático do sistema, ou seja:

$$\bar{x}(k+1) = \Phi \bar{x}(k) + \Gamma u(k) \quad (7.84)$$

Sendo:

$\bar{x}(k) \rightarrow$ é a estimativa do estado $x(k)$;

Φ e $\Gamma \rightarrow$ são conhecidos e representam o sistema.

Esquemáticamente, a estimação de estados será:

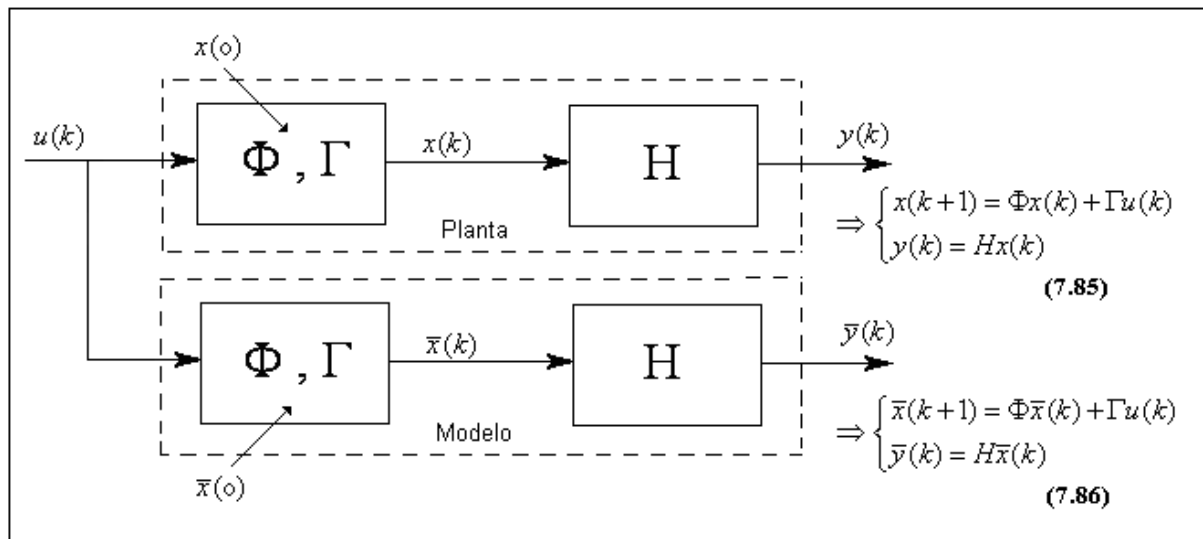


FIGURA 7.7

Para verificar o desempenho da estimação, define-se um erro de estimação:

$$\tilde{x}(k) \triangleq \bar{x}(k) - x(k) \quad (7.87)$$

ou,

$$\tilde{x} \triangleq \bar{x} - x$$

Substituindo (7.85) e (7.86) em (7.87) teremos:

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi \bar{x}(k) + \Gamma u(k) - \Phi x(k) - \Gamma u(k)$$

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi \underbrace{[\bar{x}(k) - x(k)]}_{\tilde{x}(k)}$$

logo,

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi \tilde{x}(k) \quad (7.88) \rightarrow \text{para o satélite: } \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k+1) \\ \tilde{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \end{bmatrix}$$

se,

$\bar{x}(0) = x(0)$ segundo a equação (7.87), $\tilde{x}(0)$ é: $\tilde{x}(0) = \bar{x}(0) - x(0) = 0$
e então, (7.88) será:

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi \cdot 0 = 0$$

significando que não haverá erro de estimação durante todo o processamento. No entanto, se $\bar{x}(0) \neq x(0)$, o erro de estimação só será nulo se (7.88) decrescer com o tempo, isto só irá acontecer se e somente se a planta Φ , for assintoticamente estável. Uma solução seria garantir que $\bar{x}(0) = x(0)$ sempre, mas para isto seria necessário medir todos os estados no instante $t = 0$, o que necessitaria de um sensor para cada estado. Mas, se tivermos um sensor para cada estado, não será necessário estimá-los, pois já os conhecemos e, portanto não precisaria do estimador. Como estamos supondo que não temos sensores para todos os estados, temos que encontrar uma outra estrutura para estimar esses estados. Pode-se verificar que o estimador da figura (7.7) está funcionando em malha aberta, uma solução para o problema é construir um sistema que realimenta o erro de estimação entre $y(k)$ e $\bar{y}(k)$, estabilizando o estimador de forma que o erro de estimação decaia assintoticamente. Esta realimentação está mostrada abaixo:

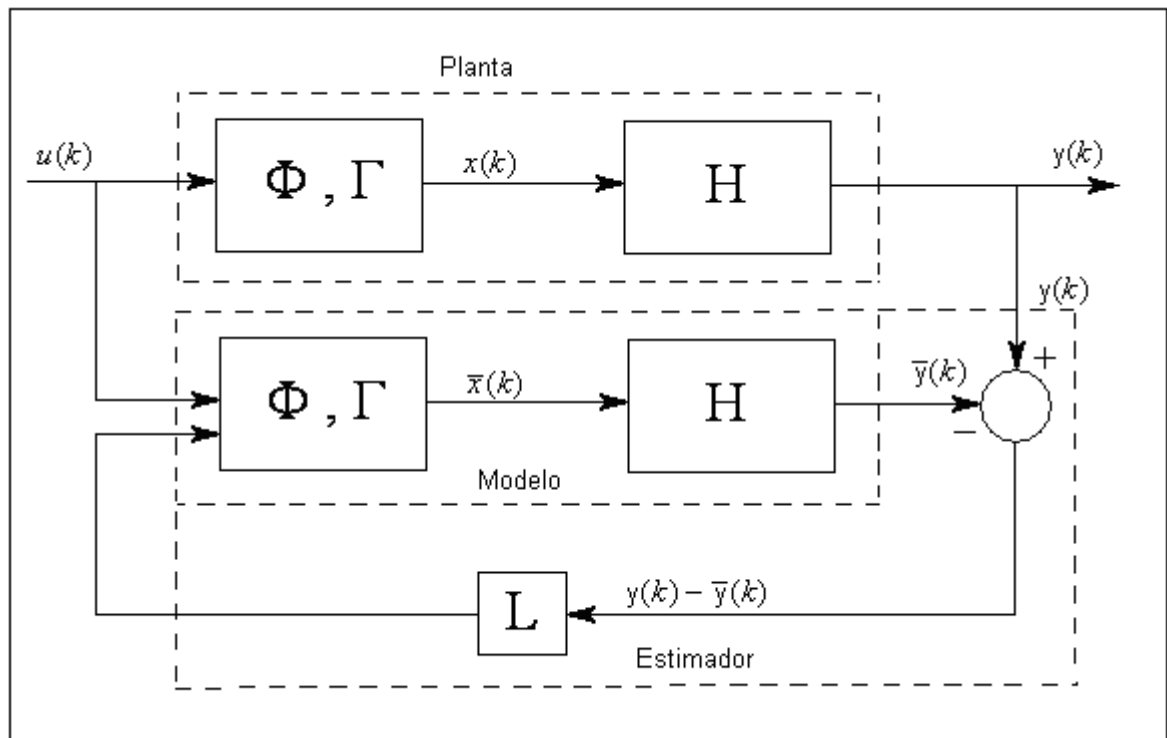


FIGURA 7.8

cujo equacionamento é:

$$\bar{x}(k+1) = \Phi \bar{x}(k) + \Gamma u(k) + L[y(k) - H\bar{x}(k)] \quad (7.89)$$

sendo que L é a matriz de ganhos de realimentação.

Este estimador é preditor porque uma medida no tempo k resulta na estimação do estado em $k+1$.

O erro de estimação $\tilde{x}$ já foi definido em (7.87), neste caso, substituindo (7.89) e (7.85) em (7.87) teremos:

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi \bar{x}(k) + \Gamma u(k) + L[y(k) - H\bar{x}(k)] - [\Phi x(k) + \Gamma u(k)]$$

como $y(k) = Hx(k)$ temos:

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi \bar{x}(k) + \cancel{\Gamma u(k)} + LHx(k) - LH\bar{x}(k) - \Phi x(k) - \cancel{\Gamma u(k)}$$

ou,

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi [\bar{x}(k) - x(k)] - LH [\bar{x}(k) - x(k)]$$

logo,

$$\tilde{x}(k+1) = [\Phi - LH] \cdot \underbrace{[\bar{x}(k) - x(k)]}_{\tilde{x}(k)}$$

finalmente,

$$\tilde{x}(k+1) = [\Phi - LH] \tilde{x}(k) \quad (7.90)$$

Se o sistema (7.90) representar um sistema assintoticamente estável, o erro de estimação $\tilde{x}$ convergirá para zero, qualquer que seja o valor de $\tilde{x}(0)$. Para que a estimação seja eficiente é necessário que $\tilde{x}(k)$ convirja mais rápido que $x(k)$, para isto o ganho do estimador L deve ser tal que os transitórios associados aos autovalores de $\Phi - LH$ sejam suficientemente “rápidos”.

Com esta realimentação L , torna-se desnecessário que $\bar{x}(0)$ seja idêntico a $x(0)$, ou seja, $\tilde{x}(0) \neq 0$.

O procedimento para determinar L é o mesmo do projeto da lei de controle K . Primeiramente especifica-se a localização desejada das raízes do estimador no plano- z e obtêm-se a equação característica desejada do estimador:

$$\alpha_e(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_n) \quad (7.91)$$

sendo β 's as localizações desejadas dos polos (autovalores) do estimador e deverão representar a “rapidez” com a qual o estimador convergirá para o estado da planta.

A equação (7.91) pode ser representada na forma:

$$\alpha_e(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n \quad (7.92)$$

A equação característica do erro de estimação é:

$$\alpha_e(z) = \det[zI - \Phi + LH] \quad (7.93)$$

Determina-se o estimador L igualando-se (7.93) com (7.92).

Exemplo: Projete um estimador para os estados do satélite do exemplo anterior, sendo que os polos do estimador deverão estar em: $z = 0,4 \pm j0,4$.

A equação característica desejada é:

$$\alpha_e(z) = (z - 0,4 + j0,4)(z - 0,4 - j0,4)$$

ou,

$$\alpha_e(z) = z^2 - 0,8z + 0,32 \quad (7.94)$$

A equação característica do estimador é:

$$\alpha_e(z) = \det[zI - \Phi + LH] = \det \left[z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$\alpha_e(z) = \det \begin{bmatrix} z-1+L_1 & -T \\ L_2 & z-1 \end{bmatrix} = (z-1)(z-1+L_1) + TL_2$$

$$\alpha_e(z) = z^2 + z(L_1 - 2) + 1 - L_1 + TL_2 \quad (7.95)$$

Igualando-se (7.94) com (7.95) teremos:

$$\begin{cases} L_1 - 2 = -0,8 \\ 1 - L_1 + TL_2 = 0,32 \end{cases}$$

sendo $T = 0,1s$, teremos:

$$L_1 = 1,2 \text{ e } L_2 = 5,2$$

logo,

$$L = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 5,2 \end{bmatrix}$$

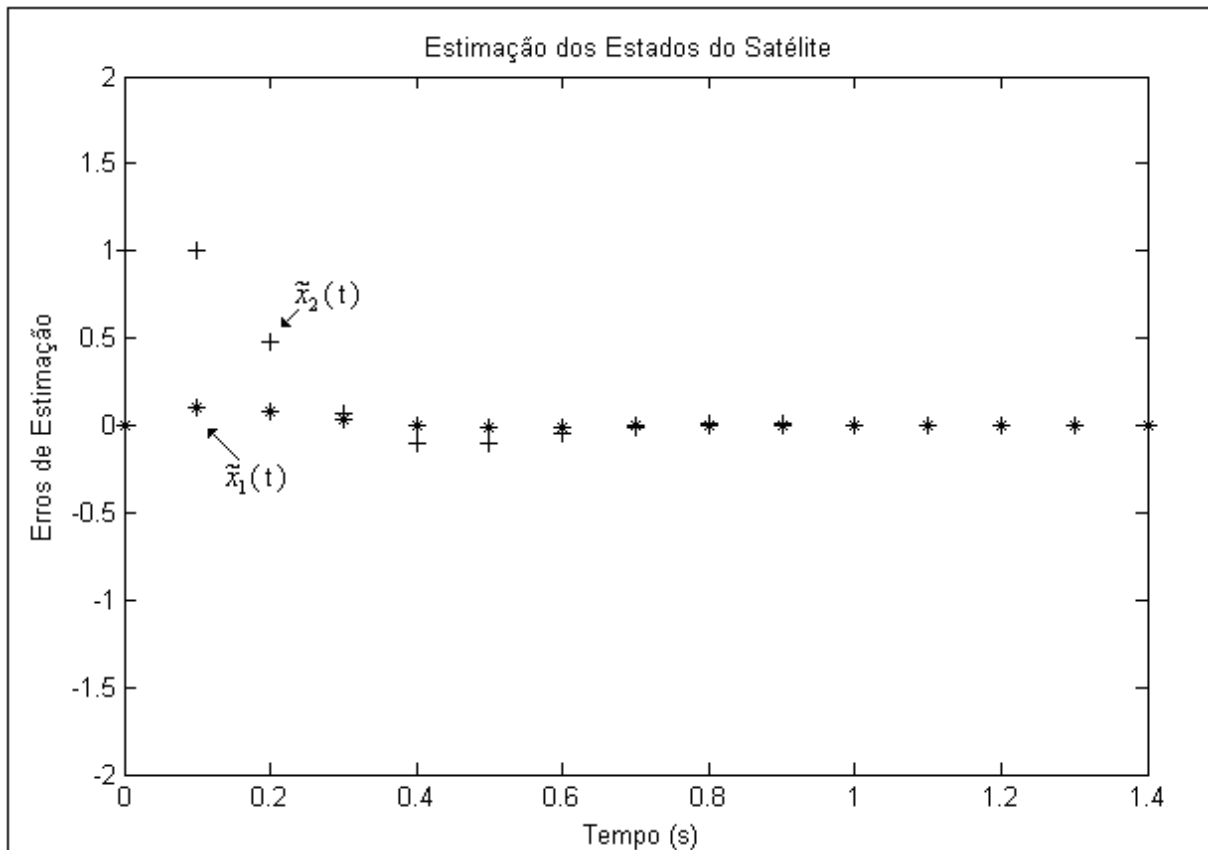
O estimador será implementado utilizando-se a equação (7.89), que neste caso é:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(k+1) \\ \bar{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1(k) \\ \bar{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 1,2 \\ 5,2 \end{bmatrix} \cdot \left[y(k) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(k) \\ \bar{x}_2(k) \end{bmatrix} \right] \quad (7.95a)$$

Como $T = 0,1s$, temos:

$$\begin{cases} \bar{x}_1(k+1) = \bar{x}_1(k) + 0,1\bar{x}_2(k) + 0,005u(k) + 1,2[y(k) - \bar{x}_1(k)] \\ \bar{x}_2(k+1) = \bar{x}_2(k) + 0,1u(k) + 5,2[y(k) - \bar{x}_1(k)] \end{cases} \quad (7.95b)$$

Supondo que os estados iniciais do satélite sejam: $x_1(0) = x_2(0) = 0$ e os estimados $\bar{x}_1(0) = 0 \text{ rad}$ e $\bar{x}_2(0) = 1 \text{ rad/s}$, logo $\tilde{x}_1(0) = 0$ e $\tilde{x}_2(0) = 1$, substituindo na equação (7.90), (7.95a ou 7.95b), teremos:



NO MATLAB:

```

clear
T=0.1;
fi=[1 T; 0 1];
L=[1.2 5.2]';
H=[1 0];
x=[0 1]';
xa=x;
ti=0;
tv=ti;
for i=1:1:14
    xa=(fi-L*H)*xa;
    x=[x xa];
    ti=ti+T;
    tv=[tv ti];
end
x1=x(1,:);
x2=x(2,:);
plot(tv,x1,'*',tv,x2,'+')
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Erros de Estimação');
title('Estimação dos Estados do satélite');
axis([0 1.4 -2 2]);

```

- Fórmula de Ackermann para Projeto do Estimador

O projeto do estimador envolve o cálculo literal do determinante e pode ficar muito complexo para sistemas de ordem maior que 3. Isto pode ser eliminado utilizando o projeto do observador de estado segundo a fórmula de Ackermann:

$$L = \alpha_e(\Phi) \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^{n-1} \end{bmatrix}}_{D^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.96)$$

sendo:

- $D \rightarrow$ é a matriz de observabilidade, se D não for invertível implica que o sistema não possui todos os estados observáveis e não será possível estimá-los.
- $\alpha_e(\Phi) \rightarrow$ é a equação característica desejada substituindo z por Φ ou seja:

$$\alpha_e(\Phi) = \Phi^n + \alpha_1 \Phi^{n-1} + \alpha_2 \Phi^{n-2} + \dots + \alpha_n I \quad (7.97)$$

sendo que os α_i 's são os coeficientes da equação característica desejada:

$$\alpha_e(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

A demonstração da fórmula de Ackermann pode ser encontrada no apêndice do capítulo (6) do “Franklin & Powell”.

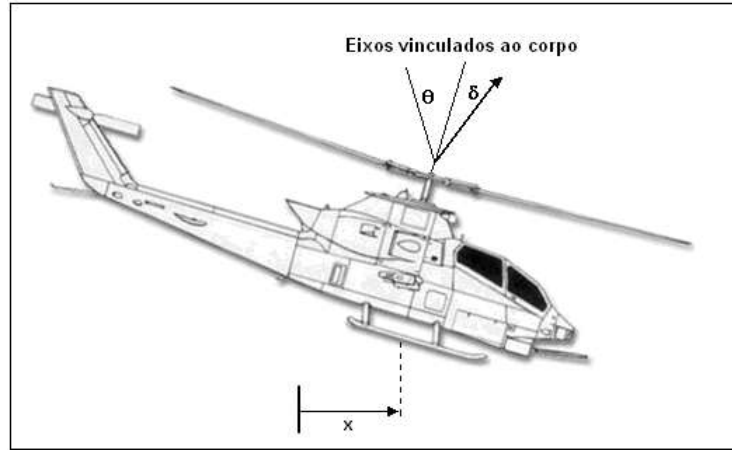
Exercício – Projete o estimador de estados do exemplo anterior utilizando a fórmula de Ackermann.

Observabilidade (Sistema Contínuo)

$$\det \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Observável}$$

Exemplo de sistema observável e de sistema não observável:

Um helicóptero de alto desempenho possui o modelo mostrado abaixo.



O objetivo é controlar o ângulo arfagem, $\theta(t)$, do helicóptero ajustando-se o ângulo $\delta(t)$ do rotor. As equações de movimento deste helicóptero são:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} &= -\sigma_1 \frac{d\theta(t)}{dt} - \alpha_1 \frac{dx(t)}{dt} + n\delta(t) \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= g\theta(t) - \alpha_2 \frac{d\theta(t)}{dt} - \sigma_2 \frac{dx(t)}{dt} + g\delta(t)\end{aligned}$$

Em espaço de estados teremos:

$$\left. \begin{aligned}x_1(t) &= \theta(t) \\ x_2(t) &= \dot{\theta}(t) \\ x_3(t) &= x(t) \\ x_4(t) &= \dot{x}(t)\end{aligned} \right\} \text{logo} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \sigma_1 x_1(t) - \alpha_2 x_4(t) + n\delta(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = gx_1(t) - \alpha_2 x_2(t) - \sigma_2 x_4(t) + g\delta(t) \end{cases}$$

$$u(t) = \delta(t)$$

então,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ g & -\alpha_2 & 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ g \end{bmatrix}}_B \cdot u(t)$$

Supondo que se mede apenas a posição angular $\theta(t)$, ou seja, dispõe-se de sensor apenas para $\theta(t)$, a saída será:

$$y(t) = \theta(t) = x_1(t)$$

ou,

$$y(t) = \underbrace{[1 \ 0 \ 0 \ 0]}_C \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

Assim o estado de observabilidade é:

$$\det \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & \sigma_1^2 - g\alpha_2 & 0 & -\sigma_1\alpha_2 + \sigma_2\alpha_2 \\ ? & ? & 0 & ? \end{pmatrix} = 0$$

Neste caso o determinante é nulo, pois se tem uma coluna nula. Logo, o sistema não é observável.

Suponha que se mede não apenas $\theta(t)$, mas também $x(t)$ logo:

$$y(t) = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\det \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 9,8 & -1,845 & 0 & -0,0309 \\ -0,303 & 10,61 & 0 & 0,0211 \end{pmatrix} = 103,22$$

Calculado com **MATLAB**, substituem-se os valores de $g, \alpha_2, \dots$.

Logo $\det(\cdot) \neq 0$ então o sistema é observável.

Controlabilidade (Sistema Contínuo)

$$\det \left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right) \neq 0 \Rightarrow \text{Controlável}$$

Considerando o mesmo problema anterior, ou seja, o helicóptero, teremos:

$$\det\left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & n & -\alpha_2 g & i? \\ 1 & -\alpha_2 g & n\sigma_1 + \alpha_2 \alpha n + \sigma_2 g \alpha_2 & ii? \\ 0 & g & -\alpha n - \sigma_2 g & iii? \\ g & -\alpha n - \sigma_2 g & gn + \alpha \alpha_2 g + \alpha n \sigma_2 + \sigma_2^2 g & iv? \end{bmatrix}\right)$$

Substituindo valores:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 6,27 & -2,71 & 1,227 \\ 6,27 & -2,71 & 1,23 & -1,236 \\ 0 & 9,80 & -9,16 & 65,50 \\ 9,80 & -9,16 & 65,50 & -29,61 \end{bmatrix}\right) = 148459,36 \neq 0$$

$\therefore$ é controlável

Suponha que o helicóptero quebrou e $n = 0$ nesta situação. Logo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

assim,

$$\det\left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,11 & 0,047 \\ 0 & -0,109 & 0,047 & -0,021 \\ 0 & 9,8 & -0,194 & 0,159 \\ 9,8 & -0,194 & 0,1594 & -1,137 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$\therefore$ não é controlável

VII.6.3 – Projeto do Regulador: Combinação da Lei de Controle com o Estimador de estados.

O sistema de controle estará completo se for implementada a lei de controle (7.76) utilizando os estados estimados pelo estimador (7.89). Uma representação é:

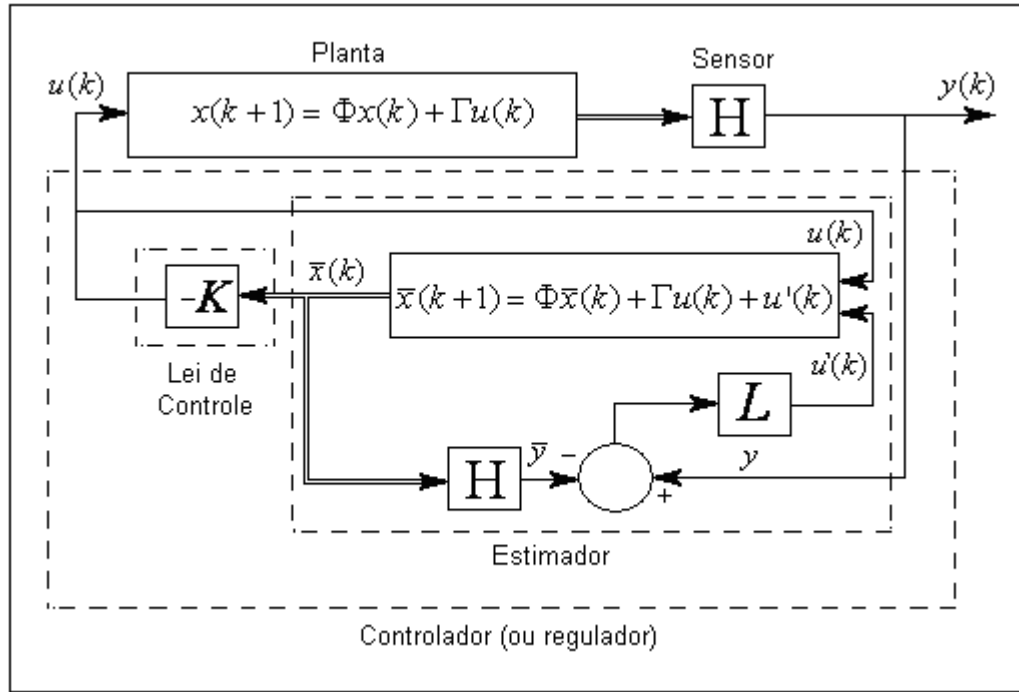


FIGURA 7.9

O projeto da lei de controle assumiu que os estados da planta, $x(k)$, eram todos disponíveis. Agora, supomos que os estados não são todos disponíveis e a realimentação será feita utilizando-se os estados estimados $\bar{x}(k)$. Será visto agora que isto não causa nenhum efeito no funcionamento conjunto e que o projeto da lei de controle, K e do estimador, L , podem ser realizados separadamente e utilizados em conjunto como mostra a figura (7.9).

- O princípio da Separação

Conforme mostrado na figura (7.9), a equação da planta é dada por:

$$x(k+1) = \Phi x(k) - \Gamma K \bar{x}(k) \quad (7.98)$$

O erro de estimação é dado por:

$$\tilde{x} = \bar{x} - x \Rightarrow \bar{x} = \tilde{x} + x \quad (7.99)$$

Substituindo (7.99) em (7.98) teremos:

$$x(k+1) = \Phi x(k) - \Gamma K [x(k) + \tilde{x}(k)] \quad (7.100)$$

ou,

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma K)x(k) - \Gamma K \tilde{x}(k)$$

A equação do erro de estimação do estimador L é dada em (7.90) que é:

$$\tilde{x}(k+1) = [\Phi - LH] \tilde{x}(k) \quad (7.101)$$

A equação que descreve completamente o sistema da figura (7.9) é constituída dos estados do estimador (7.101) e dos estados da planta (7.100) que colocados na forma matricial ficam:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - LH & 0 \\ -\Gamma K & \Phi - \Gamma K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ x(k) \end{bmatrix} \quad (7.102)$$

A sua equação característica é:

$$\alpha(z) = \det \begin{bmatrix} zI - \Phi + LH & 0 \\ \Gamma K & zI - \Phi + \Gamma K \end{bmatrix} \quad (7.103)$$

que, devido ser uma matriz nula no lado superior direito, pode ser escrito por:

$$\alpha(z) = \det[zI - \Phi + LH] \cdot \det[zI - \Phi + \Gamma K] = \alpha_e(z) \cdot \alpha_c(z)$$

Obs.: Da álgebra linear sabe-se que:

para $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ e A_{11} não-singular, então $\det(A) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$

Na equação (7.103), $A_{12} = 0$, logo:

$$\det(A) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22})$$

Portanto, as raízes do polinômio característico do sistema completo consistem da combinação das raízes do estimador com as raízes do controlador e não diferem daquelas obtidas assumindo que todos os estados, x , da planta eram disponíveis para realimentação de estados. Portanto, o controlador e o estimador são projetados separadamente e utilizados em conjunto.

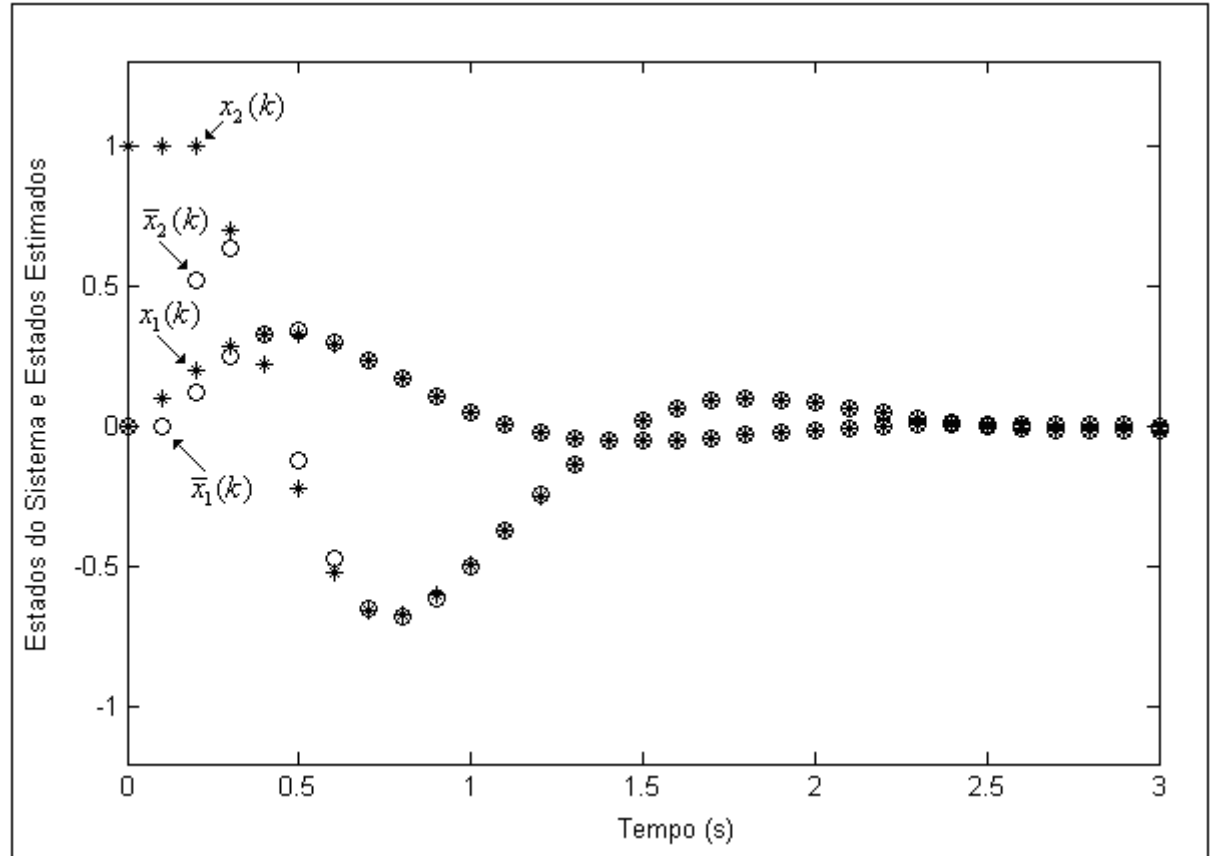
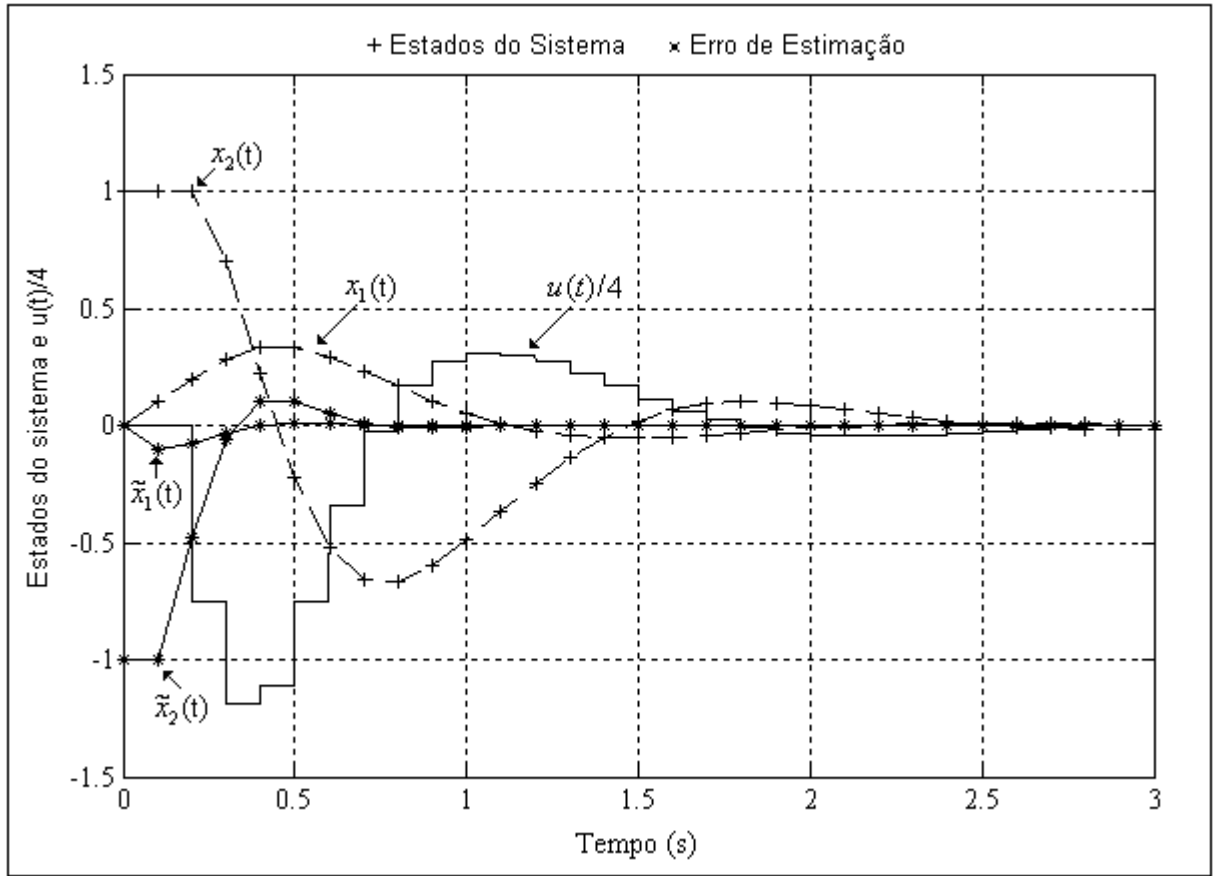
Exemplo: Projete um controlador com estimação de estados para o controle do satélite do exemplo anterior.

Nos exemplos anteriores projetou-se separadamente a lei de controle e o estimador de estados que são:

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 3,5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 5,2 \end{bmatrix}$$

Segundo o princípio da separação, o projeto do controlador completo não difere dos resultados obtidos com o projeto separado, para o projeto completo teremos o mesmo valor de K e L .

A simulação do sistema completo com o controlador e o estimador está mostrada na próxima página. Os estados iniciais utilizados foram: $x_1(0) = 0$ rad, $x_2(0) = 1$ rad/s, os estados iniciais do estimador foram: $\bar{x}_1(0) = 0$ e $\bar{x}_2(0) = 0$. Isto originou um erro de estimação inicial de: $\tilde{x}_1(0) = 0$ e $\tilde{x}_2(0) = -1$. Esta simulação utilizou a equação (7.102).



NO MATLAB:

```

┌  clear
    psi=[1 .1;0 1];
    tau=[(.1^2)/2 .1]';
    h=[1 0];
    k=[10 3.5];
    l=[1.2 5.2]';
    An=[psi-tau*k (-tau*k);zeros(2,2) psi-l*h];
    Bn=zeros(4,1);
    Cn=[1 0 0 0];
    Dn=0;
    x0=[0 1 0 -1]';
    U=0:0.1:3;
    [y,x]=dlsim(An,Bn,Cn,Dn,U,x0);
    xb=x(:,1:2)+x(:,3:4);
    plot(U,x(:,1:2),'*',U,xb,'o')
    axis([0 3 -1.2 1.3]);
└

```

ANEXO I

CONVERSORES A/D e D/A

Circuito Sample-and-Hold (Amostra e Retém):

Na análise dos conversores A/D supomos que a tensão de entrada V_e é constante. Porém, se a tensão de entrada variar de uma quantidade significativa enquanto a conversão A/D estiver em prosseguimento, a saída digitalizada será ambígua.

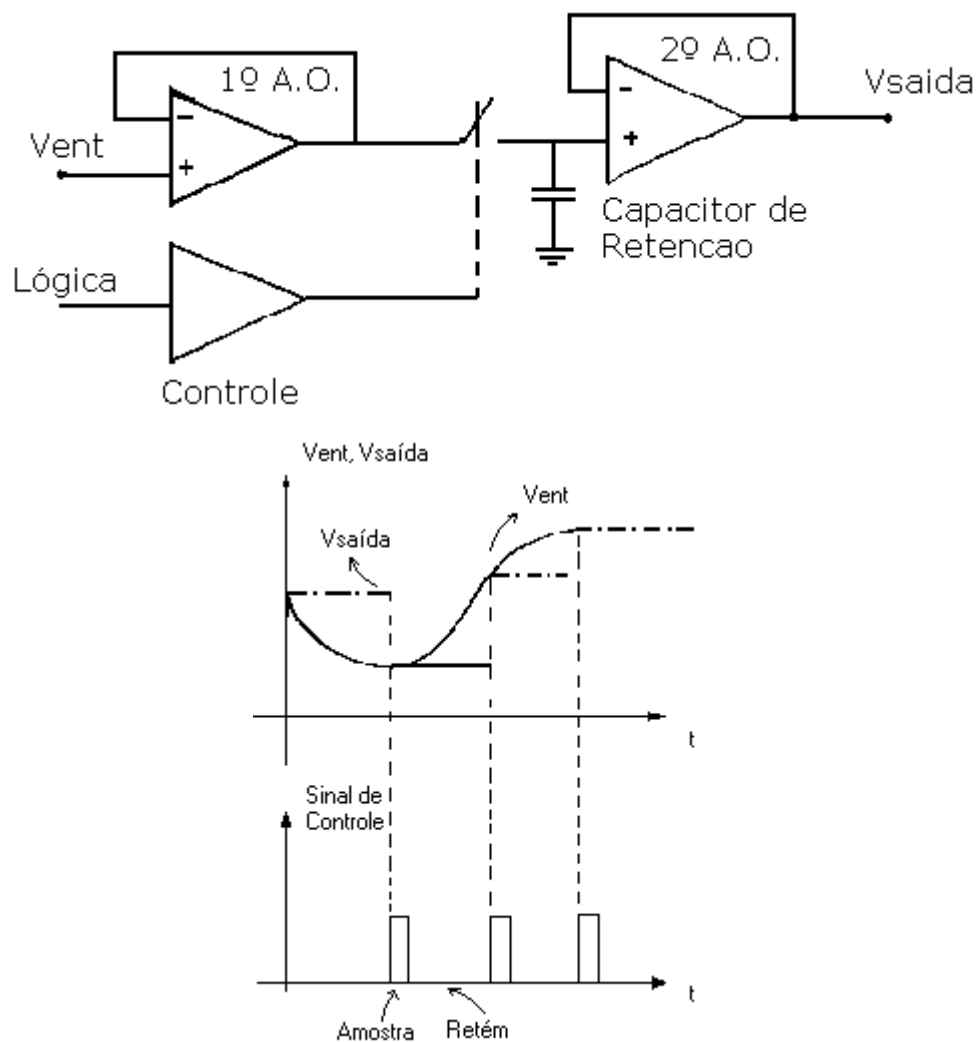


Figura 3.17 - Circuito sample-and-hold.

A figura acima mostra o circuito do sample-and-hold de ordem zero. A tensão da entrada inversora é aproximadamente V_{ent} . Em virtude da realimentação, a saída do primeiro amplificador operacional é de aproximadamente V_{ent} . Assim, o primeiro amplificador operacional atua como um amplificador de ganho unitário.

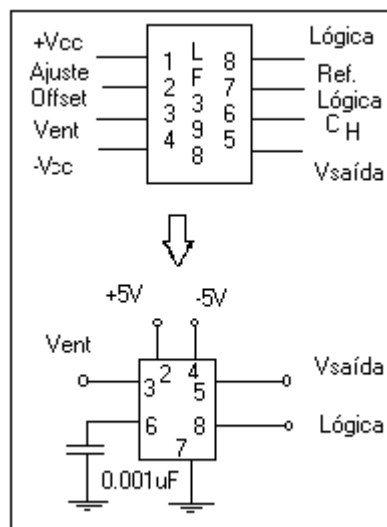
A chave é controlada por lógica, o que significa que uma entrada alta fecha a chave e uma entrada baixa, abre a chave.

Quando a chave estiver fechada, o capacitor se carregará rapidamente com V_{ent} , pois a impedância de saída do primeiro amplificador operacional é muito pequena. Uma vez que o segundo amplificador operacional também é um amplificador de ganho unitário, $V_{saída}$ é igual à V_{ent} . Quando a chave abre, o capacitor retém a sua carga, pois a impedância de entrada do segundo amplificador operacional é muito grande.

Tempo de Aquisição: Este é o tempo necessário para obter uma amostra precisa (tipicamente $0,1 \mu s$) depois da chave ser fechada. Idealmente, o tempo de aquisição é igual a zero, mas em um sample-and-hold real a constante de tempo de carga do capacitor de retenção é a impedância de saída do primeiro amplificador operacional produz um tempo de aquisição diferente de zero.

Tempo de Abertura: Este é definido como o tempo requerido para que a chave abra. Uma vez que ela é uma chave a transistor, a um pequeno intervalo de tempo antes que ela pareça aberta e não mais afete o capacitor de retenção.

Taxa de Decaimento: A taxa de decaimento é a taxa em que a tensão de saída diminui na condição de retenção. Há trajetos de fuga para a carga do capacitor, por exemplo, a impedância de entrada do segundo amplificador operacional.



O amplificador LF398 é um amplificador de sample-and-hold disponível comercialmente. Para um capacitor de $0,001 \mu F$:

T. Aquisição: $4 \mu s$

T. Abertura: $150 ns$

T. Decaimento: $30 mV/s$

Conversor D/A:

O circuito do conversor D/A com amplificador operacional é:

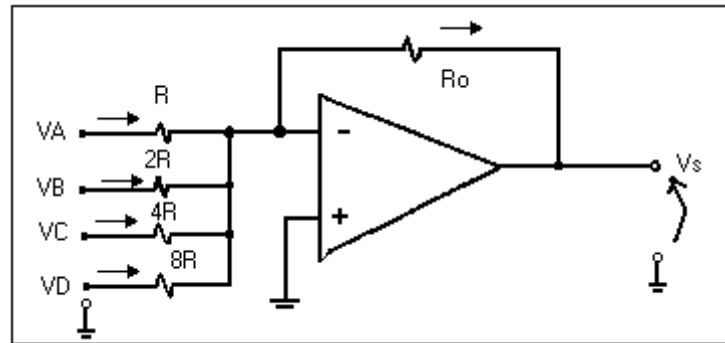


Figura 3.6 - Circuito do conversor D/A.

A tensão V_S é dada por:

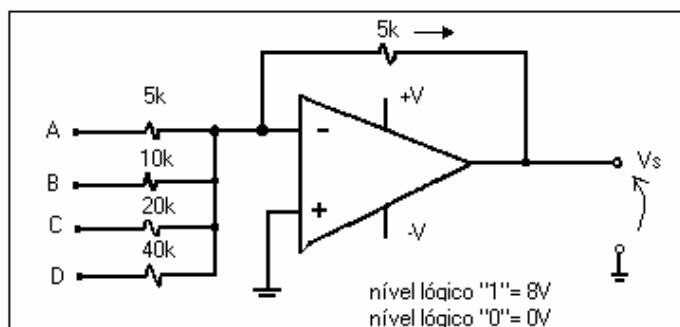
$$V_S = -\frac{R_0}{R} \cdot \left(V_A + \frac{V_B}{2} + \frac{V_C}{4} + \frac{V_D}{8} \right)$$

As tensões V_A , V_B , V_C e V_D poderão assumir apenas dois valores: nível 1 (V_{cc}) de tensão ou nível 0 (zero volts), logo poderemos escrever:

$$V_S = -\frac{R_0}{R} \cdot V_{cc} \cdot \left(A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \frac{D}{8} \right) \text{ ou } V_S = -\frac{R_0}{8R} \cdot V_{cc} \cdot (8A + 4B + 2C + D)$$

Onde V_{cc} é a tensão de nível 1 e A, B, C e D são os bits do código BCD8421.

Exemplo: Considere o seguinte conversor com $V_{cc} = -8V$ e $R = 5k\Omega$.



Entrada: $A = 0; B = 0; C = 1; D = 1 \Rightarrow 3_{10}$

Conversor Analógico para Digital (A/D):

O processo de conversão analógico-digital (A/D) consiste basicamente em entrarmos com a informação de forma analógica e recolhermos na saída esta mesma informação na forma digital, como esquematizado abaixo:

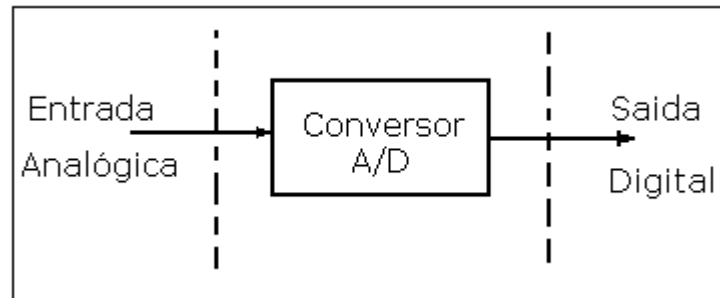


Figura 3.11 - Diagrama de um conversor A/D.

O circuito que efetua esta conversão é mais sofisticado que os conversores D/A, pois necessita-se de um contador e um conversor D/A para efetuar a conversão.

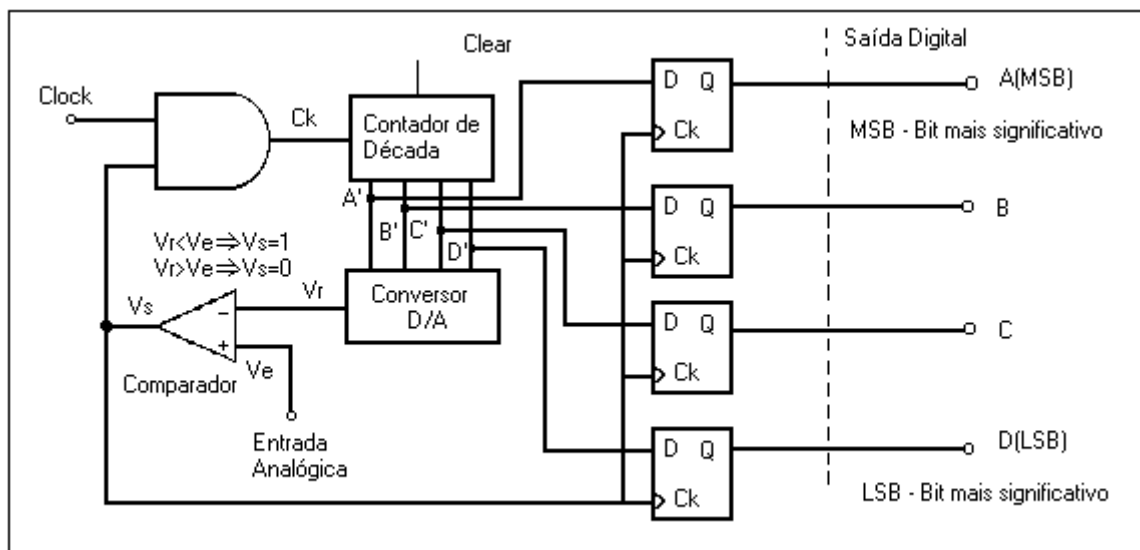
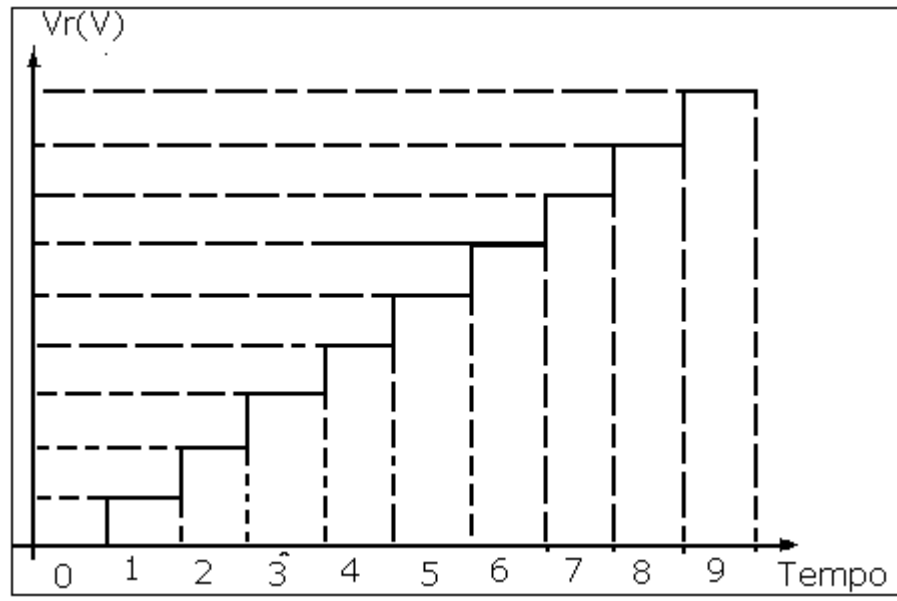


Figura 3.12 - Conversor A/D usando um conversor D/A. O flip-flop é acionado na descida do clock.

O circuito é basicamente constituído por um contador de década que gera o código BCD8421 nas saídas A', B', C' e D'. Essas saídas são colocadas num conversor D/A, fazendo com que este apresente na saída uma tensão de referência (V_r). Esta, por sua vez é colocada em uma das entradas de um circuito que compara esta tensão com a tensão de entrada analógica (V_e).

A saída deste comparador gerará o clock dos flip-flops do circuito de saída e também acionará uma chave digital (porta and) que bloqueará ou não a entrada do clock do contador de década.

O conjunto de saída do conversor, que servirá de referência para a comparação, é mostrado no gráfico abaixo.



CONTROLE DIGITAL

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Obtenha a forma fechada de $f(kT)$ para:

a) $F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z^2 - z + 1)}$

b) $F(z) = \frac{0,2z}{(z-0,2)(z+0,2)(z-1)}$

c) $F(z) = \frac{2}{(z-1)(z-0,5)}$

2) Um sistema de controle discreto é descrito pela seguinte equação:

$$y(k) - y(k-1) + 0,1y(k-2) = u(k-2)$$

sendo: $y(0) = y(-1) = y(-2) = 0$ e $u(k)$ um degrau unitário, determine:

- A transformada $-z$ de $y(k)$.
- O valor de $y(k)$ no regime permanente.
- A função de transferência deste sistema discreto.

3) Idem ao exercício 2, para:

$$y(k) + y(k-1) + 0,8y(k-2) = u(k-1)$$

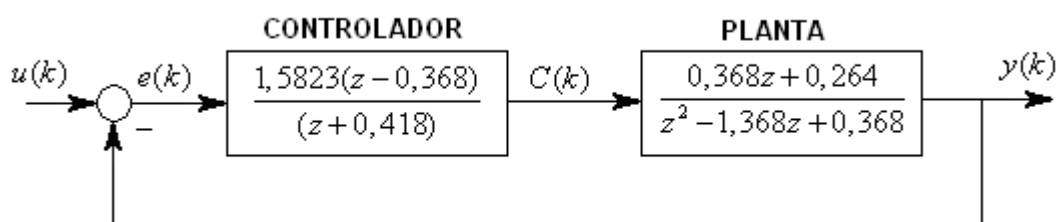
4) A resposta impulsiva ($g(k)$) de um sistema discreto é dada por:

k	0	1	2	3	...
$g(k)$	2	1	0,5	0,25	...

Determine a função de transferência deste sistema.

Indica que a sequência continua.

5) Considere o seguinte sistema de controle discreto:



Supondo a entrada $u(k)$ um degrau unitário, determine:

- a) O valor de regime de: $y(k)$ e $C(k)$.
 b) A resposta transitória de $y(k)$ e $C(k)$.

6) Determinar se os sistemas discretos abaixo são estáveis:

a) $G(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 1,1}$

b) $G(z) = \frac{z}{z^3 + 4z^2 - z + 6}$

c) $G(z) = \frac{2z}{z^3 - 1,1z^2 + 0,01z + 0,405}$

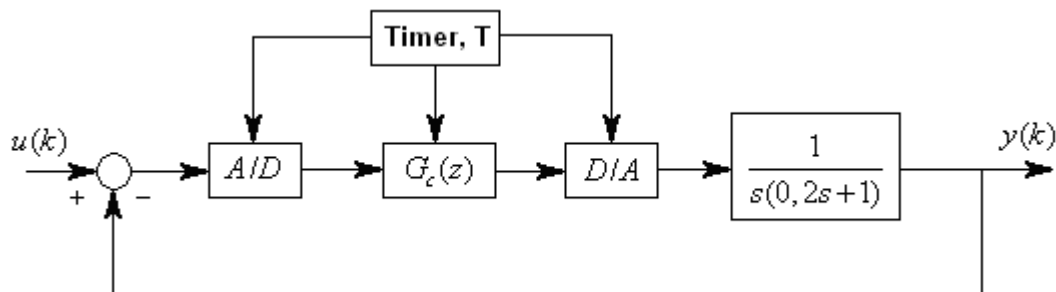
d) $G(z) = \frac{4}{z^3 - 3,6z^2 + 4z - 1,6}$

7) Determinar para que valores de “a” é estável o sistema descrito pela seguinte equação:

$$y(k+3) + 2y(k+2) + y(k+1) + ay(k) = u(k)$$

8) Determine se o sistema de controle abaixo é estável para as seguintes condições:

a) Supondo $G_c(z) = 1$ e $T = 0,1s$.

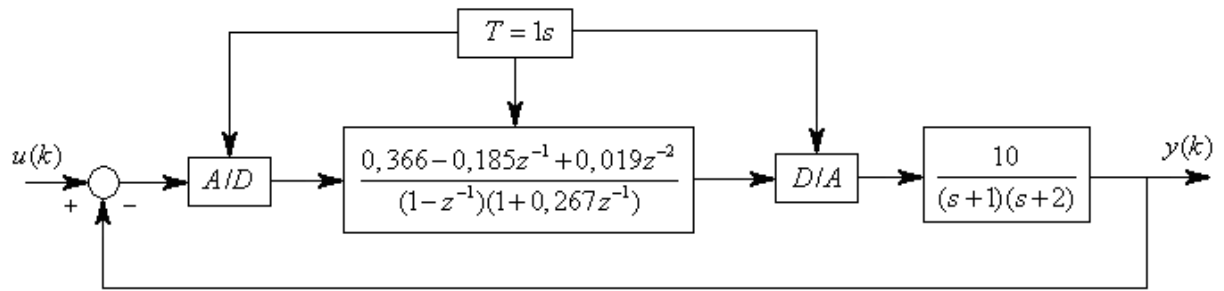


b) Supondo $G_c(z) = \frac{z}{z-1}$ e $T = 0,1s$.

c) Supondo $G_c(z) = \frac{z}{z-1}$ e $T = 2s$

d) Determine os erros de regime para entrada rampa e degrau para os itens a, b e c.

9) Considere o seguinte sistema de controle discreto:

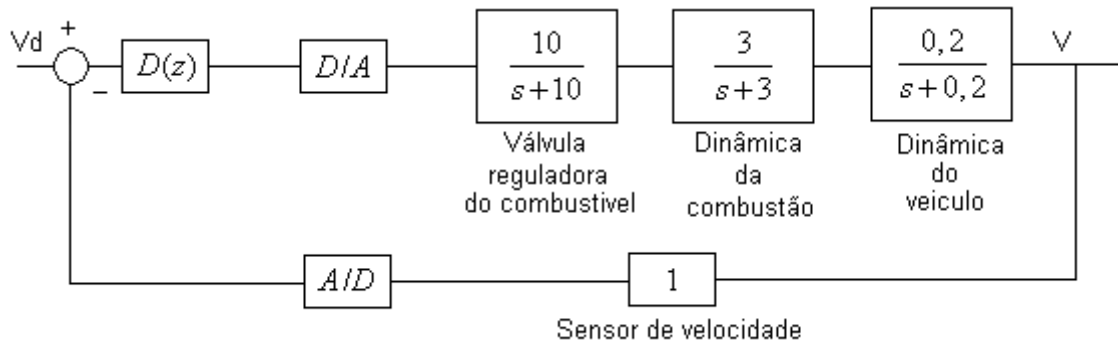


Determine se o sistema é estável e desenhe o gráfico de $y(k) \times k$ supondo $u(t)$ entrada degrau unitário. Descreva o programa que implementa o controlador discreto acima.

CONTROLE DIGITAL

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

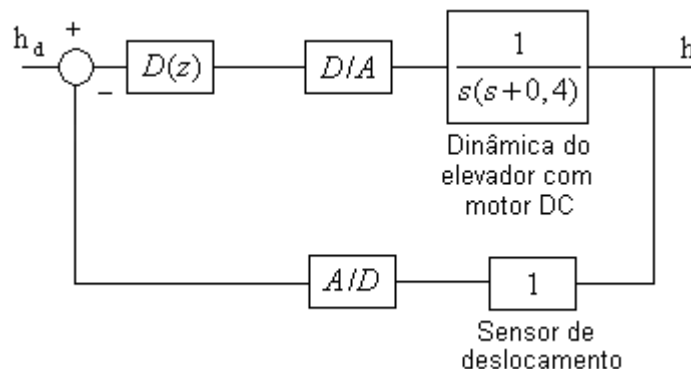
1) O diagrama de blocos do sistema de controle da velocidade de um automóvel autônomo é mostrado abaixo.



Para melhorar a resposta do veículo, é necessário projetar o controlador tal que o sistema não tenha overshoot, ou seja, $\zeta \geq 0,9$; e que o tempo de subida esteja entre: $3,0s \leq t_s \leq 6,0s$. O período de amostragem a ser utilizado será $T_s = 1s$.

- a) Projete o controlador $D(z)$ utilizando a emulação.
- b) Projete o controlador $D(z)$ utilizando o root-locus no plano-z.
- c) Determine o erro de regime para entrada degrau.

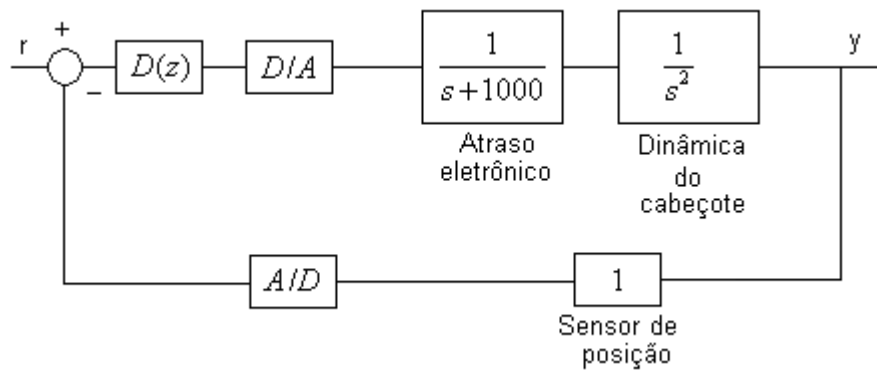
2) o sistema de controle de um elevador de cargas automático é mostrado abaixo.



O projeto do controlador deverá proporcionar que o sistema tenha overshoot $\leq 10\%$ ($\zeta \geq 0,7$), tempo de subida aproximadamente $0,5s$ e erro de regime nulo para entrada degrau.

- a) Determine $D(z)$ usando emulação para os seguintes períodos de amostragem: $T_s = 0,1s$ e $T_s = 0,25s$.
- b) Determine $D(z)$ usando o root-locus no plano-z, para os dois períodos de amostragens dados no item (a).
- c) Calcule e desenhe a resposta ao degrau unitário nos sistemas dos itens (a) e (b). Explique as diferenças entre seus resultados.

3) Para o sistema posicionador do cabeçote do disco rígido (winchester) dos computadores, dado na figura abaixo, projete o controlador tal que o sistema tenha tempo de subida de aproximadamente $20ms$ e overshoot $\leq 20\%$. O período de amostragem é $T_s = 1ms$. Use a emulação.



4) Considere o sistema de posicionamento de um rastreador solar, cuja função de transferência é dado por:

$$G(s) = \frac{0,2}{s(s+0,2)}$$

Projete um controlador discreto usando o Root-Locus discreto sendo que o sistema deverá apresentar overshoot aproximadamente 16%, tempo de estabelecimento aproximadamente 11s, erro de regime nulo para entrada degrau e erro de regime igual a $0,02rad$ para a entrada rampa. O período de amostragem será $T_s = 1s$. Calcule e desenhe a resposta ao degrau.

5) Projete um controlador que tenha pequeno tempo de estabelecimento para cada uma das seguintes plantas:

a) $G(s) = \frac{5}{s(s+0,3)}$, $T_s = 1s$

b) $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+3)}$, $T_s = 0,8s$

c) $G(s) = \frac{1}{s(s+0,4)(s+5)(s+10)}$, $T_s = 1s$

Determine e desenhe as suas respostas ao degrau.

6) Considere os seguintes sistemas contínuos:

a) $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$, $T_s = 0,2s$
 $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$$\text{b) } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), T_s = 0,2s$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Para cada item, calcule o seu equivalente discreto e a função de transferência discreta $G(z)$.

7) a) Represente o motor D.C em espaço de estado, sendo que sua equação dinâmica é:

$$\Gamma \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{d\theta(t)}{dt} = ku(t)$$

sendo: $\theta(t)$ a posição angular do eixo, $\dot{\theta}(t)$ a velocidade angular do eixo, Γ a constante de tempo do motor, k o ganho em regime do motor e $u(t)$ a tensão de entrada do motor.

b) Sendo: $\Gamma = 0,5$, $k = 2,0$, determine o equivalente discreto para $T_s = 0,1s$.

c) projete o controlador k para que os polos de malha fechada estejam em:

$$s = \frac{-1}{2} \mp j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d) Projete o estimador L tal que $\alpha_e(z) = z^2$.

e) Determine a evolução do erro de estimação $\tilde{x}(k)$, sendo que os estados iniciais do motor são nulos e os estados iniciais do estimador são $\bar{x}_1 = -1rad$ e $\bar{x}_2 = 1rad/s$.

8) Dado o sistema:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

Determine um controlador k tal que os polos de malha fechada estejam em $z_1 = 0,1$ e $z_2 = 0,5$.

9) Considere a equação dinâmica linearizada do levitador magnético:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} = 1000h(t) + 20u(t)$$

sendo $h(t)$ a altura da esfera (saída do sistema) e $u(t)$ a corrente na bobina (entrada do sistema).

Adotando um período de amostragem $T_s = 0,01s$, faça:

a) Use alocação de polos para projetar o controlador tal que o tempo de estabelecimento seja menor que $0,25s$ e overshoot menor que 20%.

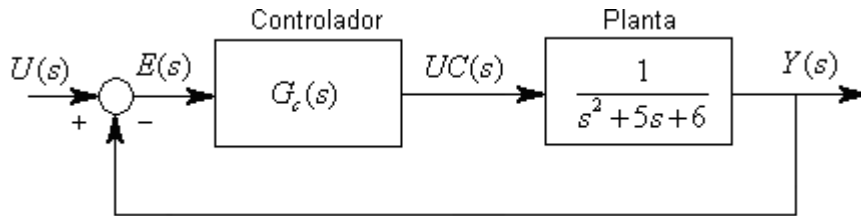
b) Projete o estimador de estado tal que o erro de estimação tenha tempo de estabelecimento menor que 0,08s.

CONTROLE DIGITAL

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Resolver usando o **MATLAB**.

1) Considere o sistema com realimentação dado na figura abaixo:



Há três controladores potenciais para o sistema:

- (1) $G_c(s) = K$, controlador proporcional.
- (2) $G_c(z) = \frac{K}{s}$, controlador integrador.
- (3) $G_c(z) = \frac{K(s+1)}{s}$, controlador proporcional e integral (PI).

As especificações de projeto são tempo de estabelecimento menor que 10s e porcentagem de overshoot menor que 10%, para uma entrada tipo degrau unitária.

i) Para o controlador proporcional, esboçar o lugar das raízes usando o MATLAB para $0 < K < \infty$ e determinar o valor de K tal que as especificações sejam satisfeitas.

ii) Repetir a parte (i) para o controlador integral.

iii) Repetir a parte (i) para o controlador proporcional e integral.

iv) Traçar em um mesmo diagrama os gráficos das respostas ao degrau unitário dos sistemas de malha fechada com cada um dos controladores projetados nas partes de (i) a (iii).

v) Comparar os resultados obtidos no item (iv), concentrando a discussão nos erros de estado estacionário e no desempenho transitório.

2) Repita a questão (1), supondo que o controlador será implementado por um microcomputador com interfaces A/D e D/A. Porém, será utilizada a emulação do projeto contínuo para o discreto, usando os controladores obtidos em (1). Será utilizado um período de amostragem igual a 0,001s. As especificações de desempenho continuam sendo as mesmas.

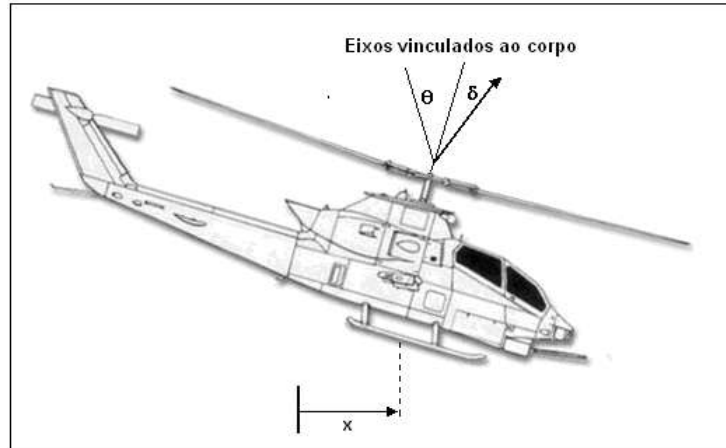
3) Repita a questão (1) já supondo que o controlador será implementado com o microcomputador, sendo os controladores do tipo:

- i) $G_c(z) = K$, controlador proporcional.

ii) $G_c(z) = \frac{Kz}{z-1}$, controlador integral.

Utilize um período de amostragem igual a 0,02s. As especificações de desempenho continuam sendo as mesmas.

4) Um helicóptero de alto desempenho possui o modelo mostrado abaixo:



O objetivo é controlar o ângulo de arfagem, $\theta(t)$, do helicóptero ajustando-se o ângulo $\delta(t)$ do rotor. As equações do movimento do helicóptero são:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\sigma_1 \frac{d\theta(t)}{dt} - \alpha_1 \frac{dx(t)}{dt} + n\delta(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = g\theta(t) - \alpha_2 \frac{d\theta(t)}{dt} - \sigma_2 \frac{dx(t)}{dt} + g\delta(t)$$

Adote: $x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$, $x_3(t) = x(t)$, $x_4(t) = \dot{x}(t)$

sendo que x é a transição na direção horizontal. Em um helicóptero de alto desempenho determina-se que: $\sigma_1 = 0,415$; $\sigma_2 = 0,0198$; $\alpha_1 = 0,0111$; $\alpha_2 = 1,43$; $n = 6,27$, $g = 9,8$, tudo nas unidades SI apropriadas.

i) Determinar a representação deste sistema em espaço de estados.

ii) Determinar a função de transferência para: $\theta(s)/\delta(s)$.

iii) Este Sistema será controlado por um computador de bordo com período de amostragem de 0,001s, obtenha o modelo discreto do sistema, em espaço de estados.

iv) Determinar a função de transferência para: $\theta(z)/\delta(z)$.

v) Projete um controlador digital usando realimentação de estados, supondo que todos os estados estão disponíveis para medição. As especificações desejadas são: porcentagem de *overshoot* menor que 20% e tempo de estabelecimento menor que 1,5s. Para dominância posicione os outros dois polos em $z_1 = 0,01$, $z_2 = 0,02$.

- vi) Simule o sistema controlado obtido em **v**, supondo que o estado inicial é $\theta(0) = 0,3rad, x(0) = 0m$, todos os outros estados iniciais são nulos. Qual o valor máximo de $\delta(t)$ obtido na simulação?
- vii) Supondo que está disponível apenas os estados $\theta(t)$ e $x(t)$ para medição, projete um observador de estados adequado, de tal forma a estimar todos os outros estados do sistema.
- viii) Simule o sistema controlado obtido em **vii**, supondo que o estado inicial é: $\theta(0) = 0,3rad, x(0) = 0m$, todos os outros estados iniciais são nulos, inclusive os estados do observador. Compare os resultados com **vi**.

Bibliografia

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D. & WORKMAN, M. L. – Digital Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts – USA, 1992.

OGATA, K. – Discrete-time Control Systems, Prentice-Hall – USA, 1987.

Chen, C. T. – Analog and Digital Control System Design, Sanders College Publishing, USA, 1993.