# Capítulo 1

# Séquências e Séries Infinitas de Termos Constantes

## 1.1. Introdução

Neste capítulo estamos interessados em analisar as séries infinitas de termos constantes. Entretanto, para entender as séries infinitas devemos antes entender o conceito de sequências infinitas. Um aspecto particularmente importante das séries infinitas é verificar a convergência ou divergência das séries infinitas. Na engenharia elétrica estamos interessados nas séris infinitas convergentes. Os tópicos analisados neste capítulo são necessários para entender as séries infinitas em geral.

Iniciamos o capítulo definindo uma sequência. Assim, uma sequência é definida como um tipo especial de função em que o domínio é um conjunto de números inteiros e a imagem é um conjunto de números reais. Posteriormente, define-se uma série infinita como um caso especial de sequência. O restante do capítulo está orientado a analisar os teoremas usados para verificar a convergência ou divergência de séries infinitas de termos constantes.

## 1.2. Sequências

**Definição 1:** Sequência é uma função cujo domínio é o conjunto de todos os números inteiros positivos $\longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Nesse contexto, os números que representam a imagem de uma sequência são chamados elementos da sequência.

**Exemplo 1:** Seja a função:

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

A função $f(n)$ tem como domínio os números naturais: $D = \{1, 2, 3, \ldots, \ldots\}$ e como imagem: $I = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$. A figura 1 mostra o gráfico da função $f(n)$. As funções que tem os números inteiros positivos como domínio, como acontece com a função $f(n)$, representam um tipo especial de função que chamamos de sequência.

Como o domínio de todas as funções especiais chamadas de sequência não varia então esse tipo de função pode ser representada de uma forma mais simplificada mostrando apenas a imagem da função e na forma de

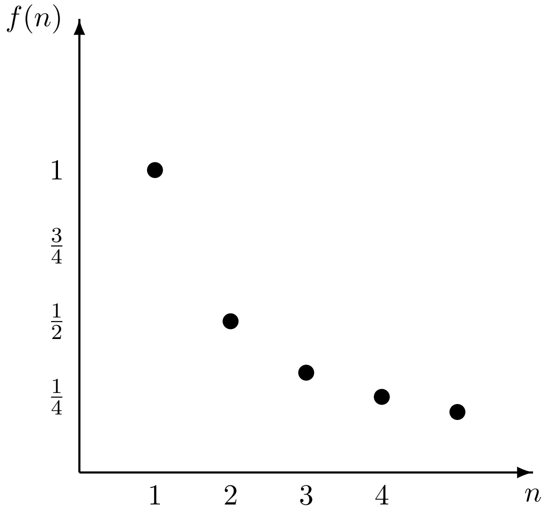

Figura 1.1: Sequência do exemplo 1

uma sequência ordenada. Assim, a função do exemplo 1 que passamos a chamar simplesmente de sequência é representada de forma simplificada da seguinte forma:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

que é uma sequência infinita muito conhecida e da origem a uma série infinita chamada de **série harmônica**. Obviamente, estamos interessados apenas nas séries infinitas.

**Observações:**

1. Uma sequência pode ser representada de uma forma compacta usando uma notação genérica $\{f(n)\}$ ou identificando o elemento genérico $\{a_n\}$. Assim, a sequência do exemplo 1 pode ser representada como $\{\frac{1}{n}\}$.
2. A sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ é igual à sequência $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ se e somente se $a_i = b_i$ para todo $i$ inteiro e positivo, isto é, se apresentam a mesma imagem.

**Definição 2:** Limite de uma sequência

A sequência $\{a_n\}$ tem um limite $L$ se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se $n$ for inteiro e se $n > N$ então $|a_n - L| < \epsilon$ e, nesse caso, o limite é representado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} lim\ a_n & = L \\ n \to \infty & \end{array}$$

**Exemplo 2:** Use a definição para provar que a sequência $\{\frac{n}{2n+1}\}$ tem limite igual a $L = \frac{1}{2}$.

Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se $n$ for inteiro e se $n > N$ então:

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } \; n > N \; \text{ então } \; \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| < \epsilon \qquad \Longrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \epsilon \Longrightarrow (2n+1) > \frac{1}{2\epsilon} \Longrightarrow \quad n > \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$$

A afirmação anterior é verdadeira, por exemplo, se $N = \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$ e se $n$ for inteiro. Portanto, se

$$N = \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon} \Longrightarrow \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

Deve-se observar que usar a definição para verificar que uma sequência tem limite não é a estratégia mais adequada para provar que uma sequência tem limite (além de demorado, precisamos conhecer esse limite).

**Teorema 1:** Permite encontrar o limite $L$ de uma sequência $a_n$ se existe esse limite.

Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e se $f(x)$ estiver definida para todo inteiro positivo $\longrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} f(n) = L$ quando $n$ for um inteiro positivo qualquer.

**Exemplo 3:** Provar que a sequência $\{\frac{n}{2n+1}\}$ tem limite $L = \frac{1}{2}$.

$$f(n) = \frac{n}{2n+1} \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{2x+1} \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \{f_n\} = \frac{1}{2}$$

**Exemplo 4:** Provar que a sequência $\{\frac{1}{n}\}$ tem limite $L = 0$.

1. Usando o Teorema 1:

$$f(n) = \frac{1}{n} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \{f_n\} = 0$$

2. Usando a Definição 2:

   Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se $n$ for inteiro e se $n > N$ então temos o seguinte:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } \; n > N \; \text{ então } \; \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \qquad \to \frac{1}{n} < \epsilon \to n > \frac{1}{\epsilon}$$

A afirmação anterior é verdadeira, por exemplo, se $N = \frac{1}{\epsilon}$ e se $n$ for inteiro. Portanto, se

$$N = \frac{1}{\epsilon} \longrightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$$

**Definição 3:** Sequência convergente

Se a sequência $\{a_n\}$ tem um limite então ela é convergente e $a_n$ converge para esse limite. Por outro lado, se a sequência não for convergente então ela é divergente.

**Exemplo 5:** Determine se a sequência $\{\frac{n}{2n+1}\}$ é convergente ou divergente.

Queremos verificar se $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$ existe

Usando o Teorema 1 temos seguinte:

$$f(x) = \frac{x}{2x+1} \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{x}{2x+1} \right) = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{n}{2n+1} \right\} = \frac{1}{2}$$

e, portanto, a sequência $\{\frac{n}{2n+1}\}$ é convergente e converge para $L = \frac{1}{2}$.

**Exemplo 6:** Determine se a sequência $\{n\ Sen(\frac{\pi}{n})\}$ é convergente ou divergente.

Queremos verificar se $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{ n\ Sen(\frac{\pi}{n}) \right\}$ existe

$$f(x) = x\ Sen(\frac{\pi}{x}) \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x\ Sen(\tfrac{\pi}{x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{Sen(\frac{\pi}{x})}{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Como $\lim\limits_{x \to \infty} Sen(\frac{\pi}{x}) = 0$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ então aplicamos a Regra de L'Hopital para eliminar a indeterminação.

Usando a propriedade $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g'(x)}{h'(x)}$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{\pi}{x^2} Cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \pi\ Cos\left(\tfrac{\pi}{x}\right) = \pi \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \left\{ n\ Sen(\frac{\pi}{n}) \right\} = \pi$$

e, portanto, a sequência é convergente e converge para $L = \pi$.

**Teorema 2:** Propriedades de sequências convergentes:

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências convergentes e $c$ é uma constante então:

1. A sequência constante $\{c\}$ tem $c$ como seu limite.
2. $\lim\limits_{n \to \infty} c\, a_n = c \lim\limits_{n \to \infty} a_n$
3. $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \,.\, \lim\limits_{n \to \infty} b_n$
5. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n}$

Portanto, os teoremas 1 e 2 podem ser usados para provar a convergência de sequências.

**Exemplo 7:** Provar que a sequência $\{\frac{n^2}{2n+1} \; Sen(\frac{\pi}{n})\}$ é convergente.

Usando o Teorema 2 (item 4) temos seguinte:

$$\frac{n^2}{2n+1} \,.\, Sen(\frac{\pi}{n}) = \frac{n}{2n+1} \,.\; n\, Sen(\frac{\pi}{n})$$

No exemplo 5 foi provado que $\frac{n}{2n+1}$ é convergente e converge para $\frac{1}{2}$ e no exemplo 6 foi provado que $n\, Sen(\frac{\pi}{n})$ é convergente e converge para $\pi$. Então usando o Teorema 2 (item 4) temos seguinte:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n+1} \; Sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left(\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n+1}\right)\left(\lim_{n \to \infty} Sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

e, portanto, a sequência é convergente.

## 1.3. Sequências monótonas e limitadas

**Definição 4:** Uma sequência $\{a_n\}$ é crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n$ e é decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$. Também, chamamos de monótona uma sequência que seja crescente ou decrescente.

**Exemplo 8:** Verificar que a sequência $\{\frac{1}{n}\}$ é decrescente.

$$\{\frac{1}{n}\} \Longrightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots,$$

Como $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ para todo $n$ inteiro e positivo $\longrightarrow$ a sequência é decrescente.

**Definição 5:** O número $C$ é chamado de limitante inferior da sequência $\{a_n\}$ se $C \leq a_n$ para todo $n$ inteiro positivo. Também, o número $D$ é chamado de limitante superior da sequência $\{a_n\}$ se $a_n \leq D$ para todo $n$ inteiro positivo.

**Definição 6:** Se $A$ é uma limitante inferior de uma sequência $\{a_n\}$ e se $A$ satisfaz a propriedade de que para todo limitante inferior $C$ de $\{a_n\}$, $C \leq A$, então $A$ é chamada de limitante inferior máximo da sequência. Analogamente, se $B$ for uma limitante superior de uma sequência $\{a_n\}$ e se $B$ satisfaz a propriedade de que para todo limitante superior $D$ de $\{a_n\}$, $B \leq D$, então $B$ é chamado de limitante superior mínimo da sequência.

**Definição 7:** Uma sequência $\{a_n\}$ é limitada $\Longleftrightarrow$ ela tiver limitantes superior e inferior.

**Exemplo 9:** Ilustramos as definições usando a sequência $a_n \Longrightarrow \{\frac{1}{n}\}$

$$a_n \Longrightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

- -4 é uma limitante inferior de $a_n$.
- Como $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \Longrightarrow$ o limitante inferior máximo de $a_n$ é igual a zero.
- 5 é uma limitante superior de $a_n$.
- 1 é uma limitante superior mínimo de $a_n$.

**Teorema 3:** Uma sequência monótona e limitada é convergente.

**Exemplo 10:** Usar o teorema 3 para provar que a sequência $\{\frac{1}{n}\}$ é convergente.

Precisamos provar apenas que a sequência é monótona limitada. A sequência:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

é monótona porque é decrescente e limitada porque tem limitante inferior máximo igual a 0 e limitante superior mínimo igual a 1 e, portanto, essa sequência é convergente.

## 1.4. Séries infinitas de termos constantes

As séries infinitas de termos constantes representam um tópico muito importante em engenharia elétrica porque muitas funções matemáticas usadas em engenharia podem ser representadas como uma soma de infinitos termos, isto é, como uma série infinita de termos constantes. Estamos particularmente interessados em provar se uma série infinita de termos constantes é convergente ou divergente. Também devemos conhecer algumas séries muitos especiais e suas características de convergência.

**Definição 8:** Definição de série infinita de termos constantes:

Se $\{u_n\}$ é uma sequência e $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ (uma soma dos $n$ primeiros termos de uma sequência) então a nova sequência $\{s_n\}$ é chamada de série infinita que é mais popularmente representada pela relação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Os números $u_1$,$u_2$,$u_3$,...,$u_n$,... são chamados de termos da série infinita. Os números $s_1$,$s_2$,$s_3$,...,$s_n$,... são chamados de somas parciais da série infinita mas também são os termos da nova sequência que estamos chamando de série infinita. Portanto, a série infinita é uma sequência de somas parciais.

**Exemplo 11:** Seja a sequência $\{u_n\}$ onde $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

A sequência original $\{u_n\}$ assume a seguinte forma:

$$\{u_n\} \Longrightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots,$$

Os elementos da nova sequência $\{s_n\}$ (a sequência de somas parciais) tem os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \\
&\vdots \\
s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto, a nova sequência (que passaremos a chamar de série infinita) assume a seguinte forma:

$$\{s_n\} \Longrightarrow 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8} \ldots, s_n, \ldots,$$

Essa nova sequência de somas parciais $\{s_n\}$ chamamos de série infinita e denotamos essa série da seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

Um assunto muito importante é encontrar uma forma matemática para $s_n$. Essa forma matemática deve ser de tal forma que permita provar se a nova sequência é convergente ou divergente usando os conceitos já apresentados para sequências como, por exemplo, usando o Teorema 3. Para o exemplo, vamos tentar encontrar essa forma matemática para $s_n$. $s_n$ assume a seguinte forma:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \tag{1.1}$$

Da algebra elementar temos a seguinte propriedade:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a\, b^{n-2} + b^{n-1}) \tag{1.2}$$

Em (1.2) para $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$ temos seguinte:

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Da relação anterior e de (1.1) temos seguinte:

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) s_n \Longrightarrow s_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Portanto, a nova sequência de somas parciais $\{s_n\}$ assume a seguinte forma:

$$\{s_n\} \Longrightarrow 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots, 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \ldots,$$

**Observações:**

- Geralmente não é fácil encontrar uma forma matemática adequada para $s_n$. Se fosse fácil encontrar uma forma matemática para $s_n$ de todas as séries infinitas então seria possível provar a convergência das séries infinitas apenas usando as propriedades de sequências (Teoremas 1, 2 e 3). Assim, apenas em alguns casos é possível encontrar uma forma matemática para $s_n$. Por esse motivo, precisamos encontrar outras formas para provar a convergência ou divergência de séries infinitas de termos constantes.
- Em relação a uma sequência $\{s_n\}$ são válidas as seguintes relações:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n \qquad s_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} \Longrightarrow s_n = s_{n-1} + u_n$$

**Exemplo 12:** Encontrar a forma matemática de $s_n$ da série infinita de termos constantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Seja o elemento $k$ da série infinita então temos seguinte:

$$u_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

e, portanto, os valores de $u_k$ para diferentes valores de $k$ são os seguintes:

$$u_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \qquad u_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \qquad u_3 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \qquad \ldots \qquad u_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \Longrightarrow s_n = \frac{n}{n+1}$$

Portanto, a nova sequência de somas parciais assume a seguinte forma:

$$\{s_n\} \Longrightarrow \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

em que podemos provar facilmente que essa sequência é convergente e converge para o limite $L = 1$, que equivale a afirmar que a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

é convergente.

**Definição 9:** Convergência de séries infinitas

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série infinita e seja $\{s_n\}$ a sequência das somas parciais que definem a série. Então, se $\lim_{n \to \infty} s_n$ existe e é igual a $S$, dizemos que a série dada é convergente sendo $S$ a soma da série infinita. Por outro lado, se $\lim_{n \to \infty} s_n$ não existe, a série é divergente e não tem soma.

Em outras palavras, uma série infinita é convergente $\Longleftrightarrow$ a sequência das somas parciais correspondente é convergente.

**Exemplo 13:** Provar que a série infinita do exemplo 11 é convergente.

A série infinita é seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

No exemplo 11 encontramos a forma matemática da sequência de somas parciais:

$$\{s_n\} \Longrightarrow 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots, 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \ldots, \Longrightarrow s_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Devemos provar que $\lim_{n \to \infty} s_n$ existe:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} 2\left(1 - \tfrac{1}{2^n}\right) = 2$$

Portanto, a série infinita converge e a soma é igual a $S = 2$. Devemos observar, novamente, que a grande dificuldade de usar essa estratégia para provar a convergência de uma série infinita é encontrar a forma matemática de $s_n$ em função de $n$.

**Exemplo 14:** Provar que a série infinita do exemplo 12 é convergente.

A série infinita é seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

No exemplo 12 encontramos a forma matemática da sequência de somas parciais:

$$\{s_n\} \Longrightarrow \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

Devemos provar que $\lim_{n \to \infty} s_n$ existe:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = 1$$

Portanto, a série infinita converge e a soma é igual a $S = 1$.

**Teorema 4:** Usado somente para verificar a divergência de uma série conhecendo apenas $u_n$.

Se a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente $\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} u_n = 0$

**Prova:** Seja $\{s_n\}$ uma sequência das somas parciais de uma série infinita convergente cuja soma é $S = \lim_{n \to \infty} s_n$. Assim, para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se $n > N \Longrightarrow$

$$|S - s_n| < \frac{1}{2}\epsilon \qquad |S - s_{n+1}| < \frac{1}{2}\epsilon$$

Então:

$$|u_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| = |S - s_n + s_{n+1} - S| \leq |S - s_n| + |s_{n+1} - S| < \epsilon$$

Assim, se $n > N \Longrightarrow$:

$$|u_{n+1}| < \epsilon \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

Devemos observar que o Teorema 4 é usado apenas para verificar a divergência de séries infinitas. Devemos prestar atenção ao fato de que se $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ não significa que a série seja convergente. Por outro lado, se verificamos de que $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$ então podemos afirmar que a série é divergente.

**Exemplo 15:** Provar que a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$ é divergente.

Tentamos usar o Teorema 4 da seguinte forma:

$$\begin{matrix} lim \\ n \to \infty \end{matrix} \quad u_n = \begin{matrix} lim \\ n \to \infty \end{matrix} \quad \left(\tfrac{2n}{3n+1}\right) = \begin{matrix} lim \\ n \to \infty \end{matrix} \quad \left(\tfrac{2}{3+\frac{1}{n}}\right) = \frac{2}{3} \neq 0$$

que nos permite concluir que a série é divergente.

**Teorema 5:** Usado para verificar a divergência de uma série infinita a partir da relação genérica de $s_n$.

Seja $\{s_n\}$ a sequência de somas parciais de uma série infinita convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Então para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N$ tal que se $R > N$ e $T > N$ então $|s_R - s_T| < \epsilon$

**Prova:** Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente então tem uma soma $S$. Então para todo $\epsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que se $n > N \Longrightarrow |S - s_n| < \frac{1}{2}\epsilon$.

Se $R > N$ e $T > N \Longrightarrow |s_R - s_T| = |s_R - S + S - s_T| \leq |s_R - S| + |S - s_T| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \Longrightarrow |s_R - s_T| < \epsilon$

Portanto, se $R > N$ e $T > N \Longrightarrow |s_R - s_T| < \epsilon$

O Teorema 5 nos permite provar, de uma forma natural, que a chamada série harmônica é divergente.

**Exemplo 16:** Provar que a série harmônica definida da forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Usamos o Teorema 5 para $R = 2n$ e $S = n$ da seguinte forma:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Das relações anteriores temos o seguinte: $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

Também, para $n > 1$ a seguinte relação é verdadeira:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Das relações anteriores verificamos facilmente:

$$s_{2n} - s_n > \frac{1}{2} \tag{1.3}$$

Se a série for convergente então para $R = 2n$ e $T = n$ a seguinte relação teria que ser válida:

$$|s_R - s_T| = |s_{2n} - s_n| < \epsilon = \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

Assim, a relação (1.4) contradiz a relação (1.3) e, portanto, a série harmônica não pode ser convergente e deve ser divergente.

**Teorema 6:** Caso especial da série geométrica

A série geométrica converge para a soma $S = \frac{a}{1-r}$ se $|r| < 1$ e diverge para $|r| \geq 1$.

Devemos lembrar que a série geométrica assume a seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a + a\, r + a\, r^2 + \ldots + a\, r^{n-1} + \ldots$$

Nesse contexto a soma de sequências parciais assume a seguinte forma:

$$S_n = a(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$$

Usando a identidade: $(1 - r^n) = (1 - r)(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1})$ podemos deduzir facilmente a seguinte forma matemática de $S_n$:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)} \quad \text{se} \quad r \neq 1$$

**Prova:** Para $|r| < 1$ temos o seguinte:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a(1-r^n)}{(1-r)}\right) = \frac{a}{1-r} \Longrightarrow S = \frac{a}{(1-r)}$$

e, portanto, a série é convergente.

Na prova anterior foi assumido que $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$ para $|r| < 1$ que na verdade teria que ser provado. Assim, para $r = 0$ verificamos facilmente que $\lim\limits_{n \to \infty} 0 = 0$. Por outro lado, para $0 < |r| < 1$ devemos provar que o limite também é zero.

Para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que para um $n$ inteiro e se $n > N$ então temos seguinte:

$$|r^n - 0| < \epsilon \Longrightarrow |r^n| < \epsilon \Longrightarrow Ln\, |r|^n < Ln\, \epsilon \Longrightarrow n\, Ln\, |r| < Ln\, \epsilon \Longrightarrow n > \frac{Ln\, \epsilon}{Ln\, |r|}$$

porque $Ln\, |r| < 0$. Portanto, se $N = \frac{Ln\, \epsilon}{Ln\, |r|}$ então o limite da sequência é zero.

A prova deve ser terminada provando que para $|r| \geq 1$ a série é divergente. Essa prova não é realizado neste trabalho.

**Exemplo 17:** Representar a dízima periódica 0,333... como uma fração comum.

A seguinte relação é válida:

$$0,333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$$

A relação anterior é uma série geométrica com $a = \frac{3}{10}$ e $r = \frac{1}{10}$. Como $|r| = \frac{1}{10} < 1$ pelo Teorema 6 a série geométrica converge para $S$:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3/10}{9/10} = \frac{1}{3} \Longrightarrow S = \frac{1}{3}$$

## 1.5. Quatro teoremas sobre séries infinitas

Nesta seção apresentamos quatro teoremas usados para provar a convergência de séries infinitas de termos constantes.

**Teorema 7:** A convergência de uma série infinita não se altera se mudamos um número finito de termos.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são duas séries infinitas que diferem somente nos $m$ primeiros termos, isto é, se $a_k = b_k$ para $k > m$ então ambas séries convergem ou divergem.

**Prova:** Sejam $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ as sequências das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ respectivamente. Então:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

$$t_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n$$

Como $a_k = b_k$ para $k > m$ então se $n \geq m$ temos seguinte:

$$s_n - t_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m) - (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_m) \Longrightarrow s_n - t_n = s_m - t_m \tag{1.5}$$

Queremos provar que os limites $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ e $\lim\limits_{n \to \infty} t_n$ existem ou ambos não existem.

- Supor que $\lim\limits_{n \to \infty} t_n$ exista e, portanto, de (1.5) temos:

$$s_n = t_n + (s_m - t_m) \tag{1.6}$$

  Assim, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \lim\limits_{n \to \infty} t_n + (s_m - t_m)$

  Então, da relação anterior concluimos que se $\lim\limits_{n \to \infty} t_n$ existe $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ deve existir e ambos convergem.

- Supor que $\lim\limits_{n \to \infty} t_n$ não exista mas $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ exista.

  De (1.5) temos:

$$t_n = s_n + (t_m - s_m) \tag{1.7}$$

  Como o limite de $s_n$ existe então da relação anterior temos seguinte:
  $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = \lim\limits_{n \to \infty} s_n + (t_m - s_m)$

  e, portanto, $\lim\limits_{n \to \infty} t_n$ também deve existir contradizendo a hipótese inicial. Assim, $\lim\limits_{n \to \infty} t_n$ não existe e também $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ não deve existir e ambas séries devem ser divergentes.

**Exemplo 18:** Determine se a seguinte série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ é convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \ldots + \frac{3}{2^n} + \ldots \tag{1.8}$$

Por outro lado, a série geométrica com $r = \frac{1}{2}$ e $a = 3$ assume a seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \ldots + \frac{3}{2^{n-1}} + \ldots \tag{1.9}$$

Entretanto (1.8) pode ser representada da seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 0 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \ldots + \frac{3}{2^n} + \ldots \tag{1.10}$$

Assim, (1.9) e (1.10) diferem apenas no primeiro termo. Como a série geométrica é convergente então pelo Teorema 7 a série infinita (1.10) (que é a mesma série (1.8)) também é convergente.

A série geométrica converge para $S_1 = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$. Portanto a série em análise converge para $S_2$ em que $S_1 = 3 + S_2 \Longrightarrow S_2 = 3$.

**Teorema 8:** A convergência de uma série infinita não muda se for multiplicada por uma constante.

Seja $c$ uma constante não nula. Nesse contexto:

1. Se a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ for convergente com soma $S$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} c\, u_n$ também é convergente com soma $S_c = c\, S$.
2. Se a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ for divergente então a série $\sum_{n=1}^{\infty} c\, u_n$ também é divergente.

**Teorema 9:** Generalização da propriedade de somas finitas:

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries infinitas convergentes com somas $S$ e $R$, respectivamente, então:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é uma série convergente e sua soma é $S_a = S + R$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ é uma série convergente e sua soma é $S_b = S - R$.

**Teorema 10:** Pode ser usado para provar a divergência de uma série:

Se a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ será divergente.

**Observação:** Se ambas séries são divergentes então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ pode ser convergente ou divergente.

**Exemplo 19:** Verificar se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ é divergente.

Usando o Teorema 10 podemos verificar que a série em análise é divergente porque a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ é divergente e a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ com $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}$ é convergente.

## 1.6. Séries infinitas de termos positivos

Se todos os termos de uma série infinita são positivos então a sequência de somas parciais deve ser crescente (monótona). Assim, a série infinita é convergente se a sequência de somas parciais tiver limitante superior já que tem limitante inferior e é monótona. Para esse tipo de séries existem alguns teoremas específicos para provar a convergência dessas séries.

**Teorema 11:** Convergência de séries infinitas de termos constantes e positivos:

Uma série infinita de termos constantes é convergente $\Longleftrightarrow$ a sequência de somas parciais tiver uma limitante superior.

**Teorema 12:** Teorema do teste da comparação:

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos positivos. Nesse contexto:

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ é uma série de termos positivos e convergente e se $u_n \leq v_n$ para todo $n$ inteiro positivo então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente.

2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ é uma série de termos positivos e divergente e se $u_n \geq w_n$ para todo $n$ inteiro positivo então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é divergente.

**Prova:** Provamos cada item separadamente.

1. Seja $\{s_n\}$ a sequência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\{t_n\}$ a sequência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ é convergente então $\{t_n\}$ tem uma limitante superior (Teorema 11) que chamaremos $B$. Como $u_n \leq v_n$ para todo $n$ inteiro e positivo então $s_n \leq t_n \leq B$ para todo inteiro e positivo. Assim, $B$ é uma limitante superior da sequência $\{s_n\}$. Como os termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ são todos positivos então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente pelo Teorema 11.

2. Supor que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ seja convergente. Portanto, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ são séries infinitas de termos positivos e $w_n \leq u_n$ para todo $n$ inteiro e positivo. Assim, pelo item 1 desta prova concluimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ é convergente o que contradiz a hipótese de que essa série é divergente e, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série infinita divergente.

**Exemplo 20:** Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ é convergente ou divergente.

Usaremos o Teorema 12 (Teste da comparação) para verificar se a série é convergente ou divergente. A série apresenta a seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

1. Tentando usar a parte 2 do Teorema 12:

   Sabemos que a série harmônica é divergente:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

   Se $\frac{1}{n^n} \geq \frac{1}{n}$ for verdadeiro $\Longrightarrow$ a série é divergente. Assim, pretendemos saber se a seguinte relação é verdadeira:

   $$\frac{1}{n.n.n....n} \geq \frac{1}{n} \Longrightarrow \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n}$$

   Se $n \geq 1$ a relação anterior não é verdadeira e, portanto, nenhuma conclusão pode ser obtida.

2. Tentando usar a parte 1 do Teorema 12:

   Sabemos que uma série geométrica da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1}$ para $|r| < 1$ é convergente. Escolhemos $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}$ para encontrar a seguinte série:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

   Se $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ for verdadeiro $\Longrightarrow$ a série é convergente. Assim, pretendemos saber se a seguinte relação é verdadeira:

   $$\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\right) \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)$$

   Podemos verificar facilmente que para $n \geq 1$ a relação anterior é verdadeira e, portanto, a série em análise é convergente.

**Exemplo 21:** Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é convergente ou divergente.

Usaremos o Teorema 12 (Teste da comparação) para verificar se a série é convergente ou divergente. A série apresenta a seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Sabemos que a série harmônica é divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Se $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ for verdadeiro $\Longrightarrow$ a série é divergente. Assim, pretendemos saber se a seguinte relação é verdadeira:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

A relação anterior é verdadeira porque $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq 1$ para $n$ inteiro e positivo e, portanto, a série em análise é divergente.

**Teorema 13:** Teorema do teste da comparação com limite:

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ duas séries infinitas de termos positivos. Nesse contexto:

1. Se $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = c > 0$ então ambas séries convergem ou ambas divergem.
2. Se $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.
3. Se $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

**Exemplo 22:** Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5}$ é convergente ou divergente.

Usaremos o Teorema 13 (Teste da comparação com limite) para verificar se a série é convergente ou divergente. Usamos a série harmônica que é divergente para comparação. Assim temos seguinte:

$$v_n = \frac{1}{n} \qquad\qquad u_n = \frac{3n+1}{2n^2+5}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{3n+1}{2n^2+5}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n^2+n}{2n^2+5}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n^2}}\right) = \frac{3}{2} > 0$$

Portanto, como $c = \frac{3}{2} > 0$ então a série em análise é divergente já que a série harmônica é divergente (item 1 do Teorema 13).

**Observação:** O Teorema 13 não tem resposta sobre convergência quando $v_n$ representa uma série divergente e o limite da relação entre $u_n$ e $v_n$ é igual a zero. A mesma coisa acontece quando $v_n$ representa uma série convergente e a relação entre $u_n$ e $v_n$ é igual a infinito. Em outras palavras, nesse tipo de casos, o teorema 13 não é aplicável.

**Exemplo 23:** Tentativa fracassada:

Sabendo que a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ é convergente tente verificar se a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é convergente.

Usaremos o Teorema 13 (Teste da comparação com limite) para verificar se a série é convergente ou divergente. Usamos a série geométrica convergente, mencionada anteriormente, para comparação. Assim temos seguinte:

$$v_n = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n} \qquad\qquad u_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{2^n}}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^n}{2n}\right)$$

Usando a Regra de L'Hopital temos seguinte:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^n}{2n}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^n Ln\ 2}{2}\right) = \infty$$

Portanto, na relação anterior não temos nada conclusivo e devemos encontrar outras estratégias para provar que a série harmônica é divergente. Também ao aplicar a Regra de L'Hopital usamos a seguinte propriedade da derivada: $D_x[a^u] = a^u Ln\ a\ D_x u$.

**Teorema 14:** Reagrupamento de termos de uma série convergente:

Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série convergente de termos positivos então seus termos podem ser reagrupados de qualquer maneira e a nova série resultante é convergente e com a mesma soma da série original.

**Teorema 15:** Rearranjamento de termos de uma série convergente:

Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série convergente de termos positivos então a ordem dos termos podem ser rearranjados e a nova série resultante também é convergente e com a mesma soma da série original.

**Observação:** Para usar os teoremas relacionados com o teste de comparação de uma forma eficiente precisamos conhecer as propriedades de convergência ou divergência de algumas séries que podem ser usadas como séries tipo padrão para essa finalidade. As séries mais usadas nesse caso são as seguintes:

1. Série harmônica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é divergente.

2. Série geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1}$ que é convergente para $|r| < 1$ e converge para $S = \frac{a}{1-r}$. Para $|r| \geq 1$ a série geométrica é divergente.

3. Série hiperharmônica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ que é convergente para $p > 1$ e divergente para $p \leq 1$.

## 1.7. O teste da integral para uma série infinita de termos positivos

O teste da integral é um dos teoremas mais importantes para verificar a convergência ou divergência de séries infinitas de termos positivos. O teorema está baseado na teoria de integrais impróprias. O teorema geralmente é muito eficiente desde que as hipóteses exigidas pelo teorema sejam cumpridas e, logicamente, é aplicável apenas a séries infinitas de termos positivos.

**Teorema 16:** O teste da integral:

Seja $f(x)$ uma função contínua, decrescente e com valores positivos para todo $x \geq 1$. Nesse contexto, a série infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$$

é convergente se a integral imprópria $\int_{n=1}^{\infty} f(x)dx$ existe e é divergente se $\lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} f(x)\, dx = \infty$

**Exemplo 24:** Aplicação do teste da integral (Teorema 16):

Verificar se a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é convergente ou divergente.

Para usar o Teorema 16 (teste da integral) temos o seguinte: $f(x) = \frac{1}{x}$. Podemos verificar facilmente que $f(x)$ é contínua, decrescente e assume valores positivos para todo $x \geq 1$ e, portanto, satisfaz as hipóteses do Teorema 16 além de ser uma série infinita de termos positivos. Assim, temos seguinte:

$$L = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} [Ln\ x]_1^b$$

$$L = \lim_{b \to \infty} Ln\ b - Ln\ 1 = \lim_{b \to \infty} Ln\ b = \infty$$

Portanto, a série harmônica é divergente.

**Observação:** Deve-se observar que quando pretendemos usar o teste da integral (Teorema 16) inicialmente devemos ter a precaução de verificar as hipóteses ( $f(x)$ deve ser contínua, decrescente e com valores positivos). Também, se a série infinita começa com $n = k$ em vez de $n = 1$ então mudamos o teste da integral para $\int_{k}^{\infty} f(x)\, dx$ para a série infinita $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$.

## 1.8. Convergência de séries alternadas

Existe um teorema especializado para provar a convergência de séries alternadas. Para apresentar o teorema precisamos definir uma série alternada.

**Definição 10:** Se $a_n > 0$ para todo inteiro positivo então as seguintes séries são chamadas de séries alternadas infinitas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots \tag{1.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \ldots + (-1)^{n}a_n + \ldots \tag{1.12}$$

**Teorema 17:** Teste de convergência de séries alternadas:

Considere a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$

( ou a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$ ) onde $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$ para todo inteiro positivo então se $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Longrightarrow$ a série alternada é convergente.

**Exemplo 25:** Aplicação do Teorema 17 (Teorema de séries alternadas).

Verificar se a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3}{n^2+1}$ é convergente ou divergente.

Verificamos inicialmente as hipóteses do Teorema 17. Temos que $a_n = \frac{3}{n^2+1} > 0$ para todo $n$ inteiro positivo e também:

$$a_{n+1} = \frac{3}{(n+1)^2+1} = \frac{3}{(n^2+1)+2n+1} \Longrightarrow a_{n+1} < a_n$$

Finalmente, verificamos o limite de $a_n$:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{n^2+1}\right) = 0$$

e, portanto, a série alternada é convergente.

## 1.9. Convergência absoluta e condicional: O teste da razão e o teste da raiz

Nesta seção apresentamos dois dos teoremas mais usados para provar a convergência de séries infinitas de termos constantes. Assim, iniciamos com a definição de que se todos os termos de uma série infinita são substituídos pelos seus valores absolutos e a nova série resultante é convergente então a série dada é chamada de absolutamente convergente.

**Definição 11:** A série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ é convergente. Uma série que é convergente, mas não absolutamente convergente, é chamada de série condicionalmente convergente.

**Teorema 18:** Sobre séries absolutamente convergentes:

Se a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é absolutamente convergente então essa série é convergente e $|\sum_{n=1}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

**Teorema 19:** O teste da razão:

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série infinita com $u_n$ não nulo. Nesse contexto:

1. Se $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L < 1 \Longrightarrow$ a série é absolutamente convergente.
2. Se $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L > 1$ ou se $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \infty \Longrightarrow$ a série é divergente.
3. Se $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 \Longrightarrow$ nenhuma conclusão em relação a convergência da série pode ser obtida.

**Exemplo 26:** Determinar se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$ é convergente ou divergente.

Tentamos usar o Teorema 19 (o teste da razão) e assim temos seguinte:

$$u_n = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}} \qquad u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{2^{n+2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}}{\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|-\frac{2^{n+1}(n+1)n!}{2^{n+2}n!}\right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{2}\right) = \infty$$

e, portanto, a série é divergente.

**Teorema 20:** O teste da raiz:

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série infinita com $u_n$ não nulo. Nesse contexto:

1. Se $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1 \Longrightarrow$ a série é absolutamente convergente.
2. Se $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$ ou se $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \infty \Longrightarrow$ a série é divergente.

3. Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1 \Longrightarrow$ nenhuma conclusão em relação a convergência da série pode ser obtida.

**Observação:** O teste da razão é mais fácil de ser aplicado. Se a série tem elementos tais como fatoriais então o teste da razão é o mais adequado. Se a série tem elementos tais como potências então o teste da raiz pode ser o mais adequado.

**Exemplo 27:** Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(Ln\ n)^n}$ é convergente ou divergente.

Tentamos usar o Teorema 20 (o teste da raiz) e assim temos o seguinte:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(Ln\ n)^n} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(-1)^n}{(Ln\ n)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{-1}{Ln\ n}\right) = 0$$

e, portanto, a série é convergente.

**Exemplo 28:** Determinar se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$ é convergente ou divergente.

Tentamos usar o Teorema 19 (o teste da razão) e assim temos seguinte:

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!} \qquad u_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^{n+2} \frac{3^n 3}{(n+1)n!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{\frac{(-1)^{n+2} 3^n 3}{(n+1)n!}}{\frac{(-1)^{n+1} 3^n}{n!}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{n+1}\right) = 0$$

e, portanto, a série é convergente.

## 1.10. Resumo sobre testes de convergência de séries infinitas

A seguir é mostrada a ordem mais adequada dos teoremas para verificar a convergência ou divergência de séries infinitas de termos constantes. Assim, para um problema dado, devemos tentar usar os teoremas na ordem indicada. Se um teorema não se aplica ou não leva a uma conclusão definitiva então devemos usar a seguinte.

1. Se a série é monótona então veja se é facil encontrar a forma matemática de $s_n$ a soma de sequências parciais relacionada com a série. Se for possível então encontre $s_n$ e verifique se tem limite. Se $s_n$ tem limite então a série é convergente e, em caso contrário, a série é divergente.

2. Calcule $\lim_{n \to \infty} u_n$. Se $\lim_{n \to \infty} u_n \neq 0$ então a série diverge. Em outro caso nenhuma conclusão pode ser tirada.

3. Examine a série para determinar se ela faz parte de algum dos tipos especiais:

a) Uma série geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1}$. Ela converge para $S = \frac{a}{1-r}$ se $|r| < 1$ e diverge para $r \geq 1$.

b) Uma série $p$ ou hiperharmônica: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ sendo $p$ uma constante. Ela converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

c) Uma série alternada: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Aplique o teste de séries alternadas. Se $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$ para todo $n$ inteiro positivo e $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ então a série alternada converge.

4. Tente o teste da razão: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série infinita com $u_n$ não nulo. Então:

a) Se $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L < 1$ então a série é absolutamente convergente.

b) Se $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L > 1$ ou se $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \infty$ então a série é divergente.

c) Se $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$ nenhuma conclusão pode ser obtida.

5. Tente o teste da raiz: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série infinita com $u_n$ não nulo. Então:

a) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L < 1$ então a série é absolutamente convergente.

b) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L > 1$ ou se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \infty$ então a série é divergente.

c) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ nenhuma conclusão pode ser obtida.

6. Tente o teste da integral: seja $f$ uma função contínua decrescente e com valores positivos para todo $x \geq 1$. Então a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots$ é convergente se a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)dx$ existe e será divergente se $\lim_{b \to \infty} \int_1^b f(x)dx = \infty$

7. Tente o teste de comparação: seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos positivos:

a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ é uma série convergente de termos positivos já conhecida e $u_n \leq v_n$ para todo inteiro $n$ positivo então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente.

b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ é uma série divergente de termos positivos já conhecida e $u_n \geq w_n$ para todo inteiro $n$ positivo então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é divergente.

8. Tente o teste de comparação com limite: sejam $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ duas séries de termos positivos:

   *a*) Se $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = c > 0$ então ambas séries convergem ou divergem conjuntamente.

   *b*) Se $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

   *c*) Se $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \infty$ e se $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

## 1.11. Problemas propostos

1. Nos seguintes problemas, escrever os 4 primeiros termos da sequência e determinar se ela é convergente ou divergente e, caso seja convergente, encontre seu limite.

   (a) $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ (*b*) $\left\{\frac{2n^2+1}{3n^2-n}\right\}$ (c) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$ (d) $\left\{\frac{3-2n^2}{n^2-1}\right\}$

   (e) $\left\{\frac{Ln\, n}{n^2}\right\}$ (f) $\left\{\frac{n}{n+1} Sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$ (g) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}\right\}$

2. Nos seguintes problemas, provar que a sequência tem o limite $L$ mostrado.

   (a) $\left\{\frac{4}{2n-1}\right\}$; $L = 0$. (b) $\left\{\frac{8n}{2n+3}\right\}$; $L = 4$. (c) $\left\{\frac{2n^2}{5n^2+1}\right\}$; $L = \frac{2}{5}$.

3. Mostre que a sequência $\left\{\frac{n^2}{n-3}\right\}$ e $\left\{\frac{n^2}{n+4}\right\}$ divergem porém a sequência $\left\{\frac{n^2}{n-3} - \frac{n^2}{n+4}\right\}$ é convergente.

4. Nos seguintes problemas, determine se a sequência é crescente, decrescente ou não-monótona:

   (a) $\left\{\frac{3n-1}{4n+5}\right\}$ (b) $\left\{Cos\left(\frac{1}{3}n\pi\right)\right\}$ (c) $\left\{\frac{5^n}{1+5^{2n}}\right\}$

5. Nos seguintes problemas, encontre os 4 primeiros elementos da sequência de somas parciais $\{s_n\}$ e encontre uma fórmula para encontrar $s_n$ em termos de $n$:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(3n+1)(3n-2)}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} Ln\frac{n}{n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$

6. Nos seguintes problemas, determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, determine a soma:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} Ln\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} Cos(n\pi)$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2^n}\right)$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right)$

7. Nos seguintes problemas, determine se a série é convergente ou divergente.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^n}\right)$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Ln(n+1)}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2+3}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln\, n}{n^2+2}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$

8. Use o teste da integral para determinar se a série é convergente ou divergente:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n)^2}$

9. Determine se a série dada é convergente ou divergente:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln\ n}{n}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ Ln\ n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n^2}$

   (e) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{Ln\ n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+2}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n!}{2^{n+1}}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+2)}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(n+1)^3}$ (j) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{Ln\ n}$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+2)}$ (m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$

10. Determine se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+6n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} Cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right)$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+Sen\ n}{n^2}$

    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3n+2}}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} Ln \frac{1}{n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n}}$

    (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(Ln\ n)^2}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Ln\ n}{n^2}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5n} - \frac{3}{2n}\right)$ (l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

    (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2Ln\ n}$ (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Cos\ n}{n^3}$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+Sen\ n}$ (p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+3)!}$

    (r) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n^2}{3^n}$ (s) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (u) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{4}}}$ (v) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{6^n}{5^{n+1}}$

# Bibliografía

[1] *Louis Leithold*: “O cálculo com geometria analítica: Volume 2”, Editora HARBRA, 1994.