# Capítulo 2

# Séries de Potências

## 2.1. Introdução

Série de potências é uma série infinita de termos variáveis. Assim, a teoria desenvolvida para séries infinitas de termos constantes pode ser estendida para a análise de convergência de séries de potências. As séries de potências podem ser usadas em várias aplicações como encontrar aproximações de números irracionais tais como $\sqrt{2}$, $\pi$, $e$, etc., para encontrar valores aproximados de integrais que não podem ser integrados de forma analítica tais como $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$ e $\int_0^1 Cos(\sqrt{x}) dt$, etc. e, principalmente, na resolução de equações diferenciais que seria a aplicação mais importante do ponto de vista da engenharia elétrica.

## 2.2. Séries de potências

**Definição 1:** Uma série de potências em $(x - a)$ é uma série da forma:

$$c_o + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \tag{2.1}$$

que é representada de forma esquemática por $\sum_{n=o}^{\infty} c_n(x-a)^n$

Um caso especial acontece quando $a = 0$. Nesse caso temos uma série de potências em $x$ da seguinte forma:

$$\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n = c_o + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{2.2}$$

Neste caso analisamos apenas as séries de potências da forma (2.2) mas essa teoria pode ser usada para analisar (2.1) apenas fazendo a transformação $x = \overline{x} - a$. O tópico de interesse é encontrar os valores de $x$ para os quais a série de potências (2.2) converge. Assim, podemos considerar as séries de potências como a seguinte função:

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n \tag{2.3}$$

que tem como domínio todos os valores de $x$ para os quais (2.2) converge. Em geral, séries de potências do tipo (2.2) podem convergir apenas para $x = 0$, para valores de $x$ de um intervalo especificado ou para todos os valores de $x$.

**Exemplo 1:** Encontrar os valores de $x$ para os quais a série de potências $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{n\ x^n}{3^n}$ é convergente.

Usamos o teste da razão e, portanto, temos o seguinte:

$$u_n = \frac{n\ x^n}{3^n} \qquad u_{n+1} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{(n+1)x^n x}{3^n 3}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)x^n x}{3^n 3}}{\frac{n\ x^n}{3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x(n+1)}{3\ n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{3}\left(\frac{(n+1)}{n}\right)$$

De acordo com o teste da razão, a série anterior é convergente se $L < 1$. Assim, temos:

$$L = \frac{|x|}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)}{n}\right) = \frac{|x|}{3} < 1 \Longrightarrow |x| < 3$$

Adicionalmente, usamos o teste da razão para provar que a série é divergente para $L > 1$, isto é, para $|x| > 3$. Entretanto, para $L = 1$ (que equivale a $|x| = 3$) o teste da razão não apresenta prova conclusiva. Em outras palavras, para $L = 1$, o teste da razão não pode ser usado para provar a convergência de uma série. Assim, precisamos provar a convergência ou divergência da série para $|x| = 3$ usando outras estratégias.

Para $L = 1 \Longrightarrow \frac{|x|}{3} = 1 \Longrightarrow x = \pm 3$

- Para $x = 3 \Longrightarrow \sum_{n=o}^{\infty} \frac{n\ x^n}{3^n} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{n\ 3^n}{3^n} = \sum_{n=o}^{\infty} n$

  Nesse caso a série é claramente divergente e pode ser verificado usando a propriedade:

  $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

  que prova que a série é divergente.

- Para $x = -3 \Longrightarrow \sum_{n=o}^{\infty} \frac{n\ x^n}{3^n} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{n\ (-3)^n}{3^n} = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n n$

  Nesse caso a série também é divergente e pode ser verificado usando a propriedade:

  $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} ((-1)^n n) = \pm\infty$$

  que prova que a série é divergente.

Portanto, a série em análise converge apenas para o intervalo aberto $(-3, 3)$.

**Exemplo 2:** Encontrar os valores de $x$ para os quais a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ é convergente.

Usamos o teste da razão e, portanto, temos o seguinte:

$u_n = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$u_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{x^{2n+2-1}}{(2n+2-1)!} = (-1)^{n+1}(-1) \frac{x^{2n-1}x^2}{(2n+1)!} = (-1)(-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}x^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}$

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)x^2(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)x^2}{2n(2n+1)} \right| \Longrightarrow$$

$$L = |x^2| \lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{2n(2n+1)} \right) = |x^2|(0) = 0 < 1$$

A relação anterior mostra que $L < 1$ para todo valor de $x$ e, portanto, a série é convergente para todo valor de $x$ tal que $x \in (-\infty, \infty)$. Este problema mostra um tipo especial de série que converge para todos os valores de $x$.

**Exemplo 3:** Encontrar os valores de $x$ para os quais a série de potências $\sum_{n=o}^{\infty} n!\, x^n$ é convergente.

Usamos o teste da razão e, portanto, temos o seguinte:

$$u_n = n!\, x^n \qquad\qquad u_{n+1} = (n+1)!\, x^{n+1} = n!\, x^n\, (n+1)x$$

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n!\, x^n (n+1)x}{n!\, x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} |(n+1)x| = |x| \lim_{n \to \infty} (n+1)$$

Na relação anterior, se $x = 0$ então $L = 0 < 1$ e, portanto, a série é convergente para $x = 0$. Para $x \neq 0$ então $L = \infty$ e nesse caso a série é divergente. Este problema mostra um tipo especial de série que converge apenas para $x = 0$.

**Oservação:** Para verificar o intervalo de convergência de uma série de potências dos problemas deste capítulo vamos usar o teste da razão ou o teste da raiz que permite encontrar o intervalo de convergência mas, adicionalmente, nesse caso devemos usar outros teoremas do capítulo de séries infinitas com termos constantes para verificar a convergência nos extremos do intervalo de convergência como foi realizado no exemplo 1.

**Teorema 1:** Sobre convergência de séries de potências:

Se a série de potências $\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ é convergente para $x = x_1$ com $x_1 \neq 0$ então ela é obsolutamente convergente para todos os valores de $x$ para os quais $|x| < x_1$.

**Teorema 2:** Sobre divergência de séries de potências:

Se a série de potências $\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ é divergente para $x = x_2$ então ela é divergente para todos os valores de $x$ para os quais $|x| > x_2$.

**Teorema 3:** Sobre convergência de séries de potências:

Seja $\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ uma série de potências. Nesse contexto, apenas uma e somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. A série converge somente para $x = 0$.
2. A série é absolutamente convergente para todos os valores de $x$.
3. Existe um número $R > 0$ tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de $x$ para os quais $|x| < R$ e, a série é divergente para todos os valores de $x$ para os quais $|x| > R$.

**Observações:** As seguintes observações são importantes em relação ao Teorema 3:

- O Teorema 3 não diz nada em relação a convergência em $|x| = R$.
- O conjunto de valores de $x$ para os quais a série de potências é convergente é chamado de intervalo de convergência da série de potências.
- Se uma série de potências é convergente para valores de $|x| < R$ com $R > 0$ então $R$ é chamado de raio de convergência.
- O teste da razão é o teorema mais adequado para determinar o intervalo de convergência. Entretanto, o teste da razão não responde sobre a convergência nas extremidades do intervalo de convergência. Se uma série de potências é absolutamente convergente em uma extremidade então é absolutamente convergente em ambas extremidades.
- Uma série de potências define uma função que tem como domínio o intervalo de convergência.
- Existem séries de potências para os quais não é simples determinar a convergência ou divergência nos extremos do intervalo de convergência.

## 2.3. Derivação de séries de potências

Sabemos que uma série de potências $\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ define uma função cujo domínio é o intervalo de convergência. Nesse contexto, um tópico importante é analisar as características de convergência das séries obtidas derivando uma série de potências com intervalo de convergência conhecido.

**Teorema 4:** A derivada de uma série de potências tem o mesmo raio de convergência:

Se $\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ é uma série de potências com um raio de convergência $R > 0$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1}$ também tem $R$ como raio de convergência.

**Exemplo 4:** Verificar o Teorema 4 para a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Usamos o teste da razão para encontrar o raio de convergência da série original:

$$u_n = \frac{x^n}{n^2} \qquad\qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$L = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{x^{n+1}n^2}{(n+1)^2 x^n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|x\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right|$$

$$L = \lim_{n \to \infty} |x| \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right| = |x| < 1$$

Assim, o raio de convergência é $R = 1$.

A derivada da série original assume a seguinte forma:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ x^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

Usamos também o teste da razão para encontrar o raio de convergência da derivada da série original:

$$u_n = \frac{x^{n-1}}{n} \qquad u_{n+1} = \frac{x^n}{(n+1)}$$

$$L' = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{\frac{x^n}{(n+1)}}{\frac{x^{n-1}}{n}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{x^n n}{x^{n-1}(n+1)}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|x\frac{n}{n+1}\right|$$

$$L' = |x| \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = |x| < 1$$

Assim, o raio de convergência é $R' = 1$. Portanto, foi verificado que o raio de convergência da série original$f(x)$ é a mesma da série obtida da derivada de $f(x)$. Em resumo, o exemplo confirma o Teorema 4 que afirma que $f(x)$ e $f'(x)$ tem o mesmo raio de convergência. Entretanto, o Teorema 4 não diz nada em relação a convergência nos extremos do raio de convergência, isto é, se existe alguma relação entre a convergência de $f(x)$ nos extremos do raio de convergência e a convergência de $f'(x)$ nos extremos do raio de convergência. O Teorema 4 é válido para as sucessivas derivadas de $f(x)$.

**Teorema 5:** Generalização do Teorema 4:

Se o raio de convergência da série $\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ é $R > 0$ então o raio de convergência da série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\ c_n x^{n-2}$ também tem $R$ como raio de convergência. O Teorema 5 pode ser estendido para todas as derivadas da série original.

**Teorema 6:** Uma série e suas derivadas tem o mesmo intervalo de convergência aberto:

Seja $\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Então se $f(x)$ é uma função definida por $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ então existe $f'(x)$ para todo $x$ do intervalo de convergência $(-R, R)$ sendo dado por: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\ c_n x^{n-1}$.

**Observação:** O Teorema 6 prova que o intervalo de convergência aberto é o mesmo para $f(x)$ e $f^{'}(x)$ mas não prova que a convergência seja a mesma para os extremos do intervalo de convergência. Em outras palavras, a convergência pode ser diferente nos extremos do intervalo de convergência.

**Exemplo 5:** Encontrando o intervalo de convergência:

Seja $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$. Nesse contexto: (a) encontre o domínio de $f(x)$; (b) encontre $f^{'}(x)$ e o domínio correspondente.

- Encontramos o domínio de $f(x)$ usando o teste da razão:

$$u_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} = \frac{x^{n+1}x}{(n+2)^2}$$

$$L = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}x}{(n+2)^2}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|x\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right| = |x| \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4}\right) = |x|$$

Para convergência $L = |x| < 1$ e, portanto, existe convergência para $|x| < 1 \Longrightarrow x \in (-1, 1)$.

Para terminar a análise de $f(x)$ devemos avaliar a convergência nos extremos do intervalo de convergência. Para $x = 1$ temos o seguinte:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

A relação anterior é uma série hiper-harmônica com $p = 2$ e, portanto, é uma série convergente. Alternativamente, também podemos usar o Teste da integral da seguinte forma:

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_1^{\infty} = \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

que também prova que $f(x)$ é convergente em $x = 1$.

Para $x = -1$ temos o seguinte:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

que é uma série convergente porque é absolutamente convergente já que foi provado que $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ é convergente. Também podemos provar a convergência da série anterior usando o Teorema para séries alternadas da seguinte forma:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2+2n+1}\right) = 0$$

que também prova que $f(x)$ é convergente em $x = -1$. Assim, foi provado que a série converge nos extremos do intervalo de convergência e, portanto, o domínio de $f(x)$ é o intervalo $[-1, 1]$.

- Encontramos o domínio de $f'(x)$ ignorando, pela última vez, o Teorema 6:
  A forma matemática de $f'(x)$ pode ser obtida de $f(x)$ e assume a seguinte forma:

$$f(x) = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \Longrightarrow$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \ldots + \frac{x^n}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

  ou melhor diretamente da relação genérica mas verificando o limite inferior (Ver Teorema 6).
  Usando o teste da razão temos o seguinte:

$$u_n = \frac{x^n}{(n+1)} \qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+2)} = \frac{x^n x}{(n+2)}$$

$$L = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{\frac{x^n x}{(n+2)}}{\frac{x^n}{(n+1)}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|x\frac{n+1}{n+2}\right| = |x| \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = |x|$$

  Para convergência $L = |x| < 1$ e, portanto, existe convergência para $|x| < 1 \Longrightarrow x \in (-1, 1)$.
  Para terminar a análise de $f'(x)$ devemos avaliar a convergência nos extremos do intervalo de convergência.
  Para $x = 1$ temos a série $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$ que é uma série harmônica e, portanto, representa uma série divergente. Podemos também usar o Teste da integral da seguinte forma:

$$\int_1^{\infty} g(x)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)} = [Ln(1+x)]_0^{\infty} = \lim_{n \to \infty} Ln(1+x) - Ln\ 1 = \infty$$

  que também prova que $f'(x)$ é divergente em $x = 1$.
  Para $x = -1$ temos o seguinte: $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$
  que é uma série alternada. Usando o Teorema para séries alternadas temos o seguinte:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{(n+1)}\right) = 0$$

  que prova que $f'(x)$ é convergente em $x = -1$. Assim, foi provado que a série converge em um dos extremos e diverge no outro extremo. Portanto, o domínio de $f'(x)$ é o intervalo $[-1, 1)$.

Em resumo, o exemplo 5 que foi propositalmente desenvolvida de forma excessivamente detalhada, mostra que uma série de potências e a série obtida derivando essa série apresentam o mesmo raio de convergência e, portanto, tem o mesmo intervalo aberto de convergência $(-R, R)$ mas nos extremos do intervalo de convergência podem apresentar características de convergência diferentes. Assim, por exemplo, no exemplo

5 a série original converge nos dois extremos do intervalo de convergência mas a derivada diverge no extremo $x = 1$.

**Exemplo 6:** Provar que $e^x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo valor de $x$.

Inicialmente verificamos que $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo $x$ usando o teste da razão.

$$u_n = \frac{x^n}{n!} \qquad\qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n x}{(n+1)n!}$$

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{x^n x}{(n+1)n!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = |x| \lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{n+1} \right) = 0$$

Assim, foi provado que a série converge para todos os valores de $x$ e podemos escrever a relação:

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.4}$$

A continuação encontramos uma relação matemática para $f^{'}(x)$ da seguinte forma:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.5}$$

Da relação anterior encontramos a forma matemática de $f^{'}(x)$:

$$f^{'}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.6}$$

Das relações (2.5) e (2.6) encontramos o seguinte:

$$f^{'}(x) = f(x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = y \tag{2.7}$$

Da relação (2.5) e lembrando que a função que tem como derivada a própria função multiplicado por um fator adicional é a função $e^x$ então a solução de (2.7) é o seguinte:

$$y = f(x) = C \ \ e^x$$

Como $f(0) = 1 \Longrightarrow 1 = C\ e^0 \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow f(x) = e^x \Longrightarrow$

$$f(x) = e^x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

**Exemplo 7:** Mostre que $y = x + \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é solução da equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} - y + x = 0$.

A série de potências mostrada (que na verdade é igual a $e^x$) é convergente para todo $x$ e, portanto, $y = x + \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente para todos os valores de $x$. Encontramos as derivadas de $y$ da seguinte forma:

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ x^{n-1}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + \sum_{\overline{n}=0}^{\infty} \frac{x^{\overline{n}}}{\overline{n}!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$y^{''} = \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)\ x^{n-2}}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = \sum_{\overline{n}=0}^{\infty} \frac{x^{\overline{n}}}{\overline{n}!} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Agora substituímos $y^{''}$ e $y$ na equação diferencial:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \left[ x + \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right] + x = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

que prova que $y$ é uma solução da equação diferencial.

## 2.4. Integração de séries de potências

As séries de potência também podem ser integradas e a nova série encontrada após a integração também tem o mesmo raio de convergência da série original. Este tópico não é analisado neste trabalho e apresentamos apenas o Teorema 7 que relaciona uma série de potências e a integral dessa série.

**Teorema 7:** Sobre integração de séries de potências:

Seja $\sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$. Então se $f(x)$ é uma função definida pela relação $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$, $f(x)$ é integrável em todo o subintervalo $(-R, R)$ e podemos calcular a integral de $f(x)$ integrando termo a termo a série de potências dada, isto é, se $x$ está em $(-R, R)$ então $\int_o^x f(t)dt = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1}$. Além disso, o raio de convergência da série resultante é $R$.

## 2.5. Série (de potências) de Taylor

Nesta seção analisamos dois tipos muito especiais de séries de potências, isto é, a série de potências de Taylor e a série de potências de Maclaurin.

Seja $f(x)$ uma função definida da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{2.8}$$

com raio de convergência $R > 0$. Pelo Teorema 6 da existência de derivadas de séries de potências para o intervalo $(-R, R)$ sabemos que existem sucessivas derivadas de $f(x)$. Assim, $f(x)$ é **infinitamente** derivável no intervalo $(-R, R)$. Dessa forma, algumas derivadas de (2.8) são as seguintes:

$$
\begin{aligned}
f^{i}(x) &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots + n\, c_nx^{n-1} + \ldots && (2.9)\\
f^{ii}(x) &= 2c_2 + (2).(3)\, c_3x + (3).(4)c_4x^2 \ldots + n(n-1)\, c_nx^{n-2} + \ldots && (2.10)\\
f^{iii}(x) &= (2).(3)\, c_3 + (2).(3).(4)c_4x \ldots + n(n-1)(n-2)\, c_nx^{n-3} + \ldots && (2.11)\\
f^{iv}(x) &= (2).(3).(4)c_4 \ldots + n(n-1)(n-2)(n-3)\, c_nx^{n-4} + \ldots && (2.12)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

onde podemos verificar facilmente de que existem infinitas derivadas.

Em $x = 0$ as relações (2.8),(2.9),(2.10),(2.11)e (2.12) assumem a seguinte forma:

$$f(0) = c_0 \qquad f^{i}(0) = c_1 \qquad f^{ii}(0) = 2c_2 \qquad f^{iii}(0) = (2).(3)\, c_3 \qquad f^{iv}(0) = (2).(3).(4)\, c_4 \qquad \Longrightarrow$$

$$c_0 = f(0) \qquad c_1 = f^{i}(0) \qquad c_2 = \frac{f^{ii}(0)}{2!} \qquad c_3 = \frac{f^{iii}(0)}{3!} \qquad c_4 = \frac{f^{iv}(0)}{4!}$$

Assim, podemos generalizar e encontrar uma relação para $c_n$:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{2.13}$$

Portanto, (2.8) assume a seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_nx^n = f(0) + f^{i}(0)x + \frac{f^{ii}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{iii}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{2.14}$$

A série de potências (2.14) é chamada de série (de potências) de Maclaurin.

A série (2.14) pode ser generalizada em $(x - a)$. Assim, consideremos a função $f(x)$ da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \tag{2.15}$$

Se o raio de convergência dessa série é $R > 0$ então $f(x)$ é **infinitamente** derivável no intervalo $(a-R, a+R)$. Dessa forma, as derivadas de (2.15) assumem a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
f^{i}(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \ldots + n\, c_n(x-a)^{n-1} + \ldots && (2.16)\\
f^{ii}(x) &= 2c_2 + (2).(3)\, c_3(x-a) + (3).(4)c_4(x-a)^2 \ldots + n(n-1)\, c_n(x-a)^{n-2} + \ldots && (2.17)\\
f^{iii}(x) &= (2).(3)\, c_3 + (2).(3).(4)c_4(x-a) \ldots + n(n-1)(n-2)\, c_n(x-a)^{n-3} + \ldots && (2.18)\\
f^{iv}(x) &= (2).(3).(4)c_4 \ldots + n(n-1)(n-2)(n-3)\, c_n(x-a)^{n-4} + \ldots && (2.19)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Para $x = a$ as relações (2.15),(2.16),(2.17),(2.18)e (2.19) assumem a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
f(a) &= c_0 \Longrightarrow c_0 = f(a) \\
f^{i}(a) &= c_1 \Longrightarrow c_1 = f^{i}(a) \\
f^{ii}(a) &= 2\ c_2 \Longrightarrow c_2 = \frac{f^{iii}(a)}{2!} \\
f^{iii}(a) &= (2).(3)\ c_3 \Longrightarrow c_3 = \frac{f^{iii}(a)}{3!} \\
f^{iv}(a) &= (2).(3).(4)\ c_4 \Longrightarrow c_4 = \frac{f^{iv}(a)}{4!} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Assim, podemos generalizar e encontrar uma relação para $c_n$:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{2.20}$$

Portanto, (2.15) assume a seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n(x-a)^n = f(a) + f^{i}(a)(x-a) + \frac{f^{ii}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{iii}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{2.21}$$

A série de potências (2.21) é chamada de série (de potências) de Taylor. A figura 1 mostra o intervalo de convergência da série de Taylor para $|x-a| < R$.

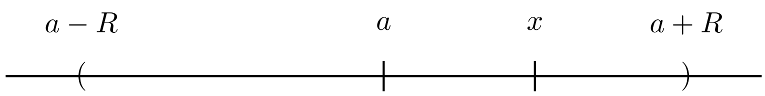


Figura 2.1: Intervalo de convergência da série de Taylor

**Exemplo 8:** Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = sen\ x$

A forma geral da série de Maclaurin assume a seguinte forma:

$$f(x) = sen\ x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Assim, os termos da série assumem a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
f^{(o)}(x) &= f(x) = sen\ x \Longrightarrow f^{(o)}(0) = 0 \\
f^{i}(x) &= cos\ x \Longrightarrow f^{i}(0) = 1 \\
f^{ii}(x) &= -sen\ x \Longrightarrow f^{ii}(0) = 0 \\
f^{iii}(x) &= -cos\ x \Longrightarrow f^{iii}(0) = -1 \\
f^{iv}(x) &= sen\ x \Longrightarrow f^{iv}(0) = 0 \\
f^{v}(x) &= cos\ x \Longrightarrow f^{v}(0) = 1 \\
f^{vi}(x) &= -sen\ x \Longrightarrow f^{vi}(0) = 0 \\
f^{vii}(x) &= -cos\ x \Longrightarrow f^{vii}(0) = -1 \\
f^{viii}(x) &= sen\ x \Longrightarrow f^{viii}(0) = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Substituindo na relação geral temos o seguinte:

$$f(x) = sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots = \sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**Exemplo 9:** Encontre a série de Taylor para $f(x) = sen\ x$ em $a$

A forma geral da série de Taylor assume a seguinte forma:

$$f(x) = sen\ x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Da relação anterior temos o seguinte:

$$sen\ x = sen\ a + cos\ a\ (x-a) - sen\ a\frac{(x-a)^2}{2!} - cos\ a\frac{(x-a)^3}{3!} + sen\ a\frac{(x-a)^4}{4!} + \ldots$$

Pode-se verificar que a relação anterior se transforma na série de Maclaurin quando $a = 0$.

**Exemplo 10:** Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = e^x$

A forma geral da série de Maclaurin assume a seguinte forma:

$$f(x) = e^x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Neste caso temos o seguinte:

$$f(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = e^x \Longrightarrow f^n(0) = e^0 = 1$$

A relação anterior mostra que todas as derivadas são iguais a $e^x$ e essas derivadas em $x = 0$ valem 1. Assim, temos o seguinte:

$$f(x) = e^x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

**Exemplo 11:** Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = cos\ x$

A forma geral da série de Maclaurin assume a seguinte forma:

$$f(x) = cos\ x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Assim, os termos da série assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
f^{(o)}(x) &= f(x) = cos\ x \Longrightarrow f^{(o)}(0) = 1 \\
f^{i}(x) &= -sen\ x \Longrightarrow f^{i}(0) = 0 \\
f^{ii}(x) &= -cos\ x \Longrightarrow f^{ii}(0) = -1 \\
f^{iii}(x) &= sen\ x \Longrightarrow f^{iii}(0) = 0 \\
f^{iv}(x) &= cos\ x \Longrightarrow f^{iv}(0) = 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Substituindo na relação geral temos o seguinte:

$$f(x) = cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

## 2.6. Representação adequada de uma função pela série de potências

Existe ainda um tópico adicional delicado e importante. Pretende-se saber se uma função que é representada por uma série de Taylor em $x-a$ e com raio de convergência $R > 0$ é representada adequadamente pela série de potências para todos os valores de $x$ no intervalo $(a-R, a+R)$. Em outras palavras, queremos provar se uma série de potências realmente representa uma função $f(x)$ no domínio representado pelo intervalo de convergência da série de potências. Essa questão pode ser verificada usando o Teorema 8.

**Teorema 8:** Usado para verificar se uma série de potências representa adequadamente uma função $f(x)$:

Seja $f(x)$ uma função derivável, assim como todas as derivadas (supor que $f(x)$ é infinitamente derivável) em algum intervalo $(a - R, a + R)$. Então essa função pode ser representada por sua série de Taylor $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ para todo $x$ tal que $|x - a| < R \Longleftrightarrow$:

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$$

onde cada $\xi_n$ está entre $x$ e $a$. A relação:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

é chamado de resto. Assim, $f(x) = P_n + R_n(x)$ em que $P_n$ é o polinômio de Taylor de grau $n$ de $f(x)$ em $a$.

**Exemplo 12:** Provar que a série de Maclaurin do exemplo 8 representa de forma adequada a função $f(x) = e^x$para todos os valores de $x$ (lembrando que o intervalo de convergência da série é $(-\infty, \infty)$).

Sabemos que $f(x) = e^x = \sum\limits_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para $(-\infty, \infty)$.

Queremos saber se a série de Maclaurin representa $f(x) = e^x$ para qualquer valor de $x$ desse intervalo de convergência. Assim temos o seguinte:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{mas como} \qquad f^{(n)}(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi} \Longrightarrow$$

$R_n(x) = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}x^{n+1}$ para $\xi_n$ que está entre 0 e $x$.

Pretendemos provar que: $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$:

Existem três casos: (1) $x > 0$, (2) $x < 0$, e (3) $x = 0$.

1. Se $x > 0$:

$$0 < \xi_n < x \Longrightarrow e^{\xi_n} < e^x \Longrightarrow 0 < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

   Sabemos que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left(e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

2. Se $x < 0$:

   $x < \xi_n < 0 \Longrightarrow 0 < e^{\xi_n} < 1$

   Então se $x^{n+1} > 0 \Longrightarrow 0 < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

   Se $x^{n+1} < 0 \Longrightarrow \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{\xi_n} x^{n+1}}{(n+1)!} < 0 \Longrightarrow$

   Como o $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

3. Se $x = 0$:

   Nesse caso a soma da série é igual a 1 que equivale a $e^0 = 1$ e, portanto, a série representa $e^x$ para todos os valores de $x$.

**Obsevação:** Na prova anterior usamos a relação: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ como sendo válida porque já sabemos que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ é convergente.

Na Tabela 1 é apresentada a série de Maclaurin das funções mais simples e válida para todos os valores de x.

**Tabela 1: Série de Maclaurin de funções matemáticas simples**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \dots$$
$$Sen\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \dots$$
$$Cos\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \dots$$
$$Senh\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \tfrac{x^7}{7!} + \dots$$
$$Cosh\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!} + \dots$$

## 2.7. Resolução de equações diferenciais usando séries de potências

Uma das principais aplicações das séries de potência acontece na resolução de equações diferenciais com coeficientes variáveis. Assim, apresentamos de forma resumida esse tipo de aplicação.

Seja a equação diferencial:

$$a(t)y^{''}(t) + b(t)y^{'}(t) + c(t)y(t) = 0 \tag{2.22}$$

em que $a(t) \neq 0$ para $\alpha < t < \beta$ e $a(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ são polinomios.

É razoável supor que a solução seja um polinomio $y(t)$ com coeficientes desconhecidos. Assim, após substituir $y(t)$ e as derivadas em (2.22) podemos encontrar o valor dos coeficientes desconhecidos. Adicionalmente, se encontramos duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ com a forma polinomial mencionada e com $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0$ (sendo $W$ o Wronskiano) então qualquer solução pode ser escrita na forma geral $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ e, portanto, o problema se reduz a encontrar as duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

**Exemplo 13:** Resolver a seguinte equação diferencial:

$$(1 + t^2)y^{''}(t) + 3t\ y^{'}(t) + y(t) = 0$$

Vamos supor que a solução da equação diferencial assume a seguinte forma polinomial:

$$y(t) = a_o + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + \dots + a_nt^n + \dots$$

Assim, as derivadas dessa suposta solução são as seguintes:

$$y^{'}(t) = a_1 + 2\ a_2t + 3\ a_3t^2 + 4\ a_4t^3 + \dots + n\ a_nt^{n-1} + \dots$$

$$y^{''}(t) = 2\ a_2 + (2).(3)\ a_3t + (3).(4)\ a_4t^2 + \dots + n(n-1)\ a_nt^{n-2} + \dots + (n+2)(n+1)\ a_{n+2}t^n + \dots$$

Substituindo as relações anteriores na equação diferencial temos o seguinte:

$(1+t^2)[2\ a_2 + (2).(3)\ a_3 t + (3).(4)\ a_4 t^2 + \ldots + n(n-1)\ a_n t^{n-2} + \ldots + (n+2)(n+1)\ a_{n+2} t^n + \ldots]+$

$3t[a_1 + 2\ a_2 t + 3\ a_3 t^2 + 4\ a_4 t^3 + \ldots + n\ a_n t^{n-1} + \ldots] + [a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \ldots + a_n t^n + \ldots] = 0$

$[2a_2 + a_o] + [a_1 + 3a_1 + (3).(2).a_3]t + [a_2 + (3).(2).a_2 + 2a_2 + (4).(3).a_4]t^2 + \ldots$

$[a_n + 3n\ a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n]t^n + \ldots = 0$

Todos os coeficientes devem ser iguais a zero. Particularmente, para o coeficiente de $t^n$ temos o seguinte:

$$a_n + 3n\ a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n = 0$$

$$[1 + 3n + n^2 - n]a_n + [(n+2)(n+1)]a_{n+2} = 0$$

$$[n^2 + 2n + 1]a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \Longrightarrow (n+1)(n+1)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} = 0 \Longrightarrow$$

$$a_{n+2} = -\frac{(n+1)}{(n+2)}a_n$$

A relação anterior é chamada de fórmula de recorrência ou equação de diferenças. Nessa relação, podemos encontrar todos os valores de $a_n$ se são conhecidos $a_o$ e $a_1$. Assim, podemos encontrar duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ escolhendo em cada caso um par de valores para $a_o$ e $a_1$. Portanto, geramos uma relação para $y_1(t)$ usando os valores de $a_o = 1$ e $a_1 = 0$ e também geramos uma relação para $y_2(t)$ usando os valores de $a_o = 0$ e $a_1 = 1$ da seguinte forma:

- Gerando $y_1(t)$ com $a_o = 1$ e $a_1 = 0$:

  Neste caso, todos os coeficientes impares, isto é, $a_1, a_3, a_5, \ldots$ são nulos porque $a_1 = 0$. Para os coeficientes pares temos o seguinte:

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_o = -\frac{1}{2} \qquad a_4 = -\frac{3}{4}a_2 = -\frac{(1).(3)}{(2).(4)} \qquad a_6 = -\frac{5}{6}a_4 = -\frac{(1).(3).(5)}{(2).(4).(6)} \ldots$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{(1).(3).(5).\ldots.(2n-1)}{(2).(4).(6).\ldots.(2n)} \Longrightarrow a_{2n} = \frac{(-1)^n(1).(3).(5).\ldots.(2n-1)}{2^n((1).(2).(3).\ldots.n)} \Longrightarrow$$

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{(1).(3).(5).\ldots.(2n-1)}{2^n n!} \Longrightarrow$$

$$y_1(t) = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n\ \frac{(1).(3).(5).\ldots.(2n-1)}{2^n n!}\ t^{2n} \tag{2.23}$$

- Gerando $y_2(t)$ com $a_o = 0$ e $a_1 = 1$:

  Neste caso, todos os coeficientes pares são nulos. Para os coeficientes impares temos o seguinte:

$$a_3 = -\frac{2}{3}a_1 = -\frac{2}{3} \qquad a_5 = -\frac{4}{5}a_3 = -\frac{(2).(4)}{(3).(5)} \qquad a_7 = -\frac{6}{7}a_5 = -\frac{(2).(4).(6)}{(3).(5).(7)} \ldots$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(2).(4).(6).\ldots(2n)}{(3).(5).(7).\ldots(2n+1)} = (-1)^n \frac{2^n n!}{(3).(5).(7).\ldots(2n+1)} \Longrightarrow$$

$$y_2(t) = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \; \frac{2^n n!}{(3).(5).(7).\ldots(2n+1)} \; t^{2n+1} \tag{2.24}$$

Portanto, a solução geral assume a seguinte forma:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

e os valores dos coeficientes $c_1$ e $c_2$ são encontrados das condições iniciais ou das condições de contorno (duas condições iniciais).

## 2.8. Problemas propostos

1. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potência:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-3}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\, x^n}{2^n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, x^n}{n^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} (x-1)^n$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{Ln(n+1)}$ (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2} x^{2n}}{n+3}$

2. Determine o raio de convergência e o domínio de $f(x)$ e $f'(x)$:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\, 3^n}$

3. Encontre a série de Maclaurin para $sen^2 x$ e para $cos^2 x$. Sugestão: use as identidades: $sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\ 2x)$ e $cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\ 2x)$.

4. Encontre os três primeiros termos não nulos da série de Maclaurin para $tg\ x$. Use o resultado para encontrar os três primeiros termos não nulos da série de Maclaurin para $sec^2 x$.

5. Encontre a série de Maclaurin para a função *coseno* derivando a série de Maclaurin para a função *seno*. Também encontre a série de Maclaurin para a função *seno* derivando a série da função *coseno*.

6. Prove que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$ representa o $senh\ x$ para todos os valores de $x$.

7. Prove que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$ representa o $cosh\ x$ para todos os valores de $x$.