

Capítulo 2 – Sinais e Espectros

Sinais elétricos de comunicação são quantidades variáveis no tempo, tais como tensão e corrente.

Sinal $v(t)$ no domínio do tempo;
Variável independente = t .

Embora o sinal exista fisicamente no domínio do tempo, também pode ser representado no domínio da frequência.

Espectro = descrição do sinal, consistindo de componentes senoidais em várias frequências.

Espectro $V(f)$ no domínio da frequência;
Variável independente = f .

2.1 Espectro de Linhas e Série de Fourier

Regime permanente senoidal — senóide eterna: $-\infty < t < +\infty$.

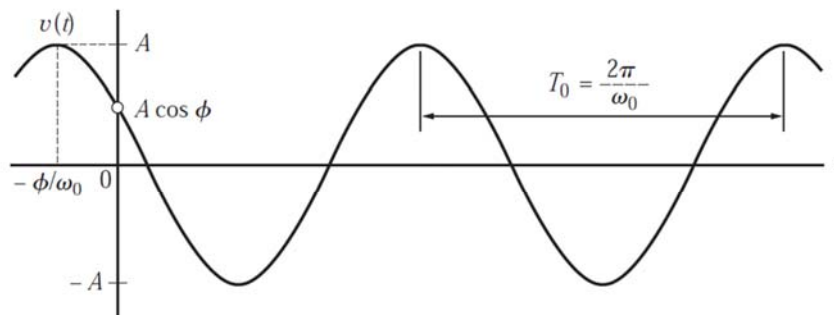


Figure 2.1-1 A sinusoidal waveform $v(t) = A \cos (\omega_0 t + \phi)$.

$$v(t) = A \cos (\omega_0 t + \phi) \quad (1)$$

A = amplitude ou valor de pico, volts ou ampères;
 ω_0 = frequência angular, rad/s;
 ϕ = ângulo de fase, graus ou rad.

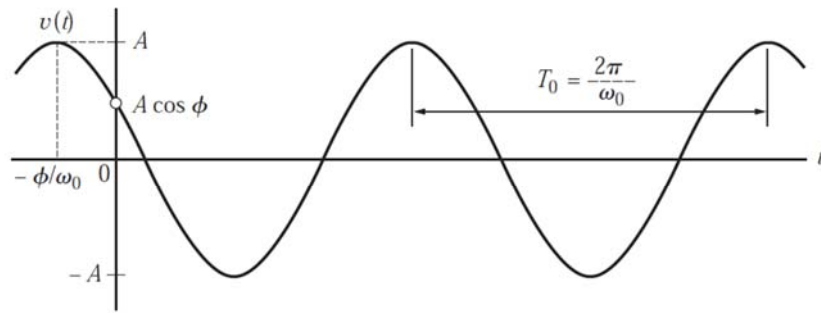


Figure 2.1-1 A sinusoidal waveform $v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$.

O termo ϕ representa o fato de que o pico foi deslocado da origem do tempo e ocorre em $t = -\phi/\omega_0$:

$$v(t = -\frac{\phi}{\omega_0}) = A \cos \left[\omega_0 \left(\frac{-\phi}{\omega_0} \right) + \phi \right] = A \cos 0 = A$$

e assim, o cosseno está **adiantado** de ϕ radianos.

Quando $t=0$: $v(t=0)=A \cos \phi$

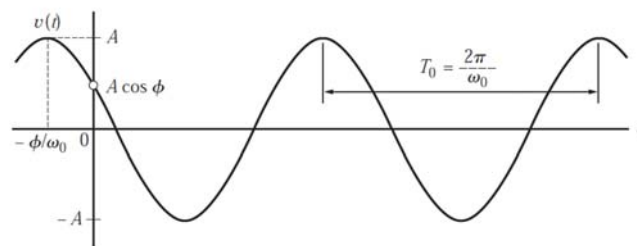


Figure 2.1-1 A sinusoidal waveform $v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$.

A função $v(t)$ se repete no tempo com **período** de repetição: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\begin{aligned} v(t + T_0) &= A \cos[\omega_0(t + T_0) + \phi] = A \cos[\omega_0 t + \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} + \phi] \\ &= A \cos[\omega_0 t + \phi + 2\pi] = A \cos[\omega_0 t + \phi] = v(t) \end{aligned}$$

Definição - frequência cíclica (ciclos/s ou Hz):

$$f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (2)$$

Nenhum sinal $v(t)$ é eterno, contudo, este é um modelo razoável para formas de ondas senoidais que duram um longo tempo t comparado com o período T_0 .

Fasores e Espectro de Linhas:

A análise de circuitos AC em **regime permanente** depende da hipótese de senóide eterna.

Teorema de Euler:

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta \quad (3)$$

Para $\theta = \omega_0 t + \phi$:

$$\begin{aligned} A \cos(\omega_0 t + \phi) &= A \operatorname{Re} [e^{j(\omega_0 t + \phi)}] \\ &= \operatorname{Re} [A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}] \end{aligned} \quad (4)$$

Fasor girante - três parâmetros especificam completamente um fasor:

amplitude: A

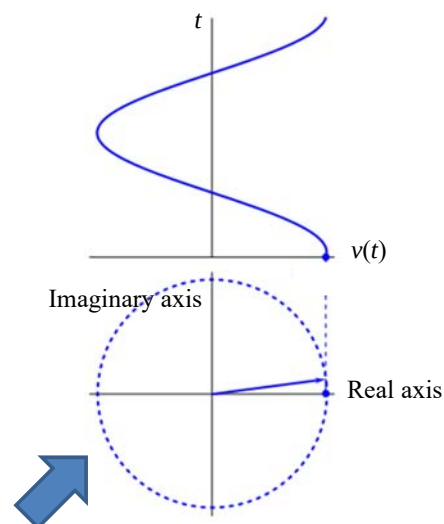
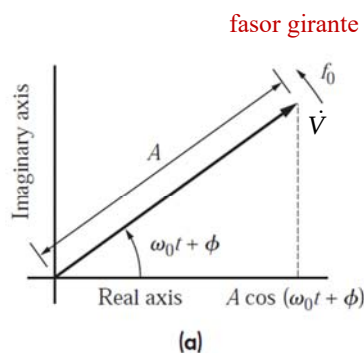
ângulo de fase: ϕ

frequência rotacional: ω_0 .

$$\begin{aligned} v(t) &= A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Re} [e^{j(\omega_0 t + \phi)}] \\ &= \operatorname{Re} [A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}] \end{aligned} \quad (4)$$

Fasor girante (forma polar): $\dot{V} = A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, segmento orientado no plano complexo e com rotação no sentido anti-horário.

Espectro de linhas (unilateral):



A projeção do fasor sobre o eixo real permite recuperar $v(t)$.

(continua...)

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Re} [e^{j(\omega_0 t + \phi)}] \quad (4)$$

$$= \operatorname{Re} [A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}]$$

Fasor girante (forma polar): $\dot{V} = A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, segmento orientado no plano complexo e com rotação no sentido anti-horário.

Espectro de linhas (unilateral):

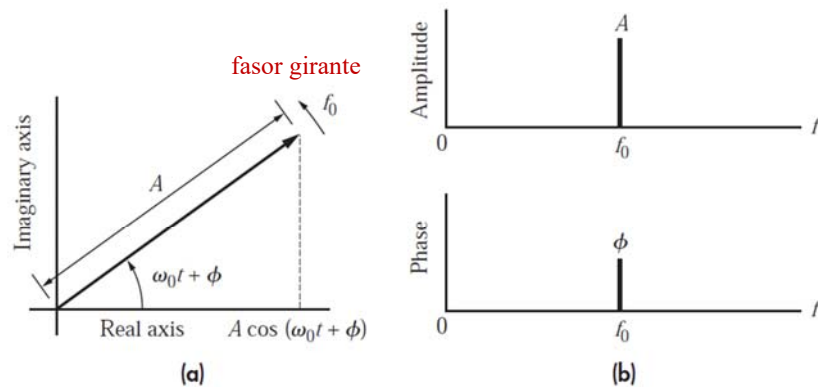


Figure 2.1-2 Representations of $A \cos(\omega_0 t + \phi)$: (a) phasor diagram; (b) line spectrum.

A projeção do fasor sobre o eixo real permite recuperar $v(t)$.

O conceito de fasor girante pode se tornar muito útil quando estendido ao caso de sinais mais complicados, como nas modulações AM, SSB, FM; em interferência, ruído, etc.

Convenções:

i) A variável independente é f (em vez de ω)

Uma dada frequência específica (particular) é denotada por subscrito: f_0, f_1 , etc.

ii) Ângulos de fase são medidos com relação à função **coseno**, i.e., em relação ao eixo real positivo do diagrama fasorial.

Se, inicialmente, for usado o **seno**, este precisa ser convertido em cosseno:

$$\sin \omega t = \cos(\omega t - 90^\circ) \quad (5)$$

iii) Considera-se a amplitude como sendo sempre **positiva**.

Quando o sinal **negativo** aparecer, deve ser absorvido pela fase:

$$-A \cos \omega t = A \cos(\omega t \pm 180^\circ) \quad (6)$$

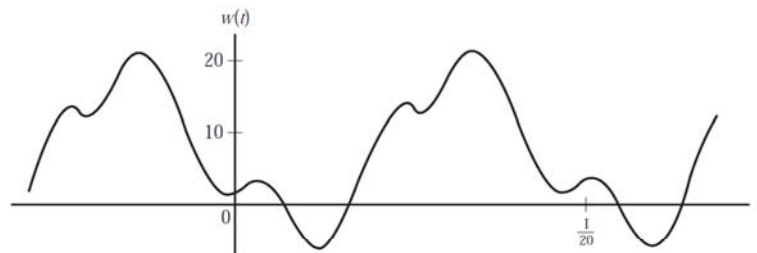
Exemplo:

$$w(t) = 7 - 10 \cos(40\pi t - 60^\circ) + 4 \sin 120\pi t$$

... série de Fourier

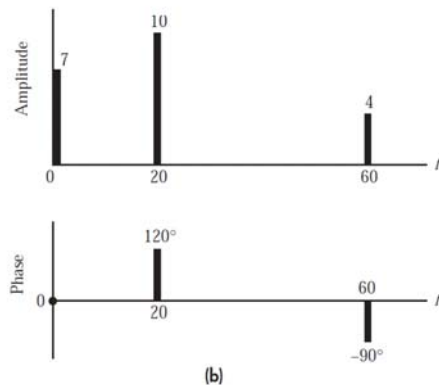
$$w(t) = 7 \cos 2\pi 0t + 10 \cos(2\pi 20t + 120^\circ) + 4 \cos(2\pi 60t - 90^\circ)$$

A superposição de senóides com diferentes frequências e fases pode dar origem a uma forma de onda não senoidal, embora periódica.



(a)

Espectro de linhas unilateral



(b)

Nas próximas seções este conceito será generalizado na forma de **série de Fourier** de um sinal $v(t)$ arbitrário, embora periódico.

Figure 2.1-3

Espectro de linhas bilateral:

Propriedade: $\text{Re}[z] = \frac{1}{2}(z + z^*)$, z complexo

Portanto, se $z = Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}$, então $z^* = Ae^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$

$$\text{No exemplo: } v(t) = \text{Re}[z] = A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} \overset{\text{freq. pos.}}{e^{j\phi}e^{j\omega_0 t}} + \frac{A}{2} \overset{\text{freq. neg.}}{e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}} \quad (7)$$

Fasores conjugados: direções de rotações opostas (**frequências negativas**)

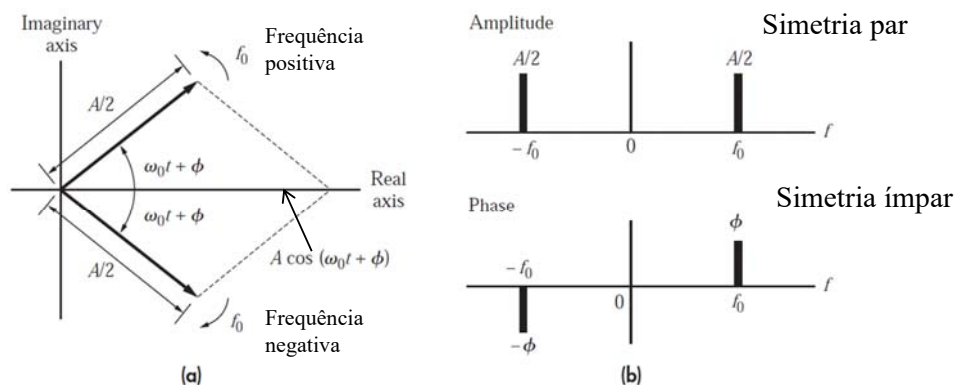
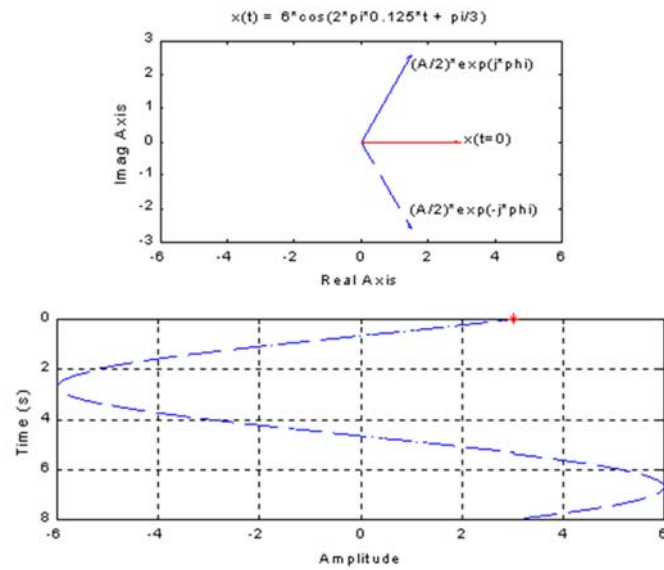


Figure 2.1-4 (a) Conjugate phasors; (b) two-sided spectrum.

A soma das projeções dos fasores sobre o eixo real permite recuperar $v(t)$.

A soma das projeções dos fasores sobre o eixo real permite recuperar $x(t)$.



Exemplo: $w(t) = 7 - 10 \cos(40\pi t - 60^\circ) + 4 \sin 120\pi t$... série de Fourier
 $w(t) = 7 \cos 2\pi 0t + 10 \cos(2\pi 20t + 120^\circ) + 4 \cos(2\pi 60t - 90^\circ)$

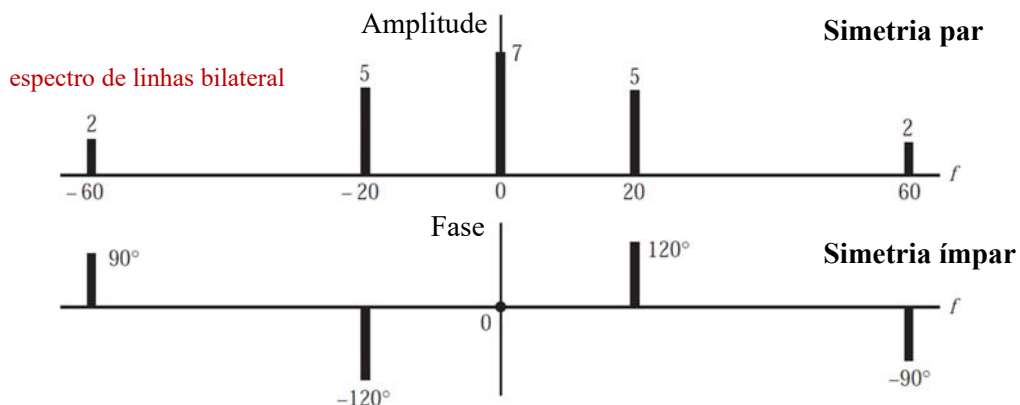


Figure 2.1-5

O espectro de amplitudes, em qualquer versão (unilateral ou bilateral), traz mais informações do que o espectro de fases.

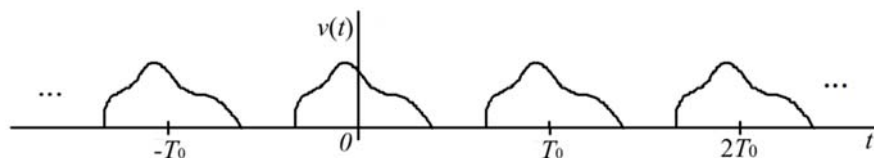
Ambas as partes são necessárias para definir a função no domínio do tempo, mas o espectro de amplitudes por si só informa quais frequências estão presentes e em qual proporção.

Sinais periódicos e Potência média:

Senóides e fasores são membros da classe geral de sinais periódicos:

$$v(t \pm mT_0) = v(t) \quad -\infty < t < \infty \quad (8)$$

sendo m inteiro e T_0 é o período fundamental.



Deslocando-se o sinal por um número inteiro de períodos, para a esquerda ou direita, mantém-se a forma de onda inalterada.

Um sinal periódico é completamente descrito especificando-se seu comportamento ao longo de qualquer período.

A representação no domínio da frequência, de um sinal periódico $v(t)$ qualquer, é um espectro de linhas obtido a partir da série de Fourier.

Pergunta: o que significa potência média?

A expansão em série de Fourier exige que o sinal periódico $v(t)$ tenha uma **potência média finita**.

Definição: valor médio (*average value*) ao longo de todos os tempos:

$$\langle v(t) \rangle \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) dt \quad (9)$$

Operações: Integrar $v(t)$ para obter a área sob a curva entre $-T/2 \leq t \leq +T/2$;
Dividir a área pela duração do intervalo de tempo T ;
Fazer $T \rightarrow \infty$ para englobar todos os tempos.

Se $v(t)$ for periódico:

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} v(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) dt \quad (10)$$

ou seja, a operação se resume à média ao longo de qualquer intervalo de duração T_0 .

O valor médio pode ser positivo, negativo ou nulo.

Se $v(t)$ for a tensão através de uma resistência, será produzida uma corrente $i(t)=v(t)/R$.

A potência média será o valor médio da potência instantânea $p(t)=v(t)i(t)$:

$$v(t)i(t) = v^2(t)/R = R i^2(t)$$

Se não for sabido, a princípio, se o sinal é de tensão ou de corrente, é adequado **normalizar** a potência assumindo-se que $R=1 \Omega$: $p(t) = v^2(t)$ ou $p(t) = i^2(t)$.

Potência média (*average power*) de um sinal periódico arbitrário (v ou i):

$$P \triangleq \langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2 dt \quad (11)$$

uma grandeza real, não negativa e medida em watts.

Obs: $|v(t)|^2 = v(t)v^*(t)$, se $v(t)$ for complexo

$|v(t)|^2 = v^2(t)$, se $v(t)$ for real

Quando a integral (2.1-11) existe e gera $0 < P < +\infty$, o sinal $v(t)$ é dito ser um **sinal de potência periódico**.

A maioria dos sinais periódicos práticos caem dentro desta categoria.

Algumas médias de sinais podem ser determinadas por inspeção, usando a interpretação física de média.

No caso do sinal senoidal: $v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

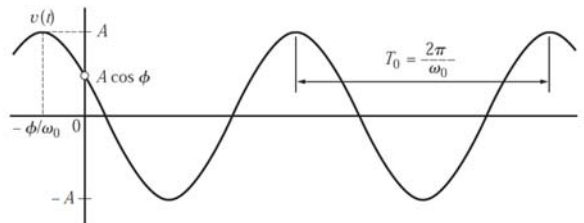


Figure 2.1-1 A sinusoidal waveform $v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$.

deduz-se que (imaginar mentalmente o desenho do gráfico de $|v(t)|^2$):

$$\langle v(t) \rangle = 0 \quad P = \frac{A^2}{2} \quad (12)$$

Obs: $P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [A \cos(\omega_0 t + \phi)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A^2 \left[\frac{1 + \cos 2(\omega_0 t + \phi)}{2} \right] dt = \frac{A^2}{2}$

Série de Fourier:

Corresponde à decomposição de sinais periódicos em somas de senóides em diferentes frequências.

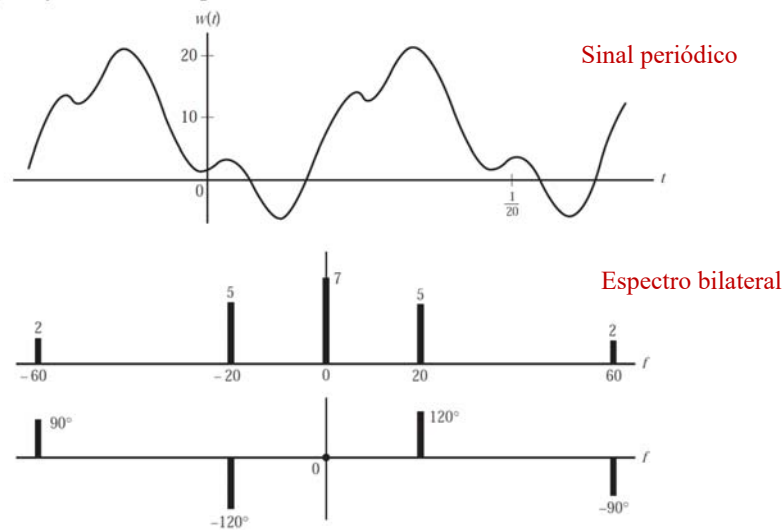


Figure 2.1-5

Série de Fourier rígonométrica

$$w(t) = 7 \cos 2\pi 0t + 10 \cos (2\pi 20t + 120^\circ) + 4 \cos (2\pi 60t - 90^\circ)$$

$$\dots + \underbrace{\left(\frac{10}{2} e^{j120^\circ} e^{j2\pi 20t} \right)}_{c_n} + \underbrace{\left(\frac{10}{2} e^{-j120^\circ} e^{-j2\pi 20t} \right)}_{c_{-n}} + \dots$$

Soma de fasores girantes

Série de Fourier exponencial (ou complexa):

Seja $v(t)$ um sinal de potência com período $T_0 = 1/f_0$.

Sua expansão em **série de Fourier** exponencial é (equação de síntese):

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Os **coeficientes*** da série estão relacionados com $v(t)$ através de (equação de análise):

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (14)$$

ou seja, c_n corresponde à **média** do produto: $v(t) e^{-j2\pi n f_0 t}$.

Em geral, os coeficientes c_n são complexos (podem ser representados na forma polar):

$$c_n = |c_n| e^{j \arg c_n}$$

na qual “ $\arg c_n$ ” representa o ângulo de c_n .

*A dedução destas expressões pode ser encontrada em:

- Lathi, B.P., & Ding, Z., Sistemas de Comunicações Analógicas e Digitais Modernos, 4ª. Edição, LTC, 2012.
- Higuti, R. T. & Kitano, C., Sinais e Sistemas, Apostila, Unesp, Ilha Solteira, 2003.

Interpretação:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Expansão de um sinal periódico em uma soma infinita de fasores girantes, cujo n -ésimo termo é:

$$c_n e^{j2\pi n f_0 t} = |c_n| e^{j \arg c_n} e^{j2\pi n f_0 t}$$

ou seja, fasores com amplitudes $|c_n|$ e ângulo $\arg c_n$ nas frequências nf_0 $\{= 0, \pm f_0, \pm 2f_0, \dots\}$.

Portanto, o **gráfico** no domínio da frequência é um **espectro bilateral** definido pelos coeficientes da série.

Enfatiza-se a representação espectral, empregando-se:

$$c(nf_0) \triangleq c_n = |c_n(nf_0)| e^{j \arg c(nf_0)}$$

tal que: $|c(nf_0)|$ representa o **espectro de amplitudes** em função de f ,
e, $\arg c(nf_0)$ representa o **espectro de fases**.

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (14) \quad \leftarrow$$

$$c_n = |c_n| e^{j \arg c_n} \quad (*) \quad \leftarrow$$

Propriedades espectrais de sinais de potências periódicos:

i) Todas as frequências são múltiplos inteiros (ou **harmônicas**) da frequência fundamental $f_0 = 1/T_0$ (as linhas espectrais têm espaçamento uniforme).

ii) A componente DC é igual ao **valor médio** do sinal, pois, para $n=0$ em (2.1-14):

$$c(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) dt = \langle v(t) \rangle \quad (15)$$

iii) Se $v(t)$ é uma função **real** no tempo, então seu espectro exibe **simetria hermitiana**:

$$\text{substituir } n \text{ por } -n \text{ em (2.1-14)} \quad c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j \arg c_n} \quad \text{conjugar (*)} \quad (16a)$$

$$\text{Portanto,} \quad |c(-nf_0)| = |c(nf_0)| \quad \text{e} \quad \arg c(-nf_0) = -\arg c(nf_0) \quad (16b)$$

o espectro de amplitudes tem simetria par e o espectro de fases tem simetria ímpar.

Série de Fourier trigonométrica (espectro unilateral):

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{espectro bilateral} \quad (13)$$

No caso de **sinal real**:

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |2c_n| \cos(2\pi n f_0 t + \arg c_n) \quad \text{espectro unilateral} \quad (17a)$$

ou então:

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t] \quad \text{espectro unilateral} \quad (17b)$$

Prova:

(17a): $c_n e^{j2\pi n f_0 t} = |c_n| e^{j \arg c_n} e^{j2\pi n f_0 t}$ (para a soma em (2.1-13), com n positivos e negativos)

$$= |c_n| [\cos(2\pi n f_0 t + \arg c_n) + j \sin(2\pi n f_0 t + \arg c_n)] \quad (\text{para } +n \text{ e } -n)$$

Mas: $|c(-nf_0)| = |c(nf_0)|$ e $\arg c(-nf_0) = -\arg c(nf_0)$ (16b)

Para n e $-n$ ocorrem:

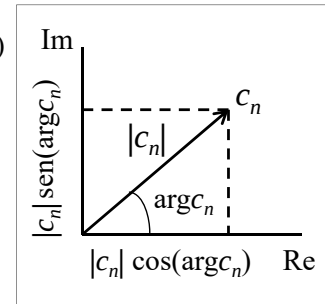
$$|c_n| \cos(2\pi n f_0 t + \arg c_n) + |c_{-n}| \cos[2\pi(-n) f_0 t + \arg c_{-n}] = 2|c_n| \cos(2\pi n f_0 t + \arg c_n)$$

$$|c_n| \sin(2\pi n f_0 t + \arg c_n) + |c_{-n}| \sin[2\pi(-n) f_0 t + \arg c_{-n}] = 0$$

(17b): de (17a) vem

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| [\cos(2\pi n f_0 t) \cos(\arg c_n) - \sin(2\pi n f_0 t) \sin(\arg c_n)]$$

$$a_n = 2|c_n| \cos(\arg c_n) = 2 \operatorname{Re}\{c_n\}, \quad b_n = -2|c_n| \sin(\arg c_n) = -2 \operatorname{Im}\{c_n\}$$



Funções ortogonais:

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos 2\pi n f_0 t + b_n \sin 2\pi n f_0 t] \quad (17b)$$

As funções seno e cosseno representam um conjunto de funções ortogonais:

$$\{\cos(\pm f_0 t), \cos(\pm 2f_0 t), \cos(\pm 3f_0 t), \dots, \sin(\pm f_0 t), \sin(\pm 2f_0 t), \sin(\pm 3f_0 t), \dots\}$$

Funções $v_n(t)$ e $v_m(t)$ são **ortogonais** ao longo de um intervalo $[t_1, t_2]$ se:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_n(t) v_m(t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ K & n = m \end{cases} \quad \text{onde } K \text{ é constante.}$$

Exemplo: usando as propriedades trigonométricas: $2\cos a \times \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ e $\cos^2 a = (1+\cos 2a)/2$, tem-se que

Se $m \neq n$: $\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos(2\pi n f_0 t) \times \cos(2\pi m f_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos[2\pi(n+m) f_0 t] dt + \frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos[2\pi(n-m) f_0 t] dt = 0$

Se $m = n$: $\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \cos^2(2\pi n f_0 t) dt = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \frac{1 + \cos[2(2\pi n f_0 t)]}{2} dt = \frac{1}{2} T_0$

O mesmo se aplica a outras combinações envolvendo senos e cossenos.

#

A função **sinc**

A integração para calcular c_n frequentemente envolve a média do fasor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi ft} dt &= \frac{1}{j2\pi f T} (e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}) \\ &= \frac{1}{\pi f T} \sin \pi f T \end{aligned} \quad (18)$$

cujo resultado aparece com grande regularidade em análise espectral.

Devido a sua importância, define-se:

$$\text{sinc } \lambda \triangleq \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} \quad (19)$$

onde λ representa uma variável independente.

Como se observa:

$$\text{sinc } \lambda = \begin{cases} 1 & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

(provar que **sinc 0 = 1** !!)

Obs: Função amostragem $Sa(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \text{sinc } \lambda = Sa(\pi \lambda)$

$$\text{sinc } \lambda \triangleq \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} \quad (19)$$

$$\text{sinc } \lambda = \begin{cases} 1 & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

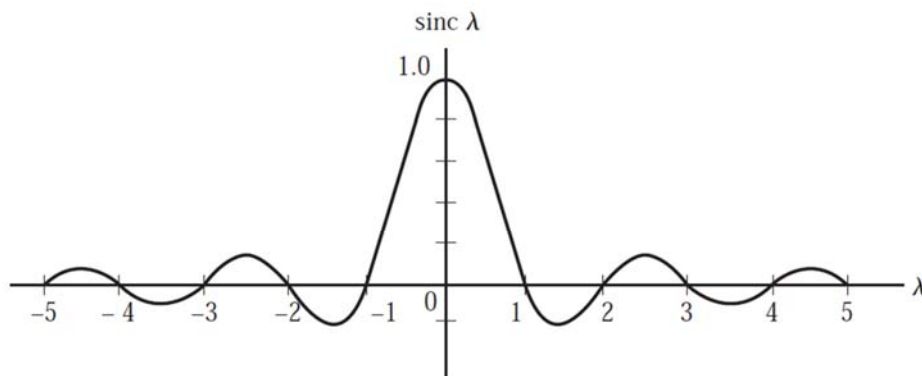


Figure 2.1-6 The function $\text{sinc } \lambda = (\sin \pi \lambda)/\pi \lambda$.

Exemplo 2.1-1: Trem de pulsos retangulares (pulsos de amplitude A e duração τ)

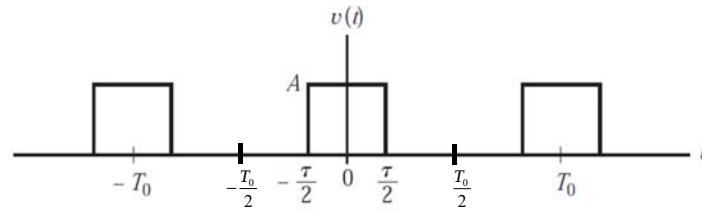


Figure 2.1-7 Rectangular pulse train.

Dentro de um período:
$$v(t) = \begin{cases} A & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad \text{Duty cycle} = \tau/T_0$$

Num intervalo $-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$, basta executar a integração de c_n entre $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\ &= \frac{A}{-j2\pi n f_0 T_0} (e^{-j\pi n f_0 \tau} - e^{+j\pi n f_0 \tau}) \\ &= \frac{A}{T_0} \frac{\sin \pi n f_0 \tau}{\pi n f_0} \quad (\text{multiplicar e dividir por } \tau) \end{aligned}$$

Portanto:
$$c_n = \frac{A\tau}{T_0} \text{sinc } n f_0 \tau \quad (20) \quad (\text{continua...})$$

$$\text{sinc } \lambda = \begin{cases} 1 & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$c_n = \frac{A\tau}{T_0} \text{sinc } n f_0 \tau \quad (20)$$

Considere-se o caso particular $\tau/T_0 = f_0 \tau = 1/4$, ou seja, $1/\tau = 4f_0$.

Sendo $\lambda = n f_0 \tau$, então, **sinc** $\lambda = 0$ para $\lambda = n f_0 \tau = \pm 1, \pm 2, \dots$, isto é, $f = \boxed{n f_0} = \pm 1/\tau, \pm 2/\tau, \dots$

ou seja, para $f = n f_0 = \pm 4f_0, \pm 8f_0, \dots$

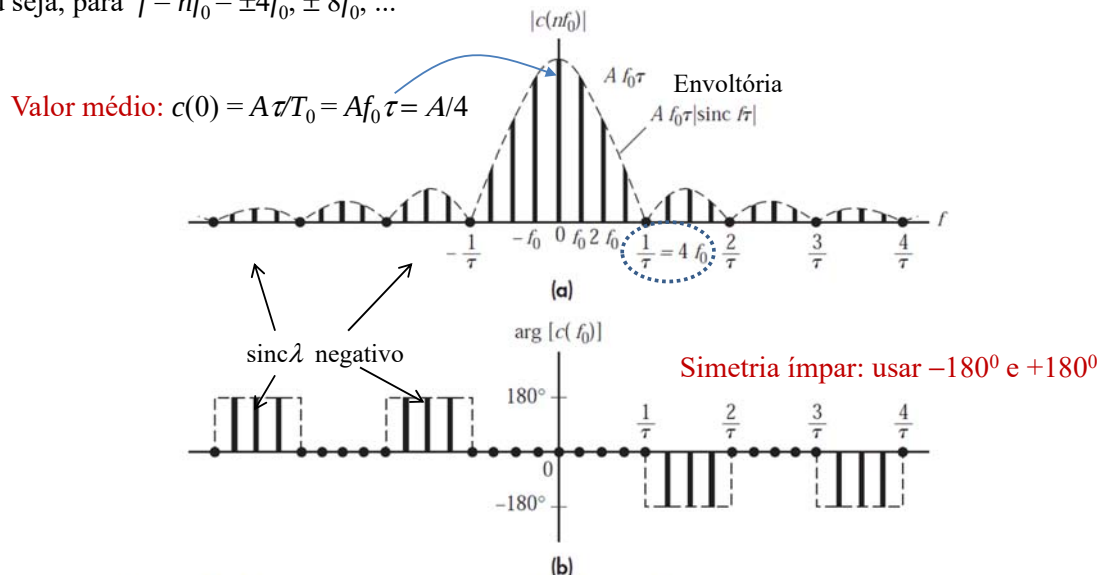


Figure 2.1-8 Spectrum of rectangular pulse train with $f_0 \tau = 1/4$. (a) Amplitude; (b) phase.

Reconstrução do trem de pulsos a partir das componentes harmônicas:

No caso particular $\tau/T_0 = f_0 \tau = 1/4$, $c_n(0) = c_0 = A/4$, $c_n = (A\tau/T_0) \text{sinc}(nf_0 \tau)$

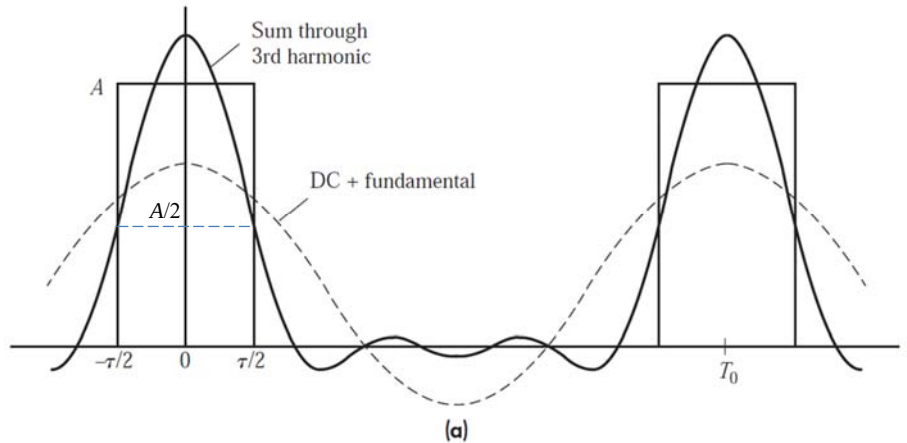
(isto foi mostrado em seções anteriores)

$$a_n = |2c_n| \cos(\arg c_n) = |2c_n| = 2 |(A\tau/T_0) \text{sinc}(nf_0 \tau)| = 2 (A/4) \times |\text{sinc}(n/4)| = \frac{2A \times |\sin(\pi n/4)|}{\pi n}$$

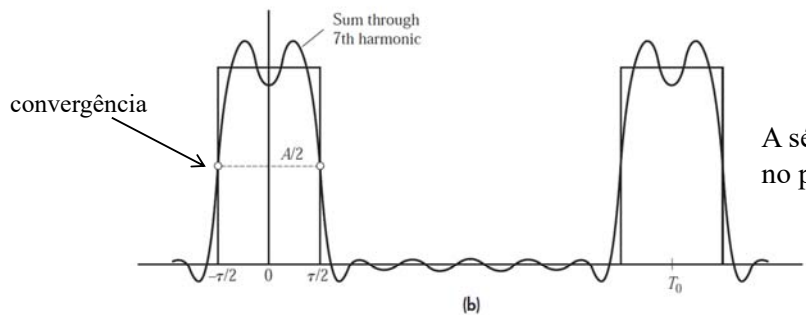
Obs: até as 4 primeiras linhas c_n têm-se $\arg c_n = 0$

Série de Fourier unilateral:
$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |2c_n| \cos(2\pi n f_0 t + \arg c_n) \quad (2.1-17a)$$

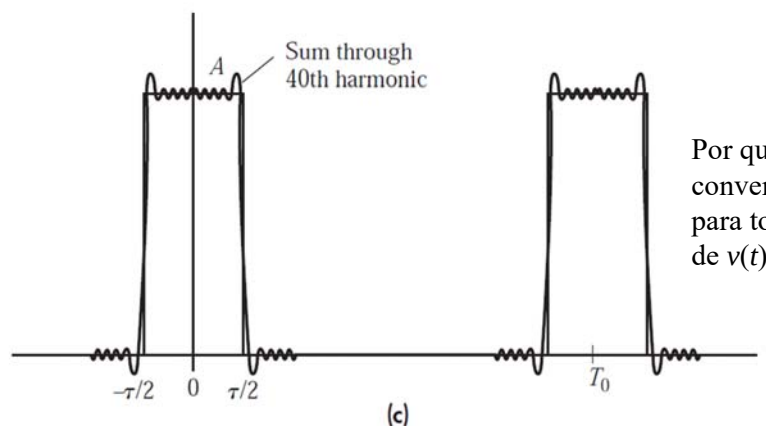
$$v(t) = \frac{A}{4} + \frac{\sqrt{2} A}{\pi} \cos \omega_0 t + \frac{A}{\pi} \cos 2\omega_0 t + \frac{\sqrt{2} A}{3\pi} \cos 3\omega_0 t + \dots$$



Reconstrução do trem de pulsos a partir das componentes harmônicas:



A série sempre converge no ponto médio.



Por que a série não converge com exatidão para todos os pontos de $v(t)$?

Figure 2.1-9 Fourier-series reconstruction of a rectangular pulse train.

Condição de convergência da série de Fourier:

Condições de Dirichlet: se a função periódica $v(t)$ tem um número finito de máximos, mínimos e descontinuidades por período, e, se $v(t)$ é **absolutamente integrável** [$v(t)$ tem área finita por período], então, a série de Fourier existe e converge uniformemente em toda **porção onde $v(t)$ é contínua**.

Estas condições são suficientes mas não estritamente necessárias. (é possível encontrar contra-exemplos)

Condição alternativa: Se $v(t)$ for **quadraticamente integrável** [$|v(t)|^2$ tem área finita por período], ou seja, se for um sinal de potência, a série **converge na média***, tal que, se:

então,

$$v_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{j2\pi n f_0 t}$$
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_0} |v(t) - v_N(t)|^2 dt = 0 \quad \text{Média (dividir por } T_0\text{)? Ver *}$$

Ou seja, a **diferença quadrática média** entre $v(t)$ e a soma parcial $v_N(t)$ desvanece quando mais termos são incluídos.

* É indiferente dividir a última integral por T_0 , por causa da igualdade em zero.

Fenômeno de Gibbs:

A despeito de $v(t)$ ser absoluta ou quadraticamente integrável, a série de Fourier exibe o fenômeno de Gibbs nos pontos de descontinuidade.

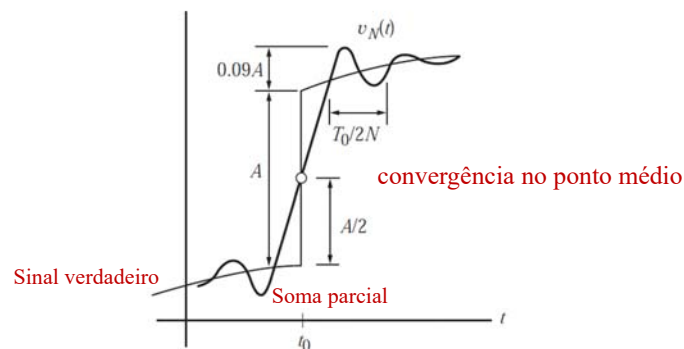


Figure 2.1-10 Gibbs phenomenon at a step discontinuity.

Ocorre o fenômeno de Gibbs em torno da descontinuidade de degrau em $t=t_0$.

A soma parcial $v_N(t)$ converge no ponto médio.

Em cada lado da descontinuidade, $v_N(t)$ apresenta *overshoot* oscilatório com período igual a $(T_0/2N)$ e valor de pico de aproximadamente 9% da altura do degrau, independentemente do valor de N .

Quando $N \rightarrow \infty$, as oscilações colapsam para *spikes* acima e abaixo da descontinuidade.

Teorema de Parseval (Marc-Antoine Parseval, 1755 a 1836):

O teorema de Parseval relaciona a **potência média** P de um sinal periódico $v(t)$, qual seja,

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) v^*(t) dt$$

com seus coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} v^*(t) &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-j2\pi n f_0 t} \\ P &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-j2\pi n f_0 t} \right] dt && \text{Somatório em } n \text{ primeiro} \\ &&& \text{e integral em } t \text{ depois} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \right] c_n^* && \text{Integral em } t \text{ primeiro} \\ &&& \text{e somatório em } n \text{ depois} \\ \boxed{P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2} &&& (21) \end{aligned}$$

A potência média pode ser determinada **quadrando e somando** os pesos das amplitudes das linhas espectrais $|c_n| = |c(nf_0)|$.

Conforme se observa, a soma

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (21)$$

não envolve o espectro de fases ($\arg c_n$).

Isto é justificável, lembrando-se que a série exponencial de Fourier expande $v(t)$ como uma soma de fasores:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Verifica-se que a potência média de cada fasor é:

$$\langle |c_n e^{j2\pi n f_0 t}|^2 \rangle = |c_n|^2 \quad (22)$$

Prova:

$$\begin{aligned} P_n &= \left\langle |c_n e^{j2\pi n f_0 t}|^2 \right\rangle = \left\langle (c_n e^{j2\pi n f_0 t}) \cdot (c_n e^{j2\pi n f_0 t})^* \right\rangle = \left\langle c_n c_n^* \cancel{e^{j2\pi n f_0 t}} \cancel{e^{-j2\pi n f_0 t}} \right\rangle = \left\langle c_n c_n^* \right\rangle \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} c_n c_n^* dt = c_n c_n^* \frac{1}{T_0} \int_{T_0} dt = c_n c_n^* = |c_n| e^{j \arg c_n} |c_n| e^{-j \arg c_n} = |c_n|^2 \end{aligned}$$

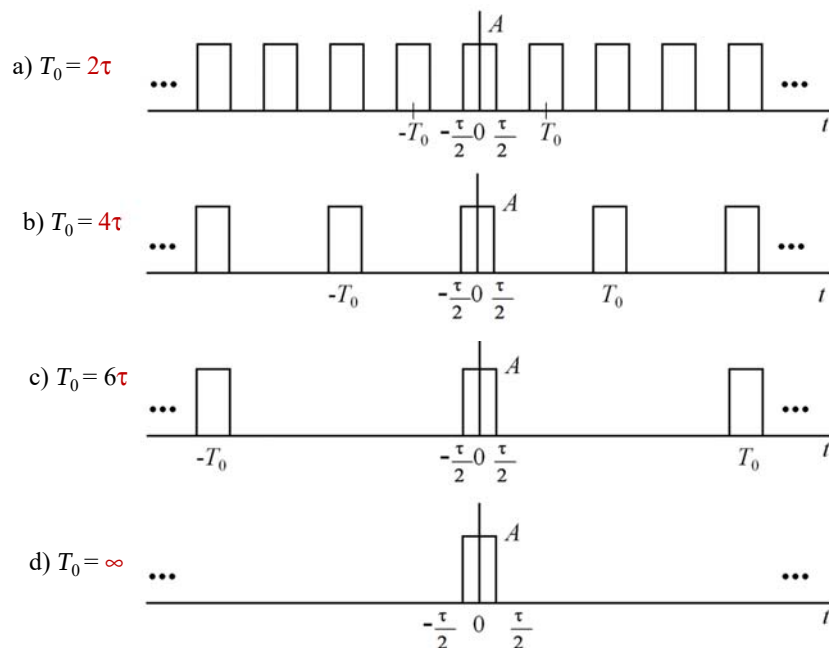
($\arg c_n$ desaparece)

#

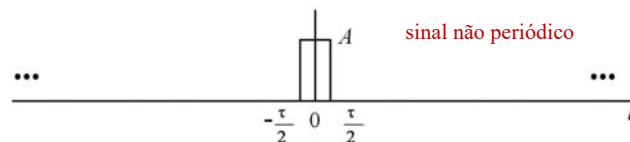
Série de Fourier e transformada de Fourier:

Considere-se novamente a forma de onda retangular com período T_0 e *duty cycle* τ/T_0 .

Mantendo-se τ constante, aumenta-se o período: $T_0 = 2\tau, 4\tau, 8\tau, \dots$, até o infinito.



No limite, quando $T_0 \rightarrow \infty$, obtém-se um pulso retangular de largura τ .



Os coeficientes da **série de Fourier** do sinal periódico são dados por (2.1-20):

$$c_n = \frac{A\tau}{T_0} \text{sinc } nf_0 \tau \quad (20)$$

da qual se obtém:

$$c_n = c(nf_0) = A\tau \text{sinc}(nf_0 \tau) \quad \rightarrow \quad T_0 c(nf_0) = A\tau \text{sinc}(nf_0 \tau) = A\tau \text{sinc}(\lambda)$$

multiplicar por T_0 em ambos os lados e usar $f_0 T_0 = 1$

sendo $\lambda = nf_0 \tau$.

O período T_0 assumirá vários valores, obtendo-se os seguintes **espectros**: $(T_0 c_n) \times (f = nf_0)$

i) Para $T_0 = 2\tau \rightarrow 1/\tau = 2/T_0 = 2f_0 \rightarrow$

$\text{sinc} \lambda = 0$ para $\lambda = nf_0 \tau = \pm 1, \pm 2, \dots$, ou, $f = nf_0 = \pm 1/\tau, \pm 2/\tau, \dots$, ou, $f = nf_0 = \pm 2f_0, \pm 4f_0, \dots$

ii) Para $T_0 = 4\tau \rightarrow 1/\tau = 4/T_0 = 4f_0 \rightarrow \text{sinc} \lambda = 0$ para

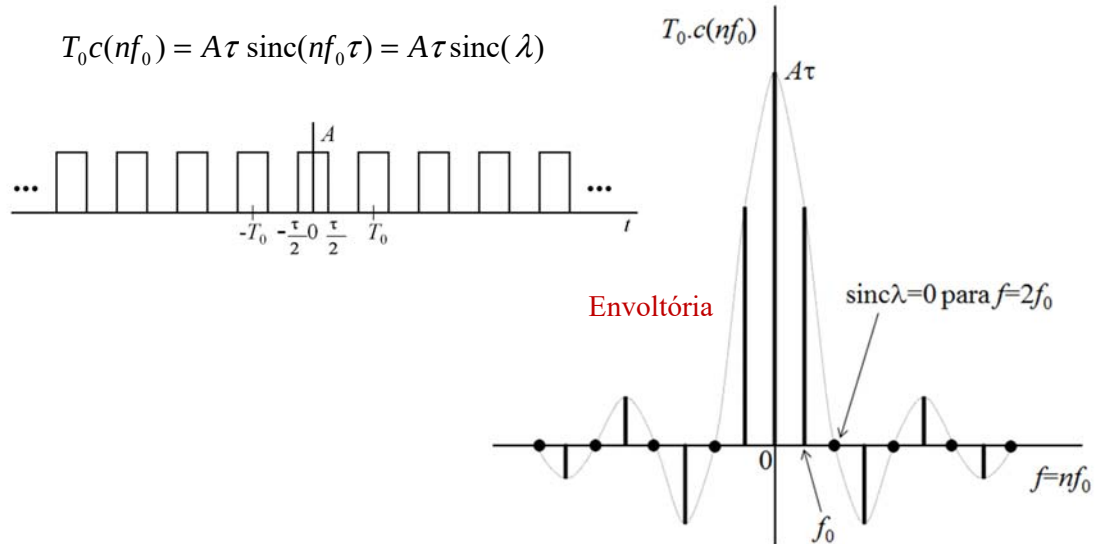
.... $f = nf_0 = \pm 4f_0, \pm 8f_0, \dots$

iii) Para $T_0 = 8\tau \rightarrow 1/\tau = 8/T_0 = 8f_0 \rightarrow \text{sinc} \lambda = 0$ para

.... $f = nf_0 = \pm 8f_0, \pm 16f_0, \dots$

- i) Para $T_0 = 2\tau \rightarrow 1/\tau = 2/T_0 = 2f_0 \rightarrow$
 $\text{sinc } \lambda = 0$ para $\lambda = nf_0 \tau = \pm 1, \pm 2, \dots$, ou, $f = nf_0 = \pm 1/\tau, \pm 2/\tau, \dots$, ou, $f = nf_0 = \pm 2f_0, \pm 4f_0, \dots$

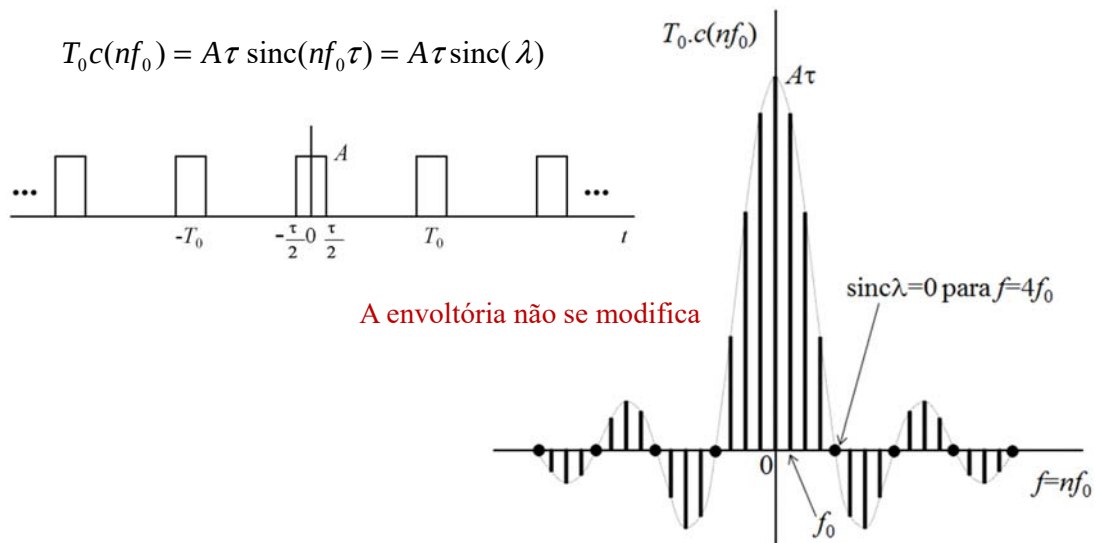
Espectro $(T_0 c_n) \times (f = nf_0)$:



- ii) Para $T_0 = 4\tau \rightarrow 1/\tau = 4/T_0 = 4f_0 \rightarrow$
 $\text{sinc } \lambda = 0$ para $\lambda = nf_0 \tau = \pm 1, \pm 2, \dots$, ou, $f = nf_0 = \pm 1/\tau, \pm 2/\tau, \dots$, ou, $f = nf_0 = \pm 4f_0, \pm 8f_0, \dots$

Obs: quando T_0 aumenta f_0 diminui de tamanho.

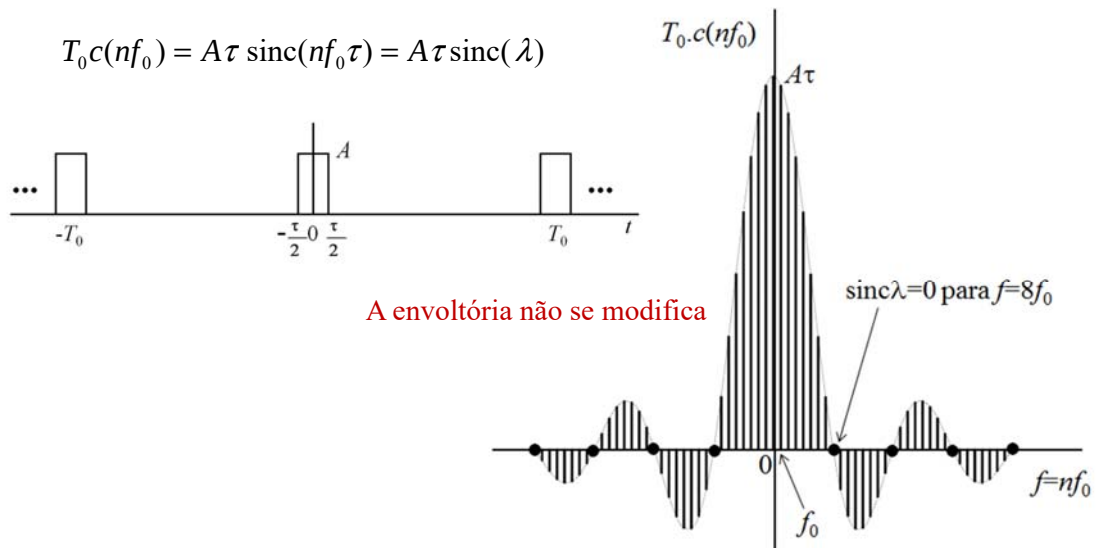
Espectro $(T_0 c_n) \times (f = nf_0)$:



- iii) Para $T_0 = 8\tau \rightarrow 1/\tau = 8/T_0 = 8f_0 \rightarrow$
 $\text{sinc } \lambda = 0$ para $\lambda = nf_0\tau = \pm 1, \pm 2, \dots$, ou, $f = nf_0 = \pm 1/\tau, \pm 2/\tau, \dots$, ou, $f = nf_0 = \pm 8f_0, \pm 16f_0, \dots$

Obs: quando T_0 aumenta f_0 diminui de tamanho.

Espectro $(T_0 c_n) \times (f = nf_0)$:



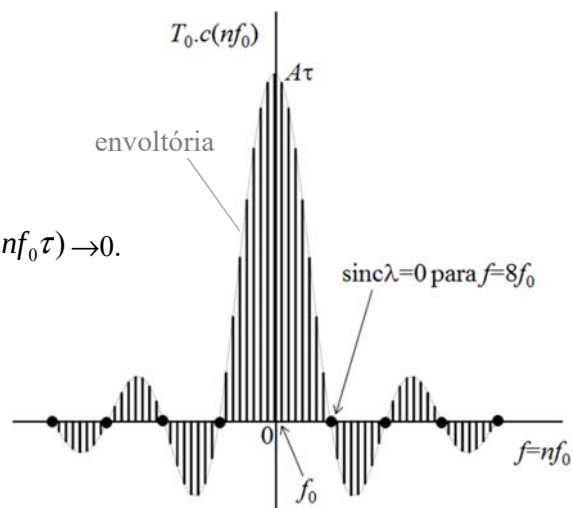
$$c_n = c(nf_0) = Af_0\tau \text{ sinc}(nf_0\tau) \rightarrow T_0 c(nf_0) = A\tau \text{ sinc}(nf_0\tau) = A\tau \text{ sinc}(\lambda)$$

- a) Considerando-se f uma variável contínua, a função $A\tau \text{ sinc}(f\tau)$ é a **envoltória** do espectro de linhas, sendo os coeficientes $T_0 c_n$ as amostras desta envoltória;
- b) Para τ fixo, a envoltória não depende de T_0 ;
- c) À medida que se aumenta T_0 , as amostras ficam mais próximas entre si e os coeficientes $T_0 c(nf_0)$ se aproximam da envoltória.
- d) No limite, quando $T_0 \rightarrow \infty$, o produto $T_0 c(nf_0)$ corresponderá à envoltória.
- e) Quando $T_0 \rightarrow \infty$, ocorre $f_0 \rightarrow 0$ e o espectro torna-se **contínuo**.

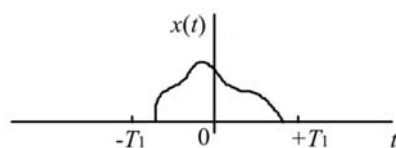
Observe que: $T_0 \rightarrow \infty$, causa $f_0 \rightarrow 0$ e $c_n = Af_0\tau \text{ sinc}(nf_0\tau) \rightarrow 0$.

Porém, $T_0 c(nf_0)$ resulta finito!!

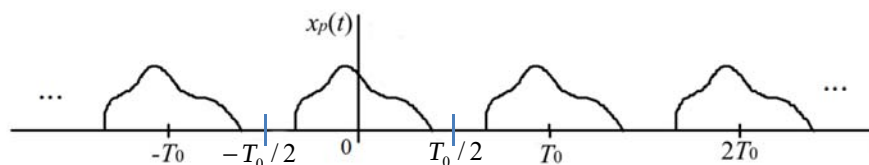
Resulta na envoltória!



Caso geral: sinal não periódico $x(t)$ de duração finita [$x(t)=0$ para $|t|>T_1$]



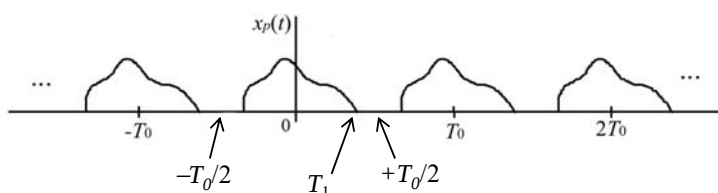
A partir de $x(t)$ constrói-se um sinal periódico $x_p(t)$, com período T_0 , tal que, dentro de um período $-T_0/2 \leq t \leq +T_0/2$, ocorre $x_p(t) = x(t)$.



Ou seja, $x_p(t)$ é composto de cópias de $x(t)$ a cada T_0 .

Tem-se ainda: $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_p(t) = x(t)$ (como ocorria com o pulso retangular periódico do exemplo anterior).

(continua...)



A série de Fourier de $x_p(t)$ é: $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn2\pi f_0 t}$ onde $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x_p(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$

Como $x_p(t) = x(t)$ para $|t| < T_0/2$, e, $x(t)=0$ para $|t| > T_1$ (quando $T_0/2 > T_1$), pode-se substituir $x_p(t) = x(t)$ na integral acima e redefinir os limites de integração:

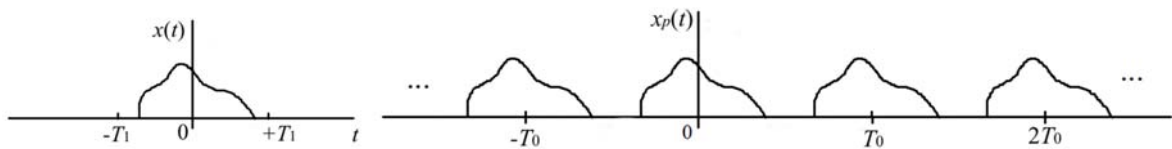
$$\text{coeficiente para } x(t) \quad c_n = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x_p(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt \quad (\text{com } T_0 \rightarrow \infty)$$

a partir da qual se obtém

$$T_0 c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt \quad (\text{com } T_0 \rightarrow \infty)$$

(Se $T_0 \rightarrow \infty$, então, $c_n \rightarrow 0$, mas o produto $T_0 c_n$ pode resultar finito!)

(continua...)



$$T_0 c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt \quad (\text{com } T_0 \rightarrow \infty) \quad x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

Como ocorreu no caso da onda retangular periódica, $c_n T_0$ pode ser considerado como amostras de uma **envoltória** $X(f)$ tal que:

$$X(nf_0) \equiv T_0 c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt \quad \leftarrow$$

e cujos coeficientes c_n tornam-se:

$$c_n = \frac{1}{T_0} X(nf_0) \equiv \frac{1}{T_0} X(f) \quad \text{para } f = nf_0$$

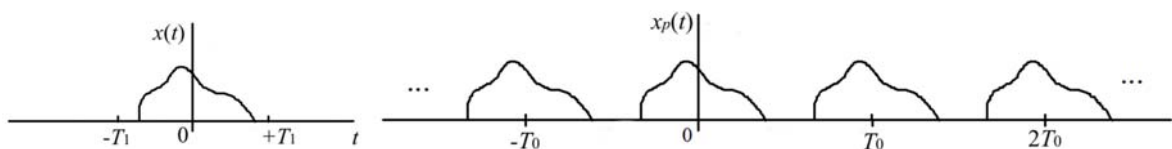
Portanto,

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn2\pi f_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nf_0) e^{jn2\pi f_0 t}$$

Como $f_0 = 1/T_0$, resulta:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nf_0) e^{jn2\pi f_0 t} f_0 \quad \leftarrow$$

(continua...)



$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nf_0) e^{jn2\pi f_0 t} f_0 \quad X(nf_0) = T_0 c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

Fazendo $T_0 \rightarrow \infty$, pode-se considerar que:

- a) $x_p(t)$ tende a $x(t)$;
- b) nf_0 tende a f ;
- c) $f_0 = 1/T_0$ tende ao diferencial df ;
- d) o somatório tende à integral.

Portanto, a equação para $x_p(t)$ conduz a:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad \dots \text{equação de } \textbf{análise} \text{ da transformada de Fourier}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \dots \text{equação de } \textbf{síntese} \text{ da transformada de Fourier}$$