FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

UNESP

PROJETO

TEIA DO SABER

DEZEMBRO/04

TEMA:

ÁREAS E VOLUMES

ASSUNTO: AREAS E VOLUMES

COMPONENTES DO GRUPO:

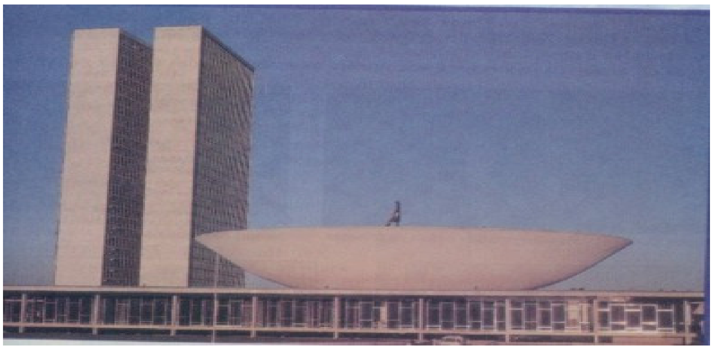
- *Cássia Inês da Silva Moreira dos Santos*
- *Edina Maria dos Santos Brito*
- *Nilce Batista Faria de Queiroz*
- *Vera Lucia Bombardi*
- *Viviane Jara Benedeti*
- *Marina Oliveira Tanaka (Estagiária)*

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho destina-se a subsidiar a ação docente, estabelecendo conteúdo sobre áreas e volumes do paralelepípedo reto retângulo, com a seguinte estrutura:

- Historia da Geometria;
- Áreas e Volumes;
- Exemplos de Aplicação - Relações do tema com conhecimentos de outras áreas;
- Sugestões de Abordagem do Tema em Sala de Aula;
- Outros tipos de Abordagens em Sala de Aula;
- Conclusão;
- Bibliografia.



2. HISTÓRIA DA GEOMETRIA

Uma estranha construção feita pelos antigos persas para estudar o movimento dos astros. Um compasso antigo. Um vetusto esquadro e, sob ele, a demonstração figurada do teorema de Pitágoras. Um papiro com desenhos geométricos e o busto do grande Euclides. São etapas fundamentais no desenvolvimento da Geometria. Mas, muito antes da compilação dos conhecimentos existentes, os homens criavam, ao sabor da experiência, as bases da Geometria. E realizavam operações mentais que depois seriam concretizadas nas figuras geométricas.

2.1. Uma medida para a vida

As origens da Geometria (do grego *medir a terra*) parecem coincidir com as necessidades do dia-a-dia. Partilhar terras férteis às margens dos rios, construir casas, observar e prever os movimentos dos astros, são algumas das muitas atividades humanas que sempre dependeram de operações geométricas. Documentos sobre as antigas civilizações egípcia e babilônica comprovam bons conhecimentos do assunto, geralmente ligados à astrologia. Na Grécia, porém, é que o gênio de grandes matemáticos lhes deu forma definitiva. Dos gregos anteriores a Euclides, Arquimedes e Apolônio, consta apenas o fragmento de um trabalho de Hipócrates. E o resumo feito por Proclo ao comentar os "Elementos" de Euclides, obra que data do século V a.C., refere-se a Tales de Mileto como o introdutor da Geometria na Grécia, por importação do Egito.

Pitágoras deu nome a um importante teorema sobre o triângulo-retângulo, que inaugurou um novo conceito de demonstração matemática. Mas enquanto a escola pitagórica do século VI a.C. constituía uma espécie de seita filosófica, que envolvia em mistério seus conhecimentos, os "Elementos" de Euclides representam a introdução de um método consistente que contribui há mais de vinte séculos para o progresso das ciências. Trata-se do sistema axiomático, que parte dos conceitos e proposições admitidos sem demonstração (postulados o axiomas) para construir de maneira lógica tudo o mais. Assim, três conceitos fundamentais - o ponto, a reta e o círculo - e cinco postulados a eles referentes servem de base para toda Geometria chamada euclidiana, útil até hoje, apesar da existência de geometrias não-euclidianas baseadas em postulados diferentes (e contraditórios) dos de Euclides.

2.2. O corpo como unidade

As primeiras unidades de medida referiam-se direta ou indiretamente ao corpo humano: palmo, pé, passo, braça, cúbito. Por volta de 3500 a.C. - quando na Mesopotâmia e no Egito começaram a ser construídos os primeiros templos - seus projetistas tiveram de encontrar unidades mais uniformes e precisas. Adotaram a longitude das partes do corpo de um único homem (geralmente o rei) e com essas medidas construíram réguas de madeira e metal, ou cordas com nós, que foram as primeiras medidas oficiais de comprimento.

2.3. Ângulos e figuras

Tanto entre os sumérios como entre os egípcios, os campos primitivos tinham forma retangular. Também os edifícios possuíam plantas regulares, o que obrigava os arquitetos a construírem muitos ângulos retos (de 90º). Embora de bagagem intelectual reduzida, aqueles homens já resolviam o problema como um desenhista de hoje. Por meio de duas estacas cravadas na terra assinalavam um segmento de reta. Em seguida prendiam e esticavam cordas que funcionavam à maneira de compassos: dois arcos de circunferência se cortam e determinam dois pontos que, unidos, secionam perpendicularmente a outra reta, formando os ângulos retos.

O problema mais comum para um construtor é traçar, por um ponto dado, a perpendicular a uma reta. O processo anterior não resolve este problema, em que o vértice do ângulo reto já está determinado de antemão. Os antigos geômetras, o solucionavam por meio de três cordas, colocadas de modo a formar os lados de um triângulo-retângulo. Essas cordas tinham comprimentos equivalentes a 3, 4 e 5 unidades respectivamente. O teorema de Pitágoras explica porque: em todo triângulo-retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto). E $3^2+4^2=5^2$, isto é, 9+16=25.

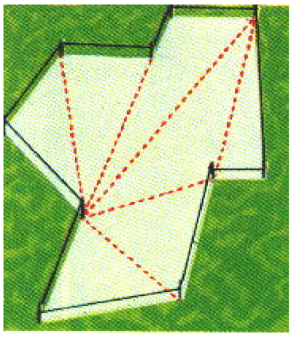
Qualquer trio de números inteiros ou não que respeitem tal relação definem triângulos-retângulos, que já na antiguidade foram padronizados na forma de *esquadros*.

2.4. Para medir superfícies

Os sacerdotes encarregados de arrecadar os impostos sobre a terra provavelmente começaram a calcular a extensão dos campos por meio de um simples golpe de vista. Certo dia, ao observar trabalhadores pavimentando com mosaicos quadrados uma superfície retangular, algum sacerdote deve ter notado que, para conhecer o total de mosaicos, bastava contar os de uma fileira e repetir esse número tantas vezes quantas fileiras houvesse. Assim nasceu a fórmula da área do retângulo: multiplicar a base pela altura.

Já para descobrir a área do triângulo, os antigos fiscais seguiram um raciocínio extremamente geométrico. Para acompanhá-lo, basta tomar um quadrado ou um retângulo e dividí-lo em quadradinhos iguais. Suponhamos que o quadrado tenha 9 "casas" e o retângulo 12. Esses números exprimem então a área dessas figuras. Cortando o quadrado em duas partes iguais, segundo a linha diagonal, aparecem dois triângulos iguais, cuja área, naturalmente, é a metade da área do quadrado.

Quando deparavam com uma superfície irregular da terra (nem quadrada, nem triangular), os primeiros cartógrafos e agrimensores apelavam para o artifício conhecido como *triangulação*: começando num ângulo qualquer, traçavam linhas a todos os demais ângulos visíveis do campo, e assim este ficava completamente dividido em porções triangulares, cujas áreas somadas davam a área total. Esse método - em uso até hoje - produzia pequenos erros, quando o terreno não era plano ou possuía bordos curvos.



De fato, muitos terrenos seguem o contorno de um morro ou o curso de um rio. E construções há que requerem uma parede curva. Assim, um novo problema se apresenta: como determinar o comprimento de uma circunferência e a área de um círculo. Por circunferência entende-se a linha da periferia do círculo, sendo este uma superfície. Já os antigos geômetras observavam que, para demarcar círculos, grandes ou pequenos, era necessário usar uma corda, longa ou curta, e girá-la em torno de um ponto fixo, que era a estaca cravada no solo como centro da figura. O comprimento dessa corda - conhecido hoje como *raio* - tinha algo a ver com o comprimento da circunferência. Retirando a corda da estaca e colocando-a sobre a circunferência para ver quantas vezes cabia nela, puderam comprovar que cabia um pouco mais de seis vezes e um quarto. Qualquer que fosse o tamanho da corda, o resultado era o mesmo. Assim tiraram algumas conclusões: a) o comprimento de uma circunferência é sempre cerca de 6,28 vezes maior que o de seu raio; b) para conhecer o comprimento de uma circunferência, basta averiguar o comprimento do raio e multiplicá-lo por 6,28.

E a área do círculo? A história da Geometria explica-a de modo simples e interessante. Cerca de 2000 anos a.C., um escriba egípcio chamado Ahmes matutava diante do desenho de um círculo no qual havia traçado o respectivo raio. Seu propósito era encontrar a área da figura.

Conta a tradição que Ahmes solucionou o problema facilmente: antes, pensou em determinar a área de um quadrado e calcular quantas vezes essa área caberia na área do círculo. Que quadrado escolher? Um qualquer? Parecia razoável tomar o que tivesse como lado o próprio raio da figura. Assim fez, e comprovou que o quadrado estava contido no círculo mais de 3 vezes e menos de 4, ou aproximadamente, três vezes e um sétimo (atualmente dizemos 3,14 vezes). Concluiu então que, para saber a área de um círculo, basta calcular a área de um quadrado construído sobre o raio e multiplicar a respectiva área por 3,14.

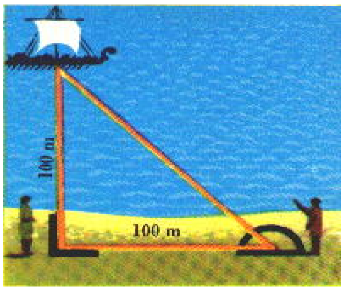
O número 3,14 é básico na Geometria e na Matemática. Os gregos tornaram-no um pouco menos inexato: 3,1416. Hoje, o símbolo p ("pi") representa esse número irracional, já determinado com uma aproximação de várias dezenas de casas decimais. Seu nome só tem uns duzentos anos e foi tirado da primeira sílaba da palavra *peripheria*, significando circunferência.

2.5. Novas figuras

Por volta de 500 a.C., as primeiras universidades eram fundadas na Grécia. Tales e seu discípulo Pitágoras coligiram todo o conhecimento do Egito, da Etrúria, da Babilônia, e mesmo da Índia, para desenvolvê-los e aplicá-los à matemática, navegação e religião. A curiosidade crescia e os livros sobre Geometria eram muito procurados. Um compasso logo substituiu a corda e a estaca para traçar círculos, e o novo instrumento foi incorporado ao arsenal dos geômetras. O conhecimento do Universo aumentava com rapidez e a escola pitagórica chegou a afirmar que a Terra era esférica, e não plana. Surgiam novas construções geométricas, e suas áreas e perímetros eram agora fáceis de calcular.

Uma dessas figuras foi chamada *polígono*, do grego *polygon*, que significa "muitos ângulos". Atualmente até rotas de navios e aviões são traçadas por intermédio de avançados métodos de Geometria, incorporados ao equipamento de radar e outros aparelhos. O que não é de estranhar"desde os tempos da antiga Grécia, a Geometria sempre foi uma ciência aplicada, ou seja, empregada para resolver problemas práticos. Dos problemas que os gregos conseguiram solucionar, dois merecem referência: o cálculo da distância de um objeto a um observador e o cálculo da altura de uma construção.

No primeiro caso, para calcular, por exemplo, a distância de um barco até a costa, recorria-se a um curioso artifício. Dois observadores se postavam de maneira que um deles pudesse ver o barco sob um ângulo de 90º com relação à linha da costa e o outro sob um ângulo de 45º. Isto feito, a nave e os dois observadores ficavam exatamente nos vértices de um triângulo isósceles, porque os dois ângulos agudos mediam 45º cada um, e portanto os catetos eram iguais. Bastava medir a distância entre os dois observadores para conhecer a distância do barco até a costa.



O cálculo da altura de uma construção, de um monumento ou de uma árvore é também muito simples: crava-se verticalmente uma estaca na terra e espera-se o instante em que a extensão de sua sombra seja igual à sua altura. O triângulo formado pela estaca, sua sombra e a linha que une os extremos de ambos é isósceles. Basta medir a sombra para conhecer a altura.

2.6. História das Áreas

"Há muitos anos atrás no Egito, existia um rei chamado Sisóstris que repartiu o Egito em pedaços retangulares de terra entre a população egípcia.

E cada pessoa que recebia seu pedaço de terra, pagava um imposto ao rei por ano.

Lá no Egito havia um rio, o Ro Nilo, que todos os anos inundava as terras apagando as marcas que limitavam os terrenos. E aí o dono do terreno reclamava com o rei, e este mandava que demarcasse novamente o terreno.

Daí surgiu a necessidade de calcular quanto media aqueles terrenos. Mas como antigamente os egípcios não conheciam as medidas que nós conhecemos, como o metro, o quilômetro... eles inventaram sua própria medida.

Os agricultores egípcios foram os primeiros a calcular essa medida. Eles mediam o terreno pela quantidade de arroz ou cevada plantada. Quem plantava mais tinha o terreno maior e quem plantava menos tinha o terreno menor. Imaginem só como devia ser trabalhoso contar grãos de arroz.

Mas, com o passar do tempo, os egípcios que já construíam os seus templos, suas pirâmides e casas, perceberam que o ladrilho poderia substituir os grãos na hora de medir o tamanho do terreno, o que facilitaria, e muito, a contagem.

Então eles passaram a medir o terreno, repartindo o quadradinho da mesma medida e contando esses quadradinhos.

Por exemplo, observe a figura abaixo:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18

A medida deste terreno é 18.

A essa medida, chamaremos área."

CURIOSIDADE

Medida Cúbito

O sistema métrico surgiu por volta do ano de 1790. Os egípcios usavam como unidade de medida o cúbito. Essa medida foi definida originalmente (2000 anos A.C.) como a distância do cotovelo até a ponta do dedo do Faraó.

O Cúbito egípcio a cerca de meio metro aproximadamente.

3. VOLUMES E ÁREAS

Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa "quantidade de espaço" através de um número, devemos compará-la com uma unidade; e o resultado dessa comparação será chamado de **volume**.

Por exemplo, podemos medir o volume de uma panela tomando como unidade uma xícara. Enchendo a xícara de água e vertendo na panela sucessivas vezes até que esta fique completamente cheia, estamos realizando uma medida de volume. É possível que o resultado dessa comparação seja um número inteiro- digamos: 1panela = 24 xícaras- mas é muito provável que na última operação sobre ainda um pouco de água na xícara. E como determinaremos essa fração?

O exemplo mostra que esse processo pode ter alguma utilidade em casos simples onde se necessita apenas de um valor aproximado para o volume, mas não funciona, mesmo na prática, para inúmeros objetos. Ou porque são muito pequenos, ou porque são grandes demais, ou simplesmente porque são completamente sólidos. Ainda, a unidade xícara, que é inclusive muito utilizada nas receitas da boa cozinha, não é naturalmente adequada a um estudo mais geral.

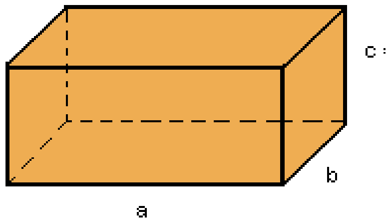
Quando queremos medir o volume de um sólido devemos compará-lo com outro volume tomado como unidade, e para volume unitário podemos usar o volume de um cubo de aresta 1 u. Esse volume unitário é $1\ u^3$ e o resultado dessa comparação é um número chamado **medida do volume**, o qual indica quantas vezes o volume unitário “cabe” no volume a ser determinado.

a unidade de volume é o cubo de aresta 1

Para cada unidade de comprimento, temos uma unidade correspondente de volume. Se, por exemplo, a unidade de comprimento for o centímetro (cm), então a unidade correspondente de volume será chamada de centímetro cúbico (cm^3). Assim, o volume de um sólido S deve ser o número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Mas, como esse sólido pode ter uma forma bastante irregular, não fica claro o que significa o número de vezes que um sólido contém esse cubo. Vamos então tratar de obter métodos que nos permitam obter fórmulas para o cálculo dos sólidos simples.

3.1. O Paralelepípedo Retângulo

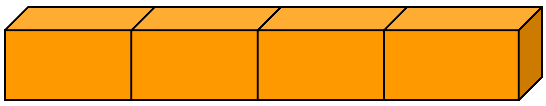
O paralelepípedo retângulo (ou simplesmente um bloco retangular) é formado por 6 retângulos. Ele fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c).



Paralelepípedo retângulo.

O volume desse paralelepípedo retângulo será representado por V (a.b.c) e como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo cujos comprimento, largura e a altura medem 1, então V (1,1,1) = 1.

Para obter o volume do paralelepípedo retângulo, devemos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isto quer dizer que se mantivermos, por exemplo, constantes a largura e se multiplicarmos o comprimento por um número natural n, o volume ficará também multiplicado por n, ou seja, V (na,b,c) = n V (a,b,c)



A figura acima mostra 4 paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, colados em faces iguais. Naturalmente, o volume total é 4 vezes maior que o volume de um deles.

Este fato, constatado para números naturais, também vale para qualquer número real positivo (veja Notas 1 e 2 no fim desta seção) e isto quer dizer que, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Logo, sendo a, b, c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$
\begin{aligned}
V(a,b,c) &= V(a.1,b,c) \\
&= aV(1.b.c) \quad = aV\ (1,b.1,c) \\
&= abV(1,1,c) = abV\ (1,1,c.1) = abcV\ (1,1,1) \\
&= abc.1 \\
&= abc
\end{aligned}
$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Em particular, se a face de dimensões a e b está contida em um plano horizontal, chamaremos essa face de *base* e a dimensão c de *altura.* Como produto ab é área da base, é costume dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

Volume do paralelepípedo = (área da base) x (altura).

Nota 1. Utilizamos aqui um fato completamente intuitivo (mas que na verdade é um axioma) que é o seguinte. Se dois sólidos são tais que possuem em comum, no máximo pontos de suas cascas, então o volume da união de dois é a soma dos volumes de cada um.

Para explicar melhor, dizemos que um ponto P é interior a um sólido S quando existe uma esfera de centro P inteiramente contida em S. Quando P pertence a S mas não existe tal esfera, dizemos que P está na casca de S (ou na superfície de S). Isto é o que nos permite usar termos como "justapor" ou "colar" dois sólidos. Ainda, permite dizer que se um sólido está dividido em vários outros, então seu volume é a soma dos volumes de suas partes.

Nota 2. O conceito de proporcionalidade é extremamente importante na Matemática elementar. Em particular na geometria, existem ocasiões em que certos resultados são facilmente verificados quando as medidas são números naturais (ou mesmo racionais), mas o que se torna um problema é estender esses mesmos resultados para números reais. O que resolve essa constrangedora situação é o teorema fundamental da proporcionalidade, que diz o seguinte:

Teorema. Sejam x e y grandezas positivas. Se x e y estão relacionadas por uma função crescente f tal que para todo natural n, f(nx) = nf(x), então para todo real r, tem-se que f(rx) = rf(x).

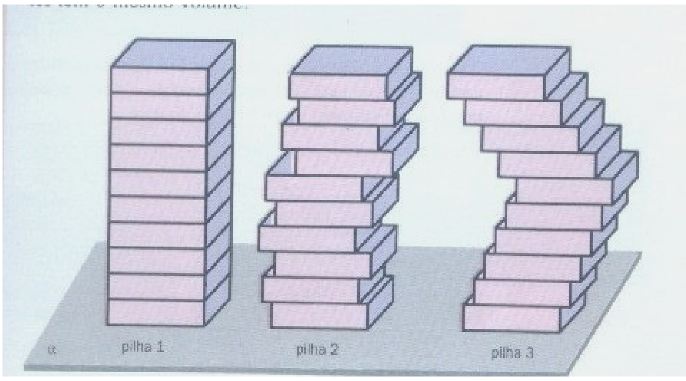
Em palavras mais simples, dizemos que duas grandezas positivas x e y são proporcionais quando, se a primeira for multiplicada por um número natural n, então a segunda fica também multiplicada por n. Esse teorema nos garante que, neste caso, se a primeira grandeza for multiplicada por um número real r, a segunda grandeza também fica multiplicada por r. A demonstração deste belo teorema pode ser encontrada no livro "Meu Professor de Matemática" de Elon Lages Lima na página 127.

Não estamos aqui estimulando o professor do segundo grau que faça essa demonstração em sala de aula. Muito pelo contrário. Estamos dizendo que se o professor der, para os estudantes do segundo grau, alguma justificativa de um importante resultado utilizando números naturais, ou mesmo racionais, esse procedimento não é um erro, deve ser feito dessa forma, e estará sendo adequado ao nível de desenvolvimento dos seus alunos. Por outro lado, o professor ficará consciente que, mesmo não podendo fazer a demonstração completa, estará fornecendo argumentos corretos, e deixando a generalização para um estágio posterior.

3.2. O Princípio de Cavalieri

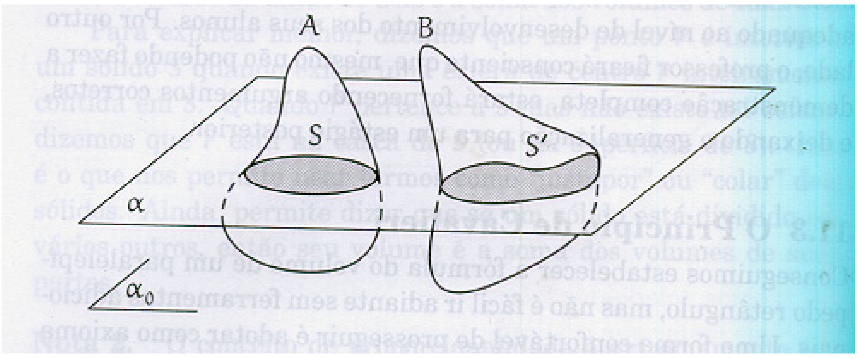
Conseguimos estabelecer a fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo, mas não é fácil ir adiante sem ferramentas adicionais. Uma forma confortável de prosseguir é adotar como axioma um resultado conhecido como o Princípio de Cavalieri.

Antes de enunciá-lo, observe uma experiência que se pode fazer para os alunos. Ponha em cima da mesa, uma resma de papel. Estando ainda perfeitamente bem arrumada, ela é um paralelepípedo retângulo (pilha de papel 1) e, portanto, tem um volume que podemos calcular. Encostando uma régua nas faces laterais podemos transformar o paralelepípedo retângulo em um outro oblíquo (pilha de papel 2) ou, usando as mãos, poderemos moldar um sólido bem diferente (pilha de papel 3).



Pilhas de papel.

Sabemos que esses três sólidos têm volumes iguais mas ainda nos faltam argumentos para explicar esse fato que intuitivamente percebemos. De uma forma mais geral, suponha que dois sólidos a e b estão apoiados em um plano horizontal e que qualquer outro plano também horizontal corte ambos segundo seções de mesma área. O Princípio de Cavalieri afirma que o volume de A é igual ao volume de B.



Se imaginarmos os dois sólidos fatiados no mesmo número de fatias muito finas, todas com mesma altura, duas fatias correspondentes com mesma área terão, aproximadamente, mesmo volume. Tanto mais aproximadamente quanto mais finas forem. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes de suas fatias, concluímos que os dois sólidos têm volumes iguais. Repare ainda que o exemplo da resma de papel mostra um caso particular desse argumento, onde os três sólidos possuem, cada um, quinhentas fatias, todas iguais.

É claro que os exemplos acima não constituem uma demonstração do Princípio de Cavalieri, mas dão uma forte indicação que ele é verdadeiro. Podemos então aceitar o axioma seguinte:

Axioma (Princípio de Cavalieri)

São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.

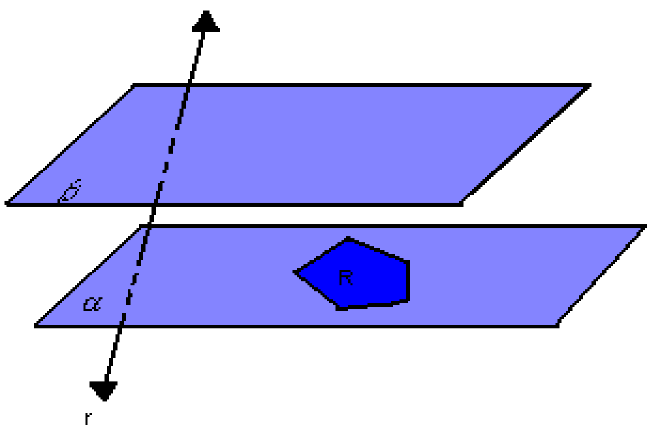
Esta é a ferramenta que vamos utilizar para encontrar os volumes dos demais sólidos simples.

Nota 3. No ensino da Geometria existem alguns resultados que não podemos demonstrar de forma satisfatória e que, naturalmente, causam incômodo ao professor. Os principais são os seguintes: o Teorema de Tales (das paralelas), área do quadrado, o volume do paralelepípedo e o Princípio de Cavalieri. Para os três primeiros temas, o professor poderá oferecer uma demonstração parcial utilizando números naturais (ou mesmo racionais) que deve satisfazer a maioria dos alunos. Essa atitude não é condenada, muito pelo contrário. O professor estará justificando importantes resultados de acordo com o nível de desenvolvimento dos seus alunos, mas saberá que o resultado geral estará garantido pelo

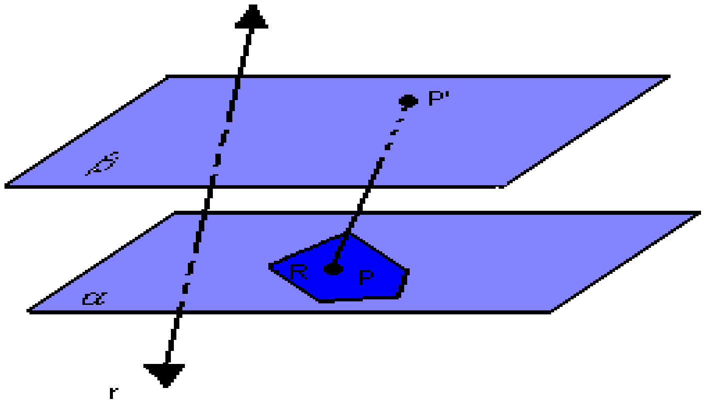
Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Existem outras opções e uma delas é adotar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (um fato que poderá ser demonstrado mais tarde) a partir dele, demonstrar a área do retângulo, do triângulo e daí o Teorema de Tales. Para esse caminho, o leitor poderá consultar o artigo "Usando Áreas" na RPM número 21, pág.19 . Foi esse o caminho que utilizamos aqui para obter o volume do paralelepípedo e não há dúvida que esse procedimento satisfaz a nossa necessidade imediata, mas transfere a dificuldade para outro lugar. Não tem jeito. Existem obstáculos no percurso do ensino da geometria e o professor, consciente das dificuldades, deverá optar pelo rumo a tomar. No caso do Princípio de Cavalieri a situação é diferente. A sua demonstração envolve conceitos avançados de Teoria da Medida e, portanto só podemos oferecer aos alunos alguns exemplos. Mas, cremos que esses exemplos sejam suficientes para que possamos adotar sem traumas o Princípio de Cavalieri como axioma.

3.3. Prismas

Na figura abaixo, temos dois planos paralelos e distintos, α e β, um polígono convexo **R** contido em α e uma reta **r** que intercepta α e β, mas não **R**:

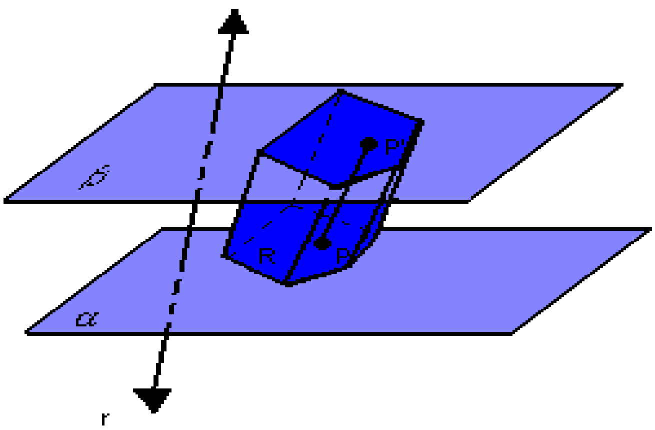


Para cada ponto **P** da região **R**, vamos considerar o segmento $\overline{PP'}$, paralelo à reta **r** $(P' \in \beta)$:



Para cada ponto **P** da região **R**, vamos considerar o segmento $\overline{PP'}$, paralelo à reta **r** $(P' \in \beta)$:

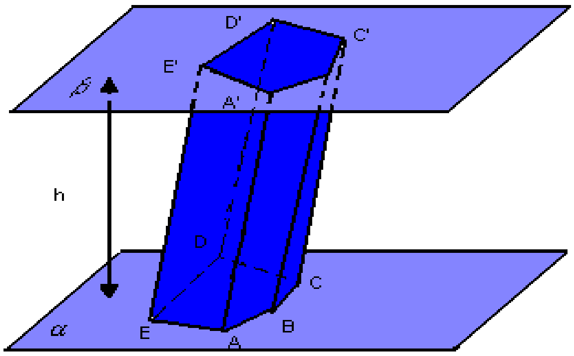
Assim, temos:



Chamamos de prisma ou prisma limitado o conjunto de todos os segmentos congruentes $\overline{PP'}$ paralelos a **r**.

3.3.1. Elementos do prisma

Dados o prisma a seguir, consideramos os seguintes elementos:



Dados o prisma a seguir, consideramos os seguintes elementos:

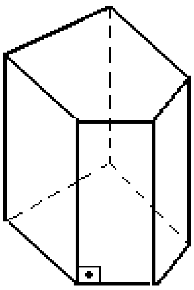
- bases:as regiões poligonais **R** e **S**
- altura:a distância **h** entre os planos α e β
- arestas das bases:os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'E'}, \overline{E'A'}$ (dos polígonos)
- arestas laterais:os segmentos $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}, \overline{EE'}$
- faces laterais: os paralelogramos AA'BB', BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, EE'A'A

3.3.2. Classificação

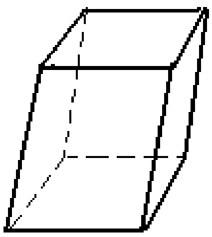
Um prisma pode ser:

- reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases;
- oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

Veja:

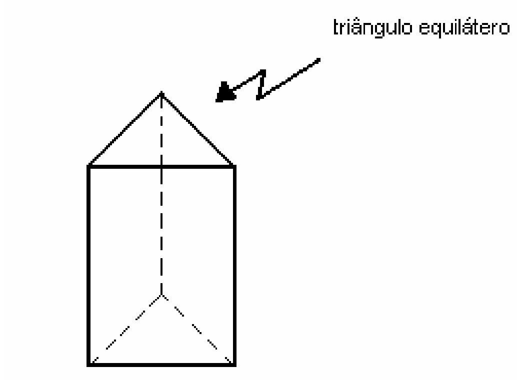


prisma reto

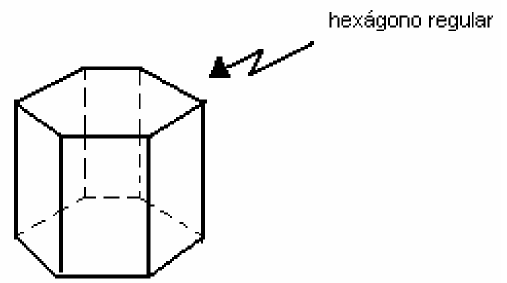


prisma oblíquo

Chamamos de prisma regular todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares:



prisma regular triangular



prisma regular hexagonal

Observação: As faces de um prisma regular são retângulos congruentes.

3.3.3. Secção

Um plano que intercepte todas as arestas de um prisma determina nele uma região chamada secção do prisma.

Secção transversal é uma região determinada pela intersecção do prisma com um plano paralelo aos planos das bases (figura 1). Todas as secções transversais são congruentes (figura 2).

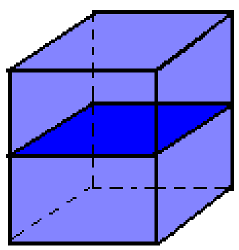


figura 1

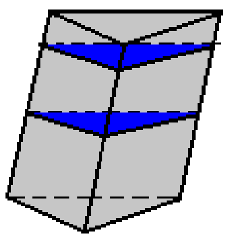


figura 2

3.3.4. Áreas

Num prisma, distinguimos dois tipos de superfície: as faces e as bases. Assim, temos de considerar as seguintes áreas:

a) área de uma face (**A_F**):área de um dos paralelogramos que constituem as faces;

b) área lateral (**A_L**):soma das áreas dos paralelogramos que formam as faces do prisma.

No prisma regular, temos:

$A_L = n \cdot A_F$ (n = número de lados do polígono da base)

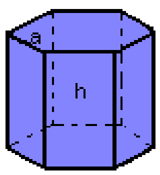
c) área da base (**A_B**): área de um dos polígonos das bases;

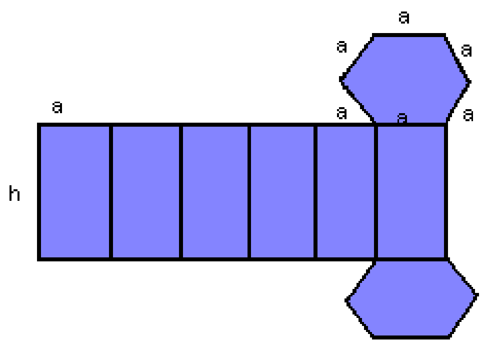
d) área total (**A_T**): soma da área lateral com a área das bases

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Vejamos um exemplo.

Dado um prisma hexagonal regular de aresta da base **a** e aresta lateral **h**, temos:





$$A_F = ah$$

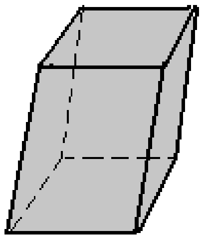
$$A_L = 6ah$$

$$A_B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{(área do hexágono regular)}$$

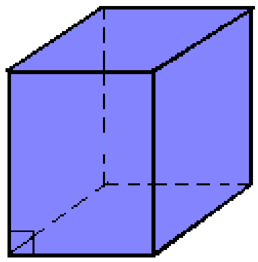
3.4. Paralelepípedo

Todo prisma cujas bases são paralelogramos recebe o nome de paralelepípedo.Assim, podemos ter:

a) paralelepípedo oblíquo



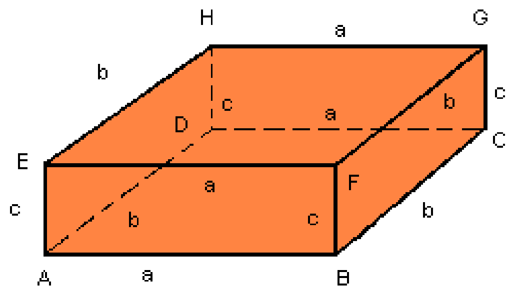
b) paralelepípedo reto



Se o paralelepípedo reto tem bases retangulares, ele é chamado de paralelepípedo *reto-retângulo, ortoedro ou paralelepípedo retângulo.*

3.4.1. Paralelepípedo retângulo

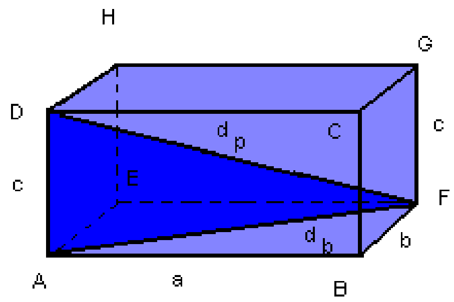
Seja o paralelepípedo retângulo de dimensões **a**, **b** e **c** da figura:



Temos quatro arestas de medida **a**, quatro arestas de medida **b** e quatro arestas de medida **c**; as arestas indicadas pela mesma letra são paralelas.

3.4.2. Diagonais da base e do paralelepípedo

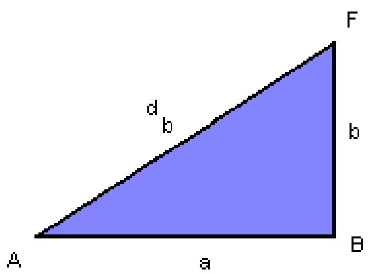
Considere a figura a seguir:



d_b = diagonal da base

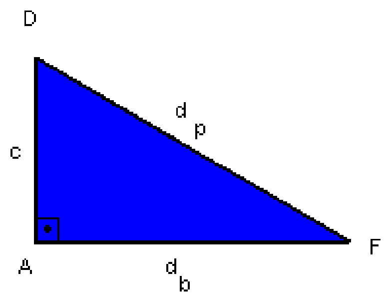
d_p = diagonal do paralelepípedo

Na base ABFE, temos:



$$d_b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

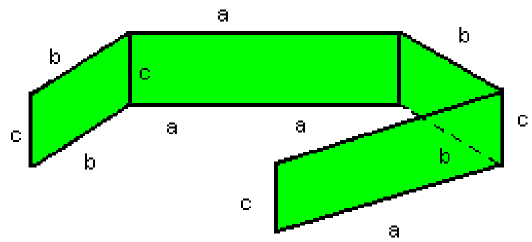
No triângulo AFD, temos:



$$d_p^2 = d_b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

3.4.3. Área lateral

Sendo $\mathbf{A_L}$ a área lateral de um paralelepípedo retângulo, temos:



$$A_L = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = A_L = 2(ac + bc)$$

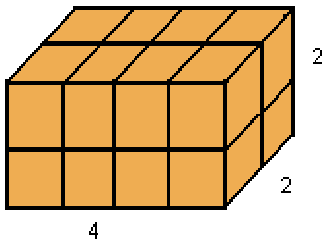
3.4.4. Área total

Planificando o paralelepípedo, verificamos que a área total é a soma das áreas de cada par de faces opostas:

$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

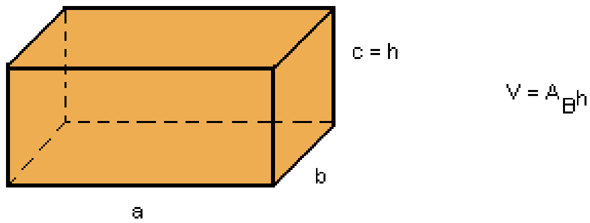
3.4.5. Volume

Por definição, unidade de volume é um cubo de aresta 1. Assim, considerando um paralelepípedo de dimensões 4, 2 e 2, podemos decompô-lo em 4.2.2 cubos de aresta 1:



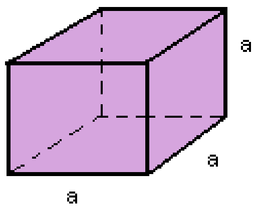
Então, o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões **a**, **b** e **c** é dado por: **V = abc**

Como o produto de duas dimensões resulta sempre na área de uma face e como qualquer face pode ser considerada como base, podemos dizer que o volume do paralelepípedo retângulo é o produto da área da base $\mathbf{A_B}$ pela medida da altura **h:**



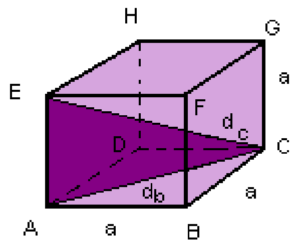
3.5. Cubo

Um paralelepípedo retângulo com todas as arestas congruentes (a= b = c) recebe o nome de cubo. Dessa forma, as seis faces são quadrados.



3.5.1. Diagonais da base e do cubo

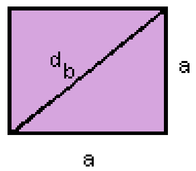
Considere a figura a seguir:



d_c=diagonal do cubo

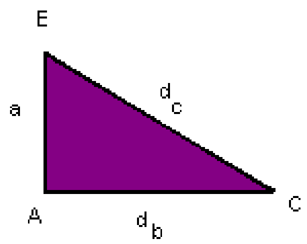
d_b = diagonal da base

Na base ABCD, temos:



$$d_b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d_b = a\sqrt{2}$$

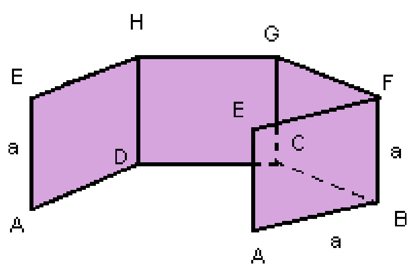
No triângulo ACE, temos:



$$d_c^2 = a^2 + d_b^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow d_c = a\sqrt{3}$$

3.5.2. Área lateral

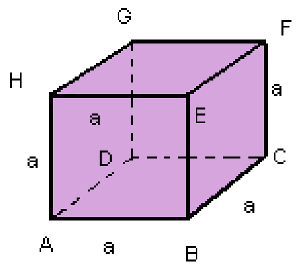
A área lateral $\mathbf{A_L}$ é dada pela área dos quadrados de lado **a**:



$A_L=4a^2$

3.5.3. Área total

A área total A_T é dada pela área dos seis quadrados de lado **a**:



$$A_T = 6a^2$$

3.5.4. Volume

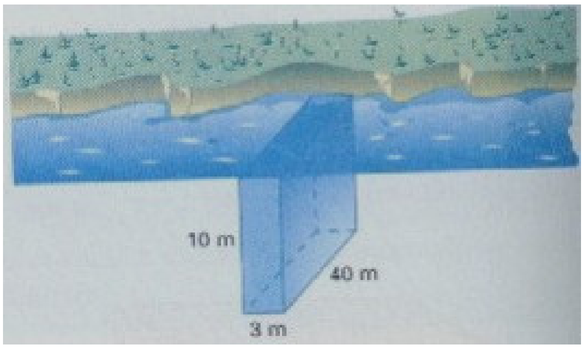
De forma semelhante ao paralelepípedo retângulo, o volume de um cubo de aresta **a** é dado por:

$$V = a \,.\, a \,.\, a = a^3$$

4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO – RELAÇÕES DO TEMA COM CONHECIMENTO DE OUTRAS ÁREAS

4. 1. Cálculo da vazão de um rio

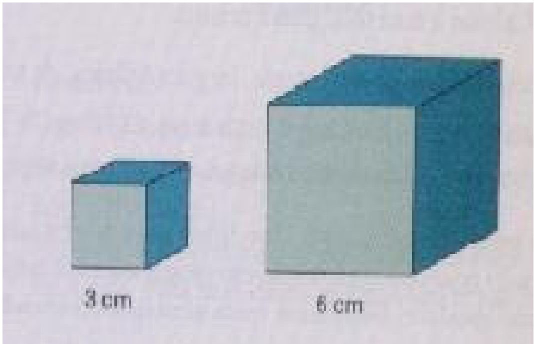
Para o cálculo da vazão de um rio em um trecho de margens paralelas, calcula-se a velocidade da correnteza e admite-se o trecho como um paralelepípedo. Vamos supor que a velocidade da correnteza seja 3 m/s e que o paralelepípedo tenha dimensões 3 m por 40 m por 10 m, conforme a figura abaixo:



Imagine uma torneira "gigante", com a mesma vazão do rio, despejando água num paralelepípedo com essas dimensões, até então vazio. O paralelepípedo ficaria completamente cheio de água em um segundo. Como o volume do paralelepípedo é 1.200 m^3 e cada m^3 equivale a 1.000 litros, tem-se que a vazão do rio é 1.200.000 l/s.

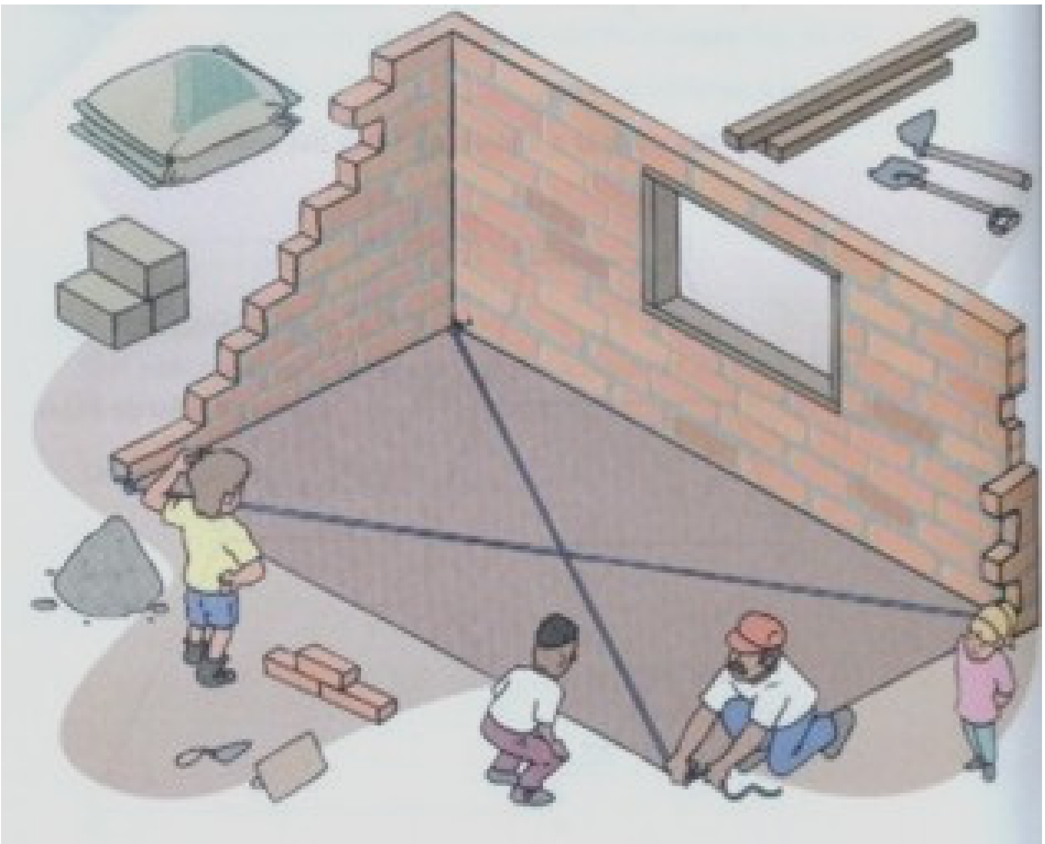
4.2. Por que um bebê sente mais frio que um adulto?

O estudo de áreas e volumes nos ajuda a explicar algumas situações do dia-a-dia como, por exemplo, por que um bebê sente mais frio que um adulto. Para entender esse fato, pense em dois cubos de ferro maciço, um de aresta 3 cm e o outro de aresta 6 cm, ambos à temperatura 36ºC.

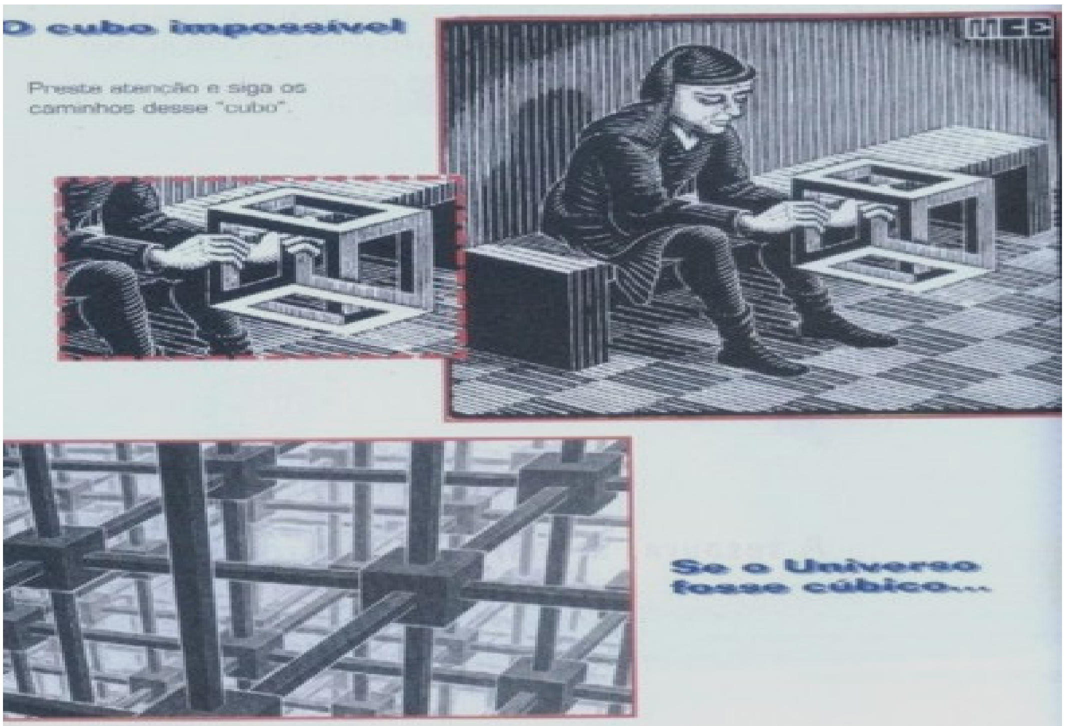


Colocando-os em um ambiente de temperatura mais baixa, o cubo menor perderá calor mais rapidamente que o maior. Na linguagem do cotidiano dizemos que o menor se esfriará mais rapidamente que o maior. Isso ocorre porque a razão da área total para o volume do cubo pequeno, $\frac{6 \cdot 3^2}{3^3} = 2$, é maior que a razão correspondente no cubo grande, $\frac{6 \cdot 6^2}{6^3} = 1$, ou seja, a superfície em contato com o ambiente é relativamente maior no cubo pequeno. O mesmo acontece com um bebê e um adulto. A razão da área para o volume do corpo de um bebê é maior que a razão correspondente em um adulto, por isso a criança tem maior dificuldade em manter o calor de seu corpo e, portanto sente mais frio.

4.3. Construção civil - Engenharia

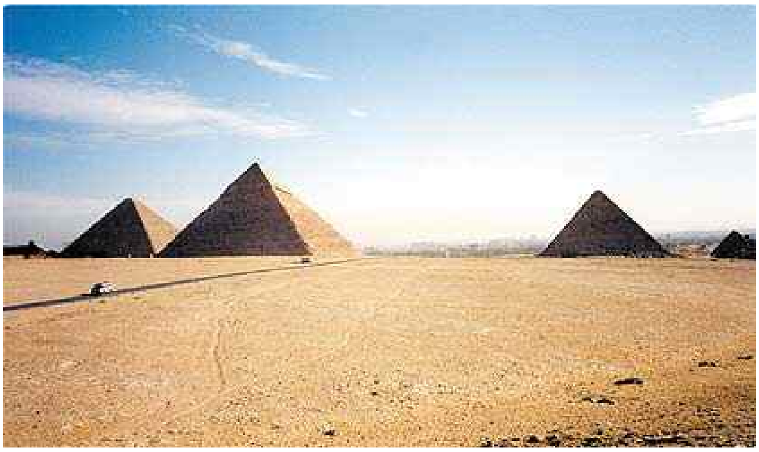


4.4. Arte


O cubo impossível
Preste atenção e siga os caminhos desse "cubo".
Se o Universo fosse cúbico...

4.5. História

“A Escola de Atenas, um afresco do século XV pintado por Rafael e seus discípulos, encontra-se no Museu do Vaticano. Esta obra é uma homenagem à cultura grega, e nela podemos ver em destaque, uma referencia aos matemáticos gregos”.



As pirâmides de Gizé. A partir da esquerda, a Grande Pirâmide de Quéops, a pirâmide de Quéfren, e a pirâmide de Miquerinos

A PIRÂMIDE DE KÉOPS

Conhecida como a Grande Pirâmide ou Primeira Pirâmide de Gizé, esse monumento marca o apogeu da época de tais construções, tanto no que se refere ao tamanho quanto no que se refere à qualidade do trabalho. Tendo uma base que cobre quase 53 mil metros quadrados, esse é, sem dúvida, o monumento mais polêmico de toda a antiguidade egípcia e a única das Sete Maravilhas do Mundo que chegou até nossos dias.

A quantidade de pedra talhada que foi usada para erguer a pirâmide de Kéops não pode ser computada com exatidão, pois o centro de seu interior consiste de um núcleo de rochas cujo tamanho não pode ser determinado com precisão.

A PIRÂMIDE DE KÉFREN

A segunda maior pirâmide do Egito antigo. Sua altura original era de 143 metros, o que a tornava três metros mais baixa que a primeira quando ambas estavam intactas. Hoje ela mede 136 metros e, portanto, é cerca de apenas um metro mais baixa que a Grande Pirâmide em seu estado atual. Cada lado da base mede 215 metros e, portanto, a área que ocupa é de 46 mil e 225 metros quadrados.

A PIRÂMIDE DE MIQUERINOS

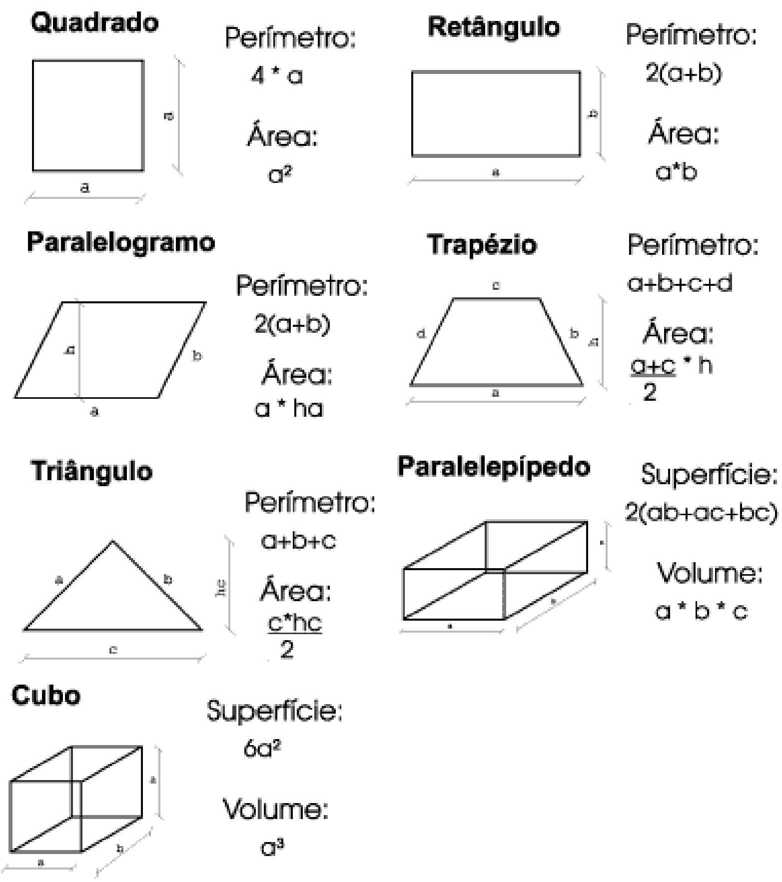
Desde o século I da nossa era que a terceira dentre as mais famosas pirâmides do mundo teve sua construção atribuída a Miquerinos (em egípcio Men-kau-Re), filho de Kéfren e quinto soberano da IV dinastia. Ela ocupa menos de um quarto da área coberta pela Grande Pirâmide, mas mesmo assim seu tamanho é considerável e sua altura atingia mais de 66 metros, o que corresponde a de um prédio de 22 andares.

5. SUGESTÃO DE ABORDAGEM DO TEMA EM SALA DE AULA

A - Formas geométricas: - Reconhecimento, nomenclatura, construção, representação, relações métricas simples.

B – Cubos e paralelepípedos: - caracterização, nomenclatura, construção, utilização da relação de Pitágoras, revisão de cálculo de áreas.

[Revisão de áreas e volumes de figuras]



Com o objetivo de trabalhar detalhadamente o paralelepípedo retângulo, pedir para os alunos trazerem para a sala de aula caixas usadas em embalagens e que acondicionam produtos no comércio. É conveniente que o professor leve várias embalagens das mais variadas formas ou sólidos pré-moldados para este fim (prismas, cones, bancos de pirâmides, pirâmides, cubos, etc.). Inicialmente, os alunos poderão classificar todos esses sólidos geométricos, explicitando os critérios utilizados na composição das classes.

Para continuar a atividade, trabalhar com a classe dos prismas retos de base retangular (paralelepípedos retângulos ou blocos retangulares). O professor deverá encaminhar as discussões no sentido de evidenciar a classe de sólidos necessários para esta atividade. Deverá, também, fazer comentários mais gerais sobre as demais classes de sólidos trazidos para a sala de aula, evidenciando seus aspectos geométricos e deixando para outro momento o estudo detalhado, por exemplo das pirâmides, dos cones, etc.

Manuseando as várias caixas na forma de bloco retangular, os alunos poderão discutir, em pequenos grupos, questões propostas pelo professor, que lhes permitam identificar elementos do paralelepípedo retângulo como: arestas, faces, vértices, ângulos, diedros, polígonos; algumas propriedades métricas como: comprimento de arestas, diagonais, áreas e volumes e propriedades geométricas como: paralelismo, perpendicularismo, ortogonalidade, congruências e semelhanças..

Após o trabalho informal de identificação dos elementos do paralelepípedo, o professor poderá propor um roteiro de atividades para os alunos. Na sugestão de roteiro, apresentado a seguir, há questões que não são muito genéricas, o que dificultaria as ações dos alunos, nem muito dirigidas, o que empobreceria a criatividade e intuição deles.

Nessa interação entre o professor e o aluno, por meio de atividades, é conveniente que: as respostas dos alunos sejam registradas na lousa, os grupos apresentem cartazes, ou relatórios para servirem de documentos úteis, num painel, com a classe toda, coordenada pelo professor.

Sugestões de roteiro:

1) Quantas e quais são as faces do paralelepípedo retângulo?

2) Quantas arestas possuem esta caixa?

3) Quantos vértices possuem esta caixa?

4) Contar o número de arestas e o número de faces que compõem cada vértice.

5) Tentar determinar relações entre o número de vértices, faces e arestas do paralelepípedo retângulo.

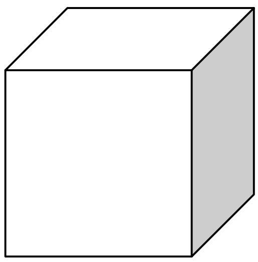
6) Que nomes vocês dariam aos segmentos que ligam dois vértices quaisquer desse prisma?

7) Identificar um triângulo formado por diagonais de faces desse paralelepípedo.

8) Identificar nesse prisma um triângulo formado pela sua diagonal, uma diagonal de face e uma de suas arestas. Esse triângulo é de que tipo?
9) Identifique neste prisma duas arestas paralelas, duas arestas perpendiculares, duas arestas reversas e duas ortogonais.
10) Desenhe uma planificação deste paralelepípedo. Se necessário, desmonte a caixa para esse exercício. È possível fazermos planificações distintas? Quais?
No final, o professor poderá coordenar um painel, para que os vários grupos comparem suas respostas e “as arestas sejam aparadas”.

É muito importante construir sólidos geométricos. Inicialmente, a construção pode ser feita a partir de especificações simples: construir um cubo qualquer ou então construir um cubo de aresta 5 cm.Verificar que quantidade de cubos de aresta de 5 cm cabe dentro de um cubo de aresta 10 cm. Aos poucos, à medida que os conhecimentos sobre relações métricas vão avançando,a construção pode ter uma complexidade maior: construir um cubo de área 720 cm^2, ou de volume 2 l, ou de diagonal 10 cm.
Caso o professor proponha a construção de sólidos geométricos, é conveniente trabalhar a construção, com régua e compasso, dos principais polígonos.

A partir das medidas das três dimensões de um paralelepípedo retângulo pode-se calcular seu volume (medida da sua capacidade) e sua área total (medida da quantidade de material necessário para a sua construção). O conceito de volume poderá ser caracterizado como uma pilha de retângulos idênticos de área conhecida. Assim, o volume será a área desse retângulo multiplicada pela altura do paralelepípedo.



Volume = área retângulo x altura
Área do retângulo = a x b
Altura = c
Volume = a x b x c

Já a área total do paralelepípedo é o somatório das áreas das suas faces que são retângulos, ou seja: Área = 2(ab + bc + ac).
Depois de medir ou calcular a área total e o volume de várias “caixas paralelepípedas”, pode-se propor também a utilização dessas mesmas relações no sentido inverso. A

proposta consta em encontrar paralelepípedos de volume conhecido, por exemplo 400 cm^3. Da mesma forma, procurar paralelepípedos de área total conhecida, por exemplo 600 cm^2. Nestas soluções pode-se ainda preestabelecer alguma das medidas desse prisma reto-retângulo ou não, tendo solução única para este problema ou não.

O professor poderá fazer uma tabela na lousa. Aqui está um exemplo (medidas em centímetros):

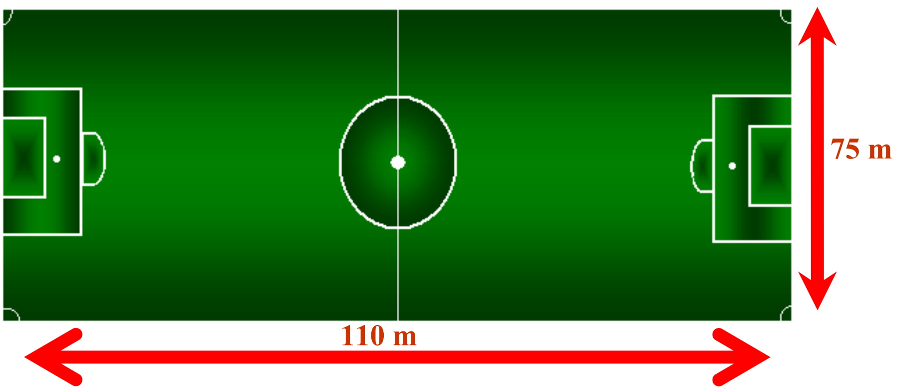
A	b	c	Área	Volume
10	8	5		400
20	4	5		400
2	20	10		400
10	10	4		400
10	15	6	600	
10	8	90/11	600	
8	12	10,2	600	
6	14	10,8	600	
10	10	10	600	

Com esses cálculos, o professor poderá concluir com os alunos, que prismas de mesmo volume tem áreas totais diferentes e vice-versa.

5.1. Área, perímetro, diagonal do campo de futebol e tamanho do gol

- Calculando a área do campo de futebol

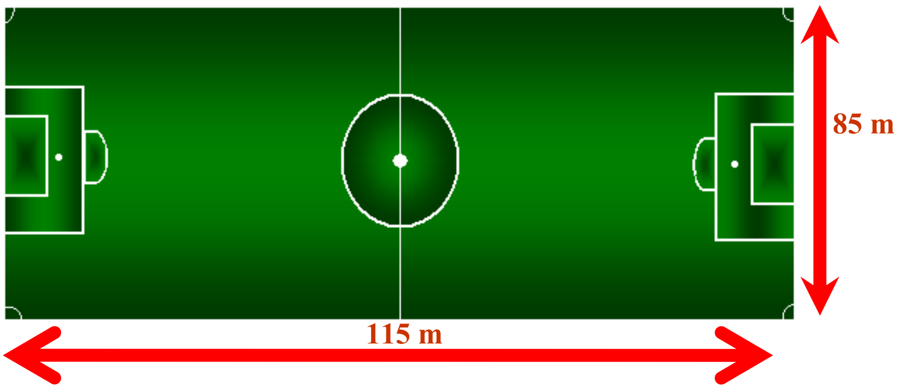
Sabendo que as dimensões de um campo de futebol são 110 m x 75 m calcule sua área.



Área = Base x Altura (A= b.h)
Medida do campo = 110m x 75m
A = 110 . 75
A = 8250 m²
O campo possui 8.250 m².

- Calculando o perímetro do campo de futebol

Um campo de futebol tem 115 m de comprimento e 85m de largura qual o seu perímetro ?

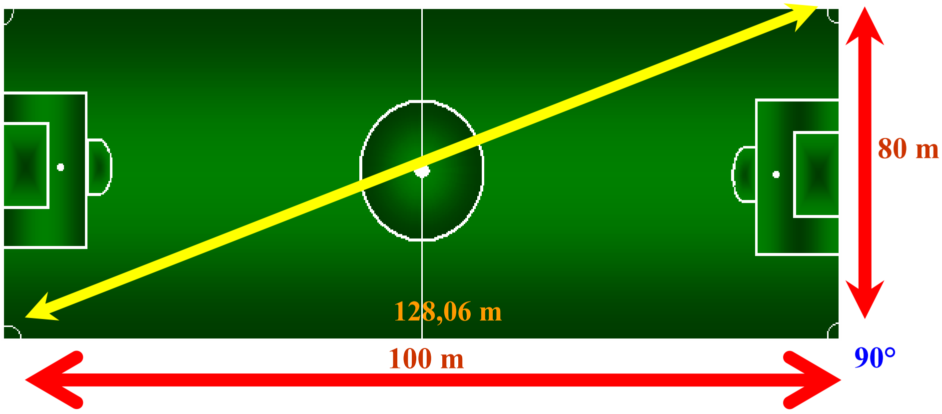


Perímetro = 2 . (b + h)
P = 2 . (115 + 85)
P = 2 . (200)
P = 400 m
O perímetro é de 400 m.

- Diagonal do campo

Um campo de futebol tem 110 m de comprimento e 80 m de largura qual a medida da sua diagonal ?

Use o Teorema de Pitágoras!

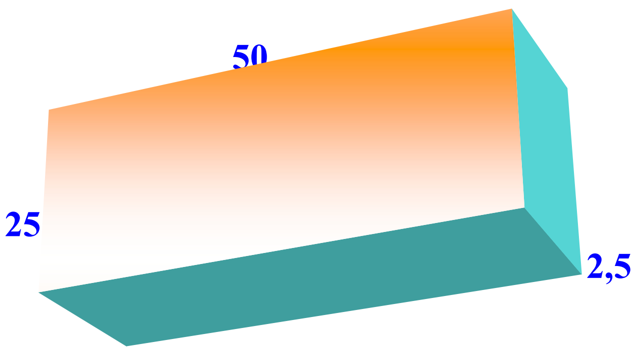


a = diagonal b = base c = largura
$a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 = 100^2 + 80^2$
$a^2 = 10000 + 6400$
$a^2 = 16400$
$a = \sqrt{16400}$
a = 128,06 m.
A diagonal mede 128,06 m.

- O tamanho do gol

As medidas das traves são 7,32 m de largura e 2,44 m de altura , conhecendo as medidas calcule a área que deve ser defendida pelo goleiro.
Área = b . h
A = 7,32 . 2,44
A = 17,86
A área entre as traves é de 17,86 m².

5.2. Piscina - cálculo do volume



Utilizando as medidas da piscina podemos calcular seu volume:

largura 25 m, comprimento 50 m e profundidade 2,5 m.

Fórmula:

V = Área da base x altura
$V = 25.50.2,5$
$V = 3125\ m^3$

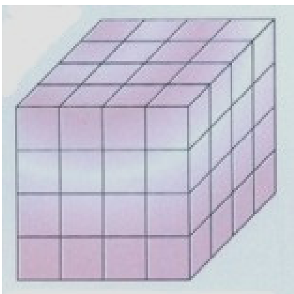
6. OUTRAS ABORDAGENS EM SALA DE AULA

6.1. Relações entre Álgebra e Geometria

Dona Benta é uma confeiteira de mão cheia. No aniversário da Cátia ela fez um delicioso bolo em forma de cubo.

Depois de pronto ela enfeitou a parte externa do bolo com cobertura de morango.

Por fim, ela cortou o bolo em cubinhos, conforme se pode ver no esquema da figura.



Na hora da distribuição, a turma disputou os melhores pedaços de bolo, aqueles com maior quantidade de cobertura de morango.

a) Em quantos pedaços Dona Benta cortou o bolo? 64 pedaços.
b) Quantos pedaços têm cobertura em três faces do pedaço? 4 pedaços.
c) Quantos pedaços têm cobertura em apenas duas faces do pedaço? 20 pedaços.
d) Quantos pedaços têm cobertura em apenas uma face? 28 pedaços.

e) Quantos pedaços não têm cobertura em face nenhuma? 12 pedaços.

Onde entra a Álgebra?

Imagine um bolo, em forma de cubo, que foi decomposto em n^3 pedaços cúbicos iguais.

a) Quantos pedaços têm cobertura em três faces? 4

b) Quantas têm cobertura em duas faces? $4\ (n - 2) + 4\ (n - 2) + 4$

c) Quantos têm cobertura em apenas uma face? $5\ (n - 2)^2 + 4\ (n - 2)$.

d) Quantos não têm cobertura em face alguma? $(n - 2)^3 + (n - 2)^2$.

Verifique que:

$$(n - 2)^3 + (n - 2)^2 + 5\ (n - 2)^2 + 4\ (n - 2) + 4\ (n - 2) + 4\ (n - 2) + 4 + 4 = n^3.$$

6.2. O tamanho da mala

Nos vôos comerciais os passageiros têm direito de levar uma bagagem de mão, desde que algumas condições sejam respeitadas, para evitar o excesso de peso e permitir o acondicionamento no compartimento interno do avião.

Nos vôos realizados nos aviões tipo Boeing 737, a soma das medidas do comprimento (A), da largura (B) e da altura (C) da bagagem não deve exceder 115 cm:

$$A + B + C < \text{ ou } = 115 \text{ cm}$$

A bagagem de mão não devem pesar mais de 5 kg e a soma do comprimento com a largura e a altura não deve exceder 115 cm do Boeing 737 e 95 cm no Jet Class e no Brasília.

A + B + C = 115 cm* (Boeing 737)

$A + B + C = 95$ cm* (Jet Class) e (Brasília)

* no máximo

A partir dessas condições é possível carregar para dentro do compartimento de bagagem de mão um tubo para acondicionar um pôster com as dimensões

100 cm x 10 cm x 5 cm

Ou uma bolsa de

40 cm x 40 cm x 35 cm, por exemplo.

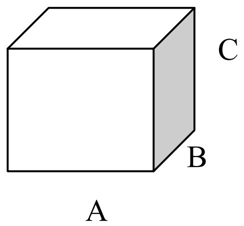
Considerando que a maioria das bagagens tem o formato de um bloco retangular, que medidas deve ter uma mala com volume máximo? Qual o volume dessa mala?

Esse problema pode ser resolvido por meio de ferramentas matemáticas.

A bolsa de volume máximo, nestas condições, é a que tem o formato de um cubo. Portanto suas dimensões (comprimento, largura e altura) são iguais.

$A = B = C = 115/3 = 38{,}3$ cm

$V = (115/3)^3 = 56328{,}7\ cm^3$



Para carregar uma bagagem de acordo com o regulamento usufruindo a capacidade máxima de transporte, deve se providenciar uma bolsa cúbica.

6.3. O volume das mãos

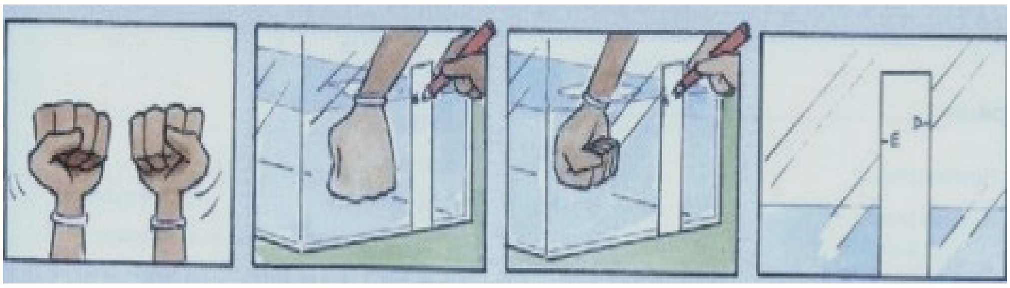
Qual das suas mãos tem maior volume?

Para responder à questão, use uma vasilha com água, uma tira de papel e dois elásticos. Trabalhe com parceria com um colega.

Cole a tira de papel na vasilha e marque o nível da água.

Prenda um elástico em cada pulso, na mesma altura. (Cuidado! O elástico não pode prender a circulação.)

Mergulhe a mão esquerda na água até a altura do elástico e assinale (ou peça ao companheiro que o faça) o nível da água. Escreva a letra E na marca.



Retire a mão de dentro da vasilha e deixe a água escorrer bem. Se precisar, coloque mais água para atingir o primeiro nível marcado.

Coloque a mão direita na água e proceda como anteriormente. Agora marque a letra D no novo nível da água.

Qual das suas mãos têm maior volume? As duas marcas devem estar bem próximas, mas separadas o suficiente para você responder à pergunta.

7. CONCLUSÃO

No século XXI a aquisição de novos conhecimentos acontece em questão de segundos. A tecnologia é uma ferramenta entre muitas que facilita esse processo. Houve grandes mudanças no mercado de trabalho, no qual os faxes, redes ligadas ao computador e correio eletrônico alteraram as rotinas diárias.

As escolas estão inseridas nesse contexto e por isso não podem ignorar esse novo instrumento. A tecnologia não é uma solução mágica – ela é somente um ingrediente necessário nos esforços de reforma e que auxilia o processo ensino-aprendizagem.

“A aprendizagem é um processo ativo e social que ocorre melhor em ambientes centrados no aluno, nos quais os professores assumem papéis facilitadores para orientar os alunos em indagações significativas nos quais descobrir relações entre os fatos é mais valorizado que memorizar os fatos em si, e nos quais as atividades construtoras do conhecimento são balanceadas com o uso da prática orientada e da instrução direta.

Novas competências, como as habilidades de colaborar, reconhecer e analisar problemas com sistemas, de adquirir e utilizar grandes quantidades de informação e de aplicar a tecnologia na solução de problemas no mundo real, são resultados valorizados.”

Sendo assim, a formação continuada do professor se faz necessária. A capacitação de professores visa uma mudança de postura em sala de aula promovendo métodos de aprendizado ativo e interativo, pretendendo-se com isso despertar no aluno o espírito de pesquisa, o desenvolvimento da capacidade de raciocínio e autonomia e a solidariedade.

Para confecção do trabalho do nosso grupo, o uso da tecnologia foi de grande importância, facilitando a pesquisa, proporcionando novos conhecimentos e permitindo o aperfeiçoamento profissional.

MENSAGENS

“Sem a curiosidade que me move, que me insere na busca não aprende, nem ensino.”

“Ninguém ignora tudo, ninguém sabe tudo. Por isso aprendemos sempre.”

Paulo Freire

8. BIBLIOGRAFIA

- Sites pesquisados:

http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/software/softw.htm

Aqui estão listados alguns softwares (Wingeom e Cabrí) que consideramos interessantes para o ensino e aprendizagem de matemática.

http://www.somatematica.com.br/geometria.php

Site onde poderá realizar pesquisas e até mesmo se divertir com seções de entretenimento, acessando jogos, curiosidades, histórias, entre outras opções.

http://www.tvcultura.com.br/artematematica/home.html

Site com história da geometria, obras de arte e jogos virtuais.

http://geocities.com/geoespacial/

Site que traz conceito, fórmulas e dicas sobre os sólidos geométricos bem como exercícios resolvidos.

http://www.linhadetransmissao.com.br/tecnica/areas1.htm

Site que traz fórmulas das áreas de figuras planas.

http://www.webcalc.com.br/frame.asp?pag=http://www.webcalc.com.br/matematica/paralelepipedo.html

Site onde é possível calcular a área e o volume do paralelepípedo retângulo.

http://www.nosachamos.com/educacao/matematica/materias/geom_esp3.htm

Site que traz assuntos diversos de matemática.

http://www.tvcultura.com.br/artematematica/geometrias.html

Jogos interativos

http://www.educacional.com.br/conversor/comprimento1.asp

Conversor de medidas

http://www.utp.br/Labtice/hyperMath/software/paginat.htm

Jogos geométricos

- Livros Didáticos e Paradidáticos:

- Proposta Curricular Ensino Matemática, do 2º grau – 1992, 3ª edição
- Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – Ensino Médio
- Prática Pedagógica – Matemática 2º. Grau – Geometria 1 – Volume 2
- A Matemática do Ensino Médio, vol 2, 4ª edição – Editora SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER Eduardo; MORGADO, Augusto César.
- Matemática Fundamental: GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy – 2º Grau Volume Único
- Matemática 2: GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto - 2º Grau
- Matemática – 2º. Grau – Volume II; SOUZA, Maria Helena Soares; SPINELLI, Walter
- Matemática – Volume Único – 2º. Grau; BONGIOVANI; VISSOTO; LAUREANO
- Matemática – Volume Único; PAIVA Manoel
- BIG MAT – Matemática – 7ª. Série; MATSUBARA & ZANIRATTO

- Matemática – Oficina de Conceitos – 6ª. Série: SPINELLI, Walter; SOUZA, Maria Helena
- Matemática – Hoje é Feita Assim – 5ª. e 7ª. Séries: BIGODE, Antonio José Lopes
- Matemática – Idéias e Desafios – 5ª. e 7ª. Séries: Iracema e Dulce
- Ensinando com Tecnologia -Criando Salas de aulas centradas nos alunos; SANDHOLTZ, Judith Haymore; RINGSTAFF Cathy; DWYER David C.